Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

APROXIMACE PRVNÍ VLASTNÍ HODNOTY INTEGRÁLNÍ ROVNICE LINEÁRNÍM FUNKCIONÁLEM

LUDVÍK JANOŠ, Praha.

(Došlo dne 4. července 1955.) DT:517.948

V práci je uvažována první vlastní hodnota λ_1 integrální rovnice, popisující příčné kmity pružného kontinua, jako funkcionál $\lambda[M]$ na množině všech možných rozložení hmoty.

Je tu ukázáno, že existuje právě jeden lineární funkcionál, který představuje nejlepší aproximaci funkcionálu $\lambda[M]$. Je dále propočítán konkretní příklad.

V práci se budeme zabývat okrajovým problémem

$$\left[\frac{y''(x)}{p(x)}\right]'' = \omega^2\mu(x)\, y(x) \quad 0 \leq x \leq 1\,, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0\,, \quad y''(0) = y''(1) = 0\,. \tag{1a}$$

Diferenciální rovnice (1) popisuje příčné kmity pružných kontinuí (nosníky, hřídele a pod.), $y(x)$ značí průhyb v místě x, $p(x)$ je převrácená hodnota tuhosti v místě x $\left(p(x) = \frac{1}{EJ(x)}\right.$, kde $J(x)$ je moment setrvačnosti průřezu, $\mu(x)$ je hustota hmoty v místě x a ω značí frekvenci kmitání. Krajové podmínky (1a) vyjadřují okolnost, že v krajních bodech (podpory, ložiska) jsou průhyby a ohybové momenty nulové.

Postupnou integrací rovnice (1) s ohledem na krajové podmínky (1a) dostaneme pro funkci $y(x)$ homogenní integrální rovnici tvaru

$$y(x) = \omega^2 \int_0^1 \Gamma(x, s)\, y(s)\, \mu(s)\, ds\,. \tag{2}$$

Funkce $\Gamma(x, s)$ je Greenovou funkcí okrajového problému (1), (1a) a rovnice (2) je ekvivalentní s tímto problémem. Rovnice (2) nám však nabízí důležité zobecnění na případy, kdy hmota je na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ rozložme jak spojitě, tak i nespojitě. Definujeme-li funkci $M(x)$ jako celkovou hmotu rozprostřenou na intervalu $\langle 0, x\rangle$, můžeme integrál $\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y(s)\, \mu(s)\, ds$ nahradit Stieltjesovým integrálem $\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y(s)\, \mathrm{d}M(s)$. Zavedeme-li ještě místo charakteristických čísel ω_i^2 vlastní hodnoty vztahem $\lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2}$, můžeme rovnici (2) napsat ve tvaru

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y(s)\, \mathrm{d}M(s) = \lambda y(x)\,. \tag{3}$$

Funkce $M(x)$ je nyní libovolná neklesající funkce na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Budeme nyní říkat, že v bodě $x \in (0, 1)$ není hmota když a jen když existuje okolí bodu $x \in (a, b)$ takové, že funkce $M(t)$ je na něm konstantní. V jiném případě budeme říkat, že v bodě x je hmota, a množinu těch bodů $x \in (0, 1)$ nazveme J_M, tedy $J_M \subset (0, 1)$. V knize [1] jsou dokázány tyto vlastnosti rovnice (3):

1. Jádro je spojitá funkce, splňující vztah

$$\Gamma(x, s) = \Gamma(s, x)\,, \quad x, s \in \langle 0, 1\rangle\,,$$

2. $$\Gamma(x, s) > 0\,, \quad x, s \in (0, 1)\,,$$

(což by konečně plynulo okamžitě po čtyřnásobné postupné integraci rov. 1).

3. Jádro je positivně definitní, což značí, že systém vlastních čísel (t. zv. spektrum) tvoří nerostoucí posloupnost nezáporných čísel $\lambda_i \geq 0$, $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0$.

4. V případě, že množina J_M je nekonečná, má spektrum nekonečně mnoho hodnot a každou obsahuje jen jednou, což znamená, že lineární prostor vlastních funkcí $y(x)$ příslušný k libovolné vlastní hodnotě λ_i má dimensi 1. Obsahuje-li množina J_M jen konečný počet bodů, sestává spektrum z právě tolika různých hodnot.

5. Vlastní funkce $y_i(x)$ příslušná vlastní hodnotě λ_i má na intervale $(0, 1)$ právě $i - 1$ nulových bodů.

Budeme nyní studovat první vlastní hodnotu integrální rovnice (3) jako funkcionál na množině všech možných rozložení hmot na intervale $\langle 0, 1\rangle$. Budeme proto psát $\lambda[\mathrm{M}]$, kde M značí libovolnou nezápornou neklesající funkci na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Z rovnice (3) je patrno, že studovaný funkcionál je homogenní stupeň prvého, což značí $\lambda[aM] = a\lambda[M]$ pro $a \geq 0$.

Můžeme se proto ve svém vyšetřování omezit na množinu těch $M(x)$, pro něž je $M(1) = 1$. Tuto množinu nazveme $\mathfrak{M}$ a sestává tedy ze všech nezáporných neklesajících funkcí $M(x)$ na intervale $\langle 0, 1\rangle$, pro něž platí $M(1) = 1$ a $M(0) = 0$. Pro pohodlí dalšího vyšetřování je účelné zavést podmnožiny $\mathfrak{M}_z \subset \mathfrak{M}$, pro $0 < z \leq \frac{1}{2}$, definované takto:

$$M(x) \in \mathfrak{M}_z \Leftrightarrow \begin{cases} M(x) = 0\,, & 0 \leq x < z\,, \\ M(x) = 1\,, & 1 - z \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

$\mathfrak{M}_z$ je tedy množina rozložení hmot celkové hodnoty 1 na intervale $\langle z, 1 - z\rangle$, při čemž na zbylé intervaly $\langle 0, z\rangle$, $(1 - z, 1\rangle$ nepřipadá žádná hmota. Uvědomme si ještě, že ne každé dvě různé funkce z $\mathfrak{M}$ představují různá rozložení hmoty. Tak na př. funkce definovaná takto:

$M_1(x) = 0$ pro $0 \leq x < \frac{1}{2}$, $M_1(x) = \frac{1}{2}$ pro $x = \frac{1}{2}$, $M_1(x) = 1$ pro $\frac{1}{2} < x \leq 1$,

a funkce

$$M_2(x) = 0 \text{ pro } 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}, \quad M_2(x) = 1 \text{ pro } \tfrac{1}{2} < x \leq 1,$$

představují stejné rozložení hmoty, neboť platí, že

$$\int_0^1 g(x)\, \mathrm{d}M_1 = \int_0^1 g(x)\, \mathrm{d}M_2,$$

pro každou spojitou funkci $g(x)$ a tudíž integrální rovnice

$$\lambda y(x) = \int_0^1 \Gamma(x, s)\, y(s)\, \mathrm{d}M_1(s),$$

$$\lambda y(x) = \int_0^1 \Gamma(x,s)\, y(s)\, \mathrm{d}M_2(s),$$

jsou identické.

Je proto účelné, zavést na množině $\mathfrak{M}$ ekvivalenci definovanou takto:

$$M_1 \in \mathfrak{M}, \quad M_2 \in \mathfrak{M}, \quad M_1 \equiv M_2,$$

jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, když pro libovolnou spojitou funkci $\varphi(x) \in C(0, 1)$ *platí* $\int_0^1 \varphi(x)\, \mathrm{d}M_1(x) = \int_0^1 \varphi(x)\, \mathrm{d}M_2(x)$.

Množinu $\mathfrak{M}$ s takto zavedenou ekvivalencí budeme nazývat množinu rozložení hmot a každé třídě budeme prostě říkat rozložení hmoty. Množinu $\mathfrak{M}$ budeme topologisovat zavedením konvergence posloupností. Budeme psát $\lim M_i = M$, $M_i \in \mathfrak{M}$, $M \in \mathfrak{M}$, tehdy a jen tehdy, platí-li pro libovolnou funkci $\varphi(x) \in C(0, 1)$

$$\lim \int_0^1 \varphi(x)\, \mathrm{d}M_i(x) = \int_0^1 \varphi(x)\, \mathrm{d}M(x).$$

Je nutno ještě ukázat, že takto zavedená topologie je v souhlase se zavedenou ekvivalencí, tedy že platí

$$M_i \equiv N_i, \lim M_i = M, \lim N_i = N \Rightarrow M \equiv N,$$

což je však bezprostředně patrno z definic ekvivalence a konvergence. Můžeme tedy mluvit o topologickém prostoru rozložení hmot $\mathfrak{M}$. Na tomto prostoru budeme studovat funkcionál $\lambda[M]$ a jeho lineární aproximaci $\gamma[M] = \int_0^1 V(x)\, \mathrm{d}M(x)$, kde funkci $V(x)$ budeme říkat „váhová funkce": $V(x) \in C(0, 1)$, kde $C(0, 1)$ je množina spojitých funkcí na $\langle 0, 1\rangle$ metrisovaná supremem absolutní hodnoty rozdílu. Při zvolené vahové funkci $V(x)$ budeme vyšetřovat extréma výrazu $\psi[M] = \frac{\gamma[M]}{\lambda[M]}$ na $\mathfrak{M}$. Za tím účelem musíme ukázat, že funkcionál $\psi[M]$ je spojitý na $\mathfrak{M}$ ve smyslu zavedené topologie, a že $\psi[M]$ obou extrém nabývá na $\mathfrak{M}$. Bude nás proto zajímat v prvé řadě, zdali $\mathfrak{M}$ je kompaktní. To však plyne z toho, že náš prostor je homeomorfní s určitou částí prostoru $\overline{C(0, 1)}$ (všech lineárních funkcionálů na $C(0, 1)$), která je však podle věty 3, § 24, str. 194 knihy [2] kompaktní.

