Werk

Label: Article

Jahr: 1957

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0082|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O HELLINGEROVĚ INTEGRÁLU

ILJA ČERNÝ, Praha.

(Došlo dne 6. 12. 1955.) DT: 517.65

V článku jsou vyšetřovány některé jednoduché vlastnosti integrálu $\int_a^b \frac{|df(x)|^p}{|dg(x)|^{p-1}}$ a variace $p - \overset{b}{\underset{a}{\text{var}}} (f, g)$ a jejich převedení na Lebesgueův integrál.

Integrály typu vyšetřovaného v tomto článku se po prvé zabýval v roce 1907 E. HELLINGER. Při studiu spekter kvadratických forem nekonečně mnoha proměnných dospěl k výrazům, které mají některé vlastnosti integrálů a o nichž soudil, že se nedají převést na Lebesgueův integrál. (*E. Hellinger*: Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Dissertation, Göttingen 1907; Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Journal f. r. u. a. Math., B. 136, 1909.) Tyto výrazy byly nazvány „Hellingerovy integrály". V roce 1912 se HAHNOVI (*H. Hahn*: Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Monatsh. f. Math. u. Physik, XXIII, 1912) podařilo tyto integrály převést na Lebesgueovy. Od té doby nalezly integrály Hellingerova typu použití i jinde, na př. při otázkách obecného vyjádření lineárních operátorů v některých polouspořádaných nebo normovaných lineárních prostorech (*Канторович-Вулих-Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах), ve statistice (*H. Cramér*: Mathematical Methods of Statistics) a jinde.

Pokud vím, nebyly vlastnosti operace Hellingerova integrování podrobněji vyšetřovány. V Hahnově práci se v podstatě vyskytují jen speciální případy vět 1,8 a 2,1 tohoto článku. Hellinger i Hahn se zabývají integrály typu $\int_a^b \frac{(df(x))^2}{dg(x)}$, při čemž se předpokládá, že g je spojitá a monotonní.

První kapitola tohoto článku obsahuje definici Hellingerova integrálu vhodnou pro obecnější funkce f a g. Hahn definoval integrál tak, jak jsme my v definici 1,2 zavedli $\operatorname{var}_a^b (f, g)$. Tento postup souhlasí s naším, jestliže funkce g je spojitá a monotonní, v jiných případech se však zřejmě nehodí. Souvislost mezi Hahnovou definicí a definicí 1,1 je obsahem vět 1,6 a 1,7.

Druhá kapitola obsahuje věty o převedení Hellingerova integrálu na Lebesgueův se slabšími předpoklady o funkcích f a g, než uvádí Hahn. Při důkazu užívám Vitaliovy věty, která umožnila důkaz zkrátit a učinit přehlednějším.

1. Definice a některé základní vlastnosti Hellingerova integrálu

Definice 1,1. Buďte dány dvě (konečné) reálné funkce f a g na (omezeném) intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $p > 1$. Nechť platí tato podmínka: Je-li pro dva body x_1, x_2 z $\langle a, b\rangle$ $g(x_1) = g(x_2)$, je též $f(x_1) = f(x_2)$. Označíme pro stručnost

$$M_p(x_1, x_2) = \frac{|f(x_1) - f(x_2)|^p}{|g(x_1) - g(x_2)|^{p-1}}$$

a činíme jednou pro vždy tuto úmluvu: „Podílu“ $M_p(x_1, x_2)$, v němž jmenovatel (a tedy též čitatel) je roven 0, dáváme hodnotu 0.

Při této úmluvě můžeme každému dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ přiřadit součet

$$H_p(f, g; D) = \sum_{i=1}^{n} M_p(x_{i-1}, x_i)\,.$$

Označíme $\nu(D) = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$. Jestliže pro každou posloupnost dělení $\{D_n\}$, pro niž $\nu(D_n) \to 0$, existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} H_p(f, g; D_n)$ — potom je ovšem tato limita nezávislá na volbě posloupnosti $\{D_n\}$ — označíme

$$\lim_{n\to\infty} H_p(f, g; D_n) = (p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) = \int_a^b \frac{|df(x)|^p}{|dg(x)|^{p-1}}\,.$$

Této limitě říkáme Hellingerův integrál p-tého stupně funkce f podle funkce g v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Úmluva. Nebude-li třeba obávat se nedorozumění, budeme místo $H_p(f, g; D)$ psát krátce $H_p(D)$ nebo $H(D)$, místo $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ podobně $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ nebo $\overset{b}{\underset{a}{H}}$, místo $M_p(x_1, x_2)$ symbol $M(x_1, x_2)$.

Poznámka 1,1. Existuje-li $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$, je to nezáporné číslo.

Věta 1,1. *Existuje-li* $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ *a je-li* $x \in (a, b)$, *existují též* $\overset{x}{\underset{a}{H}}(f, g)$ *a* $\overset{b}{\underset{x}{H}}(f, g)$ *a platí:*

$$\overset{b}{\underset{a}{H}} = \overset{x}{\underset{a}{H}} + \overset{b}{\underset{x}{H}}\,.$$

Důkaz. Budiž $x \in (a, b)$ a budiž $\{D'_n\}$ libovolná posloupnost dělení intervalu $\langle a, x\rangle$, pro niž $\nu(D'_n) \to 0$, $\{D''_n\}$ libovolná posloupnost dělení intervalu $\langle x, b\rangle$, pro niž $\nu(D''_n) \to 0$. Z posloupnosti $\{H(D''_n)\}$ lze vybrat posloupnost $\{H(D''_{n_k})\}$, která má (vlastní nebo nevlastní) limitu α. Jest

$$\lim_{k\to\infty} [H(D'_k) + H(D''_{n_k})] = \overset{b}{\underset{a}{H}},$$

odkud především plyne, že $\alpha < +\infty$ (neboť $H(D'_k) \geqq 0$), a také, že existuje vlastní $\lim_{k\to\infty} H(D'_k)$. Tedy existuje i $\overset{x}{\underset{a}{H}}$. Podobně se zjistí, že existuje $\overset{b}{\underset{x}{H}}$. Dále je

$$\overset{b}{\underset{a}{H}} = \lim_{n\to\infty} [H(D'_n) + H(D''_n)] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} H(D'_n) + \lim_{n\to\infty} H(D''_n) = \overset{x}{\underset{a}{H}} + \overset{b}{\underset{x}{H}}.$$

Označení. Existuje-li $\overset{b}{\underset{a}{H}}$, označíme

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x = a, \\ \overset{x}{\underset{a}{H}} & \text{pro} \quad x \in (a, b\rangle. \end{cases}$$

(Funkce h je pak neklesající v $\langle a, b\rangle$.)

Poznámka 1,3. Z existence $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ a $\overset{b}{\underset{x}{H}}$ neplyne obecně existence $\overset{b}{\underset{a}{H}}$. Příklad: Je-li $f(x) = g(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $f(0) = g(0) = 1$, je pro libovolné $p > 1$

$$(p) - \overset{0}{\underset{-1}{H}}(f, g) = (p) - \overset{1}{\underset{0}{H}}(f, g) = 1,$$

kdežto $\overset{1}{\underset{-1}{H}}(f, g)$ neexistuje, neboť pro každé dělení D intervalu $\langle -1, 1\rangle$, které obsahuje (resp. neobsahuje) bod 0, je $H_p(D) = 2$ (resp. $= 0$) nezávisle na $\nu(D)$.

