Werk

Label: Abstract

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0081|log87

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

чисел λ_n является функционалом на $\mathfrak{M}$: $\lambda_n[M]$, $M \in \mathfrak{M}$. Нас будет интересовать, с какой точностью можно аппроксимировать функционал $\lambda[M] = \lambda_1[M]$ на $\mathfrak{M}$ линейным функционалом $\gamma[M]$ вида $\gamma[M] = \int_0^1 V \, \mathrm{d}M$, где „весовая" функция V непрерывна на $\langle 0, 1 \rangle$, следовательно, $V \in C(0, 1)$.

„Неточностью" аппроксимации $\gamma[M]$ назовем число

$$N_\gamma = \sup_{M \in \mathfrak{M}} \left| \frac{\gamma[M]}{\lambda[M]} - 1 \right| .$$

Этим мы определили некоторый функционал на $C(0, 1)$:

$$N_V = \sup_{M \in \mathfrak{M}} \left| \frac{\int_0^1 V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \right| , \quad V \in C(0, 1) .$$

Относительно этого функционала мы доказали, что он непрерывен на $C(0, 1)$, принимает там свое минимальное значение и притом точно в одной точке. Функция $V^* \in C(0, 1)$, на которой достигается этот минимум, определяется соотношением:

$$V^*(x) = \frac{2}{2 + N_{\Gamma(x,x)}} \Gamma(x, x)$$

и наименьшая неточность N_{V^*} дана соотношением

$$N_{V^*} = \frac{N_{\Gamma(x,x)}}{2 + N_{\Gamma(x,x)}} .$$

Как видно, вычисление неточности наилучшей аппроксимации сводится к вычислению числа $N_{\Gamma(x,x)}$. В виде примера вычислено $N_{\Gamma(x,x)}$ для случая, когда $\Gamma(x, s)$ является функцией Грина краевой задачи

$$\lambda y''''(x) = \mu(x) y(x) , \quad y(0) = y(1) = 0 , \quad y''(0) = y''(1) = 0 .$$

В этом случае находим неточность $N_{\Gamma(x,x)} = \frac{1}{3}$, следовательно $N_{V^*} = \frac{1}{7}$.

Zusammenfassung

EINE APPROXIMATION DES ERSTEN EINGENWERTES EINER HOMOGENEN INTEGRALGLEICHUNG DURCH EIN LINEARES FUNKTIONAL

LUDVÍK JANOŠ, Praha.
(Eingelangt 4. VII. 1955.)

Der Gegenstand unserer Überlegungen ist die folgende Integralgleichung:

$$\int_0^1 \Gamma(x, s) \, y(s) \, \mathrm{d}M(s) = \lambda y(x) ,$$

wo $\Gamma(x, s)$ ein Oscillationskern und $M(s)$ eine beliebige nicht abnehmende Funktion auf $\langle 0, 1\rangle$ ist, welche die Bedingungen $M(0) = 0$, $M(1) = 1$ erfüllt. Die Menge dieser Funktionen sei $\mathfrak{M}$.

Das Spektrum der betrachteten Integralgleichung bildet eine abnehmende Folge: $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \ldots$ positiver Zahlen und jede dieser Zahlen λ_n ist ein Funktional auf $\mathfrak{M}$: $\lambda_n[M]$, $M \in \mathfrak{M}$. Es interessiert uns, mit welcher Genauigkeit es möglich ist, das Funktional $\lambda[M] = \lambda_1[M]$ durch ein lineares Funktional $\gamma[M] = \int_0^1 V \, \mathrm{d}M$ zu approximieren, wo die „Gewichtfunktion" V eine stetige Funktion auf $\langle 0, 1\rangle$ ist.

Als die Ungenauigkeit der Approximation $\gamma[M]$ nehmen wir die Zahl:

$$N_\gamma = \sup_{M \in \mathfrak{M}} \left| \frac{\gamma[M]}{\lambda[M]} - 1 \right| .$$

Dadurch ist aber ein gewisses Funktional auf $C(0, 1)$ definiert:

$$N_V = \sup_{M \in \mathfrak{M}} \left| \frac{\int_0^1 V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \right| , \quad V \in C(0, 1) .$$

Wir haben bewiesen, dass dieses Funktional stetig auf $C(0, 1)$ ist und dass es dort sein Minimum erreicht und zwar genau für eine Funktion $V^* \in C(0, 1)$.

Die Funktion, auf der das Minimum erreicht wird, ist durch die Beziehung

$$V^*(x) = \frac{2}{2 + N_{\Gamma(x,x)}} \Gamma(x, x) \text{ bestimmt.}$$

Die dazugehörige kleinste Ungenauigkeit ist

$$N_{V^*} = \frac{N_{\Gamma(x,x)}}{2 + N_{\Gamma(x,x)}} .$$

Man sieht, dass die Berechnung der Ungenauigkeit der besten Approximation auf die Berechnung des Zahles $N_{\Gamma(x,x)}$ reduziert ist. Als Beispiel ist die Zahl $N_{\Gamma(x,x)}$ berechnet für den Fall, dass $\Gamma(x, s)$ eine Greensche Funktion des Randwertproblems

$$\lambda y''''(x) = \mu(x) y(x) , \quad y(0) = y(1) = 0 , \quad y''(0) = y''(1) = 0 , \quad \text{ist.}$$

In diesem Fall ist $N_{\Gamma(x,x)} = \frac{1}{3}$, also $N_{V^*} = \frac{1}{7}$.