Jde ještě o to dokázat druhé tvrzení, že totiž funkcionál $\lambda[M]$ je na $\mathfrak{M}$ spojitý. Jde tedy o to dokázat, že nejnižší vlastní hodnota integrální rovnice

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y(s)\, \mathrm{d}M(s) = \lambda y(x)\,,$$

je spojitě závislá na $M \in \mathfrak{M}$ ve smyslu topologie v $\mathfrak{M}$. Předně je vidět, že $\lambda[M]$ je na $\mathfrak{M}$ omezena, neboť

$$0 \leq \lambda[M] = \lambda_1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)\,.$$

(Známý vztah $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)$, plyne na př. ze vztahů (5') a (16) str. 198 a 200 citované knihy [1]).

Podle vět uvedených o studované integrální rovnici existuje ke každé vlastní hodnotě právě jediná vlastní funkce $y(x)$, normujeme-li ji podmínkou $\max_{x \in \langle 0,1\rangle} y(x) = 1$. Speciálně pro první vlastní hodnotu je první vlastní funkce $y(x)$, normovaná uvedeným způsobem všude kladná na $(0, 1)$. Pro λ_i $i \geq 2$ má příslušná vlastní funkce už nulové body na $(0, 1)$ a nabývá záporných hodnot na $(0, 1)$. Každému $M \in \mathfrak{M}$ přísluší tedy číslo $\lambda[M]$ a funkce $y_M(x) \in C(0, 1)$ $\|y_M\| = 1$. Dokážeme nyní, že množina všech y_M se dá vnořit do praekompaktní podmnožiny $K \subset C(0, 1)$. Vezměme si za tím účelem systém všech operátorů tvaru (zobrazujících $C(0, 1)$ do sebe)

$$T_M[\varphi] = \int_0^1 \Gamma(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}M(s)\,, \quad M \in \mathfrak{M}\,, \quad \varphi(s) \in C(0, 1)$$

a utvořme množinu K všech funkcí tvaru $T_M[\varphi]$, kde $\varphi(x)$ probíhá podmnožinu všech $\varphi \in C(0, 1)$, pro něž platí $\|\varphi(x)\| = 1$ a $\varphi(x) \geq 0$ a M probíhá celou $\mathfrak{M}$. O množině K dokážeme nyní dvě tvrzení:

1. *Množina K je stejnoměrně ohraničená, což znamená, že existuje číslo L tak, že pro $\psi \in K$ platí $\|\psi\| \leq L$.*

2. *Funkce množiny K jsou stejnoměrně spojité, což značí, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\psi(x) \in K$ platí $|\psi(x_2) - \psi(x_1)| < \varepsilon$ jen když $|x_2 - x_1| < \delta$.*

Z vlastnosti 1. a 2. plyne pak praekompaktnost množiny K, nebo-li kompaktnost $\bar{K}$. (Viz na př. [2], str. 66.)

Dokážeme nyní obě tyto vlastnosti množiny K. Protože je $\int_0^1 \Gamma(x,s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}M(s) \leq$ $\leq \max_{x,s\in\langle 0,1\rangle} \Gamma(x, s)$ pro všechna $\varphi(s)$, $0 \leq \varphi(s) \leq 1$, znamená to, že číslo $L = \max \Gamma(x, s)$ omezuje množinu K. Vezměme si nyní libovolnou funkci $\psi(x) \in K$, tedy $\psi(x) = \int_0^1 \Gamma(x, s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}M$ a počítejme

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| = \left|\int_0^1 [\Gamma(x_2, s) - \Gamma(x_1, s)]\,\varphi(s)\,\mathrm{d}M\right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |\Gamma(x_2, s) - \Gamma(x_s, s)|\,\varphi(s)\,\mathrm{d}M(s)\,.$$

Protože $\Gamma(x, s)$ je spojitá v $x, s \in \langle 0, 1\rangle$ je tam stejnoměrně spojitá a existuje tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ takové $\delta > 0$, že $|\Gamma(x_2, s) - \Gamma(x_1, s)| < \varepsilon$, když $|x_2 - x_1| < \delta$ a $s \in \langle 0, 1\rangle$. Platí tedy

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| \leq \int_0^1 |\Gamma(x_2, s) - \Gamma(x_1, s)|\,.\,\varphi(s)\,\mathrm{d}M \leq \varepsilon$$

při $|x_2 - x_1| < \delta$, což bylo ukázati. Množina K je tedy praekompaktní a protože je tvořena obrazy všech nezáporných funkcí, obsahuje jen nezáporné funkce. Z toho plyne, že množina K neobsahuje žádnou vlastní funkci y_M příslušnou k vlastním hodnotám řádu vyššího než prvního. Ukážeme nyní, že funkcionál $\lambda[M]$ je spojitý na $\mathfrak{M}$ a že zobrazení $M \to y_M$ je spojité na $\mathfrak{M}$, kde y_M značí první vlastní funkci příslušnou M, normovanou podmínkou $\max_{x\in\langle 0,1\rangle} y_M(x) = 1$. Protože všechny y_M leží v K, jde o zobrazení $\mathfrak{M}$ do K a máme ukázat, že je spojité na $\mathfrak{M}$.

Mějme tedy libovolnou konvergentní posloupnost $M_i \in \mathfrak{M}$, $\lim M_i = M$, $M \in \mathfrak{M}$, *máme ukázat, že platí* $\lim \lambda[M_i] = \lambda[M]$ *a* $\lim y_{M_i} = y_M$ (ve smyslu topologie v $C(0, 1)$).

Důkaz provedeme nepřímo. Předpokládejme, že by tomu tak nebylo a že by prvá nebo druhá posloupnost nekonvergovaly k $\lambda[M]$, resp. y_M. Protože funkcionál $\lambda[M]$ je omezený na $\mathfrak{M}$

$$0 \leq \lambda[M] \leq \int_0^1 \Gamma(x, x)\,\mathrm{d}M \leq \max \Gamma(x, x)\,,$$

dá se z posloupnosti $\lambda[M_i]$ vybrat posloupnost konvergentní, mající limitu $\bar{\lambda}$. Protože $y_{M_i} \in K$, $i = 0, 1, \ldots$ a K je praekompaktní dá se z posloupnosti y_{M_i} vybrat posloupnost, konvergující k nějaké spojité funkci, ležící v uzávěru množiny K. Nazveme-li tuto limitní funkci $\bar{y}$, platí $y \in \bar{K}$, kde $\bar{K}$ je uzávěr K. Podle předpokladu nyní platí, že buď $\bar{\lambda} \neq \lambda[M]$, nebo $\bar{y} \neq y_M$ (nekonvergentní posloupnost y_i v K, má v $C(0, 1)$ alespoň dva hromadné body; jestliže je jeden y_M, vezměme za $\bar{y}$ druhý.) Napišme už obě vhodně vybrané posloupnosti

$$\lim \lambda[M_i] = \bar{\lambda}\,, \quad \lim y[M_2] = \bar{y}\,.$$

Protože y_{M_i} jsou vlastní funkce, platí

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y_{M_i}(s)\, \mathrm{d}M_i(s) = \lambda[M_i] y_{M_i}(x)\,,$$

limita pravých stran je rovna $\bar{\lambda}\bar{y}(x)$. Počítejme nyní limitu levých stran

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y_{M_i}(s)\, \mathrm{d}M_i(s) = \int_0^1 \Gamma(x, s)\, y_{M_i}(s)\, \mathrm{d}M_i(s) -$$

$$- \int_0^1 \Gamma(x, s)\, \bar{y}(s)\, \mathrm{d}M_i + \int_0^1 \Gamma(x, s)\, \bar{y}(s)\, \mathrm{d}M_i =$$

$$= \int_0^1 \Gamma(x, s)\, [y_{M_i}(s) - \bar{y}(s)]\, \mathrm{d}M_i(s) + \int_0^1 \Gamma(x, s)\, \bar{y}(s)\, \mathrm{d}M_i\,.$$

Prvý člen je v limitě roven nule a druhý přejde v

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, \bar{y}(s)\, \mathrm{d}M(s)\,.$$

Porovnáním limit obou stran, dostaneme konečně

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, \bar{y}(s)\, \mathrm{d}M(s) = \bar{\lambda}\bar{y}(x)\,.$$

Ukážeme, že není možno, aby $\bar{y}(x) \equiv 0$ pro všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$. Protože $\bar{y}(x)$ je limitou vlastních funkcí $y_{M_i}(x)$, které jsou normovány podmínkou $\max\limits_{x \in \langle 0,1\rangle} y_{M_i}(x) = 1$, nemůže být $\bar{y}(x)$ identicky rovno nule na $\langle 0, 1\rangle$, a je proto vlastní funkcí příslušnou k vlastní hodnotě $\bar{\lambda}$, pro rozložení hmoty M. Protože však první vlastní hodnota je $\lambda[M]$ je buď $\bar{\lambda} = \lambda[M]$ nebo je $\bar{\lambda}$ vyšší vlastní hodnota. V prvním případě $\lambda = [M]$ by muselo být $\bar{y} \neq y_M$ a měli bychom dvě různé vlastní funkce pro touž vlastní hodnotu, což je spor s předpokládanou vlastností studované integrální rovnice. Zbývá tedy možnost, že $\bar{\lambda}$ je vyšší vlastní hodnota a $\bar{y}$ k ní příslušná vlastní funkce. V tom případě by však $\bar{y}(x)$ muselo býti záporné pro nějaké x a nemohlo by ležet v $\bar{K}$, z čehož plyne opět spor. Tím jsme tedy ukázali, že funkcionál $\lambda[M]$ je spojitý na $\mathfrak{M}$ a že zobrazení $M \to y_M$ je spojité zobrazení $\mathfrak{M}$ do $K \subset C(0, 1)$. Všechno, co bylo řečeno o množině $\mathfrak{M}$, platí o podmnožinách $\mathfrak{M}_z$, kde $0 < z < \frac{1}{2}$. V dalších úvahách si zvolíme nějaké $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ a dosažené výsledky budou tedy závislé na tomto parametru. Přechodem k limitě $z \to 0$, dostaneme konečný výsledek.