Věta 1,2. *Nechť existuje* $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$. *Potom platí:*

1. $\lim\limits_{\substack{[x,y]\to[a,a] \\ x>a,\, y>a,\, x\neq y}} M_p(x, y) = 0.$

2. *Existuje vlastní* $\lim\limits_{x\to a+} M(a, x)$ *a rovná se* $\lim\limits_{x\to a+} \overset{x}{\underset{a}{H}}$.

3. *Je-li* $x_n > a$, $x_n \to a$ *a je-li posloupnost* $\{g(x_n)\}$ *omezená, existuje vlastní* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$; *existuje-li vlastní* $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$, *je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_n) - A|^p}{|g(x_n) - B|^{p-1}} = 0.$$

Speciálně: je-li g omezená zprava v bodě a, existuje vlastní $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a+)$; *existuje-li vlastní* $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = g(a+)$, *je*

$$\lim_{x\to a+} \frac{|f(x) - f(a+)|^p}{|g(x) - g(a+)|^{p-1}} = 0 .$$

4. *Je-li* $g(x)$ *spojitá v bodě a zprava, je též* $f(x)$ *spojitá v bodě a zprava a* $\lim\limits_{x\to a+} M(a, x) = 0$.

5. *Je-li* $f(x)$ *spojitá v bodě a zprava, je* $\lim\limits_{x\to a+} M(a, x) = 0$. *Je-li* $g(x)$ *omezená v okolí bodu a a je-li* $f(x)$ *nespojitá v bodě a zprava, je* $\lim\limits_{x\to a+} M(a, x) \neq 0$.

6. *Je-li f spojitá v bodě a zprava, je i* $h(x)$ *spojitá v bodě a zprava. Je-li* $g(x)$ *omezená v okolí bodu a a je-li* $f(x)$ *nespojitá v bodě a zprava, je i* $h(x)$ *nespojitá v bodě a zprava.*

7. *Platí tvrzení analogická tvrzením* 1—6, *píšeme-li místo a všude c, kde c je libovolný bod z* $\langle a, b)$. *Platí tvrzení analogická tvrzením* 1—6, *píšeme-li místo a všude c, kde* $c \in (a, b\rangle$, *a mluvíme-li o konvergenci (a spojitosti) zleva v bodě c.*

Důkaz. 1. Kdyby tato limita buď neexistovala, nebo existovala, ale nebyla rovna nule, existovaly by dvě posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ a číslo $\varrho > 0$ tak, že $x_n \to a$, $y_n \to a$, $x_n \neq y_n$, $x_n > a$, $y_n > a$, $M(x_n, y_n) > \varrho$. Snadno vybereme posloupnosti $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$ tak, že

$$x_{n_{k+1}} < x_{n_k}, \quad x_{n_{k+1}} < y_{n_k}, \quad y_{n_{k+1}} < x_{n_k}, \quad y_{n_{k+1}} < y_{n_k} .$$

Najdeme $\delta > 0$ tak, že

$$\nu(D) < \delta \Rightarrow |\overset{b}{H} - H(D)| < 1 .$$

Můžeme předpokládat, že pro všechna k je $x_{n_k} \in (a, a + \delta)$, $y_{n_k} \in (a, a + \delta)$. Potom lze ke každému k sestrojit dělení D_k mající tyto vlastnosti:

) $\nu(D_k) < \delta$;

b) $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}, y_{n_1}, \ldots, y_{n_k}$ jsou dělicí body D_k;

c) mezi x_{n_i} a y_{n_i} $(i = 1, 2, \ldots, k)$ neleží žádný bod dělení D_k.

Potom je $H(D_k) > k\varrho$, což není možné pro všechna k — spor.

2. Budiž $\alpha = \lim\limits_{x\to a+} h(x)$. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $x \in (a, a + \delta_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow |\overset{x}{\underset{a}{H}} - \alpha| < \varepsilon$. Existuje dále $\delta_2 > 0$ tak, že $\nu(D) < \delta_2 \Rightarrow |H(D) - \overset{b}{\underset{a}{H}}| < \varepsilon$. Budiž $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Zvolíme-li $x \in (a, a + \delta)$ libovolně, existuje dělení D' intervalu $\langle x, b\rangle$, pro něž je $\nu(D') < \delta_2$ a $|H(D') - \overset{b}{\underset{x}{H}}| < \varepsilon$. Označme D dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, které vznikne z D' přidáním bodu a; jest $\nu(D) < \delta_2$. Tedy

$$|M(a, x) - \alpha| = |H(D) - H(D') - \alpha| \leqq$$
$$\leqq |H(D) - \overset{b}{\underset{a}{H}}| + |\overset{b}{\underset{x}{H}} - H(D')| + |\overset{x}{\underset{a}{H}} - \alpha| < 3\varepsilon .$$

3. Předpokládejme, že neexistuje vlastní $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ a budiž $|g(x_n)| \leqq K$ pro všechna n. Z posloupnosti $\{x_n\}$ lze vybrat dvě posloupnosti $\{x'_n\}$ a $\{x''_n\}$ tak, že $|f(x'_n) - f(x''_n)| > \varrho > 0$ pro všechna n. Je však

$$|f(x'_n) - f(x''_n)|^p = M(x'_n, x''_n) \,.\, |g(x'_n) - g(x''_n)|^{p-1} \leqq (2K)^{p-1} \,.\, M(x'_n, x''_n) \,;$$

podle 1 by pak bylo $|f(x'_n) - f(x''_n)| \to 0$, což je spor.

Nechť nyní existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Kdyby podíl $\dfrac{|f(x_n) - A|^p}{|g(x_n) - B|^{p-1}}$ neměl limitu 0, existovala by vybraná posloupnost $\{x'_n\}$ a číslo $\varrho > 0$ tak, že

$$\frac{|f(x'_n) - A|^p}{|g(x'_n) - B|^{p-1}} > \varrho \text{ pro všechna } n\,.$$

Protože při pevném n je

$$\frac{|f(x'_n) - A|^p}{|g(x'_n) - B|^{p-1}} = \lim_{m\to\infty} \frac{|f(x'_n) - f(x'_m)|^p}{|g(x'_n) - g(x'_m)|^{p-1}}\,,$$

existuje ke každému n index $m(n)$ tak, že $a < x'_{m(n)} < x'_n$ a $M(x'_{m(n)}, x'_n) > > \varrho > 0$, což odporuje tvrzení 1.

Je-li $g(x)$ omezená zprava v bodě a, je každá posloupnost $\{g(x_n)\}$, kde $x_n > a$, $x_n \to a$, omezená, a tedy pro každou posloupnost $x_n > a$, $x_n \to a$ existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Tedy existuje vlastní $\lim_{x\to a+} f(x)$. Podobně dále.

4. Je-li g spojitá zprava v bodě a a f nikoli, jest $f(a+) \neq f(a)$ ($f(a+)$ existuje podle 3). Potom však $\lim_{x\to a+} M(a, x) = +\infty$, což je nemožné. Zbytek tvrzení 4 je důsledkem tvrzení 3.

5. Nechť $x_n > a$, $x_n \to a$. Potom buď $g(x_n) \to g(a)$ — v tom případě $\lim_{n\to\infty} M(a, x_n) = 0$ podle 3 — nebo $\{g(x_n)\}$ nekonverguje k $g(a)$. V tomto případě lze vybrat z $\{x_n\}$ posloupnost $\{x'_n\}$ tak, že $\{g(x'_n)\}$ má limitu $B \neq g(a)$. (Může být i $B = \pm\infty$.) Potom však má čitatel v $M(a, x'_n)$ limitu 0, jmenovatel limitu různou od nuly (event. nevlastní), a tedy $\lim M(a, x'_n) = 0$. Protože podle 2 existuje $\lim M(a, x)$ je tato limita také rovna 0.

