Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O JEDNÉ VLASTNOSTI CELOČÍSELNÝCH NEZÁPORNÝCH ŘEŠENÍ ROVNICE $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$

KAREL ČULÍK, Brno.

(Došlo dne 29. srpna 1956.) DT: 519.1

Řešením rovnice

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = n\,, \tag{1}$$

kde k, n jsou daná přirozená čísla, rozumíme systém $\{r_i\}_{i=1}^{k}$ celých a nezáporných čísel r_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, který vyhovuje rovnici (1). Vždy lze předpokládat, že řešení $\{r_i\}_{k=1}^{i}$ splňuje podmínku

$$r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_k\,. \tag{2}$$

O otázce po počtu řešení rovnice (1) bylo v matematické literatuře často pojednáno (viz E. NETTO: *Lehrbuch der Kombinatorik*, 2. vyd., 1927, str. 118 a násl.). V tomto příspěvku jsou vyšetřovány otázky jiného druhu a to:

Pro která řešení $\{r_i\}_{i=1}^{k}$ rovnice (1) nabývá výraz $\sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$, kde $c \geqq 0$ je dané celé číslo, minimální hodnoty a jaká je tato minimální hodnota? [1])

Odpověď na tuto otázku je dána větou 2, v níž je využito t. zv. *hlavního řešení* rovnice (1).

Řešení $\{h_i\}_{i=1}^{k}$ rovnice (1) nazýváme *hlavním řešením*, jestliže je definováno takto: $h_i = \left[\frac{n}{k}\right]$ pro $1 \leqq i \leqq j$, $h_i = \left[\frac{n+k}{k}\right]$ pro $j < i \leqq k$, kde $j = k\left[\frac{n+k}{k}\right] - n$.[2]) Pak platí

Věta 1. a) *Pro každé řešení* $\{r_i\}_{i=1}^{k}$ *rovnice* (1), *které splňuje nerovnosti* (2), *platí*

$$r_1 \leqq h_1 \leqq h_k \leqq r_k\,. \tag{3}$$

---

[1]) Podnětem k těmto úvahám byla práce *On a problem of K. Zarankiewicz*, Colloq. Math. *3* (1954), str. 54 a 57, od T. KÖVARI, V. T. SÓSE a P. TURÁNA.

[2]) Symbol $[x]$ značí *Gaussovu funkci*, t. j. největší celé číslo c, pro něž platí $c \leqq x$.

b) *Řešení* $\{r_i\}_{i=1}^k$, *které splňuje podmínku* (2), *je hlavním řešením tehdy a jen tehdy, když*

$$r_k - r_1 < 2\,. \tag{4}$$

Důkaz. a) Kdyby bylo $r_1 \geqq h_1 + 1$, bylo by podle (2) také $n = \sum_{i=1}^k r_i \geqq \geqq k \left[\frac{n+k}{k}\right] > n$, což je spor, a podobně se dojde ke sporu z předpokladu $r_k < h_k$. — b) Nutnost podmínky (4) je zřejmá. Je-li tedy naopak $\{r_i\}_{i=1}^k$ řešením rovnice (1), které splňuje (4) a (2), pak buď $r_1 = r_k$ a tedy podle (3) musí být $r_i = h_i$ pro každé i, $1 \leqq i \leqq k$, nebo $r_1 + 1 = r_k$, takže podle (3) musí být $r_1 \leqq h_1 \leqq h_k \leqq r_k = r_1 + 1$. Kdyby bylo $r_1 < h_1$, tedy také $h_1 = = h_k = r_k = r_1 + 1$, muselo by být $\sum_{i=1}^k r_i < \sum_{i=1}^k h_i$, a podobně kdyby bylo $r_1 = h_1 = h_k < r_k = r_1 + 1$, muselo by být $\sum_{i=1}^k r_i > \sum_{i=1}^k h_i$, což je v obou případech spor. Zbývá tedy, že platí $r_1 = h_1 < h_k = r_k = r_1 + 1$, odkud plyne $r_i = h_i$ pro všechna i, $1 \leqq i \leqq k$.