Budeme se nyní zabývat vyšetřováním funkcionálu $\psi[M] = \dfrac{\gamma[M]}{\lambda[M]}$ na $\mathfrak{M}_z$, kde $\gamma[M] = \int\limits_0^1 V(x)\,\mathrm{d}M(x)$, při čemž $V(x)$ je zvolená spojitá funkce $V(x) \in \in C(0, 1)$.

Ukážeme, že $\lambda[M]$ na $\mathfrak{M}_z$ zdola i shora ohraničeno kladnými čísly l_z resp. L_z. Předně je

$$\lambda[M] \leq \int\limits_0^1 \Gamma(x, x)\,\mathrm{d}M(x) \leq \max_{x \in \langle z, 1-z \rangle} \Gamma(x, x) = L_z\,, \quad x \in \langle z, 1 - z \rangle\,.$$

Zbývá ještě nalézti číslo $l_z > 0$ tak, aby $l_z \leq \lambda[M]$ pro $M \in \mathfrak{M}_z$. Jak známo pro $\lambda[M]$ platí extremální podmínka

$$\lambda[M] = \max_{y \in C(0,1)} \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \Gamma(x, s)\,y(x)\,y(s)\,\mathrm{d}M(x)\,\mathrm{d}M(s)\,,$$

při podmínce

$$\int\limits_0^1 y^2(x)\,\mathrm{d}M(x) = 1\,,$$

a tedy

$$\lambda[M] \geq \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \Gamma(x, s)\,y(x)\,y(s)\,\mathrm{d}M(x)\,\mathrm{d}M(s)\,, \quad \text{při} \quad \int\limits_0^1 y^2(x)\,\mathrm{d}M(x) = 1\,.$$

Zvolíme-li tedy $y(x) \equiv 1$, $0 \leq x \leq 1$ je vedlejší podmínka vyplněna, neboť $\int\limits_0^1 \mathrm{d}M(x) = 1$; dostaneme tedy dolní mez $\lambda[M]$ ve tvaru

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \Gamma(x, s)\,\mathrm{d}M(x)\,\mathrm{d}M(s) \leq \lambda[M]\,.$$

Výraz $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \Gamma(x, s)\,\mathrm{d}M(x)\,\mathrm{d}M(s)$ je funkcionálem na $\mathfrak{M}$ a na $\mathfrak{M}_z$ nabývá jen kladných hodnot, neboť nazveme-li

$$\min_{x, s \in \langle z, 1-z \rangle} \Gamma(x, s) = l_z\,, \quad \text{platí zřejmě}$$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \Gamma(x, s)\,\mathrm{d}M(x)\,\mathrm{d}M(s) \geq l_z \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \mathrm{d}M(x)\,\mathrm{d}M(s) = l_z\,.$$

Protože je $\Gamma(x, s) > 0$ na $(0, 1)\,x(0, 1)$, je $l_z > 0$. Je tedy $\lambda[M]$ omezeno shora i zdola na $\mathfrak{M}_z$ kladnými čísly, z čehož plyne, že $\dfrac{\gamma[M]}{\lambda[M]}$ je všude na $\mathfrak{M}_z$ definováno; protože $\gamma[M]$ i $\lambda[M]$ jsou $\mathfrak{M}_z$ spojité, je i $\psi[M]$ spojitý, a protože $\mathfrak{M}_z$ je kompaktní, nabývá $\psi[M]$ svého minima i maxima na $\mathfrak{M}_z$. V dalším půjde o to najít hodnoty obou těchto extrémů. Za tím účelem zavedeme některé pojmy.

Zavedeme pojem úsečky na $\mathfrak{M}_z$, spojující dva prvky z $\mathfrak{M}_z$ takto:

Vezměme M, $N \in \mathfrak{M}_z$, to znamená, že platí $M(x) = 0$ pro $0 \leq x < z$, $M(1 - z) = 1$ a $M(x_1) \leq M(x_2)$ pro $x_1 \leq x_2$, $x_1, x_2 \in \langle 0, 1 \rangle$, a totéž pro N.

Vezměme libovolně $t \in \langle 0, 1 \rangle$ a utvořme funkci $(1 - t)\, M(x) + tN(x)$; je vidět, že pro každé t leží funkce $(1 - t)\, M + tN$ v $\mathfrak{M}_z$. Studujme náš funkcionál $\psi[M]$ na úsečce $\overline{MN}$. Funkcionál tím přejde ve funkci parametru t. Předně ukážeme, že funkci, kterou takto dostaneme, můžeme derivovat. Počítejme

$$\psi[(1 - t)\, M + tN] = \frac{(1 - t) \int_0^1 V(x)\, \mathrm{d}M + t \int_0^1 V(x)\, \mathrm{d}M}{\lambda[(1 - t)\, M + tN]}.$$

Čitatel derivaci má; jde tedy jen o to ukázat, že i jmenovatel má derivaci. Dokážeme nejdříve větu o přírůstku funkcionálu $\lambda[M]$. Vezměme dva libovolné prvky $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}_z$ a označme $\lambda_1, \lambda_2, y_1, y_2$ příslušné vlastní hodnoty a vlastní funkce. Platí tedy vztahy

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y_1(s)\, \mathrm{d}M_1(s) = \lambda_1 y_1(x)\,,$$

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y_2(s)\, \mathrm{d}M_2(s) = \lambda_2 y_2(x)\,;$$

z nich integrací a odečtením dostaneme vztah

$$\lambda_1 \int_0^1 y_1(x)\, y_2(x)\, \mathrm{d}M_2(x) - \lambda_2 \int_0^1 y_1(x)\, y_2(x)\, \mathrm{d}M_1(x) =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \Gamma(x, s)\, y_1(s)\, y_2(x)\, \mathrm{d}M_1(s)\, \mathrm{d}M_2(x) -$$
$$- \int_0^1 \int_0^1 \Gamma(x, s)\, y_1(x)\, y_2(s)\, \mathrm{d}M_1(x)\, \mathrm{d}M_2(s)\,.$$

Protože však jádro $\Gamma(x, s)$ je souměrné, je pravá strana rovna nule; jako výsledek máme vztah

$$\lambda_1 \int_0^1 y_1(x)\, y_2(x)\, \mathrm{d}M_2(x) = \lambda_2 \int_0^1 y_1(x)\, y_2(x)\, \mathrm{d}M_1\,. \tag{4}$$

Protože $y_1(x)$ a $y_2(x)$ nenabývají na $(0, 1)$ nikde nulových hodnot, je výraz $\int_0^1 y_1(x)\, y_2(x)\, \mathrm{d}M_1 \neq 0$; můžeme psát

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\int_0^1 y_1(x)\, y_2(x)\, \mathrm{d}M_2(x)}{\int_0^1 y_1(x)\, y_2(x)\, \mathrm{d}M_1(x)}\,,$$

z čehož

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\int_0^1 y_1(x)\, y_2(x)\, \mathrm{d}M_2(x)}{\int_0^1 y_1(x)\, y_2(x)\, \mathrm{d}M_1(x)} - 1\,. \tag{5}$$

Vezměme nyní opět úsečku $(1 - t)\, M + tN$; pak funkcionál $\lambda[M]$ se stane na ni funkcí parametru t, kterou označíme $\lambda(t)$. Položíme-li ve vztahu (5) $M_1 = M$, $M_2 = (1 - t)\, M + tN$, dostaneme

$$\frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{\lambda(0)} = \frac{(1-t)\int_0^1 y_0(x)\, y_t(x)\, \mathrm{d}M + t\int_0^1 y_0(x)\, y_t(x)\, \mathrm{d}N}{\int_0^1 y_0(x)\, y_t(x)\, \mathrm{d}M} - 1 =$$

$$= \frac{t\left[\int_0^1 y_0(x)\, y_t(x)\, \mathrm{d}N - \int_0^1 y_0(x)\, y_t(x)\, \mathrm{d}M\right]}{\int_0^1 y_0(x)\, y_t(x)\, \mathrm{d}M};$$

$y_t(x)$ zde značí vlastní funkci příslušnou k bodu $(1 - t)\, M + tN$. Protože podle dokázané věty o spojitosti je $\lim\limits_{t \to 0} y_t(x) = y_0(x)$, dostaneme dělením t a přechodem k limitě pro $t \to 0$ pro derivaci zprava funkce $\lambda(t)$ výraz

$$\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \lambda(0)\, \frac{\int_0^1 y_0^2\, \mathrm{d}N - \int_0^1 y_0^2\, \mathrm{d}M}{\int_0^1 y_0^2(x)\, \mathrm{d}M}, \tag{6}$$

kde $y_0(x)$ je vlastní funkce příslušná bodu $(1 - t)\, M + tN$ pro $t = 0$, tedy bodu M.