Není-li f spojitá v bodě a zprava, existují body $x_n > a$, $x_n \to a$ tak, že $f(x_n) \to A \neq f(a)$. Kdyby bylo $g(x_n) \to g(a)$, bylo by

$$M(a, x_n) = \frac{|f(x_n) - f(a)|^p}{|g(x_n) - g(a)|^{p-1}} \to +\infty\,,$$

což je nemožné podle 2. Tedy lze vybrat posloupnost $\{x'_n\}$ tak, že $g(x'_n) \to B \neq g(a)$. Protože g je omezená v okolí bodu a, je $B \neq \pm\infty$, a tedy $\lim M(a, x'_n) \neq 0$. Protože $\lim_{x\to a+} M(a, x)$ existuje, je též $\neq 0$.

6. Stačí užít tvrzení 5 a 2: Je-li f spojitá v bodě a zprava, je $\lim_{x\to a+} M(a, x) =$

$= \lim\limits_{x \to a+} h(x) = 0 = h(a)$. Je-li g omezená v okolí bodu a a je-li f nespojitá v bodě a zprava, je $\lim\limits_{x \to a+} M(a, x) = \lim\limits_{x \to a+} h(x) \neq 0 = h(a)$.

7. K důkazu první části tvrzení 7 stačí uvážit, že z existence $\overset{b}{\underset{a}{H}}$ plyne existence $\overset{b}{\underset{c}{H}}$ pro každé $c \in \langle a, b)$. Druhou část tvrzení 7 dostaneme z první tím, že přejdeme od funkcí $f(x)$, $g(x)$ v $\langle a, b \rangle$ k funkcím $f(-x)$, $g(-x)$ v intervalu $\langle -b, -a \rangle$.

Věta 1,3. *Existuje-li* $\overset{b}{\underset{a}{H}}$, *existují pro každé* $x \in (a, b)$ *integrály* $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ *a* $\overset{b}{\underset{x}{H}}$ *a platí:*

$$\lim_{\substack{x' \to x- \\ x'' \to x+}} [M(x', x) + M(x, x'') - M(x', x'')] = 0 .$$

Obráceně: Existují-li pro některé $x \in (a, b)$ *oba integrály* $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ *a* $\overset{b}{\underset{x}{H}}$ *a je-li uvedená limita rovna* 0, *existuje i* $\overset{b}{\underset{a}{H}}$.

Důkaz. 1. Nechť existuje $\overset{b}{\underset{a}{H}}$. Potom existují též $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ a $\overset{b}{\underset{x}{H}}$. Buďte x'_n, x''_n takové body, že $x'_n < x < x''_n$, $x'_n \to x$, $x''_n \to x$. Utvořme dělení D_n tak, že x'_n, x''_n jsou sousedními body tohoto dělení a že $\nu(D_n) \to 0$. Označme D'_n dělení vzniklé z D_n přidáním bodu x. Potom platí:

$$0 = \lim_{n \to \infty} [H(D'_n) - H(D_n)] = \lim_{n \to \infty} [M(x'_n, x) + M(x, x''_n) - M(x'_n, x''_n)] .$$

2. Nechť jsou podmínky věty splněny a nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, pro niž $\nu(D_n) \to 0$. Můžeme se omezit na tyto případy:

a) x je dělicím bodem každého D_n,

b) x není dělicím bodem žádného D_n.

V prvním případě plyne existence $\lim H(D_n)$ z existence $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ a $\overset{b}{\underset{x}{H}}$. Ve druhém případě existují (pro každé n) sousední body dělení D_n — označme je x'_n, x''_n — tak, že $x'_n < x < x''_n$. Přidejme k D_n bod x; tím dostaneme dělení D'_n. Z existence $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ a $\overset{b}{\underset{x}{H}}$ plyne existence $\lim H(D'_n)$. Protože $x'_n \to x$, $x''_n \to x$ a protože

$$H(D'_n) - H(D_n) = M(x'_n, x) + M(x, x''_n) - M(x'_n, x''_n) ,$$

existuje podle podmínky věty i $\lim H(D_n)$. V případě a) i v případě b) je zřejmě $\lim H(D_n) = \overset{x}{\underset{a}{H}} + \overset{b}{\underset{x}{H}}$; tedy existuje $\overset{b}{\underset{a}{H}}$ (a rovná se $\overset{x}{\underset{a}{H}} + \overset{b}{\underset{x}{H}}$).

Věta 1,4. *Je-li* f *spojitá v bodě* $x \in (a, b)$, g *monotonní v bodě* x *a existují-li* $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ *a* $\overset{b}{\underset{x}{H}}$, *existuje též* $\overset{b}{\underset{a}{H}}$.

Dokážeme nejdříve toto lemma:

Lemma. *Je-li buď* $g(x') \leqq g(x) \leqq g(x'')$ *nebo* $g(x') \geqq g(x) \geqq g(x'')$, *je* $M(x', x'') \leqq M(x', x) + M(x, x'')$. *Je-li tedy* g *monotonní v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a je-li* D' *zjemněním dělení* D, *je* $H(D') \geqq H(D)$.

Důkaz lemmatu. Je-li buď $g(x') = g(x)$ nebo $g(x) = g(x'')$, je tvrzení zřejmě správné. Nechť jsou tedy obě nerovnosti ostré. Položme na okamžik

$$a_1 = \frac{f(x) - f(x')}{|g(x) - g(x')|^{\frac{p-1}{p}}}, \quad b_1 = |g(x) - g(x')|^{\frac{p-1}{p}},$$
$$a_2 = \frac{f(x'') - f(x)}{|g(x'') - g(x)|^{\frac{p-1}{p}}}, \quad b_2 = |g(x'') - g(x)|^{\frac{p-1}{p}}.$$

Potom je $|f(x'') - f(x')| = |\sum_{k=1}^{2} a_k b_k| \leqq \sum_{k=1}^{2} |a_k|\,|b_k|$. Podle Hölderovy nerovnosti $\sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|b_k| \leqq (\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} . (\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}}$ — viz *V. Jarník*, Diferenciální počet II, 2. vydání, str. 212 — dostaneme:

$$|f(x'') - f(x')| \leqq \left[\frac{|f(x) - f(x')|^p}{|g(x) - g(x')|^{p-1}} + \frac{|f(x'') - f(x)|^p}{|g(x'') - g(x)|^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}} .$$
$$. \, [|g(x) - g(x')| + |g(x'') - g(x)|]^{\frac{p-1}{p}},$$

tedy (protože $|g(x) - g(x')| + |g(x'') - g(x)| = |g(x'') - g(x')|$)

$$|f(x'') - f(x')|^p \leqq \left[\frac{|f(x) - f(x')|^p}{|g(x) - g(x')|^{p-1}} + \frac{|f(x'') - f(x)|^p}{|g(x'') - g(x)|^{p-1}}\right] . \, |g(x'') - g(x')|^{p-1},$$

odkud plyne hledaná rovnost dělením obou stran výrazem $|g(x'') - g(x')|^{p-1}$.

