Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

POZNÁMKA K OTÁZCE O OSCILAČNÍCH VLASTNOSTECH ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y'' + A(x)\, y = 0$

MILOŠ RÁB, BRNO.

(Došlo dne 30. července 1956.) DT: 517.941.91

Autor zostřuje známé kriterium, aby rovnice $y'' + A(x)\, y = 0$ byla neoscilatorická resp. oscilatorická, a zobecňuje nedávno publikované výsledky L. D. Nikolenka.

1. E. Gagliardo ukázal [1], že postačující podmínka k tomu, aby integrály diferenciální rovnice

$$y'' + A(x)\, y = 0 \tag{1}$$

oscilovaly v intervalu $(x_0, +\infty)$ jest, aby funkce $B(x) = A(x) - \frac{1}{4x^2}$ byla nezáporná a integrál $\int^t xB(x)\, dx \to +\infty$ pro $t \to +\infty$.

L. D. Nikolenko odvodil [2] následující nutnou podmínku pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1), „blízkou" k Gagliardově postačující podmínce:

$$\int^t x \ln x \operatorname{Max} \left\{ A(x) - \frac{1}{4x^2}, 0 \right\} dx \to +\infty \text{ pro } t \to +\infty\,. \tag{2}$$

Gagliardova postačující podmínka je však zvláštním případem obecnější věty, kterou odvodil již před tím M. Zlámal [3].

Označíme-li $\log_0 x = x$, $\log_n x = \log \log_{n-1} x$; $L_0(x) = x$, $L_n(x) = L_{n-1}(x) \,.\, \log_n x$; $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [L_i(x)]^{-2}$, jest Zlámalova postačující podmínka pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1), aby

$$\int^t L_n(x) \left\{ A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right\} dx \to +\infty \quad \text{pro } t \to +\infty\,. \tag{3}$$

Podmínku tuto odvodil Zlámal jako korolár věty, které v dalším také užijeme:

a) *Jestliže integrál* $\int^{x} \frac{dt}{Q(t)}$ *diverguje a jestliže existuje kladná funkce* $\omega(t)$ *mající spojitou první derivaci taková, že*

$$\int^{\infty} \frac{Q(t)}{\omega(t)} \omega'^2(t) \, dt < +\infty , \tag{4}$$

$$\int^{x} \omega(t) f(t) \, dt \to +\infty \quad \text{pro} \quad x \to +\infty , \tag{5}$$

pak diferenciální rovnice $(Q(x) y')' + f(x) y = 0$ *jest oscilatorická.*

Obě podmínky (2) a (3) se dají zobecnit.

Ukážeme, že postačující podmínka k tomu, aby integrály diferenciální rovnice (1) oscilovaly, jest, aby

$$\int^{t} \frac{L_{n+1}(x)}{\log_{n+2}^{1+\varepsilon} x} \left\{ A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right\} dx \to +\infty \quad \text{pro} \quad t \to +\infty , \tag{6}$$

a nutná podmínka

$$\int^{t} L_{n+1}(x) \operatorname{Max} \left\{ A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) , \ 0 \right\} dx \to +\infty \text{ pro } t \to +\infty , \tag{7}$$

pro n celé nezáporné a $\varepsilon > 0$.

V případě, že $A(x)$ splňuje podmínku

$$\int^{\infty} L_{n+1}(x) \left| A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right| dx < +\infty , \tag{8}$$

lze udat pro integrály diferenciální rovnice (1) asymptotické vzorce. Dokážeme, že existuje takový fundamentální systém $y_1(x)$, $y_2(x)$ diferenciální rovnice (1), že

$$y_1(x) \sim \sqrt{L_n(x)} , \quad y_2(x) \sim \sqrt{L_n(x)} \log_{n+1} x .$$

2. Dokážeme nyní postačitelnost podmínky (6) k oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1).

Transformujme diferenciální rovnici (1) substitucí

$$s = \alpha(x) , \quad y(x) = \frac{u(s)}{\sqrt{\alpha'(x)}} ,$$

kde $\alpha(x)$ značí libovolnou funkci, která má v intervalu $(x_0, +\infty)$ spojitou třetí derivaci a $\alpha'(x) > 0$.

Po snadném počtu obdržíme diferenciální rovnici pro u

$$\frac{d^2u}{ds^2} + R(x) \, u = 0 , \tag{9}$$

kde

$$R(x) = V(x) + \frac{A(x)}{\alpha'^2(x)}, \quad V(x) = \frac{3}{4}\frac{\alpha''(x)}{\alpha'^4(x)} - \frac{1}{2}\frac{\alpha'''(x)}{\alpha'^3(x)}. \tag{10}$$

Zvolíme-li specielně $\alpha(x) = \log_{n+1} x$, jest

$$R(x) = L_n^2(x)\left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right\}.$$

Důkaz. Předně jest $\alpha'(x) = \dfrac{1}{L_n(x)}$, takže stačí ukázat, že $V(x) = -\dfrac{1}{4} L_n^2(x) \,.$ $. \, S_n(x)$, čili (podle (10)), že

$$-\frac{1}{4} L_n'^2(x) + \frac{1}{2} L_n''(x)\, L_n(x) = -\frac{1}{4} L_n^2(x)\, S_n(x)\,. \tag{11}$$

Důkaz provedeme úplnou indukcí.