Výraz pro derivaci funkcionálu $\lambda[M]$ podél úsečky vycházející z bodu M a jdoucí do bodu N je tedy

$$\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \lambda[M] \left[\frac{\int_0^1 y_M^2(x)\, \mathrm{d}N}{\int_0^1 y_M^2(x)\, \mathrm{d}M} - 1\right]. \tag{7}$$

Výraz pro derivaci funkcionálu $\gamma[M] = \int_0^1 V(x)\, \mathrm{d}M$ podél úsečky $(1 - t)\, M + tN$ je

$$\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \int_0^1 V(x)\, \mathrm{d}N - \int_0^1 V(x)\, \mathrm{d}M \tag{8}$$

a pro derivaci funkcionálu $\psi[M] = \dfrac{\gamma[M]}{\lambda[M]}$ podél úsečky $(1 - t)\, M + tN$ v bodě M je tedy

$$\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \psi[M] \left[\frac{\int_0^1 V(x)\, \mathrm{d}N(x)}{\int_0^1 V(x)\, \mathrm{d}M(x)} - \frac{\int_0^1 y_M^2(x)\, \mathrm{d}N(x)}{\int_0^1 y_M^2(x)\, \mathrm{d}M(x)}\right]. \tag{9}$$

Budeme nyní říkat, že bod M je *bod lokálního maxima* (*minima*), jestliže pravá strana vztahu (9) je pro všechna $N \in \mathfrak{M}_z \leq 0$ (≥ 0). Z kompaktnosti množiny $\mathfrak{M}_z$ a ze spojitosti $\psi[M]$ plyne, že množina bodů lokálního maxima. a množina bodů lokálního minima nejsou množiny prázdné, neboť existuje alespoň jeden bod lokálního maxima, totiž bod absolutního maxima, a bod absolutního minima funkcionálu $\psi[M]$. Pro určitost se budeme zabývat hledáním bodů lokálního maxima. Nechť tedy bod M je bodem lokálního maxima Protože $\psi[M]$ je kladný funkcionál na $\mathfrak{M}_z$ ($V(x)$ jsme vybrali tak, že $V(x) > 0$, pro $x \in (0, 1)$), plyne z podmínky

$$\frac{\int_0^1 V(x)\,\mathrm{d}N(x)}{\int_0^1 V(x)\,\mathrm{d}M(x)} - \frac{\int_0^1 y_M^2(x)\,\mathrm{d}N(x)}{\int_0^1 y_M^2(x)\,\mathrm{d}M(x)} \leq 0\,, \quad \text{pro } N \in \mathfrak{M}_z$$

podmínka

$$\frac{\int_0^1 y_M^2(x)\,\mathrm{d}M(x)}{\int_0^1 V(x)\,\mathrm{d}M(x)} \leq \frac{\int_0^1 y_M^2(x)\,\mathrm{d}N(x)}{\int_0^1 V(x)\,\mathrm{d}N(x)}\,. \tag{10}$$

Vztah (10) musí platit pro všechna $N \in \mathfrak{M}_z$. Aby tomu tak mohlo být, musí rozložení hmoty M být takové, že hmota je pouze v těch bodech $x \in \langle z, 1 - z\rangle$ kde funkce $\frac{y_M^2(x)}{V(x)}$ dosahuje svého absolutního minima na $\langle z, 1 - z\rangle$. Množinu těch bodů $x \in \langle 0, 1\rangle$, v nichž je hmota při rozložení M, jsme nazvali J_M. Tedy v našem případě je $J_M \subset \langle z, 1 - z\rangle$; nazveme-li množinu těch bodů intervalu $\langle z, 1 - z\rangle$, na nichž funkce $\frac{y_M^2(x)}{V(x)}$ nabývá svého absolutního minima $V_M \subset \langle z, 1 - z\rangle$, musí být splněn vztah

$$J_M \subset V_M\,. \tag{11}$$

Kdyby totiž vztah (11) nebyl splněn, existovalo by takové $x \in \langle z, 1 - z\rangle$, že v něm je sice hmota $x \in J_M$, ale funkce $\frac{y_M^2(x)}{V(x)}$ je v něm větší než $\min\limits_{s \in \langle z, 1-z\rangle} \frac{y_M^2(s)}{V(s)}$. Pak by však bylo možno nalézti takové $N \in \mathfrak{M}_z$, že by platilo

$$\frac{\int_0^1 y_M^2(x)\,\mathrm{d}N(x)}{\int_0^1 V(x)\,\mathrm{d}N(x)} < \frac{\int_0^1 y_M^2(x)\,\mathrm{d}M(x)}{\int_0^1 V(x)\,\mathrm{d}M}\,.$$

To plyne přímo z následující věty: Buďtež $A(x) \geq B(x)$ kladné spojité funkce na $\langle 0, 1\rangle$ a nechť platí $\min\limits_{x \in \langle 0,1\rangle} \frac{A(x)}{B(x)} = 1$. Pak funkcionál

$$\frac{\int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}M(x)}{\int_0^1 B(x)\,\mathrm{d}M(x)},$$

nabývá na $\mathfrak{M}$ minima rovné 1 a to na všech takových $M \in \mathfrak{M}$, pro něž platí $J_M \subset A_M$, kdež A_M je množina těch x, pro něž $A(x) = B(x)$. Jestliže $J_M \subset A_M$, pak zřejmě platí

$$\frac{\int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}M}{\int_0^1 B(x)\,\mathrm{d}M} > 1\,.$$

Nerovnost $\dfrac{\int_0^1 y_M^2\,\mathrm{d}N}{\int_0^1 V\,\mathrm{d}N} < \dfrac{\int_0^1 y_M^2\,\mathrm{d}M}{\int_0^1 V\,\mathrm{d}M}$, je však ve sporu s nerovností (10). Protože funkce $V(x) > 0$ na $(0, 1)$, lze najít kladnou funkci $U(x)$ tak, aby bylo $V(x) = U^2(x)$. Pak množina V_M je množina těch bodů $x \in \langle z, 1 - z\rangle$, na nichž funkce $\dfrac{y_M(x)}{U(x)}$ nabývá svého minima, které nazveme m. Pak tedy

$$\left.\begin{aligned} y_M(s) &\geq mU(s) \quad \text{pro} \quad s \in \langle z, 1 - z\rangle\,, \\ y_M(s) &= mU(s) \quad \text{pro} \quad s \in V_M\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Pro funkci $y_M(s)$ platí podle předpokladu rovnice

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y_m(s)\,\mathrm{d}M(s) = \lambda[M]\, y_m(x)\,.$$

Protože pro ta s, kde je hmota $s \in J_M$, je podle (11) též $s \in V_M$ a podle (12) tedy $y(s) = mU(s)$, je levá strana integrální rovnice identická s výrazem $m\int_0^1 \Gamma(x, s)U(s)\,\mathrm{d}M(s)$, neboť ty body $s \in \langle z, 1 - z\rangle$, které neleží v J_M nemají na hodnotu integrálu vliv. Pravá strana integrální rovnice splňuje vztah

$$\lambda[M]y_M(x) \geq m\lambda[M]U(x)\,, \quad \text{pro} \quad x \in \langle z, 1 - z\rangle$$

a

$$\lambda[M]\, y_M(x) = m\lambda[M]U(x)\,, \quad \text{pro} \quad x \in J_M\,.$$

Porovnáním tedy dostaneme výsledek

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 \Gamma(x, s)\, U(s)\,\mathrm{d}M(s) &\geq \lambda[M]\, U(x)\,, \quad \text{pro} \quad x \in \langle z, 1 - z\rangle\,, \\ \int_0^1 \Gamma(x, s)\, U(s)\,\mathrm{d}M(s) &= \lambda[M]\, U(x)\,, \quad \text{pro} \quad x \in J_M\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Vztahy (13) tedy udávají nutnou podmínku, kterou musí splňovat každý bod lokálního maxima M. Dokážeme nyní, že tyto vztahy jsou též dostačující k tomu, aby bod M byl bodem lokálního maxima. Předpokládejme, že platí vztahy (13) a označme opět $\min\limits_{x\in\langle z,1-z\rangle} \dfrac{y_M(x)}{U(x)} = m$ a množinu těch $x \in \langle z, 1 - z\rangle$, ve kterých funkce $\dfrac{y_M(x)}{U(x)}$ tohoto minima nabývá $V_m \subset \langle z, 1 - z\rangle$. Nejprve ukážeme, že $J_M \subset V_M$. Kdyby totiž tomu tak nebylo, existoval by bod $t \in J_M$, který by neležel ve V_M, a tedy by platilo $y_M(t) > mU(t)$. Protože však v bodě t je hmota, musí pro všechna $x \in \langle z, 1 - z\rangle$ platit nerovnost

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y_M(s)\, \mathrm{d}M(s) > m\int_0^1 \Gamma(x, s)\, U(s)\, \mathrm{d}M(s)\,.$$