Důkaz věty 1,4. Protože $g(x)$ je monotonní v bodě x, jsou splněny podmínky lemmatu, volíme-li $x' < x < x''$ a x', x'' dosti blízko k x. Protože existují $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ a $\overset{b}{\underset{x}{H}}$ a protože f je spojitá v bodě x, plyne z věty 1,2 (tvrzení 5 a 7), že

$$\lim_{x' \to x-} M(x', x) = \lim_{x'' \to x+} M(x, x'') = 0,$$

tedy podle lemmatu i $\lim\limits_{\substack{x' \to x- \\ x'' \to x+}} M(x', x'') = 0$. Podle věty 1,3 existuje $\overset{b}{\underset{a}{H}}$.

Poznámka 1,4. Vynecháme-li ve větě 1,4 některý z předpokladů, nemusí tvrzení platit.

Příklad 1. Nestačí sama spojitost funkce f v bodě x: Budiž $f(x) = x$, $g(-1) = 2$, $g(0) = 0$, $g(1) = 3$,

$$g(x) = 2^{-n} + x \quad \text{pro} \quad x \in \langle 2^{-n-1}, 2^{-n}),$$
$$g(x) = 2^{-n-1} - x \quad \text{pro} \quad x \in (-2^{-n}, -2^{-n-1}\rangle$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Protože

$$\lim_{x\to 0+} g(-2^{-n}+x) = g(2^{-n-1}),$$

lze volit čísla $x_n > 0$ tak, aby

$$\lim_{n\to\infty} M(-2^{-n}+x_n, 2^{-n-1}) = +\infty.$$

Snadno se zjistí, že $\overset{1}{\underset{0}{H}} = \overset{0}{\underset{-1}{H}} = 1$.

Příklad 2. Nestačí monotonie funkce g v bodě x. Stačí položit $f(x) = |\text{sgn } x|$, $g(x) = \text{sgn } x$. Jest $\overset{0}{\underset{-1}{H}} = \overset{1}{\underset{0}{H}} = 1$, ale $\overset{1}{\underset{-1}{H}}$ neexistuje.

Věta 1,5. *Nechť existuje* $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$. *Potom platí:*

1. *Je-li g omezená, je i f omezená.*
2. *Má-li g konečnou variaci, má i f konečnou variaci.*
3. *Je-li g absolutně spojitá, je i f absolutně spojitá.*

Důkaz. 1. Je-li f neomezená v $\langle a, b\rangle$, existuje bod $x \in \langle a, b\rangle$, v jehož každém okolí je f neomezená. Kdyby přitom g byla omezená v $\langle a, b\rangle$, nemohly by být obě limity $\lim\limits_{x'\to x-} M(x', x)$, $\lim\limits_{x''\to x-} M(x, x'')$ vlastní, což by odporovalo větě 1,2 (tvrzení 2).

2. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $\nu(D) < \delta \Rightarrow |H(D) - \overset{b}{\underset{a}{H}}| < \varepsilon$. Budiž $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $\nu(D) < \delta$. Potom

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|g(x_k) - g(x_{k-1})|^{\frac{p-1}{p}}} \cdot |g(x_k) - g(x_{k-1})|^{\frac{p-1}{p}}$$

a podle Hölderovy nerovnosti tedy

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqq$$

$$\leqq \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p}{|g(x_k) - g(x_{k-1})|^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|\right]^{\frac{p-1}{p}} \leqq$$

$$\leqq (\overset{b}{\underset{a}{H}} + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} \cdot (\overset{b}{\underset{a}{\text{var}}}\, g)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Protože se při hledání $\overset{b}{\underset{a}{\text{var}}}\, f$ můžeme omezit na dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$, plyne odtud, že f má konečnou variaci v $\langle a, b\rangle$ a že

$$(\overset{b}{\underset{a}{\text{var}}}\, f)^p \leqq \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) \cdot (\overset{b}{\underset{a}{\text{var}}}\, g)^{p-1}.$$

3. Budiž $\varepsilon = 1$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $\nu(D) < \delta \Rightarrow |H(D) - \int_a^b H| < 1$. Budiž $\eta > 0$. Protože g je absolutně spojitá, existuje $\vartheta \in (0, \delta)$ tak, že pro každou posloupnost $x_1 < x_2 \leqq \ldots \leqq x_{2s-1} < x_{2s}$ bodů z intervalu $\langle a, b\rangle$, pro niž $\sum_{k=1}^{s} (x_{2k} - x_{2k-1}) < \vartheta$, je $\sum_{k=1}^{s} |g(x_{2k}) - g(x_{2k-1})| < \eta$. Každou takovou posloupnost můžeme doplnit na dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, aby $\nu(D) < \delta$ a aby body x_{2k-1}, x_{2k} zůstaly sousedními body dělení D.

Stejně jako v bodě 2 získáme nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{s} |f(x_{2k}) - f(x_{2k-1})| \leqq [\sum_{k=1}^{s} M(x_{2k-1}, x_{2k})]^{\frac{1}{p}} \cdot [\sum_{k=1}^{s} |g(x_{2k}) - g(x_{2k-1})|]^{\frac{p-1}{p}} \leqq$$

$$\leqq [H(D)]^{\frac{1}{p}} \cdot \eta^{\frac{p-1}{p}} \leqq (\int_a^b H + 1)^{\frac{1}{p}} \cdot \eta^{\frac{p-1}{p}},$$

odkud plyne absolutní spojitost funkce f.

Definice 1,2. Předpoklady stejné jako v definici 1,1. Existuje-li konečné $\sup_{(D)} H_p(f, g; D)$, řekneme, že f má konečnou variaci p-tého stupně vzhledem k funkci g (v intervalu $\langle a, b\rangle$) a označíme

$$\sup_{(D)} H_p(f, g; D) = (p) - \operatorname*{var}_a^b (f, g).$$

(Pro stručnost budeme někdy písmeno p vynechávat.)

Poznámka 1,5. Obecně není žádná souvislost mezi existencí Hellingerova integrálu $(p) - \int_a^b H(f, g)$ a tím, že f má konečnou variaci p-tého stupně podle funkce g.

Příklad 1. Je-li $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$, $g(x) = \operatorname{sgn} x$, neexistuje $\int_{-1}^{1} H(f, g)$, avšak $\operatorname*{var}_{-1}^{1} (f, g) = 2$.

Příklad 2. Buďte f a g funkce z poznámky 1,4, příkladu 1. Položme $f_1(x) = |x|$, $g_1(x) = g(-1 - x)$ pro $x < 0$, $g_1(x) = g(1 - x)$ pro $x \geqq 0$. Potom je $\int_{-1}^{1} H(f_1, g_1) = \int_{-1}^{0} H(f, g) + \int_{0}^{1} H(f, g)$, ale $\sup_{(D)} H(f, g; D) = +\infty$.

Poznámka 1,6. Naproti tomu platí: Existuje-li $\int_a^b H(f, g)$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \langle a, b - \delta\rangle$ platí: $\operatorname*{var}_x^{x+\delta} (f, g) < +\infty$. Neboť je-li $\delta > 0$ takové, že $\nu(D) \leqq \delta \Rightarrow H(D) < \int_a^b H + 1$, je pro každé dělení D' každého intervalu $\langle x, x + \delta\rangle \subset \langle a, b\rangle$ tím spíše $H(D') < \int_a^b H + 1$.

