Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

POZNÁMKA O ŘÍDKÝCH MNOŽINÁCH V E_m

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo dne 13. září 1955.) DT: 519.51

V práci je dokázána věta, která má asi tento názorný význam: Řídká množina v E_2 má míru 0, když jenom podél nemnoha rovnoběžek se souřadnými osami je příliš roztrhána. V E_m ($m > 2$) platí podobná věta pro řídké uzavřené množiny.

Lemma 1. *Buď P separabilní metrický prostor. Buď N nespočetná množina; každému $x \in N$ buď přiřazen bod $b(x) \in P$. Buď $\varepsilon > 0$. Potom existuje bod $c \in P$ tak, že pro nespočetně mnoho $x \in N$ platí $\Omega(c, \varepsilon) \subset \Omega(b(x), 2\varepsilon)$.**)

Důkaz. Buď C hustá spočetná část prostoru P. Přiřaďme každému $c \in C$ množinu N_c těch $x \in N$, pro něž $c \in \Omega(b(x), \varepsilon)$. Protože $\bigcup_{c \in C} N_c = N$, existuje $c \in C$ tak, že množina N_c je nespočetná. Pro každé $x \in N_c$ je pak $\Omega(c, \varepsilon) \subset \subset \Omega(b(x), 2\varepsilon)$.

Označení. Buď E_m m-rozměrný kartézský prostor. Je-li $m > 1$, i celé, $1 \leqq i \leqq m$, $B \subset E_m$, $x = [x_1, \ldots, x_{m-1}] \in E_{m-1}$, buď B_x^i množina všech $t \in E_1$, pro něž platí

$$[x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_i, \ldots, x_{m-1}] \in B\,.$$

Lemma 2. *Buď $B \subset E_m$ ($m > 1$); buď Ω neprázdná otevřená část E_{m-1}; buď A nespočetná část E_1; konečně buď T množina těch $x \in E_{m-1}$, pro něž má B_x^m nespočetně mnoho komponent. Nechť $\Omega \times A \subset B$ a nechť T je první kategorie (v E_{m-1}). Potom množina B není řídká.*

Důkaz. Jestliže množina A není řídká, není ani množina B řídká. Předpokládejme tedy, že množina A i množina B je řídká; ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu. Buďte $L_1, L_2, \ldots$ všechny komponenty množiny $E_1 - \bar{A}$ (je jich ovšem nekonečně mnoho). Dále buď $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, kde množiny T_n jsou řídké. Buď Ω_0 nějaká omezená otevřená neprázdná část množiny Ω; položme $G_1 = \Omega_0 - \bar{T}_1$. Protože G_1 je neprázdná otevřená množina a protože množina B je řídká, není $G_1 \times L_1 \subset \bar{B}$. Existuje tudíž bod $x_1 \in G_1$ a číslo

*) Je-li $a \in P$, $\delta > 0$, značí $\Omega(a, \delta)$ otevřenou kouli o středu a a poloměru δ.

$y_1 \in L_1$ tak, že $[x_1, y_1]$ non $\in \bar{B}$. Protože množina $(G_1 \times L_1) - \bar{B}$ je otevřená, existuje otevřené okolí Ω_1 bodu x_1 tak, že $\bar{\Omega}_1 \subset G_1$ a že žádný bod $[x, y_1]$, kde $x \in \Omega_1$, neleží v B. Položme dále $G_2 = \Omega_1 - \bar{T}_2$. Protože není $G_2 \times L_2 \subset \bar{B}$, existuje bod $x_2 \in G_2$ a číslo $y_2 \in L_2$ tak, že $[x_2, y_2]$ non $\in \bar{B}$ atd. Tímto způsobem sestrojíme posloupnosti $\{\Omega_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $\{G_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Množina Ω_0 je omezená a platí $\bar{\Omega}_n \subset G_n \subset \Omega_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; je tedy $\emptyset \neq$ $\neq \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 \cap \ldots \subset \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \ldots$ Zvolme $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Potom platí jednak $[x, y_n]$ non $\in B$ pro $n = 1, 2, \ldots$, jednak $[x, y] \in B$ pro každé $y \in A$. Můžeme tedy každému bodu $y \in A$ přiřadit tu komponentu $K(y)$ množiny B_x^m, pro niž $y \in K(y)$. Nechť $z_1, z_2 \in A$, $z_1 < z_2$. Protože množina A je řídká, existuje z tak, že platí $z_1 < z < z_2$, z non $\in \bar{A}$. Nechť $z \in L_n$. Protože $L_n \subset (z_1, z_2)$, leží mezi body z_1, z_2 bod y_n, který nepatří do B_x^m; odtud plyne $K(z_1) \neq K(z_2)$. Zobrazení $y \to K(y)$ je tedy prosté; vidíme, že množina B_x^m má nespočetně mnoho komponent. Protože však platí $x \in \Omega_n \subset G_n \subset \Omega_{n-1} - \bar{T}_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$, neleží bod x v žádné z množin T_n a tedy ani v množině T. To je hledaný spor.

Označení. Buď $B \subset E_m$ $(m > 1)$, $y \in E_1$. Nechť ${}_yB$ značí množinu všech $x \in E_{m-1}$, pro něž je $[x, y] \in B$.

