

Werk

Label: Article

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0081|log88

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

O PROJEKTIVNÍM POJETÍ TRANSLAČNÍCH PLOCH

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 15. července 1955.)

DT:513.735

V článku je studováno zobecnění translačních ploch. Řídící i tvořící křivky jsou nahrazeny obecnými podmnožinami afinního prostoru (resp. projektivního prostoru) se souřadnicemi z daného tělesa. Úvahy úzce souvisí s teorií součtových útvarů v daném afinním prostoru, resp. se zobecněním této teorie pro prostor projektivní.

Podnětem k této poznámce byla mi část referátu [1] prof. Fr. KADERÁVKA; prof. Kaderávek se zmínil o užití translačních ploch při zřizování kleneb z tenkého betonu (zejména při restauračních pracích na stavebních památkách) a o možnosti užití nových ploch, které se jeví jako přirozené zobecnění ploch translačních. Omezují se na úvahy theoretického rázu, při čemž mi jde především o definici útvarů, které nemusí být nutně plochami; prostor, v němž jsou tyto útvary definovány, je afinní prostor se souřadnicemi z tělesa T , resp. projektivní rozšíření tohoto prostoru. Avšak při zkoumání podmínek, za nichž definovaný útvar je plochou, omezují se pro jednoduchost na prostor eukleidovský, resp. na jeho projektivní rozšíření. Řadu projektivních vlastností nových ploch lze odvodit z vlastností ploch translačních; z toho důvodu jsem se touto věcí nezabýval. Diferenciálně geometrické vlastnosti, potřebné zejména při statických výpočtech, čekají ovšem na své zpracování.

1. Předmětem našeho vyšetřování bude nejprve afinní n -rozměrný prostor A_n se souřadnicemi z některého tělesa T charakteristiky $p \neq 2$.

Definice 1. a) Nechť platí ${}^1k, {}^2k \subset A_n$, $K \in {}^1k \cap {}^2k$. Pak ke každému $X \in {}^2k$ přiřadíme množinu 1k_X vzniklou z množiny 1k posunutím o vektor KX . Sjednocení $\bigcup_{X \in {}^2k} {}^1k_X$ označme $T_K({}^1k, {}^2k)$ (t. zv. *translační útvar*).

b) Nechť ${}^1l, {}^2l \subset A_n$. Pak sjednocení $\bigcup_{{}^1Le{}^1e, {}^2Le{}^2e} \{{}^1L + {}^2L\}$ označme $S({}^1l, {}^2l)$ (t. zv. *součtový útvar*).

c) Nechť ${}^1l, {}^2l \subset A_n$. Pak sjednocení $\bigcup_{{}^1Le{}^1e, {}^2Le{}^2e} \{\frac{1}{2}({}^1L + {}^2L)\}$ označme $S({}^1l, {}^2l)$ (t. zv. *středový útvar*).

Zvolíme-li ${}^1k = {}^2k = \{K, L\}$, pak zřejmě rovnost mezi množinami $T_K({}^1k, {}^2k)$, $T_L({}^1k, {}^2k)$ neplatí. Bod K v def. 1a) je tedy pro uvedenou definici podstatný. Dále si všimněme, že množina C z def. 1c) nezávisí na souřadnicovém systému.

Věta 1. a) Platí-li předpoklady z def. 1a), pak $T_K({}^1k, {}^2k) = T_K({}^2k, {}^1k)$.

b) Platí-li předpoklady z def. 1a) a je-li bod K počátkem, pak $T_K({}^1k, {}^2k) = S({}^1k, {}^2k)$.

c) Platí-li předpoklady z def. 1a) a je-li bod K počátkem, pak $T_K({}^1k, {}^2k) = C(2 \cdot {}^1k, 2 \cdot {}^2k)$. Naopak, je-li ${}^1l, {}^2l \subset A_n$ a je-li počátek středem dvou různých bodů ${}^1B \in {}^1l, {}^2B \in {}^2l$, pak $C({}^1l, {}^2l) = T_0(\frac{1}{2} \cdot {}^1l, \frac{1}{2} \cdot {}^2l)$.

Důkaz. a) Množina $T_K({}^1k, {}^2k)$ má za své prvky body ${}^1X + {}^2X - K$, kde ${}^1X \in {}^1k, {}^2X \in {}^2k$. Zvolíme-li počátek v bodě K , pak žádaná symetrie je ihned patrná. Z důkazu tvrzení a) plyne již důkaz obou zbývajících tvrzení b)–c).

Obsahem věty 1 je zobecnění známých vlastností translačních ploch eukleidovského prostoru, a to vlastností o obou systémech základních křivek translační plochy, dále o tom, že každá translační plocha je součtovou plochou dvou křivek a že každá translační plocha je středovou plochou dvou křivek. Námi užitý důkaz zdá se být daleko jednodušší (a při tom obecnější), než důkazy obvykle užívané (viz ku př. [2]).

V další větě předpokládejme, že prostor A_n je reálný eukleidovský prostor E_3 . „Křivkou“ a „plochou“ budeme rozumět jednoduchou křivku a plochu.

Věta 2. Jsou-li ${}^1l, {}^2l$ křivky, pak množina $C({}^1l, {}^2l)$ je plochou, právě když pro žádnou dvojici přímek ${}^1p \parallel {}^2p$ neplatí ${}^1l \subset {}^1p, {}^2l \subset {}^2p$.