Poznámka 1,7. Existuje-li $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ a je-li $\{D_n\}$ posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, $\nu(D_n) \to 0$, $D_n = \{a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{s_n}^n = b\}$, je

$$\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{s_n} \overset{x_k^n}{\underset{x_{k-1}^n}{\operatorname{var}}} (f, g) .$$

Ke každému dělení D_n můžeme totiž sestrojit zjemnění D_n' tak, aby

$$|H(D_n') - \sum_{k=1}^{s_n} \overset{x_k^n}{\underset{x_{k-1}^n}{\operatorname{var}}} (f, g)| < \frac{1}{n} ,$$

a jest $H(D_n') \to \overset{b}{\underset{a}{H}}$.

Poznámka 1,8. Nechť f má konečnou variaci vzhledem k funkci g v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom má f konečnou variaci vzhledem k g i v každém intervalu $\langle a, x\rangle$, kde $x \in (a, b\rangle$, a položíme-li $v(a) = 0$, $v(x) = \overset{x}{\underset{a}{\operatorname{var}}} (f, g)$ pro $x \in (a, b\rangle$, je $v(x)$ neklesající nezáporná funkce. Platí též nerovnost

$$\overset{x}{\underset{a}{\operatorname{var}}} (f, g) + \overset{b}{\underset{x}{\operatorname{var}}} (f, g) \leqq \overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}} (f, g) .$$

Rovnost přitom platí právě tehdy, existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro $x' \in (x - \delta, x)$, $x'' \in (x, x + \delta)$ je $M(x', x'') \leqq M(x', x) + M(x, x'')$. V opačném případě jest

$$\overset{x}{\underset{a}{\operatorname{var}}} + \overset{b}{\underset{x}{\operatorname{var}}} = \overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}} - \limsup_{\substack{x'' \to x+ \\ x' \to x-}} [M(x', x'') - M(x, x') - M(x, x'')] .$$

Příklad, kdy neplatí rovnost: Budiž $f(x) = x$. Funkce g budiž definována takto:

$$g(x) = 2^{-n+1} + (1 - 2^{-\frac{n+1}{p-1}})(x - 2^{-n}) \quad \text{pro} \quad x \in (2^{-n-1}, 2^{-n}\rangle ,$$

$$g(x) = 3 \,.\, 2^{-n-1} - \frac{1}{2} (x - 2^{-n}) \quad \text{pro} \quad x \in \langle -2^{-n}, -2^{-n-1}) ,$$

$$g(0) = 0 .$$

Potom existují $\overset{0}{\underset{-1}{H}}$ a $\overset{1}{\underset{0}{H}}$ a je tedy $\lim_{x' \to 0-} M(x', 0) = \lim_{x'' \to 0+} M(0, x'') = 0$ (podle věty 1,2), kdežto $3^p \leqq \limsup_{\substack{x' \to 0- \\ x'' \to 0+}} M(x', x'') \leqq 8^p$. Protože f má konečnou variaci vzhledem k g v intervalech $\langle -1, 0\rangle$ a $\langle 0, 1\rangle$, plyne odtud, že f má konečnou variaci vzhledem k g i v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Zmíněná rovnost však neplatí.

Věta 1,6. *Je-li g monotonní a existuje-li $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$, má f konečnou variaci vzhledem k g v intervalu $\langle a, b\rangle$ a jest*

$$\overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}} (f, g) = \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) .$$

Důkaz. Je vždy $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) \leqq \sup_{(D)} H(f, g; D)$. Je-li g monotonní, D dělení $\langle a, b \rangle$, D' jeho zjemnění, je podle lemmatu za větou 1,4 $H(D) \leqq H(D')$. Existují jistě dělení D_n tak, že $H(D_n) \to \sup_{(D)} H(D)$. Budiž D'_n zjemnění D_n, pro něž $\nu(D'_n) < \frac{1}{n}$. Potom i $H(D'_n) \geqq H(D_n)$ konvergují k $\sup_{(D)} H(D)$ a zároveň je $\overset{b}{\underset{a}{H}} = \lim_{n\to\infty} H(D'_n)$.

Poznámka 1,9. Je-li g monotonní a má-li f konečnou variaci vzhledem k funkci g v intervalu $\langle a, b \rangle$, je pro každé $x \in (a, b)$

$$\overset{x}{\underset{a}{\operatorname{var}}} + \overset{b}{\underset{x}{\operatorname{var}}} = \overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}} .$$

Věta 1,7. *Budiž g monotonní a nechť f má konečnou variaci vzhledem k funkci g v intervalu $\langle a\ b \rangle$. Nechť v každém bodě $x \in (a\ b)$ platí: buď je funkce g spojitá alespoň z jedné strany v bodě x nebo je funkce f (oboustranně) spojitá v bodě x. Potom existuje $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$.*

Důkaz. Označme $H = \overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}(f, g)$. Je-li $H = 0$, je f konstantní v $\langle a, b \rangle$, a tedy i $\overset{b}{\underset{a}{H}} = 0$. Lze tedy předpokládat, že $H > 0$. Budiž $\varepsilon \in (0, H)$. Existuje dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ tak, že

$$H(D_0) > H - \varepsilon > 0 .$$

Nejsou tedy všechna čísla $|g(x_k) - g(x_{k-1})|$ rovna 0. Lze předpokládat, že žádné z těchto čísel není rovno 0, neboť jinak bychom mohli některé dělicí body vynechat, aniž bychom změnili hodnotu $H(D_0)$.

Označme

$$\alpha = \min_{k=1,\ldots,n} (x_k - x_{k-1}) .$$

Pro stručnost vyjadřování zavedeme tuto úmluvu: Výrok ,,bod x je správně umístěn vzhledem k bodu x_k'' bude znamenat, že nastává jeden z těchto případů:

a) $k = 0$ nebo $k = n$ a $x = x_k$;

b) $0 < k < n$, g je spojitá zleva v bodě x_k a $x < x_k$;

c) $0 < k < n$, g je spojitá zprava, ale nikoliv zleva, v bodě x_k a $x > x_k$.

(Je-li $0 < k < n$ a g je oboustranně nespojitá v bodě x_k, budeme říkat, že bod x nelze správně umístit vzhledem k bodu x_k.)

Dokážeme nejdříve, že funkce $M(x', x'')$ dvou proměnných x', x'' má tuto vlastnost: Označme Ω_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) množinu všech bodů $[x', x'']$, kde x' (resp. x'') je správně umístěn vzhledem k bodu x_{k-1} (resp. x_k), ,,je-li správné umístění možné"; jestliže x' (resp. x'') nelze správně umístit, budiž $x' > x_{k-1}$ (resp. $x'' < x_k$). Potom je

$$(*) \qquad \lim_{\substack{[x',x'']\to[x_{k-1},x_k] \\ [x',x'']\in\Omega_k}} M(x', x'') \geqq M(x_{k-1}, x_k)\,.$$

Předpokládejme, že $1 < k < n$. (V případě, že $k = 1$ nebo $k = n$ je důkaz obdobný a o něco jednodušší.) Uvažme nejdříve, že z předpokladu $\overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}\,(f, g) < < +\infty$ plyne, že f je spojitá zprava (resp. zleva) v každém bodě $x \in \langle a, b)$ (resp. $x \in (a, b\rangle$), v němž je g spojitá zprava (resp. zleva). Důkaz je zcela obdobný důkazu příslušného tvrzení ve větě 1,2. Odtud plyne, že limita čitatele $M(x', x'')$ vždy existuje a je rovna $|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p$, neboť $|f(x'') - f(x')|^p$ je spojitou funkcí v bodě $[x_{k-1}, x_k]$ vzhledem k uzávěru Ω_k. (Důkaz: Je-li x' „správně umístěno vzhledem k bodu x_{k-1}", je $g(x')$ spojitá z té strany bodu x_{k-1}, na níž leží první souřadnice bodů z Ω_k, a tedy i $f(x')$ je spojitá z téže strany. Nebylo-li možno x' správně umístit, t. j. je-li funkce g oboustranně nespojitá v bodě x_{k-1}, je podle předpokladů věty f oboustranně spojitá v bodě x_{k-1}. Podobně pro x''.)