Lemma 1. *Nechť* r, p, c *jsou celá čísla, která splňují nerovnosti* $r \geqq 0$, $c \geqq 0$ *a* $2r \geqq p \geqq 0$. *Pak platí*

$$2\binom{r}{c} \leqq \binom{p}{c} + \binom{2r-p}{c}.[3] \tag{5}$$

Důkaz. Lze předpokládat, že $p < r$ a tvrzení dokázat indukcí vzhledem k c. Pro $c = 0,1$ je tvrzení zřejmě správné a předpokládejme, že je správné také pro $c - 1 \geqq 1$, avšak nikoli pro c, t. j., že platí nerovnosti

$$2\binom{r}{c-1} \leqq \binom{p}{c-1} + \binom{2r-p}{c-1} \quad \text{a} \quad \binom{p}{c} + \binom{2r-p}{c} < 2\binom{r}{c}.$$

Označíme-li pro stručnost $A = 2\binom{r}{c-1}$, $B = \binom{p}{c-1}$ a $C = \binom{2r-p}{c-1}$, přejdou obě nerovnosti do tvarů $A \leqq B + C$ a $B\dfrac{p-c+1}{c} + C\dfrac{2r-p-c+1}{c} < < A\dfrac{r-c+1}{c}$. Z předpokladů $c - 1 \geqq 1$ a $p < r$ však plyne $B \leqq C$ a tedy také $B\dfrac{r}{c} \leqq B\dfrac{p}{c} + C\dfrac{r-p}{c}$, takže platí $\dfrac{A}{c}(r-c+1) \leqq \dfrac{B+C}{c}(r-c+1) \leqq$

$$\leqq \frac{B}{c}(p-c+1) + \frac{C}{c}(2r-p-c+1) < \frac{A}{c}(r-c+1)\,, \qquad \text{což je spor.}$$

[3]) Jsou-li m, n celá čísla, klademe podle obvyklých definic $\binom{m}{n} = 0$ pro $n < 0$ a pro $m < n$, avšak $\binom{m}{0} = 1$ pro $m \geqq 0$ a také $0! = 1$.

Lemma 2. *Nechť r, p, c jsou celá čísla, která splňují nerovnosti $r \geqq 0$, $c \geqq 0$ a $2r + 1 \geqq p \geqq 0$. Pak platí*

$$\binom{r}{c} + \binom{r+1}{c} \leqq \binom{p}{c} + \binom{2r-p+1}{c}. \tag{6}$$

Důkaz. Lze předpokládat, že $p < r$ a tvrzení dokázat indukcí vzhledem k c. Pro $c = 0, 1$ je tvrzení zřejmě správné a také pro $c = 2$, jak plyne ze správné nerovnosti $0 < (r - p)^2 + r - p$. Předpokládejme, že (6) platí pro $c - 1 \geqq 2$, ale neplatí pro c, t. j. že platí nerovnosti

$$\binom{r}{c-1} + \binom{r+1}{c-1} \leqq \binom{p}{c-1} + \binom{2r-p+1}{c-1} \quad \text{a}$$

$$\binom{p}{c} + \binom{2r-p+1}{c} < \binom{r}{c} + \binom{r+1}{c}.$$

Je-li $c > r$, je druhá nerovnost nesprávná, což je spor. Je-li $c \leqq r$, zaveďme označení $A = \dfrac{r(r-1)\ldots(r-c+3)}{(c-1)!}$, $B = \binom{p}{c-1}$ a $C = \binom{2r-p+1}{c-1}$, při čemž A má vždy smysl, neboť $c \geqq 3$, takže obě nerovnosti lze přepsat do tvarů $A(2r - c + 3) \leqq B + C$ a $\dfrac{B}{c}(p - c + 1) + \dfrac{C}{c}(2r - p - c + 2) < \dfrac{A}{c}(2r - c + 2)(r - c + 2)$. Avšak platí $B < A(r - c + 2)$, neboť $\binom{p}{c-1} < \binom{r}{c-1}$, a také $B \leqq C$ a proto i $(B - C)(r - p) \leqq 0$. Odtud plyne nerovnost $B + (B - C)(r - p) < A(r - c + 2)$, kterou lze přepsat do tvaru $B(r + 1) - A(r - c + 2) < Bp + C(r - p)$, takže konečně platí

$$\frac{A}{c}(2r - c + 2)(r - c + 2) = \frac{A}{c}(2r - c + 3)(r - c + 2) - \frac{A}{c}(r - c + 2) \leqq$$

$$\leqq \frac{B + C - A}{c}(r - c + 2) < \frac{B}{c}(-c + 1) + \frac{B}{c}p + \frac{C}{c}(r - p) +$$

$$+ \frac{C}{c}(r - c + 2) < \frac{A}{c}(2r - c + 2)(r - c + 2),$$

což je spor.

