REFERÁTY

O STABILITĚ INTEGRÁLŮ SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC V KOMPLEXNÍM OBORU

(Vlastní referát o přednášce proslovené v Matem. obci pražské dne 13. února 1956.)

Budiž dána soustava

$$\dot{z}_j = \sum c_{jk} z_k + Z_j(t, z_1, \ldots, z_n)\,, \tag{1}$$

kde z_j jsou komplexní funkce reálné proměnné t, c_{jk} jsou komplexní konstanty a komplexní funkce Z_j vyhovují těmto podmínkám:

a) Z_j jsou definovány a jsou spojité v oboru D: $\|z\| \leqq H$ $(H > 0)$, $t \geqq 0$,

b) $\|Z_j\| \leqq K\|z\|$ $(K > 0)$ (odtud již plyne $Z_j\ (t, 0, \ldots, 0) = 0$),

c) $\lim \dfrac{Z_j}{\|z\|} = 0$ pro $\|z\| \to 0$, $t \to \infty$.

Soustavou (1) se za těchže předpokladů zabýval již Perron a odvodil věty teorie prvého přiblížení, t. j. věty, které nám dovolují rozhodnout o stabilitě triviálního řešení soustavy (1) na základě soustavy prvého (lineárního) přiblížení $\dot{z}_j = \sum c_{jk} z_k$.

Takové věty se nám podaří odvodit, jestliže buď všechny kořeny charakteristické rovnice

$$|c_{jk} - \varrho\delta_{jk}| = |C - \varrho E| = 0$$

mají záporné reálné části (pak je triviální řešení soustavy (1) asymptoticky stabilní), nebo má-li alespoň jeden kořen kladnou reálnou část (pak je triviální řešení nestabilní).

Perron k odvození vět z teorie prvého přiblížení užil vět o závislosti integrálů soustavy (1) na pravých stranách a na počátečních podmínkách (při této metodě nehraje žádnou roli, zda jsou z_j reálné nebo komplexní).

V přednášce bylo naznačeno, jakým způsobem lze týchž výsledků dosáhnout pomocí druhé Ljapunovovy metody.

Případy, kdy kořeny charakteristické rovnice mají vedle kořenů se zápornou reálnou částí alespoň jeden kořen s nulovou reálnou částí a žádný kořen s kladnou reálnou částí, jsou „kritické", t. j. nerozhodnutelné pomocí vět teorie prvého přiblížení. Tyto případy v komplexním oboru zatím nebyly studovány.

V dalším budeme předpokládat, že Z_j jsou holomorfní funkce $z_1, \ldots, z_n$ začínající členy alespoň 2.st., nezávislé na t. Ukazuje se, že v případě jednoho nulového kořene je triviální řešení soustavy (1) (až na jistý výjimečný případ, kdy je stabilní) vždy nestabilní. (To plyne snadno odtud, že triviální řešení rovnice $\dot{z} = c_k z^k + \ldots$, $(c_k \neq 0)$ je vždy nestabilní.) V případě jednoho ryze imaginárního kořenu je naopak triviální řešení vždy stabilní. To opět snadno plyne odtud, že triviální řešení rovnice $\dot{z} = i\mu z + c_2 z^2 + \ldots$ (μ je reálné) je stabilní; dokonce platí, že všechna řešení v dostatečně malém okolí počátku jsou periodická s touž periodou $2\pi/\mu$. Částečně se podařilo též rozřešit případ dvou ryze imaginárních kořenů, ale výsledek je příliš složitý na to, aby zde mohl být uveden.

Otto Vejvoda, Praha.

O GAUSS-SEIDELOVĚ ITERAČNÍ METODĚ

(Referát o přednášce MIR. FIEDLERA a VL. PTÁKA, proslovené v matematické obci pražské dne 27. února 1956.)

V přednášce byly referovány výsledky, ke kterým autoři dospěli při vyšetřování rychlosti konvergence různých iteračních metod k řešení systémů lineárních rovnic.

Máme-li řešiti systém rovnic

$$x = Ax + y \tag{1}$$

(psáno ve vektorovém tvaru), pak obvyklá iterační metoda spočívá v tom, že vyjdeme od vhodného vektoru x_0 a tvoříme posloupnost x_n podle předpisu $x_{n+1} = Ax_n + y$. Konverguje-li posloupnost x_n k nějakému vektoru x, bude potom x řešením uvedeného systému rovnic (1).

Autoři zavedli pojem zobecnění Gauss-Seidelovy metody takto: Nechť B je libovolná matice taková, že existuje $(E - B)^{-1}$. Potom splnění rovnice (1) je ekvivalentní se splněním rovnice $(E - B)\,x = (A - B)x + y$ neboli $x = (E - B)^{-1}\,(A - B)\,x + (E - B)^{-1}\,y$. Obvyklá iterační metoda aplikovaná na matici $W = (E - B)^{-1}\,(A - B)$ je potom ekvivalentní k metodě

$$(E - B)\,x_{n+1} = (A - B)\,x_n + y\,, \tag{2}$$

kterou nazývají autoři zobecněnou Gauss-Seidelovou metodou. V přednášce byl podrobně osvětlen význam volby

$$b_{ik} = a_{ik} \quad \text{pro} \quad i > k\,, \quad b_{ik} = 0 \quad \text{pro} \quad i \leqq k\,,$$

pro kterou tato metoda přechází v klasickou iterační metodu Gauss-Seidelovu.

Je nasnadě považovati za míru rychlosti konvergence číslo $\lambda(A, B) = \max |\lambda_i|$, kdež λ_i jsou vlastní čísla matice $W = (E - B)^{-1}\,(A - B)$.

Konvergence této metody je potom ekvivalentní s tím, aby $\lambda(A, B) < 1$.

Referovaná práce se zabývá závislostí čísla $\lambda(A, B)$ na volbě matice B. Hlavní výsledky jsou tyto dvě věty:

Věta 1. *Nechť matice A je nezáporná a matice $E - A$ positivně definitní. Nechť matice B splňuje nerovnosti $0 \leqq B \leqq A$. Potom $\lambda(A, B) < 1$ (a tedy metoda konverguje). Jestliže jsou dány dvě matice B_1, B_2, které splňují nerovnosti $0 \leqq B_1 \leqq B_2 \leqq A$, je $\lambda(A, B_2) \leqq \lambda(A, B_1)$ (názorně řečeno, konvergence je tím rychlejší, čím větší jest matice B).*

Věta 2. *Nechť A je nezáporná, $E - A$ positivně definitní a nechť je zvolena matice $0 \leqq B \leqq A$. Jestliže nyní škrtneme některé neznámé a jim příslušné rovnice, bude vzniklá metoda konvergovat aspoň tak dobře jako metoda příslušná A a B. (Přesná formulace věty uvedena v příslušné práci autorů; zde se jedná o to, naznačit její význam.)*

Přednášející uvedli potom řadu aplikací těchto výsledků. Závěrem oznámili, že z jejich pozdějších výsledků plyne, že předpoklady, za nichž platí uvedené věty, lze značně zeslabit.

Vlastimil Pták, Praha.