Limita jmenovatele existuje vždy, neboť g je monotonní. Označme tuto limitu γ. Je buď $\gamma = 0$ nebo $\gamma > 0$. V prvním případě tvrdím, že $M(x_{k-1}, x_k) = = 0$. (Snadno se dokáže, že v tomto případě je f konstantní v $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$.) Kdyby totiž $|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p = \lim\limits_{\substack{[x',x'']\to[x_{k-1},x_k] \\ [x',x'']\in\Omega_k}} |f(x'') - f(x')|^p \neq 0$, byla by $\lim M(x',x'') = +\infty$, což je ve sporu s tím, že $\overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}\,(f, g) < +\infty$. Nerovnost (*) je tedy v prvním případě jistě splněna.

Ve druhém případě je

$$\lim M(x', x'') = \frac{\lim |f(x'') - f(x')|^p}{\lim |g(x'') - g(x')|^{p-1}} = \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p}{\gamma}\,.$$

Tvrdím, že $\gamma \leqq |g(x_k) - g(x_{k-1})|^{p-1}$. Tato nerovnost jistě platí, znamená-li podmínka

$$(**) \qquad [x', x''] \to [x_{k-1}, x_k]\,, \quad [x', x''] \in \Omega_k$$

totéž jako podmínka $x' \to x_{k-1}+$, $x'' \to x_k -$. (Neboť z monotonie g plyne, že $|g(x_k -) - g(x_{k-1}+)| \leqq |g(x_k) - g(x_{k-1})|$.) Dále, znamená-li podmínka (**) na př., že $x' \to x_{k-1} -$, $x'' \to x_k -$, je g spojitá zleva v bodě x_{k-1}, a tedy

$$\gamma = |g(x_k -) - g(x_{k-1} -)|^{p-1} = |g(x_k -) - g(x_{k-1})|^{p-1} \leqq |g(x_k) - g(x_{k-1})|^{p-1}\,.$$

Podobně je tomu i v ostatních případech. Je tedy i v případě, že $\gamma > 0$, splněna nerovnost (*).

Budiž nyní $\varepsilon' = \dfrac{1}{n}\,[H(D_0) - (H - \varepsilon)] > 0$. Existuje číslo $\eta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\alpha\right)$ tak, že platí: Je-li $[x', x''] \in \Omega_k$, $|x' - x_{k-1}| < \eta$, $|x'' - x_k| < \eta$, je $M(x', x'') -$

$- M(x_{k-1}, x_k) > - \varepsilon'$. Budiž s počet všech těch bodů x_k ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$), v nichž je g oboustranně nespojitá. Položme $m = n + s$. Budiž $D = \{a = y_0 < y_1 < \ldots < y_r = b\}$, $\nu(D) < \eta$. Bodu x_0 přiřaďme bod y_0, bodu x_n bod y_r. Každému bodu x_k ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$) přiřaďme buď jeden nebo dva body dělení D podle tohoto pravidla: Je-li g spojitá v bodě x_k alespoň z jedné strany, přiřadíme bodu x_k bod y_j dělení D tak, aby bylo $|y_j - x_k| < \eta$ a aby bod y_j byl správně umístěn vzhledem k bodu x_k. Je-li g oboustranně nespojitá v bodě x_k, najdeme dva body y_{j_1} a y_{j_2} dělení D tak, aby $x_k - \eta < y_{j_1} < x_k < y_{j_2} < x_k + \eta$.

Je-li pak $0 \leqq k_1 < k_2 \leqq n$ a jsou-li y' a y'' body přiřazené bodům x_{k_1} a x_{k_2}, je $y' < y''$. Dohromady je všech přiřazených bodů právě $m + 1$. Srovnejme je do rostoucí posloupnosti a vzniklé dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ označme $D' = \{a = z_0 < z_1 < \ldots < z_m = b\}$.

Z lemmatu za větou 1,4 a z postupu, jímž jsme body přiřazovali, ihned plyne, že

$$H(D) \geqq H(D') > H(D_0) - \varepsilon' n = H - \varepsilon\,,$$

a to pro všechna dělení D, pro něž $\nu(D) < \eta$. Věta je dokázána.

Poznámka 1,10. Je-li g oboustranně nespojitá v některém bodě $x \in (a, b)$ a f jen jednostranně spojitá v tomto bodě (a spojitá ve všech ostatních bodech $\langle a, b\rangle$), nemusí $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ existovat, i když je $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}\,(f, g) < +\infty$. Příklad: $f(x) = 0$ pro $x \leqq 0$, $f(x) = 1$ pro $x > 0$, $g(x) = \operatorname{sgn} x$. Jest $\overset{1}{\underset{-1}{\mathrm{var}}}\,(f, g) = 1$, $H(D) = 1$ nebo $\frac{1}{2^{p-1}}$ podle toho, je-li bod 0 dělicím bodem D nebo ne (nezávisle na $\nu(D)$). Integrál $\overset{1}{\underset{-1}{H}}(f, g)$ tedy neexistuje.

Věta 1,8. *K tomu, aby f měla v $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci vzhledem k funkci g, je nutné a stačí, aby existovala neklesající funkce u tak, že*

$$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b \Rightarrow M(x_1, x_2) \leqq u(x_2) - u(x_1)\,.$$

Platí pak:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{var}}}\,(f, g) \leqq u(x_2) - u(x_1)\,.$$

Důkaz. 1. Existuje-li taková funkce u, je pro každé dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

$$H(D) = \sum_{k=1}^{n} M(x_{k-1}, x_k) \leqq \sum_{k=1}^{n} [u(x_k) - u(x_{k-1})] = u(b) - u(a)\,.$$

Tedy též

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}\,(f, g) \leqq u(b) - u(a)\,.$$

2. Má-li f konečnou variaci vzhledem k g, stačí položit $u(x) = \operatorname{var}_a^x$. Z nerovnosti $\operatorname{var}_a^x + \operatorname{var}_x^b \leqq \operatorname{var}_a^b$ plyne ihned:

$$u(x_2) - u(x_1) = \operatorname{var}_a^{x_2} - \operatorname{var}_a^{x_1} \geqq \operatorname{var}_{x_1}^{x_2} \geqq M(x_1, x_2)\,.$$

2. Převedení Hellingerova integrálu na Lebesgueův

V celé druhé kapitole budeme předpokládat, že funkce g je neklesající v intervalu $P = \langle a, b\rangle$.

Označme $A = g(a)$, $B = g(b)$. Pro každé $y \in \langle A, B\rangle$ definujme množinu $N(y) \subset P$ takto: Je-li $y \in g(P)$, budiž $N(y) = \underset{x}{E}[g(x) = y]$; není-li $y \in g(P)$, budiž $N(y)$ jednobodová množina, obsahující prvek $\sup\limits_{g(x)<y} x$ $(= \inf\limits_{g(x)>y} x)$.

