

## Werk

**Label:** Abstract

**Jahr:** 1956

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X\\_0081|log93](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0081|log93)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

Предположим, что теорема верна для некоторого  $m \geq 2$ . Пусть  $B \in \mathfrak{R}^{m+1}$ ; пусть  $B$  имеет положительную меру. Пусть  $D$  — множество тех  $y \in E_1$ , для которых  ${}_y B$  имеет положительную меру; пусть  $D_i$  — множество тех  $y \in E_1$ , для которых  ${}_y(M(i, B))$  имеет положительную меру ( $i = 1, \dots, m$ ).

Множество  $A = D - \bigcup_{i=1}^m D_i$  является несчетным (потому что множество  $D$  имеет меру  $> 0$ , в то время как множества  $D_i$  имеют меру 0). Возьмем  $y \in A$ ; докажем, что  ${}_y B \in \mathfrak{R}^m$ . Пусть тогда  $x \in E_{m-1}$ . Элементы множества  $({}_y B)_x^m$  являются теми числами  $t$ , для которых  $[x, t] \in {}_y B$  или  $[x, t, y] \in B$ ; отсюда вытекает  $({}_y B)_x^m = B_{[x, y]}^m$ ,  $N(m, {}_y B) = {}_y(N(m, B))$  и поэтому (потому что множество  ${}_y(M(m, B))$  является замкнутым)  $M(m, {}_y B) \subset {}_y(M(m, B))$ . Поскольку  $y \notin D_m$ , имеет меру 0 множество  $M(m, {}_y B)$ . Подобным образом мы сможем убедиться, что те же множества  $M(1, {}_y B), \dots, M(m-1, {}_y B)$  имеют меру 0. Таким образом действительно  ${}_y B \in \mathfrak{R}^m$ . Поскольку  $y \in D$ , имеет  ${}_y B$  положительную меру. Согласно индукционному предположению не может быть множества  ${}_y B$  разреженным; потому что оно является замкнутым, имеет внутреннюю точку. Согласно лемме 3 (где положим  $T = N(m+1, B)$ ) не является ни множество  $B$  разреженным. Таким образом проведен индукционный шаг и теорема доказана.

**Замечание.** Пусть  $B$  — разреженное множество из системы  $\mathfrak{R}^m$ . Согласно теореме 2 имеет меру 0; множество  $B_x^i$  имеет меру 0 для почти всех  $x \in E_{m-1}$ . Кроме того имеет  $B_x^i$  для почти всех  $x$  лишь счетное число компонент; отсюда вытекает, что множество  $B_x^i$  является для почти всех  $x \in E_{m-1}$  счетным.

## Резюме

### О НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫХ МНОЖЕСТВАХ В $E_m$

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага.

(Поступило в редакцию 13/IX 1955 г.)

**Определение.** Пусть  $m$  — целое число  $> 1$ ,  $i$  — целое число,  $1 \leq i \leq m$ ; пусть  $E_m$  —  $m$ -мерное декартово пространство. Если  $B \subset E_m$ ,  $x = [x_1, \dots, x_{m-1}] \in E_{m-1}$ , то обозначим через  $B_x^i$  множество всех  $t \in E_1$ , для которых  $[x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_i, \dots, x_{m-1}] \in B$ . Пусть, далее,  $N(i, B)$  будет множество всех  $x \in E_{m-1}$ , для которых множество  $B_x^i$  имеет несчетное количество компонент; пусть  $M(i, B)$  — замыкание множества  $N(i, B)$ . Наконец, пусть  $\mathfrak{R}^m$  означает систему всех множеств  $B$ , которые замкнуты в  $E_m$  и для которых множества  $M(1, B), \dots, M(m, B)$  имеют меру 0.

**Теорема 1.** Пусть  $B$  — нигде не плотное измеримое множество в  $E_2$ . Пусть  $N(1, B)$  — множество первой категории; пусть  $N(2, B)$  имеет меру 0. Тогда и  $B$  имеет меру 0.

**Теорема 2.** Пусть множество  $B \in \mathfrak{R}^m$  нигде не плотно. Тогда оно имеет меру 0.