Věta 2. *Hlavní řešení $\{h_i\}_{i=1}^k$ rovnice (1) splňuje nerovnost*

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} \leqq \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c} \tag{7}$$

pro každé řešení $\{r_i\}_{i=1}^k$ rovnice (1) a pro každé celé číslo $c \geqq 0$. Dále platí

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} = \left(n - k\left[\frac{n}{k}\right]\right)\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c-1} + k\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c}. \tag{8}$$

Důkaz. Ke každému řešení $\{r_i^{(0)}\}_{i=1}^k$ rovnice (1), které splňuje podmínku (2), lze konstruovat postupně posloupnost řešení $\{r_i^{(j)}\}_{i=1}^k$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, takto: je-li $r_1^{(0)} + r_k^{(0)}$ sudé, položíme $s_1^{(1)} = s_k^{(1)} = \frac{1}{2}(r_1^{(0)} + r_k^{(0)})$, a je-li $r_1^{(0)} + r_k^{(0)}$ liché, položíme $s_k^{(1)} = \frac{1}{2}(r_1^{(0)} + r_k^{(0)} - 1)$, $s_k^{(1)} = \frac{1}{2}(r_1^{(0)} + r_k^{(0)} + 1)$. V obou případech dále klademe $s_i^{(1)} = r_i^{(0)}$ pro $1 < i < k$. Systém čísel $s_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$, je zřejmě řešením rovnice (1) a určuje (po vhodném uspořádání) jediné řešení $\{r_i^{(1)}\}_{i=1}^k$ rovnice (1), které splňuje také podmínku (2), atd. Snadno se vidí, že každé dva prvky této posloupnosti $\{r_i^{(u)}\}_{i=1}^k$, $\{r_i^{(v)}\}_{i=1}^k$, kde $u < v$, splňují podmínku $r_k^{(v)} - r_1^{(v)} \leqq r_k^{(u)} - r_1^{(u)}$ a že po dostatečně velkém, ale konečném počtu kroků m musí platit $r_k^{(m)} - r_1^{(m)} < 2$, takže podle věty 1 je $r_i^{(m)} = h_i$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, k$ a od tohoto indexu počínaje je posloupnost stacionární. Z popsané konstrukce řešení posloupnosti a z lemmat 1. a 2. však ihned plyne, že pro $u < v$ platí

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{r_i^{(v)}}{c} \leqq \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i^{(u)}}{c}, \tag{9}$$

čímž je věta dokázána.

Důsledek. *Nechť t, $0 \leqq t < n$, je dané celé číslo a nechť systém $\{s_i\}_{i=1}^k$ $(k > 1)$ je řešením rovnice (1), které je definováno takto: $s_1 = t$, $s_{i+1} = h_i$, $1 \leqq i < k$, kde $\{h_i\}_{i=1}^{k-1}$ je hlavním řešením rovnice $\sum_{i=1}^{k-1} p_i = n - t$. Pak platí*

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{s_i}{c} \leqq \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$$

pro každé celé $c \geqq 0$ a pro každé řešení $\{r_i\}_{i=1}^k$ rovnice (1), které splňuje podmínku $r_i = t$ pro vhodný index i, $1 \leqq i \leqq k$.

Poznámka 1. Věty 2 lze využít k řešení zobecněného problému K. Zarankiewicze, který lze formulovat následujícím způsobem.

Nechť M je množina všech matic $A_l^k(n)$ typu k/l vytvořených z n čísel rovných jedné a z $kl - n$ čísel rovných nule. Řekneme, že matice $A_l^k(n) \in M$ má vlastnost $z(b, c)$, jestliže existuje její podmatice $P_c^b(b \,.\, c)$, t. j. podmatice typu b/c (vzniklá vypuštěním vhodných řádků a sloupců z matice dané) vytvořená ze samých jedniček. Má se určit minimální číslo n, pro něž platí (při daných b, c, k, l, $1 \leqq b \leqq k$, $1 \leqq c \leqq l$), že každá matice $A_l^k(n) \in M$ má vlastnost $z(b, c)$. Toto minimální číslo se označuje $Z_{b,c}(k, l)$.

