Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

RŮZNÉ

O SLABÉ KONVERGENCI V PROSTORECH LOKÁLNĚ STEJNOMĚRNĚ KONVEXNÍCH

RUDOLF VÝBORNÝ, Praha

(Došlo dne 19. ledna 1956.) DT: 513.8

Ve své práci [1] zavedl A. R. LOVAGLIA pojem lokálně stejnoměrně konvexního Banachova prostoru, udal příklad prostoru, který je lokálně stejnoměrně konvexní, ale není stejnoměrně konvexní a studoval prostory isomorfní s lokálně stejnoměrně konvexním prostorem. V této poznámce přeneseme na prostory lokálně stejnoměrně konvexní větu dobře známou z prostoru L_p [2].

Nechť X je normovaný lineární prostor. Budeme říkati, že prvek $x \in X$ leží na povrchu jednotkové koule, jestliže $\|x\| = 1$.

Definice. Řekneme, že prostor X je lokálně stejnoměrně konvexní, jestliže ke každému x_0, které leží na povrchu jednotkové koule, a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ s touto vlastností: Jestliže x leží na povrchu jednotkové koule a

$$\|x - x_0\| \geq \varepsilon\,, \quad \text{potom} \quad \left\|\frac{x + x_0}{2}\right\| < 1 - \delta(\varepsilon, x_0)\,.$$

Věta. *Nechť X je lokálně stejnoměrně konvexní lineární normovaný prostor. Nechť x_n konverguje k x slabě a $\|x_n\| \to \|x\|$. Potom $\|x_n - x\| \to 0$.*

Důkaz. Je-li $\|x\| = 0$, není co dokazovat. Nechť $\|x\| \neq 0$, potom $\|x_n\| > 0$ od jistého n počínaje; bez újmy na obecnosti mohu předpokládat, že $\|x_n\| > 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Položme

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \quad \text{a} \quad y = \frac{x}{\|x\|}\,.$$

Potom $y_n \to y$ slabě a $\|y_n\| = \|y\| = 1$. Nechť není pravda, že y_n konverguje k y v normě, potom existuje $\varepsilon_0 > 0$ a posloupnost $\{y_{n_i}\}$ tak, že

$$\|y_{n_i} - y\| \geq \varepsilon_0\,.$$

Označme f takový funkcionál, pro nějž $\|f\| = 1$, $f(y) = 1$, potom je

$$\|\tfrac{1}{2}y_{n_i} + \tfrac{1}{2}y\| < 1 - \delta(\varepsilon_0, y)\,;$$

odtud

$$\tfrac{1}{2}f(y_{n_i}) + \tfrac{1}{2}f(y) < 1 - \delta(\varepsilon_0, y)\,,$$