Pro $n = 1$ (11) zřejmě platí. Předpokládejme nyní platnost (11) pro $n - 1$ a dokažme platnost pro n. Poněvadž $L_n'(x) = (L_{n-1}(x) \log_n x)' = L_{n-1}'(x) \,.$ $. \log_n x + 1$, $L_n''(x) = L_{n-1}''(x) \log_n x + \dfrac{L_{n-1}'(x)}{L_{n-1}(x)}$, dostáváme po dosazení do levé strany (11):

$$-\frac{1}{4} L_n'^2(x) + \frac{1}{2} L_n''(x)\, L_n(x) = -\frac{1}{4} [L_{n-1}'(x) \log_n x + 1]^2 +$$

$$+\frac{1}{2} L_n(x)\left[L_{n-1}''(x) \log_n x + \frac{L_{n-1}'(x)}{L_{n-1}(x)}\right] = \log_n^2 x \left[\frac{1}{2} L_{n-1}(x)\, L_{n-1}''(x) - \frac{1}{4} L_{n-1}'^2(x)\right] -$$

$$-\frac{1}{4} = \log_n^2 x \left[-\frac{1}{4} S_{n-1}(x)\, L_{n-1}^2(x)\right] - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} L_n^2(x)\, S_{n-1}(x) - \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{1}{4} L_n^2(x)\left[S_{n-1}(x) - \frac{1}{L_n^2(x)}\right] = -\frac{1}{4} L_n^2(x)\, S_n(x)\,, \quad \text{c. b. d.}$$

Obdrželi jsme tedy tento výsledek:

Diferenciální rovnice (1) *se transformuje substitucí*

$$s = \alpha(x)\,, \quad y = \frac{u(s)}{\sqrt{\alpha'(x)}}, \quad \text{kde} \quad \alpha(x) = \log_{n+1} x \tag{12}$$

v diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + L_n^2(x)\left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right\} u = 0\,. \tag{13}$$

Položme nyní ve větě (a) $\omega(s) = s(\log s)^{-1-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, $Q(s) \equiv 1$ a aplikujme ji na diferenciální rovnici (13). Poněvadž $\omega'(s) = (\log s)^{-1-\varepsilon} - (1 + \varepsilon) \,.$ $. \,(\log s)^{-2-\varepsilon}$, jest

$$\int^{\infty} \frac{\omega'^2(s)}{\omega(s)} \mathrm{d}s = \int^{\infty} \frac{(\log s)^{-2-2\varepsilon} - 2(1+\varepsilon)(\log s)^{-3-2\varepsilon} + (1+\varepsilon)^2 (\log s)^{-4-2\varepsilon}}{s (\log s)^{-1-\varepsilon}} \mathrm{d}s <$$

$$< 4(1+\varepsilon)^2 \int^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s (\log s)^{1+\varepsilon}} < +\infty .$$

Také podmínka (5) je splněna vzhledem k předpokladu (6), neboť

$$\int^{t} \omega(s) f(s) \mathrm{d}s = \int^{t'} \log_{n+1} x (\log \log_{n+1} x)^{-1-\varepsilon} L_n^2(x) \left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right\} \mathrm{d}(\log_{n+1} x) =$$

$$= \int^{t'} \frac{L_{n+1}(x)}{\log_{n+2}^{1+\varepsilon} x} \left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right\} \mathrm{d}x ,$$

kde t' je dáno vztahem $t = \log_{n+1} t'$. Integrály diferenciální rovnice (13), a tedy též (1) oscilují v intervalu $(x_0, +\infty)$ a postačitelnost podmínky (6) je dokázána.

Než přistoupíme k vyšetření integrálů diferenciální rovnice (1) v případě neoscilatorickém, připomeňme větu [4], [5]:

Jestliže $\int^{\infty} x\, |f(x)| \mathrm{d}x < +\infty$, *má diferenciální rovnice* $y'' + f(x) y = 0$ *takový fundamentální systém, že* $y_1 \sim 1$, $y_2 \sim x$.

Aplikujeme-li tuto větu na diferenciální rovnici (13), obdržíme: jestliže

$$\int^{\infty} s L_n^2(x) \left| A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right| \mathrm{d}s = \int^{\infty} L_{n+1}(x) \left| A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right| \mathrm{d}x < +\infty ,$$

má diferenciální rovnice (13) fundamentální systém $u_1 \sim 1$, $u_2 \sim s$, a tedy diferenciální rovnice (1) vzhledem k (12) fundamentální systém

$$y_1 \sim \sqrt{L_n(x)} , \qquad y_2 \sim \sqrt{L_n(x)} \log_{n+1} x ,$$

takže je zřejmě neoscilatorická.

Abychom dokázali podmínku (7), nutnou pro oscilaci, položme $B(x) = = \operatorname{Max} \left\{A(x) , \frac{1}{4} S_n(x)\right\}$. Jestliže

$$\int^{\infty} L_{n+1}(x) \left| B(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right| \mathrm{d}x = \int^{\infty} L_{n+1}(x) \operatorname{Max} \left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) , 0\right\} \mathrm{d}x < +\infty$$

dle (8), jest diferenciální rovnice $y'' + B(x) y = 0$ neoscilatorická, a tedy tím spíše neosciluje diferenciální rovnice (1). Nutnost podmínky (7) pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1) jest tím dokázána.

Poznámka při korektuře. Podmínku (7) nutnou pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1) odvodil současně Nikolenko v práci „Об одном достаточном условии неколебательности решений уравнения $y'' + f(x)y = 0$," ДАН СССР *110* (1956) 929—931.