Tato nerovnost bude tedy platit i pro x, v němž platí $y_M(x) = mU(x)$; avšak podle předpokládaného vztahu (13) je

$$m\int_0^1 \Gamma(x, s)\, U(s)\, \mathrm{d}M(s) \geq m\lambda[M]U(x)\,,$$

z čehož

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y_M(s)\, \mathrm{d}M(s) > m\lambda[M]U(x) = \lambda[M]y(x)\,,$$

což je spor. Tím jsme ukázali, že jsou-li splněny vztahy (13), plyne z toho $J_M \subset V_M$; z toho však zřejmě plyne vztah (10) pro libovolné N, což však podle definice značí, že bod M je bodem lokálního maxima. Vztahy (13) tedy udávají nutnou i postačující podmínku, aby bod M byl bodem lokálního maxima. Je zřejmé, že obrácením nerovnosti ve vztahu (13) dostaneme analogicky podmínku lokálního minima. Dosadíme-li do podmínek (13) vztah $\lambda[M] = \dfrac{\gamma[M]}{\psi[M]}$, dostaneme nutnou a postačující podmínku lokálního maxima ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} \frac{U(x)\int_0^1 U^2(x)\, \mathrm{d}M(s)}{\int_0^1 \Gamma(x, s)\, U(s)\, \mathrm{d}M(s)} &\leq \psi[M] \quad \mathit{pro} \quad x \in \langle z, 1 - z\rangle\,, \\ \frac{U(x)\int_0^1 U^2(s)\, \mathrm{d}M(s)}{\int_0^1 \Gamma(x, s)\, U(s)\, \mathrm{d}M(s)} &= \psi[M] \quad \mathit{pro} \quad x \in J_M\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Vztahy (14) musí tedy být splněny pro každé $M \in \mathfrak{M}_z$, v němž veličina $\psi_{[M]}$ dosahuje svého lokálního maxima, speciálně tedy pro to $M \in \mathfrak{M}_z$, v němž je dosaženo absolutního maxima. Nechť M_1 a M_2 jsou body lokálního maxima a nechť $J_{M_1} = J_{M_2}$, což znamená, že obě rozdělení M_1 a M_2 mají hmotu ve stejných bodech. Pak můžeme tvrdit, že každý bod úsečky $(1 - t)\, M_1 + tM_2$ je bodem lokálního maxima a že veličina $\psi[M]$ je na této úsečce konstantní.

Důkaz tohoto tvrzení je jednoduchý. Podle (13) platí pro M_1 a M_2 vztahy

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, U(s)\, \mathrm{d}M_1(s) \geq \lambda[M_1]\, U(x)\,, \quad \text{pro} \quad x \in \langle z, 1-z\rangle\,,$$

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, U(s)\, \mathrm{d}M_2(s) \geq \lambda[M_2]\, U(x)\,, \quad \text{pro} \quad x \in \langle z, 1-z\rangle\,.$$

Znak $\geq$ se mění v rovnost pro $x \in J_M = J_{M_1} = J_{M_2}$. Násobíme-li prvý vztah $1-t$, druhý t, $t \in \langle 0, 1\rangle$, a sečteme, dostaneme

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, U(s)\, \mathrm{d}[(1-t)\, M_1 + tM_2] \geq \lambda[(1-t)\, M_1 + tM_2]\, U(x)\,,$$

při čemž znak rovnosti platí opět pro $x \in J_M$; avšak J_M je zřejmě identické s $J_{[(1-t)M_1+tM_2]}$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, z čehož plyne, že bod $(1-t)\, M_1 + tM_2$ je bodem lokálního maxima pro každé $t \in \langle 0, 1\rangle$. Zbývá dokázat, že $\psi[(1-t)M_1 + tM_2]$ je konstantní funkcí t na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Věc je však jasná. Funkce $\psi[(1-t)M_1+tM_2]$ má totiž pro všechna $t \in \langle 0, 1\rangle$ derivaci, neboť podle definice je

$$\psi[(1-t)\, M_1 + tM_2] = \frac{(1-t)\int_0^1 U^2\, \mathrm{d}M_1 + t\int_0^1 U^2\, \mathrm{d}M_2}{\lambda[(1-t)\, M_1 + tM_2]}\,;$$

čitatel zlomku derivaci má a výpočtem se snadno zjistí, že i jmenovatel má derivaci rovnou

$$\frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda(t) \frac{\int_0^1 y_t^2(x)\, \mathrm{d}M_2 - \int_0^1 y_t^2(x)\, \mathrm{d}M_1}{(1-t)\int_0^1 y_t^2(x)\, \mathrm{d}M_1(x) + t\int_0^1 y_t^2(x)\, \mathrm{d}M_2(x)}\,;$$

z toho plyne, že funkce ψ má na $\langle 0, 1\rangle$ derivaci. Protože každý bod $(1-t)\,.\, M_1 + tM_2$ je bodem lokálního maxima, musí mít funkce ψ pro každé $t \in \langle 0, 1\rangle$ derivaci rovnou nule a je tedy konstantní. Dokázanou větu lze použít při skutečném vyčíslování extrémních hodnot funkcionálu $\psi[M]$, jak později ukážeme.

Nyní se však obraťme k otázce, jak dobře lze vůbec veličinu $\lambda[M]$ při daném oscilačním jádře $\Gamma(x, s)$ aproximovati výrazy typu $\int_0^1 V\, \mathrm{d}M$. Uvažujeme tedy množinu všech funkcionálů $\int_0^1 V\, \mathrm{d}M$, $V \in C(0, 1)$, $M \in \mathfrak{M}_z$. Protože $\lambda[M]$ je na $\mathfrak{M}_z$ kladný funkcionál, můžeme každé $V \in C(0, 1)$ přiřadit nezáporné číslo N_V (relativní nepřesnost aproximace $\int_0^1 V\, \mathrm{d}M$):

$$N_V = \sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \left| \frac{\int_0^1 V\, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \right|\,.$$

Tím jsme definovali na $C(0, 1)$ nezáporný funkcionál N_V. Funkcionál N_V je spojitý na $C(0, 1)$, což dokážeme takto:

Výraz pro N_V lze psáti též ve tvaru

$$N_V = \max \left\{ \sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \,, \quad 1 - \inf_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} \right\};$$

stačí tedy, když ukážeme spojitost na př. výrazu $\sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]}$.

Mějme tedy dvě blízké V, $V' \in C(0, 1)$, $\sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |V(x) - V'(x)| = \delta$. Vzhledem ke kompaktnosti $\mathfrak{M}_z$ existují body M resp. M' tak, že platí

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} = \frac{\int V \, \mathrm{d}M'}{\lambda[M']} \,, \quad \sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int V' \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} = \frac{\int V' \, \mathrm{d}M''}{\lambda[M'']} \,.$$

Nyní však platí nerovnosti

$$\frac{\int V \, \mathrm{d}M'}{\lambda[M']} - \frac{\int V' \, \mathrm{d}M''}{\lambda[M'']} \leq \frac{\int V \, \mathrm{d}M'}{\lambda[M']} - \frac{\int V' \, \mathrm{d}M'}{\lambda[M']} \,,$$

$$\frac{\int V' \, \mathrm{d}M''}{\lambda[M'']} - \frac{\int V \, \mathrm{d}M'}{\lambda[M']} \leq \frac{\int V' \, \mathrm{d}M''}{\lambda[M'']} - \frac{\int V \, \mathrm{d}M''}{\lambda[M'']} \,.$$

Protože $\lambda[M]$ má na $\mathfrak{M}_z$ dolní mez

$$\lambda[M] \geq \int_0^1 \int_0^1 \Gamma(x, s) \, \mathrm{d}M(x) \, \mathrm{d}M(s) \,, \quad M \in \mathfrak{M}_z \,,$$

je

$$\lambda[M] \geq \min_{x, s \in \langle z, 1-z \rangle} \Gamma(x, s) = A > 0 \,.$$

A je vzhledem k vlastnostem oscilační funkce $\Gamma(x, s)$ různé od nuly a hořejší nerovnosti vedou k nerovnosti

$$\left| \frac{\int V \, \mathrm{d}M'}{\lambda[M']} - \frac{\int V' \, \mathrm{d}M''}{\lambda[M'']} \right| \leq \frac{\delta}{A} \,,$$

která ukazuje spojitost funkcionálu

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} \quad \text{na} \quad C(0, 1) \,.$$

Obdobně bychom dokázali spojitost

$$\inf_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} \quad \text{na} \quad C(0, 1) \,,$$

z čehož už pak plyne spojitost

$$\sup \left| \frac{\int V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \right| \quad \text{na} \quad C(0, 1) \,.$$

Protože $C(0, 1)$ není kompaktní, nemůžeme tvrdit, že N_V nabývá svého minima na $C(0, 1)$. My však ukážeme, že tomu tak jest, že tedy existuje jakási funkce V^* tak, že platí $\inf\limits_{V \in C(0,1)} N_V = N_{V^*}$, a tedy, že funkcionál $\int_0^1 V^* \, \mathrm{d}M$, představuje nejlepší lineární aproximaci veličiny $\lambda[M]$.

Přistoupíme nyní k důkazu: Vezměme funkci $\Gamma(x, x) \in C(0, 1)$ a utvořme

$$N_{\Gamma(x,x)} = \sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \left| \frac{\int_0^1 \Gamma(x, x) \, \mathrm{d}M(x)}{\lambda[M]} - 1 \right| .$$

Protože však $\int_0^1 \Gamma(x, x) \, \mathrm{d}M(x)$ představuje horní aproximaci

$$\lambda[M] \leq \int_0^1 \Gamma(x, x) \, \mathrm{d}M(x),$$

můžeme číslo $N_{\Gamma(x,x)}$ psát ve tvaru

$$N_{\Gamma(x,x)} = \sup \frac{\int_0^1 \Gamma(x, x) \, \mathrm{d}M(x)}{\lambda[M]} - 1 .$$

Označme na chvíli

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int_0^1 \Gamma(x, x) \, \mathrm{d}M(x)}{\lambda[M]} = \alpha > 0 .$$

Protože $\mathfrak{M}_z$ je kompaktní, existuje jakési M_0 tak, že platí

$$\int_0^1 \Gamma(x, x) \, \mathrm{d}M_0 = \alpha \lambda[M_0] .$$

Hledejme nyní takové β, aby funkcionál $\beta \int_0^1 \Gamma(x, x) \, \mathrm{d}M(x)$ dával nejmenší možnou nepřesnost. Výraz $\sup\limits_{M \in \mathfrak{M}_z} \left| \frac{\int_0^1 V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \right|$ lze psát též ve tvaru

$$\max \left\{ \sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \, , \quad 1 - \inf_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} \right\} .$$

Funkcionál $\frac{\int \Gamma(x, x) \, \mathrm{d}M(x)}{\lambda[M]}$ nabývá svého maxima na M_0 a svého minima na funkcích typu $M(x) = 0$ pro $x \leq t$, $z \leq t \leq 1 - z$, $M(x) = 1$ pro $x > t$, což je patrno z výrazu pro stopu $\sum \lambda_i = \int_0^1 \Gamma(x, x) \, \mathrm{d}M(x)$. Na funkcích zvoleného typu je totiž $\lambda[M] = \Gamma(t, t)$ a funkcionál $\frac{\int_0^1 \Gamma(x, x) \, \mathrm{d}M(x)}{\lambda[M]}$ nabývá hodnoty 1.

