Předpokládejme, že věta platí pro jisté $m \geqq 2$. Buď $B \in \mathfrak{R}^{m+1}$; nechť B má kladnou míru. Buď D množina těch $y \in E_1$, pro něž má ${}_yB$ kladnou míru; buď D_i množina těch $y \in E_1$, pro něž má ${}_y(M(i, B))$ kladnou míru ($i = 1, \dots, m$). Množina $A = D - \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ je nespočetná (protože množina D má míru > 0, kdežto množiny D_i mají míru 0). Zvolme $y \in A$; dokážeme, že platí ${}_yB \in \mathfrak{R}^m$. Buď tedy $x \in E_{m-1}$. Prvky množiny $({}_yB)_x^m$ jsou ta čísla t, pro něž je $[x, t] \in {}_yB$ neboli $[x, t, y] \in B$; odtud plyne $({}_yB)_x^m = B_{[x,y]}^m$, $N(m, {}_yB) = {}_y(N(m, B))$ a tedy (protože množina ${}_y(M(m, B))$ je uzavřená) $M(m, {}_yB) \subset {}_y(M(m, B))$. Protože y non $\in D_m$, má množina $M(m, {}_yB)$ míru 0. Podobně bychom zjistili, že též množiny $M(1, {}_yB), \dots, M(m - 1, {}_yB)$ mají míru 0. Je tedy opravdu ${}_yB \in \mathfrak{R}^m$. Protože $y \in D$, má ${}_yB$ kladnou míru. Podle indukčního předpokladu nemůže být množina ${}_yB$ řídká; protože však je uzavřená, má vnitřní bod. Podle lemmatu 3 (kde klademe $T = N(m + 1, B)$) není ani množina B řídká. Tím je proveden indukční krok a věta je dokázána.

Poznámka. Buď B řídká množina ze systému $\mathfrak{R}^m$. Podle věty 2 má B míru 0; množina B_x^i má tedy míru 0 pro skoro všechna $x \in E_{m-1}$. Zároveň však má B_x^i pro skoro všechna x jen spočetně mnoho komponent; odtud plyne, že množina B_x^i je pro skoro všechna $x \in E_{m-1}$ spočetná.

Резюме

О НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫХ МНОЖЕСТВАХ В E_m

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага.

(Поступило в редакцию 13/IX 1955 г.)

Определение. Пусть m — целое число > 1, i — целое число, $1 \leqq i \leqq m$; пусть E_m — m-мерное декартово пространство. Если $B \subset E_m$, $x = [x_1, \dots, x_{m-1}] \in E_{m-1}$, то обозначим через B_x^i множество всех $t \in E_1$, для которых $[x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_i, \dots, x_{m-1}] \in B$. Пусть, далее, $N(i, B)$ будет множество всех $x \in E_{m-1}$, для которых множество B_x^i имеет несчетное количество компонент; пусть $M(i, B)$ — замыкание множества $N(i, B)$. Наконец , пусть $\mathfrak{R}^m$ означает систему всех множеств B, которые замкнуты в E_m и для которых множества $M(1, B), \dots, M(m, B)$ имеют меру 0.

Теорема 1. *Пусть B — нигде не плотное измеримое множество в E_2. Пусть $N(1, B)$ — множество первой категории; пусть $N(2, B)$ имеет меру 0. Тогда и B имеет меру 0.*

Теорема 2. *Пусть множество $B \in \mathfrak{R}^m$ нигде не плотно. Тогда оно имеет меру 0.*