Platí toto tvrzení: značí-li r_i počet jedniček v i-tém řádku matice $A_l^k(n) \in M$ a platí-li nerovnost

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c} > (b - 1) \binom{l}{c},$$

má matice $A_l^k(n)$ vlastnost $z(b, c)$[4]).

[4]) Viz lemma 2 v článku K. Čulíka: *Poznámka k problému K. Zarankiewicze*, Práce brněnské základny ČSAV, *XXVII*/7 (1955), kde je také uvedena obecná formulace problému.

Má-li nyní matice $A_l^k(n) \in M$ v i-tém řádku h_i jedniček, kde $\{h_i\}_{i=1}^k$ je hlavní řešení rovnice (1), t. j. $\sum_{i=1}^k h_i = n$, a platí-li pro $r_i = h_i$, $1 \leqq i \leqq k$, hořejší nerovnost, má tato matice podle uvedeného tvrzení vlastnost $z(b, c)$ a z věty 2. ihned plyne, že každá matice $A_l^k(n) \in M$ (ať je jejích n jedniček a $kl - n$ nul rozmístěno jakkoliv) má vlastnost $z(b, c)$ čili $Z_{b,c}(k, l) \leqq n$. Vzhledem k (8) tedy platí

$$(b-1)\binom{l}{c} < \left(n - k\left[\frac{n}{k}\right]\right)\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c-1} + k\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c} \Rightarrow Z_{b,c}(k, l) \leqq n \qquad (*)$$

a také obdobné tvrzení, které z (*) dostaneme, vyměníme-li mezi sebou čísla b, c a k, l (t. j. uvažujeme o sloupcích místo o řádcích matice).

Na příklad při důkazu tvrzení (7.2) v práci l. c. sub [1]), že $Z_{2,2}(p^2 + p, p^2) = p^2(p + 1) + 1$, $(p \geqq 1)$, je třeba celé stránky k důkazu nerovnosti $Z_{2,2}(p^2 + p, p^2) \leqq p^2(p + 1) + 1$. Tato nerovnost plyne okamžitě z (*) pro $n = p^2(p + 1) + 1$, $k = p^2 + p$, $l = p^2$, $b = c = 2$, neboť $(b - 1)\binom{l}{c} = \binom{p^2}{2} <$

$$< p + \binom{p^2}{2} = \left(n - k\left[\frac{n}{k}\right]\right)\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c-1} + k\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c}.$$

Poznámka 2. Věta 2 dovoluje vyslovit domněnku o řešení jedné úlohy od P. TURÁNA[5]): Je dáno n prvků $1, 2, \ldots, n$ a je předepsáno celé číslo h, $3 \leqq h \leqq n$. Má se určit systém A dvojic (i, j), $1 \leqq i < j \leqq n$, který má vlastnost: α) pro každou h-tici $(i_1, i_2, \ldots, i_h)$, $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_h \leqq n$, platí, že obsahuje alespoň jednu dvojici systému A; β) systém A obsahuje nejmenší možný počet dvojic.

Konstruujme systém A takto: Nechť $\{h_i\}_{i=1}^k$ je hlavní řešení rovnice (1), v níž položíme $k = h - 1$ a $c = 2$. Rozdělme nyní daných n prvků do $k = h - 1$ skupin tak, že každá skupina obsahuje právě h_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, prvků a systém A definujeme jako sjednocení systémů všech dvojic určených každou skupinou.

Z *Dirichletova Schubfachprinzipu* ihned plyne, že takto konstruovaný systém A má vlastnost α) a z věty 2 plyne jeho minimalita vzhledem k jisté speciální množině systémů s vlastností α). Minimalita tohoto systému vzhledem k množině všech systémů s vlastností α) zůstává nedokázána. Předpokládaný minimální počet dvojic systému A je dán výrazem (8), který po příslušném dosazení je roven $n\left[\frac{n}{h-1}\right] - (h-1)\binom{\left[\frac{n}{h-1}\right]+1}{2}$.

[5]) Jde o úlohu č. 268 v *Elemente der Mathematik XI/2* (1956).