Pro tato M je množina J_M jednobodová $J_M = (t)$ a tudíž $\lambda[M] = \Gamma(t, t)$. Hodnota tohoto minima je rovna jedné. Protože funkcionál $\beta \frac{\int \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M}{\lambda[M]}$, nabývá svého maxima i minima na týchž M jako $\frac{\int \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M}{\lambda[M]}$, je výraz pro nepřesnost aproximace $\beta \int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M$ dána výrazem

$$N_\beta = \max[\beta\alpha - 1, 1 - \beta]\,.$$

Jedná se tedy o to, nalézt

$$\inf_\beta N_\beta = \min_\beta\{\max[\beta\alpha - 1, 1 - \beta]\}\,;$$

snadným počtem dostaneme $\beta = \frac{2}{\alpha + 1}$, $N_\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$. Nyní tedy již víme, že aproximace $\frac{2}{\alpha + 1} \int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)$, dává nepřesnost $N_{\frac{2}{\alpha+1}\Gamma(x,x)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$.

Nyní zbývá ukázat, že neexistuje lepší lineární aproximace, tedy že platí

$$N_V \geq \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, \quad V \in C(0, 1)\,.$$

Vezměme tedy libovolnou $V \in C(0, 1)$ a hledejme dolní odhad veličiny N_V. Ten dostaneme, stanovíme-li největší hodnotu veličiny

$$\left| \frac{\int_0^1 V\, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \right|,$$

ne však na celé $\mathfrak{M}_z$, nýbrž jen pro speciální $M \in \mathfrak{M}_z$. Za tato speciální M budeme volit

1. všechna diskretní jednobodová rozložení ($J_M = (t), z \leq t \leq 1 - z$),
2. M_0, pro niž platí $\int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M_0 = \alpha\lambda[M_0]$.

Pro M z prvé skupiny platí $\lambda[M] = \Gamma(t, t)$ a tudíž

$$N_V \geq \sup_{z \leq t \leq 1 - z} \left| \frac{V(t)}{\Gamma(t, t)} - 1 \right|;$$

pro M_0 platí $\int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M_0 = \alpha\lambda[M_0]$, z čehož

$$N_V \geq \left| \alpha \frac{\int_0^1 V(x)\, \mathrm{d}M_0(x)}{\int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M_0(x)} - 1 \right|.$$

Protože $\Gamma(t, t) > 0$ na $\langle z, 1 - z\rangle$, můžeme položit $\frac{V(t)}{\Gamma(t, t)} \underset{z \le t \le 1-z}{=} H(t)$; nyní však platí

$$\sup_{t \in \langle z, 1-z\rangle} |H(t) - 1| = \max[\max_{t \in \langle z, 1-z\rangle} H(t) - 1,\ 1 - \min_{t \in \langle z, 1-z\rangle} H(t)]\,.$$

Položíme-li $\max\limits_{t \in \langle z, 1-z\rangle} H(t) = H$, $\min\limits_{t \in \langle z, 1-z\rangle} H(t) = h$, můžeme psát

$$N_V \ge \max\{H - 1, 1 - h\}\,.$$

Výraz $\dfrac{\int_0^1 V(x)\,\mathrm{d}M_0}{\int_0^1 \Gamma(x, x)\,\mathrm{d}M_0}$ můžeme napsat nyní ve tvaru

$$\frac{\int_0^1 H(x)\,\Gamma(x, x)\,\mathrm{d}M_0(x)}{\int_0^1 \Gamma(x, x)\,\mathrm{d}M_0(x)}\,.$$

Platí zřejmě

$$h \le \frac{\int_0^1 H(x)\,\Gamma(x, x)\,\mathrm{d}M_0(x)}{\int_0^1 \Gamma(x, x)\,\mathrm{d}M_0(x)} \le H\,,$$

z čehož

$$\alpha h - 1 \le \alpha \frac{\int_0^1 V(x)\,\mathrm{d}M_0(x)}{\int \Gamma(x, x)\,\mathrm{d}M_0(x)} - 1 \le \alpha H - 1\,;$$

z toho dále

$$N_V \ge \alpha h - 1\,, \quad N_V \ge 1 - \alpha H\,.$$

Spojením všech získaných nerovností dostaneme

$$N_V \ge \max\{H - 1, 1 - h, \alpha h - 1, 1 - \alpha H\}\,.$$

Avšak snadnou úvahou dostaneme rovnost

$$\inf_{H \ge h} \{\max[H - 1, 1 - h, \alpha h - 1, 1 - \alpha H]\} = \frac{\alpha - 1}{1 + \alpha}\,,$$

z čehož plyne, že pro každou $V \in C(0, 1)$ platí

$$N_V \ge \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = N_{\frac{2}{\alpha+1}\Gamma(x,x)}\,.$$

To ale znamená, že funkce $\frac{2}{\alpha + 1}\,\Gamma(x, x)$ je jednou z hledaných funkcí $V^*(x)$. Protože však výraz

$$\max[H - 1, 1 - h, \alpha h - 1, 1 - \alpha H]\,,$$

jakožto funkce H, h, uvažovaná v oblasti $H \geq h$, nabývá svého minima v jediném bodě $h = H = \frac{2}{\alpha + 1}$, plyne z toho, že funkce $H(t) = \frac{V(t)}{\Gamma(t, t)}$ je konstanta. Proto funkce $V^*(x) = \frac{2}{\alpha + 1} \Gamma(x, x)$ je jedinou funkcí, na níž funkcionál $N_V = \sup\limits_{M \in \mathfrak{M}_z} \left| \frac{\int_0^1 V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \right|$ nabývá svého minima.

Číslo α je definováno takto:

$$\alpha = \sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int_0^1 \Gamma(x, x) \, \mathrm{d}M(x)}{\lambda[M]};$$

proto $\alpha = 1 + N_{\Gamma(x,x)}$.

Výsledek tedy zní: *Nejmenší možná chyba, se kterou je možno funkcionál $\lambda[M]$ aproximovati lineárně, je rovna* $\frac{N_{\Gamma(x,x)}}{2 + N_{\Gamma(x,x)}}$. Tím je tedy na množině 0 všech oscilačních jader $\Gamma(x, s)$ zadán funkcionál $\Phi(z)[\Gamma(x, s)] = \frac{N_{\Gamma(x,x)}}{2 + N_{\Gamma(x,x)}}$ [Index z vyznačuje okolnost, že vše se vztahuje k určité $\mathfrak{M}_z$: $z \in (0, \frac{1}{2})$, který udává, s jakou přesností lze lineárně aproximovati funkcionál $\lambda[M]$ pro zvolenou $\Gamma(x, s)$, při čemž nejlepší aproximace je dána funkcí $N^*(x) = \frac{2}{2 + N_{\Gamma(x,x)}} \cdot$ $\cdot \, \Gamma(x, x)$.]

To vše se však dosud vztahuje na zcela určitou $\mathfrak{M}_{z \atop z \in (0, \frac{1}{2})}$. Konečný výsledek obdržíme teprve limitním pochodem pro $z \to 0$.

Vezměme tedy libovolnou nezápornou funkci $V \in C(0, 1)$ a k ní příslušící aproximaci $\gamma[M] = \int_0^1 V \, \mathrm{d}M$. Pak N_V je definováno takto:

$$N_V = \sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \left| \frac{\int_0^1 V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]} - 1 \right|.$$

Hodnota N_V při pevném V závisí na $z \in (0, \frac{1}{2})$. Budeme zkoumat existenci $\lim\limits_{z \to 0} N_V$. Položme jako dříve $\psi[M] = \frac{\int_0^1 V \, \mathrm{d}M}{\lambda[M]}$. Funkcionál $\psi[M]$ je omezený na každé $\mathfrak{M}_z$. To plyne na př. ze vztahů (14). Z nich snadno obdržíme nerovnost

$$\psi[M] \leq \max_{\substack{M \in \mathfrak{M}_z \\ x,s \in \langle z, 1-z \rangle}} \frac{U(x)\, U(s)}{\Gamma(x, s)},$$

kde opět $U(x) = \sqrt{V(x)}$. Jestliže lze najít stejnoměrné omezení L_V, tedy platí-li

$$\sup_{x,s \in (0,1)} \frac{U(x)\, U(s)}{\Gamma(x, s)} = L_V \neq \infty ,$$

pak je $\psi[M]$ omezeno na $\sum\limits_{z \in (0, \frac{1}{2})} \mathfrak{M}_z$.