Budiž f funkce definovaná v intervalu P, pro niž platí: $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. V intervalu $R = \langle A, B\rangle$ lze pak definovat funkci F takto: $F(y) = f(x)$, kde x je libovolný prvek množiny $N(y)$. (Speciálně: pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $F(g(x)) = f(x)$.)

Za tohoto označení, které podržíme v celé 2. kapitole, platí:

Věta 2,1. *Nechť funkce F je absolutně spojitá v $R = \langle A, B\rangle$. Potom integrál $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ existuje právě tehdy, když $F' \in L^p(A, B)$ (t. j. když konverguje Lebesgueův integrál $\int_A^B |F'|^p \,dy$). Je-li tato podmínka splněna, je*

$$(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) = \int_A^B |F'|^p \,dy\,.$$

Důkaz. 1. Budiž $F' \in L^p(A, B)$. Protože F je absolutně spojitá, je

$$F(y) = F(A) + \int_A^y F' \,dy\,.$$

Je-li $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ a položíme-li $y_1 = g(x_1)$, $y_2 = g(x_2)$, je

$$f(x_2) - f(x_1) = F(y_2) - F(y_1) = \int_{y_1}^{y_2} F' \,dy\,.$$

Podle Hölderovy nerovnosti odtud plyne, že

$$|f(x_2) - f(x_1)|^p \leqq |y_2 - y_1|^{p-1} \cdot \int_{y_1}^{y_2} |F'|^p \,dy = |g(x_2) - g(x_1)|^{p-1} \cdot \int_{y_1}^{y_2} |F'|^p \,dy\,.$$

Položíme-li tedy $u(x) = \int_A^{g(x)} |F'|^p \,dy$, je u neklesající v $\langle a, b\rangle$, a pro $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ platí:

$$M(x_1, x_2) \leqq u(x_2) - u(x_1)\,.$$

Podle věty 1,8 z toho plyne, že $\operatorname{var}_a^b (f, g) \leqq u(b) - u(a)$. K tomu, abychom dokázali, že též

$$\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) \leqq u(b) - u(a) = \int_A^B |F'|^p \, dy ,$$

stačí podle věty 1,7 dokázat, že f je spojitá v $\langle a, b\rangle$. Budiž $x \in \langle a, b)$, $x < x' < b$. Potom

$$\lim_{x' \to x+} |f(x') - f(x)| = \lim_{x' \to x+} |F(g(x')) - F(g(x))| =$$

$$= \lim_{x' \to x+} |\int_{g(x)}^{g(x')} F' \, dy| = |\int_{g(x)}^{g(x+)} F' \, dy| ;$$

je-li $g(x+) = g(x)$, je ovšem $\int_{g(x)}^{g(x+)} F' \, dy = 0$; je-li $g(x+) > g(x)$, je F konstantní v intervalu $(g(x), g(x+))$ a tedy opět $\int_{g(x)}^{g(x+)} F' \, dy = 0$. Je tedy f spojitá zprava v každém bodě $x \in \langle a, b)$. Podobně se dokáže spojitost zleva v každém bodě $x \in (a, b\rangle$.

2. Nechť existuje $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) = H$. Dokážeme, že Lebesgueův integrál $\int_A^B |F'|^p \, dy$ konverguje a že platí:

$$\int_A^B |F'|^p \, dy \leqq H .$$

Kdyby tomu tak nebylo, existovala by čísla $0 < y_0 < y_1 < \ldots < y_n$ tak, že

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \, \mu(M_k) - H = \varepsilon > 0 ,$$

kde $M_k = \underset{y}{E}[y \in (A, B), \; y_{k-1} < |F'(y)|^p \leqq y_k]$ a $\mu(M_k)$ znamená Lebesgueovu míru množiny M_k. Ukážeme, že to vede ke sporu.

Budiž $A \leqq \alpha < \beta \leqq B$ a nechť v intervalu (α, β) neleží žádný bod z $g(P)$. Je-li $\alpha < y_1 < y_2 < \beta$, je vztah $g(x) < y_1$ ekvivalentní se vztahem $g(x) < y_2$, odkud plyne, že $N(y_1) = N(y_2)$, tedy i $F(y_1) = F(y_2)$. Funkce F je tedy konstantní v (α, β) a ze spojitosti F plyne, že je konstantní i v $\langle \alpha, \beta\rangle$. Derivace funkce F v bodě α zprava je rovna 0; podobně v bodě β.

Vzhledem k tomu, že g je monotonní, existuje ke každému $y \in R - g(P)$ interval tvaru (α, y) nebo (y, β) nemající s $g(P)$ společné body. Alespoň jedna jednostranná derivace funkce F v bodě y je pak rovna 0. Je-li tedy $F'(y) \neq 0$ (speciálně: je-li y v některém M_k), je především $y \in g(P)$, a existují body $v_k \in g(P)$, $w_k \in g(P)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ tak, že $v_k < y < w_k$, $v_k \to y$, $w_k \to y$.

Budiž $y \in M_n$. Zvolíme-li w_k tak, jak bylo právě uvedeno, a uvážíme-li, že $|F'(y)|^p > y_{n-1}$, vidíme, že pro všechna dostatečně velká k platí vztah:

$$\left|\frac{F(w_k) - F(y)}{w_k - y}\right|^p > y_{n-1} .$$

Odtud ihned plyne, že systém všech intervalů $\langle\alpha, \beta\rangle$, pro něž $\alpha \in g(P)$, $\beta \in g(P)$ a

$$\left|\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}\right|^p > y_{n-1} ,$$

pokrývá množinu M_n ve smyslu Vitaliově (viz *V. Jarník*, Integrální počet II, str. 172).

Položme $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{ny_n}$. K tomuto ε^* existuje podle Vitaliovy věty posloupnost intervalů $J_i^n = \langle\alpha_i^n, \beta_i^n\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, s_n)$ tak, že platí:

(a) $\mu(M_n) < \mu(M_n \cap \bigcup_{i=1}^{s_n} J_i^n) + \varepsilon^*$,

(b) $J_i^n \cap J_k^n = \emptyset$ pro $i \neq k$,

(c) $\alpha_i^n \in g(P)$, $\beta_i^n \in g(P)$,

(d) $\left|\dfrac{F(\beta_i^n) - F(\alpha_i^n)}{\beta_i^n - \alpha_i^n}\right|^p > y_{n-1}$.

Označme $S_n = \bigcup_{i=1}^{s_n} J_i^n$, $R_{n-1} = (A, B) - S_n$. Množina R_{n-1} se skládá z konečného počtu disjunktních otevřených intervalů, které označíme třeba K_k^{n-1} $(k = 1, 2, \ldots, r_{n-1})$. S každým intervalem K_k^{n-1} a s množinou $K_k^{n-1} \cap M_{n-1}$ provedeme totéž jako dříve s intervalem (A, B) a s množinou M_n. Úhrnem tím získáme konečnou posloupnost intervalů J_k^{n-1} $(i = 1, 2, \ldots, s_{n-1})$.