Důkaz. Předpokládejme, že křivky ${}^1l, {}^2l$ mají parametrické rovnice $x = f_1(v)$, $y = f_2(v)$, $z = f_3(v)$, resp. $x = g_1(w)$, $y = g_2(w)$, $z = g_3(w)$. Pak množina $C({}^1l, {}^2l)$ má parametrické rovnice $2x = f_1(v) + g_1(w)$, $2y = f_2(v) + g_2(w)$, $2z = f_3(v) + g_3(w)$. Označme dále $h_{v,w}$ hodnotu matice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f'_1(v)}{2}, \frac{f'_2(v)}{2}, \frac{f'_3(v)}{2} \\ \frac{g'_1(w)}{2}, \frac{g'_2(w)}{2}, \frac{g'_3(w)}{2} \end{pmatrix}.$$

Nyní dokážeme pomocné tvrzení: Nerovnost $h_{v,w} < 2$ je splněna identicky v argumentech v, w , když a jen když platí některá z těchto dvou podmínek:

1. $f_1(v) = f_2(v) = f_3(v)$ identicky v argumentu v , $g_1(w) = g_2(w) = g_3(w)$ identicky v argumentu w .

2. Funkce f'_i, g'_i jsou konstantní a platí $f'_i = q \cdot g'_i$ pro nenulové q a pro $i = 1, 2, 3$.

Je-li totiž některý z prvků matice M konstantní funkcí, pak je konstantní funkcí též každý prvek, stojící v témže řádku s původním prvkem. V opačném případě by existovala dvojice v_0, w_0 tak, že $h_{v_0, w_0} = 2$, a to je hledaný spor.

Jsou-li prvky téhož řádku matice M od sebe různé nekonstantní funkce, pak opět existuje dvojice v_0, w_0 tak, že $h_{v_0, w_0} = 2$; to je opět spor. Pomocné tvrzení je tím dokázáno.

Z pomocného tvrzení plyne ihned důkaz poučky 2; podmínka 1, resp. 2 znamená totiž, že křivky $^1l, ^2l$ jsou položeny na dvou rovnoběžných přímkách.

Definice 2. Předpokládejme, že množiny $^1k, ^2k \subset A_n$ mají společný bod K a že nadrovina ϱ má s oběma množinami $^1k, ^2k$ prázdný průnik. Každému $X \in ^2k$ přiřadme množinu 1k_x tak, že 1) je-li $K = X$ anebo $K \neq X, KX \parallel \varrho$, pak 1k_x vznikne u 1k posunutím o vektor KX ; 2) je-li $K \neq X, \{S_x\} = KX \cap \varrho$, pak 1k_x je obrazem množiny 1k v homothetii o středu S_x , v níž K je vzor a X jeho obraz. Sjednocení $\bigcup_{X \in ^2k} ^1k_x$ označíme $H_{K, \varrho}(^1k, ^2k)$.

Všimněme si, že z metrického hlediska není útvar T z def. 1a) speciálním případem útvaru H z def. 2. Je-li v eukleidovském prostoru útvar T plochou, dostáváme zřejmě translační plochu. Je-li obdobně útvar H plochou, dostaneme plochu, kterou zavedl poněkud odlišným způsobem prof. Kadeřávek; speciální případy takovéto plochy byly navrženy pro klenby z tenkého betonu nad obecným čtyřúhelníkovým půdorysem. Souvislost mezi útvary T, H osvětlíme v příštím odstavci.

2. Dále budeme vyšetřovat n -rozměrný projektivní prostor P_n se souřadnicemi z některého tělesa T charakteristiky $p \neq 2$.

Definice 3. Nechť $^1l, ^2l \subset P_n$ a nechť nadrovina σ má s oběma množinami $^1l, ^2l$ prázdný průnik. Ke každé dvojici $^1L \in ^1l, ^2L \in ^2l$ přiřadme bod $X_{^1L, ^2L}$ tak, že 1) $X_{^1L, ^2L} = ^1L$ v případě $^1L \in ^1l \cap ^2l$; 2) $(^1L^2L \cap \sigma, X, ^1L, ^2L) = -1$ v případě, že $^1L \neq ^2L$.

Sjednocení $\bigcup_{^1L \in ^1l, ^2L \in ^2l} \{X_{^1L, ^2L}\}$ označíme $P_\sigma(^1l, ^2l)$.

Útvar P z def. 3 je zřejmě zobecněním útvaru C z def. 1b; přechod od P k C lze uskutečnit v rámci přechodu od prostoru P_n k prostoru A_n (nadrovina σ prohlášena za nevlastní).

Za předpokladů z def. 3 platí $P_\sigma(^1l, ^2l) = P_\sigma(^2l, ^1l)$. Důkaz je snadný.

Projektivní zobecnění útvaru T z def. 1a, resp. útvaru H z def. 2 je dosti složité: Nechť platí $^1k, ^2k \subset P_n, K \in ^1k \cap ^2k$; nechť dále ϱ, σ jsou nadroviny, které mají s oběma množinami $^1k, ^2k$ prázdný průnik. Každému bodu $X \in ^2k$ přiřadme množinu 1k_x tak, že 1) $^1k_x = ^1k$; 2) je-li $K \neq X$, pak 1k_x je obrazem množiny 1k v kolineaci o středu $KX \cap \varrho$, nadrovině samodružných bodů σ a o vzoru K s obrazem X . Sjednocení $\bigcup_{X \in ^2k} ^1k_x$ označíme $\mathfrak{F}_{K, \varrho, \sigma}(^1k, ^2k)$.

Lze dokázat, že ke každému útvaru $\mathfrak{F}$ existuje jemu rovný útvar P z def. 3 a naopak. Tím se však již zabýváti nebudeme.

Útvar H z def. 2 je speciálním případem útvaru $\mathfrak{F}$ (je-li nadrovina σ nevlastní), a tedy též speciálním případem útvaru P .