Definujme funkci $\varphi(z)$ $z \in (0, \frac{1}{2})$ takto: $\varphi(z) = \max\limits_{\substack{z \in (0,\frac{1}{2}) \\ M \in \mathfrak{M}_z}} \psi(M]$. Funkce $\varphi(z)$ je nerostoucí na $(0, \frac{1}{2})$ a omezená na $(0, \frac{1}{2})$. Dokážeme, že je spojitá v $(0, \frac{1}{2})$. Nechť tedy je $\lim z_i = z$, $z_{i+1} < z_i$. Pak platí

$$\varphi(z_{i+1}) \geq \varphi(z_i) , \quad \varphi(z_i) = \max_{M \in \mathfrak{M}_z} \psi\, [M] ,$$

$$\lim_{i \to \infty} \varphi(z_i) = \lim_{z_i \to \infty} \max_{M \in \mathfrak{M}_{z_i}} \psi[M] = \sup_{M \in \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{M}_{z_i}} \psi[M] = \max_{M \in \mathfrak{M}_z} \psi[M] = \varphi(z) ,$$

čímž je dokázána spojitost $\varphi(z)$ na $(0, 1)$. Nazveme $\varphi = \lim\limits_{z \to 0} \varphi(z)$. Mějme nyní danou oscilační funkci $\Gamma(x, s)$. Pak číslo $\Phi_z[\Gamma(x, s)]$ označuje nejmenší možnou nepřesnost lineární aproximace funkcionálu $\lambda[M]$ na množině $\mathfrak{M}_z$. Toto číslo je podle předcházejícího rovno

$$\Phi_z[\Gamma(x, s)] = \frac{N_{\Gamma(x,x)}}{2 + N_{\Gamma(x,x)}} ,$$

kde $N_{\Gamma(x,x)}$ značí nyní

$$N_{\Gamma(x,x)} = \sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \left| \frac{\int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)}{\lambda[M]} - 1 \right| = \sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)}{\lambda[M]} - 1 = \varphi(z) - 1 .$$

Jestliže nyní $\Gamma(x, s)$ má tu vlastnost, že funkce $\dfrac{\Gamma(x, x) \,.\, \Gamma(s, s)}{\Gamma^2(x, s)}$ je omezená na čtverci $(0, 1) \times (0, 1)$, existuje-li tedy

$$\sup_{x,s \in (0,1)} \frac{\sqrt{\Gamma(x, x)}\, \sqrt{\Gamma(s, s)}}{\Gamma(x, s)} = L_\Gamma \neq \infty ,$$

pak podle předcházející věty plyne, že hodnota

$$\Phi_z[\Gamma(x, s)] = \frac{\varphi(z) - 1}{\varphi(z) + 1}$$

závisí spojitě na z a je omezená na $(0, \frac{1}{2})$. Má tedy limitu

$$\Phi[\Gamma(x, s)] = \lim_{z \to 0} \Phi_z[\Gamma(x, s)] = \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1},$$

která udává, jak dobře lze lineárně aproximovat funkcionál $\lambda[M]$ na celé $\mathfrak{M}$ pro zvolené jádro $\Gamma(x, s)$.

Jako příklad uvedeme výpočet veličiny $\Phi[\Gamma(x, s)]$ pro případ, že oscilační jádro $\Gamma(x, s)$ je Greenovou funkcí okrajového problému

$$y''''(x) = \omega^2 \mu(x), \tag{15}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y''(0) = y''(1) = 0, \tag{15a}$$

což je speciální případ okrajového problému (1), (1a) pro $p(x) \equiv 1$.

Integrujeme-li postupně rovnici (1) s ohledem na okrajové podmínky (1a), obdržíme ekvivalentní integrální rovnici (2), v níž jádro $\Gamma(x, s)$ bude samo lineárním funkcionálem na množině funkcí $p(x)$;

$$\Gamma(x, s) = \omega^2 \int_0^1 U(x, s, t)\, p(t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{16}$$

Universální funkce $U(x, s, t)$ je dána vztahy

$$\left.\begin{aligned} U(x, s, t) = U(s, x, t)\,, \quad & s^2(1 - x)(1 - t)\,, \quad 0 \leq s \leq x \\ U(x, t, s) = sx(1 - s)(1 - t)\,, \quad & x \leq s \leq t\,, \\ x \leq t\,, \quad (1 - s)^2\, xt\,, \quad & t \leq s \leq 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Dosadíme-li do (16) $p(x) \equiv 1$, pak integrací vztahů (17) dostaneme výraz pro $\Gamma(x, s)$ problému (15) a (15a). Pro funkci $\Gamma(x, x)$ vychází $\Gamma(x, x) = \frac{1}{3}x^2(1 - x^2)$. Vezměme nyní opět pevné $z \in (0, \frac{1}{2})$ a počítejme hodnotu $N_{\Gamma(x,x)}$ na $\mathfrak{M}_z$. Hledáme tedy číslo

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}_z} \frac{\int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)}{\lambda[M]}\,.$$

Položíme-li $V(x) = \Gamma(x, x) = \frac{1}{3}x^2(1 - x)^2$, pak ze základního vztahu (11) $J_M \subset V_M$ plyne:

Jestliže M je bodem lokálního maxima funkcionálu $\dfrac{\int \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)}{\lambda[M]}$ *a y_M je příslušná vlastní funkce, pak platí $J_M \subset V_M$, kde V_M je množina těch $x \in \langle z, 1 - z\rangle$, pro něž platí*

$$\frac{y_M(x)}{x(1 - x)} = \min_{t \in \langle z, 1 - z\rangle} \frac{y_M(t)}{t(1 - t)}\,.$$

Protože y_M je určeno až na multiplikativní konstantu, můžeme žádat, aby $\min_{t \in \langle z, 1 - z\rangle} \dfrac{y_M(t)}{t(1 - t)} = 1$. Z toho plyne pak, že funkce $x(1 - x)$ probíhá pod funkcí $y_M(x)$ na intervalu $\langle z, 1 - z\rangle$ a že „hmota“ může být jedině tam, kde se obě křivky dotýkají.

Dále budeme funkci $x(1 - x)$ označovat $U(x)$ a funkci $y_M(x)$ budeme psát kratčeji $y(x)$.

Nechť tedy $M(\tilde{x})$ je hledané extremální rozložení hmoty a $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ k němu příslušná první vlastní hmota. Protože funkce $M(x)$ nemusí mít derivaci $M'(x) = \mu(x)$, nemůžeme a priori tvrdit, že je splněna rovnice (15), t. j. že platí $y''''(x) = \omega^2\mu(x)\, y(x)$. Po integraci této rovnice však dostaneme integrodiferenciální rovnici

$$y'''(x) - y'''(0) = \omega^2\int_0^x y(t)\, \mathrm{d}M(t)\,, \tag{18}$$

které spolu s krajovými podmínkami (15a) musí extremální funkce $M(t)$ vyhovovat.

Vezměme nyní množinu J_M a označme $x_0 = \min J_M$ (J_M je uzavřená). To tedy znamená, že na intervalu $\langle 0, x_0\rangle$ není hmota a tudíž podle (18) platí $y'''(x) - y'''(0) = 0$, $0 \leq x \leq x_0$. Jinými slovy $y(x)$ na intervale $\langle 0, x_0\rangle$ je polynomem nejvýše třetího stupně. Dokážeme nyní, že funkce $y(x)$ je na celém intervalu $\langle 0, 1\rangle$ konkávní, t. j. že platí $y''(x) \leq 0$.

Integrujme za tím účelem rovnici (18) v mezích od 0 do x s ohledem na okrajové podmínky (15a)

$$y''(x) - xy'''(0) = \omega^2\int_0^x (x - t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t)\,; \tag{19}$$

položíme-li zde $x = 1$, dostaneme $-y'''(0) = \omega^2\int_0^1 (1 - t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t)$, což dosazeno do (19) dává

$$y''(x) = \omega^2\Big[\int_0^x (x - t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t) - x\int_x^1 (1 - t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t)\Big]$$

a po úpravě

$$y''(x) = -\,\omega^2\Big[(1 - x)\int_0^x t y(t)\, \mathrm{d}M(t) + x\int_0^1 (1 - t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t)\Big]\,. \tag{20}$$

Protože funkce $y(t)$ je kladná na intervalu $(0, 1)$ a protože $(0, 1) \cap J_M \neq 0$, plyne z toho dokonce $y''(x) < 0$ na $(0, 1)$. Z toho však plyne, že funkce $y(x)$ má na intervalu $\langle 0, x_0\rangle$ tvar

$$y(x) = ax - cx^3\,, \tag{21}$$

kde

$$a > 0\,, \quad c > 0\,. \tag{22}$$

Křivky $U(x)$ a $y(x)$ se dotýkají v bodě $x_0 \in \langle z, 1 - z\rangle$. Mohou nastat dva případy: 1. $x_0 \in (z, 1 - z)$, 2. $x_0 \notin (z, 1 - z)$. Ukážeme, že prvý případ nemůže nastat.

Kdyby totiž bylo $z < x_0 < 1 - z$, musely by být splněny vztahy

$$U(x_0) = y(x_0)\,, \quad U'(x_0) = y'(x_0)\,, \quad U''(x_0) \leq y''(x_0)\,, \tag{23}$$

které plynou z toho, že na $\langle z, 1 - z\rangle$ je $U(x) \leq y(x)$ a na V_M je $U(x) = y(x)$; $(J_M \subset V_M)$. Dosazením (21) do (23) dostaneme soustavu vztahů

$$\left.\begin{aligned} x_0(1 - x_0) &= ax_0 - cx_0^3\,, \\ 1 - 2x_0 &= a - 3cx_0^2\,, \\ -2 &\leq -6cx_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Z prvních dvou vztahů však plyne $1 = 2cx_0$, což dosazeno do posledního vztahu (24) dává spor.