Indukcí bychom tak sestrojili:

(I) disjunktní množiny $S_{n-j} = \bigcup_{i=1}^{s_{n-j}} J_i^{n-j}$ $(j = 0, 1, \ldots, n - 1)$ a množiny $R_{n-j} = (A, B) - \bigcup_{i=0}^{j-1} S_{n-i}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, při čemž

$$\mu(R_{n-j} \cap M_{n-j}) < \mu(S_{n-j} \cap M_{n-j}) + \varepsilon^* ;$$

platí dále:

(II) $J_i^{n-j} \cap J_k^{n-j} = \emptyset$ pro $i \neq k$;

(III) $J_i^{n-j} = \langle\alpha_i^{n-j}, \beta_i^{n-j}\rangle$, $\alpha_i^{n-j} \in g(P)$, $\beta_i^{n-j} \in g(P)$;

(IV) $\left|\dfrac{F(\beta_i^{n-j}) - F(\alpha_i^{n-j})}{\beta_i^{n-j} - \alpha_i^{n-j}}\right|^p > y_{n-j-1}$.

Podle (I) jest

$$\begin{aligned} M_{n-j} &= (M_{n-j} \cap R_{n-j}) \cup M_{n-j} \cap [(A, B) - R_{n-j}] = \\ &= (M_{n-j} \cap R_{n-j}) \cup \bigcup_{i=0}^{j-1} (M_{n-j} \cap S_{n-i}) , \end{aligned}$$

tedy

$$\mu(M_{n-j}) = \sum_{i=0}^{j-1} \mu(M_{n-j} \cap S_{n-i}) + \mu(M_{n-j} \cap R_{n-j}) <$$

$$< \sum_{i=0}^{j} \mu(M_{n-j} \cap S_{n-i}) + \varepsilon^* .$$

Dále:

$$\mu(M_{n-j}) \cdot y_{n-j-1} \leqq y_{n-j-1} \sum_{i=1}^{j} \mu(M_{n-j} \cap S_{n-i}) + \varepsilon^* y_{n-j-1} <$$

$$< \sum_{i=0}^{j} \mu(M_{n-j} \cap S_{n-i}) \cdot y_{n-i-1} + \varepsilon^* y_{n-j-1}$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(M_k) \cdot y_{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \mu(M_{n-j}) \cdot y_{n-j-1} < \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{j} y_{n-i-1} \cdot \mu(M_{n-j} \cap S_{n-i}) + \varepsilon =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} y_{n-i-1} \mu(\bigcup_{j=i}^{n-1} [M_{n-j} \cap S_{n-i}]) + \varepsilon =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} y_{n-i-1} \mu(S_{n-i} \cap \bigcup_{j=i}^{n-1} M_{n-j}) + \varepsilon \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{n-1} y_{n-i-1} \mu(S_{n-i}) + \varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} y_{n-i-1} \sum_{k=1}^{s_{n-i}} \mu(J_k^{n-i}) + \varepsilon .$$

Celkem tedy

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu(M_k)\, y_{k-1} < \sum_{i=0}^{n-1} y_{n-i-1} \sum_{k=1}^{s_{n-i}} \mu(J_k^{n-i}) + \varepsilon .$$

Budiž $D = \{A = z_0 < z_1 < \ldots < z_r = B\}$ ono dělení intervalu $\langle A, B \rangle$, jehož dělicí body jsou všechna čísla α_i^{n-j}, β_i^{n-j} ($j = 0, \ldots, n-1$; $i = 1, \ldots, s_{n-j}$). Vyšetřujme součet

$$(**) \qquad \sigma(D) = \sum_{k=1}^{r} \frac{|F(z_k) - F(z_{k-1})|^p}{|z_k - z_{k-1}|^{p-1}} .$$

Intervaly $\langle z_{2k-1}, z_{2k} \rangle$ jsou právě všechny intervaly J_i^{n-j}; r je liché. Je-li $\langle z_{2k-1}, z_{2k} \rangle = J_i^{n-j}$, je podle (IV)

$$(***) \qquad \frac{|F(z_{2k}) - F(z_{2k-1})|^p}{|z_{2k} - z_{2k-1}|^{p-1}} > y_{n-j-1} \cdot (z_{2k} - z_{2k-1}) = y_{n-j-1} \cdot \mu(J_i^{n-j}) .$$

Sečteme-li v (***) napřed při pevném j pro $i = 1, 2, \ldots, s_{n-j}$ a pak výsledky pro všechna j, dostaneme podle (*):

$$\sigma(D) \geqq \sum_{0 < 2k < r} \frac{|F(z_{2k}) - F(z_{2k-1})|^p}{|z_{2k} - z_{2k-1}|^{p-1}} > \sum_{k=1}^{n} \mu(M_k)\, y_{k-1} - \varepsilon = H .$$

Zvolme body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b$ tak, že $z_k = g(x_k)$ (to lze podle (III)). Potom

$$\sum_{k=1}^{r} M(x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=1}^{r} \frac{|F(z_k) - F(z_{k-1})|^p}{|z_k - z_{k-1}|^{p-1}} > H ,$$

což je spor. Tím je věta 2,1 úplně dokázána.

Dokážeme nyní ještě dvě postačující podmínky absolutní spojitosti funkce F:

Věta 2,2. *Budiž g spojitá (a neklesající) v $\langle a, b\rangle$; nechť existuje $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$. Potom je funkce F absolutně spojitá.*

Důkaz. Nechť

$$A \leq y_1 < y_2 \leq \ldots \leq y_{2n-1} < y_{2n} \leq B$$

a nechť

$$a \leq x_1 < x_2 \leq \ldots \leq x_{2n-1} < x_{2n} \leq b$$

jsou libovolné body, pro něž $y_k = g(x_k)$. Potom je

$$|F(y_{2k}) - F(y_{2k-1})| = |f(x_{2k}) - f(x_{2k-1})| \leq$$
$$\leq |h(x_{2k}) - h(x_{2k-1})|^{\frac{1}{p}} \cdot |g(x_{2k}) - g(x_{2k-1})|^{\frac{p-1}{p}}$$

a podle Hölderovy nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} |F(y_{2k}) - F(y_{2k-1})| \leq$$
$$\leq [\sum_{k=1}^{n} |h(x_{2k}) - h)x_{2k-1})|]^{\frac{1}{p}} \cdot [\sum_{k=1}^{n} |g(x_{2k}) - g(x_{2k-1})|]^{\frac{p-1}{p}} \leq$$
$$\leq (\overset{b}{\underset{a}{H}})^{\frac{1}{p}} \cdot [\sum_{k=1}^{n} (y_{2k} - y_{2k-1})]^{\frac{p-1}{p}},$$

odkud plyne absolutní spojitost funkce F.

Věta 2,3. *Je-li g rostoucí funkce, pro niž $g'(x) \geq c > 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$, a splňuje-li f Lipschitzovu podmínku, splňuje také F Lipschitzovu podmínku.*

Důkaz. Budiž $A \leq y_1 < y_2 \leq B$. Budiž $x_1 \in N(y_1)$, $x_2 \in N(y_2)$. Je buď $x_1 = x_2$, tedy též $F(y_1) = F(y_2)$, nebo $x_1 < x_2$, a máme:

$$|F(y_2) - F(y_1)| = |f(x_2) - f(x_1)| \leq K|x_2 - x_1| \leq \frac{K}{c} \int_{x_1}^{x_2} g'(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde K je vhodná konstanta. Dále užijeme známého vztahu (který platí pro neklesající g a $x_1 < x_2$)

$$\int_{x_1}^{x_2} g'(x)\,\mathrm{d}x \leq g(x_2 -) - g(x_1 +).$$

Uvážíme-li ještě, že

$$g(x_2 -) - g(x_1 +) \leq y_2 - y_1,$$

dostáváme hledanou nerovnost

$$|F(y_2) - F(y_1)| \leq \frac{K}{c} |y_2 - y_1|.$$