Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O DVOJICI (m, n) KONFIGURACÍ

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 12. září 1956.) DT: 513.84

Jde o dvě věty, mající úzkou souvislost s vícerozměrným zobecněním klasické věty Pohlkeovy-Schwarzovy. Přitom se navazuje na výsledky N. A. GLAGOLEVA, N. F. ČETVERUCHINA a F. SCHURA.

Obsahem této práce jsou dvě věty, úzce spjaté s vícerozměrným zobecněním klasické věty Pohlkeovy-Schwarzovy. Nejprve je dokázána věta N. A. GLAGOLEVA (viz [1], resp. [2], str. 46). Ve větě 1 je projednáno řešení vícerozměrné analogie úlohy Guglerovy (viz [3], poznámka pod čarou na str. 165). Konečně věta 2 spolu se svým důsledkem představuje vícerozměrné zobecnění věty Pohlkeovy-Schwarzovy a zahrnuje v sobě klasický výsledek F. SCHURA (viz [6], resp. [5], str. 174—176). O některých k thematu se vztahujících výsledcích sovětských geometrů podává informaci § 4 z oddílu „Synthetická geometrie" sborníku [4]. S algebraického hlediska vyšetřuje zobecnění věty Pohlkeovy pro promítání z bodu do nadroviny ED. STIEFEL ve své práci [7].

Předmětem našich úvah bude d-rozměrný rozšířený prostor eukleidovský ($d \geqq 3$). Konečnou posloupnost navzájem různých vlastních bodů nazveme (m, n) konfigurací, je-li $m + 1$ počet bodů posloupnosti a jestliže prvních $n + 1$ bodů posloupnosti je lineárně nezávislých; přitom předpokládáme, že $2 \leqq n \leqq m \leqq d$. Odpovídá-li i-tému bodu (m, n) konfigurace K_1 v lineární transformaci T i-tý bod (m, n) konfigurace K_2 pro každé $i = 1, 2, \ldots, m + 1$, pak budeme psáti $TK_1 = K_2$. Dimensí bodového útvaru rozumíme o jednotku zmenšený maximální počet lineárně nezávislých bodů útvaru. Tento pojem dimense ponecháme i pro sféry.

Věta Glagolevova. *Ke každé dvojici* (3,3) *konfigurací* K_1, K_2 *existuje nevlastní bod* S *tak, že konfigurace* K_1 *je perspektivně položena vzhledem ke středu perspektivity* S *s konfigurací* K_2' *podobnou s* K_2.

Důkaz. Existuje právě jedna afinita A daného prostoru tak, že $AK_2 = K_1$. Nechť k je libovolná koule; pak $A^{-1}k$ je kvadrika, na níž lze najít kružnici k^+. Pak ale též Ak^+ je kružnice. Dále existuje právě jedna podobnost P daného prostoru tak, že Pk^+ je shodné s Ak^+. Tedy existuje orthogonální transformace O tak, že je $OPX = AX$ pro každé $X \in k^+$. Pak ale $T = OPA^{-1}$ je perspektivní afinita: Pro každé $X \in k^+$ jest $T(AX) = OPX = AX$, takže všecky body kružnice Ak^+ jsou samodružné vzhledem k afinitě T; tedy rovina, v níž leží Ak^+, je vzhledem k afinitě T rovinou samodružných bodů. Konfigurace $TK_1 = OP(A^{-1}K_1) = OPK_2$ je podobná s K_2. Důkaz je proveden.

Poznamenejme k tomu, že bod S (střed perspektivní afinity T) je závislý pouze na výběru kružnice k^+. Pak $A^{-1}k$ je buďto kulovou plochou anebo nerotačním či rotačním elipsoidem. Je-li $A^{-1}k$ elipsoidem, pak obsahuje dva (případně splývající) systémy kružnic vždy v rovinách navzájem rovnoběžných; každý z obou systémů vede k jedinému bodu S, avšak různým systémům odpovídají různé body S. Tedy celkem: Je-li $A^{-1}k$ kulová plocha, pak bod S je určen mnohoznačně (probíhá všecky body nevlastní), je-li $A^{-1}k$ nerotační elipsoid, pak bod S je určen dvojznačně a konečně, je-li $A^{-1}k$ rotační elipsoid, pak bod S je určen jednoznačně.

Věta 1. *Nechť K_1, resp. K_2 jsou dvě (n, n) konfigurace, ležící v n-rozměrných podprostorech R_1, resp. R_2, a nechť C je $(d - n - 1)$-rozměrný nevlastní podprostor. Pak označme A afinitu, pro níž $K_1 = AK_2$; dále označme a $(n - 1)$-rozměrnou absolutní sféru, ležící v R_2. Pak jsou ekvivalentní tyto dvě podmínky:*

(I) *n-rozměrný s C disjunktní vlastní prostor X protíná útvar $C \,.\, K_1$[1]) v konfiguraci K_2' podobné s K_2;*

(II) *průnik útvaru $C \,.\, (Aa)$ s $(d - 1)$-rozměrnou absolutní sférou obsahuje $(n - 1)$-rozměrnou absolutní sféru, ležící v n-rozměrném vlastním podprostoru X disjunktním s C.*

D ů k a z. Nechť X je libovolný n-rozměrný vlastní podprostor disjunktní s C. Pak C jakožto centrum promítání zprostředkuje mezi podprostory R_1, X afinitu B_X. Afinita B_XA je podobností právě tehdy, odpovídají-li si v ní $(n - 1)$-rozměrné absolutní sféry podprostorů R_1, X. Avšak B_XAa leží v průniku podprostoru X s útvarem $C \,.\, (Aa)$. Z toho již plyne důkaz věty.

K předchozí větě učiňme ještě p o z n á m k u. Je-li $d = m + 1 = n + 1 = 3$, pak podle věty 3 lze řešiti úlohu Guglerovu, známou z elementů deskriptivní geometrie (úlohu Guglerovu lze takto formulovat: Na dané trojboké hranolové ploše najít trojúhelníky podobné s trojúhelníkem daným).

Věta 2. *Nechť K_1 je (d, d) konfigurace a nechť K_2 je (d, n) konfigurace; označme R_i podprostor, lineárně vytvořený prvními $n + 1$ body konfigurace K_i $(i = 1, 2)$. Pak lze sestrojit právě jeden $(d - n - 1)$-rozměrný nevlastní podprostor C a afinitu A_X mezi R_2 a mezi libovolným vlastním podprostorem X disjunktním s C, tak, že A_XK_2 je průmětem konfigurace K_1 z centra promítání C.*

[1]) Součinem dvou bodových útvarů označujeme sjednocení všech přímek, které spojují body jednoho útvaru s body útvaru druhého.