Lemma 3. *Buď $B \subset E_m$ $(m > 1)$. Buď T množina všech $x \in E_{m-1}$, pro něž má B_x^m nespočetně mnoho komponent. Nechť pro nespočetně mnoho $y \in E_1$ má množina ${}_yB$ vnitřní bod; T buď první kategorie (v E_{m-1}). Potom množina B není řídká.*

Důkaz. Buď Q množina všech y, pro něž má ${}_yB$ vnitřní bod. Ke každému $y \in Q$ existuje bod $b(y) \in E_{m-1}$ a číslo $\varepsilon(y) > 0$ tak, že $\Omega(b(y), \varepsilon(y)) \subset {}_yB$. Buď Q_n množina těch $y \in Q$, pro něž je $\varepsilon(y) > \frac{1}{n}$. Pro každé $y \in Q_n$ je pak $\Omega\left(b(y), \frac{1}{n}\right) \subset {}_yB$. Je $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = Q$; existuje proto n tak, že množina Q_n je nespočetná. Podle lemmatu 1 existuje $c \in E_{m-1}$ a nespočetná množina $A \subset Q_n$ tak, že je $\Omega = \Omega\left(c, \frac{1}{2n}\right) \subset \Omega\left(b(y), \frac{1}{n}\right)$ pro každé $y \in A$. Je tedy $\Omega \times A \subset B$; podle lemmatu 2 není množina B řídká.

Věta 1. *Buď měřitelná množina B řídká v E_2. Buď N_i množina všech $t \in E_1$, pro něž má B_t^i nespočetně mnoho komponent $(i = 1, 2)$. Nechť množina N_1 má míru 0 a nechť množina N_2 je první kategorie. Potom má B míru 0.*

Důkaz. Buď D množina těch $y \in E_1$, pro něž má ${}_yB$ kladnou míru. Připusťme, že množina B má kladnou míru. Potom (podle Fubiniovy věty) má též D kladnou míru. Protože N_1 má míru 0, je množina $A = D - N_1$ nespočetná. Je-li $y \in A$, má množina ${}_yB = B_y^1$ kladnou míru a jen spočetně mnoho komponent. Aspoň jedna komponenta je tedy (nezvrhlý) interval; ${}_yB$ má tudíž vnitřní bod. Podle lemmatu 3 (kde klademe $T = N_2$) není množina B řídká. Tento spor dokazuje, že B má míru 0.

Poznámka. Jestliže množina $B \subset E_2$ je řídká a jestliže množiny N_1, N_2 mají míru 0, může ještě B mít kladnou míru, jak ukazuje tento příklad (kde množina B je dokonce uzavřená):

Seřaďme všechna racionální čísla intervalu $(0, 1)$ do posloupnosti $r_1, r_2, \ldots$ Jsou-li m, n přirozená čísla, položme

$$I_{m,n} = (r_m, r_m + 2^{-m-n}) \times (r_n, r_n + 2^{-m-n}) .$$

Dále buď $G = \bigcup_{m,n} I_{m,n}$, $K = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, $B = K - G$. Míra G je menší než $\sum_{m,n} 4^{-m-n} = \sum_{m=1}^{\infty} 4^{-m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, takže množina B má kladnou míru (a zřejmě je řídká). Položme ještě $J_n = (r_n, r_n + 2^{-n})$, $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} J_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Míra množiny A_n je menší než $\sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+1}$, tedy míra průniku $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ je nula. Zvolme $t \in E_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Existuje p tak, že t non $\in A_p$; dále existuje přirozené q tak, že v intervalu $(t - 2^{-q}, t)$ neleží žádné z čísel $r_1, \ldots, r_p$. Nechť nyní v intervalu $I_{m,n}$ leží nějaký bod s první souřadnicí rovnou t. Protože $t \in (r_m, r_m + 2^{-m-n}) \subset J_m \subset A_m$, ale t non $\in A_p$, je $m < p$. Zároveň je však $t - 2^{-m-n} < r_m < t$; protože číslo r_m neleží v intervalu $(t - 2^{-q}, t)$, je $n < q$. Odtud plyne vztah $G_t^2 = H_t^2$, kde $H = \bigcup_{\substack{m<p \\ n<q}} I_{m,n}$; množina $B_t^2 = K_t^2 - H_t^2$ má tudíž jen konečný počet komponent. To platí pro každé $t \in E_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, tedy pro skoro všechna $t \in E_1$. Podobně lze zjistit, že pro skoro všechna $t \in E_1$ má B_t^1 jen konečný počet komponent.

Ještě snazší je sestrojit řídkou uzavřenou množinu $B \subset E_2$ s kladnou měrou tak, aby obě množiny N_1, N_2 byly první kategorie. Stačí položit $B = D \times D$, kde D je nějaká řídká uzavřená část E_1 s kladnou měrou.

Definice. Nechť m, i jsou celá, $m > 1$, $1 \leqq i \leqq m$ a nechť $B \subset E_m$. Buď $N(i, B)$ množina všech $x \in E_{m-1}$, pro něž má B_x^i nespočetně mnoho komponent; buď $M(i, B)$ uzávěr množiny $N(i, B)$. Buď $\mathfrak{R}^m$ systém všech množin B, které jsou uzavřené v E_m a pro něž mají množiny $M(1, B), \ldots, M(m, B)$ míru 0 (v E_{m-1}).

Věta 2. *Nechť množina $B \in \mathfrak{R}^m$ je řídká. Potom má míru* 0.

Důkaz. Buď napřed $m = 2$. Ve větě 1 je $N_i = N(i, B)$ $(i = 1, 2)$. Množina $M(2, B)$ je uzavřená a má míru 0; je tedy řídká. Tím spíše je $N_2 = N(2, B)$ množina první kategorie. Protože $M(1, B)$ má míru 0, má i $N_1 = N(1, B)$ míru 0. Podle věty 1 má tedy B míru 0.