To znamená, že platí druhá alternativa, že totiž x_0 je buď z, nebo $1 - z$. Kdyby však naše extremála M byla té povahy, že by $x_0 = 1 - z$, pak vzhledem k souměrnosti okrajového problému by funkce $\overline{M}(x) = 1 - M(1 - x)$ byla taktéž extremálou, pro níž by bylo $x_0 = z$. Můžeme proto předpokládat, že $x_0 = z$, což značí, že $z \in J_M \subset V_M$.

Dokážeme nyní, že J_M neobsahuje interval, tedy že nemůže být $\langle x_1, x_2\rangle \subset J_M$, kde $z \leq x_1 < x_2 \leq 1 - z$. Kdyby totiž bylo $\langle x_1, x_2\rangle \subset J_M$, bylo by též $\langle x_1, x_2\rangle \subset V_M$, což znamená $U(x) = y(x)$ pro $x \in \langle x_1, x_2\rangle$. Derivováním tohoto vztahu dostaneme $y'''(x) = U'''(x) = [x(1 - x)]''' = 0$. To však by bylo ve sporu se vztahem (18), neboť $y'''(x)$ by musela být rostoucí funkcí na $\langle x_1, x_2\rangle$. Dále ukážeme, že z není hromadným bodem množiny V_M, tedy že $z \,\overline{\in}\, V_M - (z)$. Kdyby totiž bylo $\lim x_i = z$, $x_i \in V_M - (z)$, byly by splněny vztahy

$$U(x_i) = y(x_i)\,, \quad U'(x_i) = y'(x_i)\,, \quad x_i \in V_M - (z)\,, \quad U''(x_i) \leq y''(x_i)\,,$$

a vzhledem ke spojitosti všech funkcí by z toho plynulo

$$U(z) = y(z)\,, \quad U'(z) = y'(z)\,, \quad U''(z) \leq y''(z)\,.$$

Z toho však plyne analogický spor jako ze vztahů (24). Bod z je tedy isolovaným bodem množiny V_M.

Nazveme $x_1 = \min[V_M - (z)]$, (pokud $V_M \neq (z)$).

Dokážeme, že x_1 je opět isolovaným bodem množiny V_M. Předně jestliže je $x_1 = 1 - z$, je věc jasná, neboť v tom případě V_M se skládá z dvou bodů z a $1 - z$. Můžeme tedy předpokládat, že $z < x_1 < 1 - z$. Kdyby bod x_1 byl hromadným bodem V_M, existovala by prostá klesající posloupnost $\xi_i \in V_M$ taková, že by platilo $\lim \xi_i = x_1$. Pro každé ξ_i a pro x_1 platí vztahy

$$y(\xi_i) = U(\xi_i)\,, \quad y(x_1) = U(x_1)\,, \quad y'(\xi_i) = U'(\xi_i)\,, \quad y'(x_1) = U'(x_1)\,.$$

Nyní platí

$$y''(x_1) = \lim \frac{y'(\xi_i) - y'(x_1)}{\xi_i - x_1} = \lim \frac{U'(\xi_i) - U'(x_1)}{\xi_i - x_1} = U''(x_1)\,.$$

Funkce $y(x)$ a $U(x)$ se tedy shodují v bodě x_1 až do druhých derivací včetně. Nazveme nyní rozdíl $y(x) - U(x) = g(x)$. Protože na intervalu (z, x_1) není hmot a protože $U''''(x) \equiv 0$, plyne z toho, že $g''''(x) \equiv 0$, $x \in (z, x_1)$. Protože $z \in V_M$, splňuje $g(x)$ tyto okrajové podmínky:

$$g(z) \doteq 0 \,, \quad g(x_1) = 0 \,, \quad g'(x_1) = 0 \,, \quad g''(x_1) = 0 \,.$$

Z toho však plyne, že $g(x) \equiv 0$ na (z, x_1), což znamená $y(x) \equiv U(x)$ na (z, x_1) a tedy $(z, x_1) \subset V_M$, což je spor s faktem již dokázaným, že z je isolovaným bodem množiny V_M. Je tedy x_1 opět isolovaným bodem množiny V_M.

Nazveme opět x_2 $x_2 = \min[V_M - (z) - (x_1)]$, pokud je ovšem $V_M \neq (z) + (x_1)$.

Dokážeme nyní, že platí již $x_2 = 1 - z$. V opačném případě by totiž x_1 a x_2 byly vnitřními body intervalu $\langle z, 1 - z \rangle$, tedy $(x_1, x_2) \subset (z, 1 - z)$; odtud plyne splnění vztahů

$$y(x_1) = U(x_1) \,, \quad y(x_2) = U(x_2) \,, \quad y'(x_1) = U'(x_1) \,, \quad y'(x_2) = U'(x_2) \,.$$

Rozdíl $g(x) = y(x) - U(x)$ má na intervalu (x_1, x_2) nulovou čtvrtou derivaci, neboť na intervale (x_1, x_2) není hmota. Platí tedy $g(x_1) = 0$, $g(x_2) = 0$, $g'(x_1) = 0$, $g'(x_2) = 0$, $g''''(x) = 0$, $x \in (x_1, x_2)$. Z toho plyne, že $g(x) \equiv 0$ na (x_1, x_2) a odtud $(x_1, x_2) \subset V_M$, což odporuje tomu, což bylo už dokázáno, že totiž x_1 je isolovaným bodem množiny V_M. Tím jsme dokázali, že $x_2 = 1 - z$.

Pro množinu V_M jsou tedy zatím tyto možnosti:

$$\text{a) } V_M = (z) \,, \quad \text{b) } V_M = (z) + (x) \,, \quad \text{c) } V_M = (z) + (x) + (1 - z) \,,$$
$$\text{d) } V_M = (z) + (1 - z) \,, \quad z < x < 1 - z \,.$$

Případ (a) nastat nemůže, neboť pak by $J_M = (z)$ a tedy M by nebyl bodem absolutního maxima funkcionálu $\dfrac{\int_0^1 \Gamma(x, x)\,\mathrm{d}M}{\lambda[M]}$, neboť pro to M, pro něž je $J_M = (z)$, je $\dfrac{\int_0^1 \Gamma(x, x)\,\mathrm{d}M}{\lambda[M]} = 1$.

Případ (b) též nemůže nastat, neboť záměnou $x \to 1 - x$ dostaneme spor plynoucí ze vztahů (24).

Nyní dokážeme, že ani případ (c) nemůže nastat. Rozdílová funkce $g(x) = y(x) - U(x)$ by v tomto případě totiž splňovala vztahy

$$\begin{gathered} g(z) = 0 \,, \quad g(x) = 0 \,, \quad g(1 - z) = 0 \,, \quad g'(x) = 0 \,, \quad g''(x) \geq 0 \,, \\ g''''(t) \equiv 0 \,, \quad g''''(t) = 0 \,, \\ t \in (z, x) \,, \quad t \in (x, 1 - z) \,, \end{gathered} \tag{25}$$

neboť v intervalech (z, x), $(x, 1-z)$ není hmot. Ze základní rovnice (18) plyne, že funkce $y'''(t)$ má v bodě $t = x$ skok rovný $\omega^2 m U(x)$, kde m je hmota v bodě x, tedy:

$$m = \lim_{s \to +x} M(s) - \lim_{s \to -x} M(s) ,$$

takže $m \geq 0$. Ze vztahů (25) plyne, že funkce $g(t)$ je určena vztahy:

$$g(t) = \begin{cases} a_1(t-x)^2 + b_1(t-x)^3 , & t \in (z, x) , \\ a_2(t-x)^2 + b_2(t-x)^3 , & t \in (x, 1-z) . \end{cases} \tag{26}$$

Protože $g(t)$ má spojitou ještě druhou derivaci, je $a_1 = a_2 = a$, a protože je $g''(t) \geq 0$, musí být $a \geq 0$. Aby mohlo být $g(z) = 0$, $g(1-z) = 0$, musí být

$$b_1 > 0 \quad \text{a} \quad b_2 < 0 . \tag{27}$$

Protože je $U'''(t) \equiv 0$, je skok funkce $y'''(t)$ v bodě x roven skoku funkce $g(t)$ v témž bodě, což však podle (26) dává, že

$$\lim_{t \to +x} g'''(t) - \lim_{t \to -x} g'''(t) = 6(b_2 - b_1) .$$

Je tedy $6(b_2 - b_1) = \omega^2 m U(x)$. Protože však podle (27) je $b_2 - b_1 < 0$ a $\omega^2 m \,.\, U(x)$ je nezáporné číslo, je to spor, což dokazuje, že jedině případ d) je možný. Množiny $V_M = J_M$ se tedy skládají ze dvou bodů:

$$V_M = J_M = (z) \cup (1-z) . \tag{28}$$

S extremálou $M(x)$ je extremální též $\bar{M}(x) = 1 - M(1-x)$,*) a podle výsledku (28) platí, že $J_M = J_{\bar{M}}$, z čehož podle věty o úsečce extremál vpředu dokázané plyne, že též $\frac{1}{2}(M + \bar{M})$ je extremála, tedy že můžeme předpokládat souměrnost extremálního rozložení hmoty M. Funkce $M(x)$ má tedy tvar

$$M(x) \equiv 0 , \ x \in \langle 0, z) , \quad M(x) \equiv \tfrac{1}{2} , \ x \in \langle z, 1-z\rangle , \quad M(x) = 1 , \ x \in \langle 1-z, 1\rangle ,$$

neboli v bodech z a $1-z$ je hmota rovna $\frac{1}{2}$.

Naším úkolem je vyčíslení funkcionálu $\dfrac{\int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M}{\lambda[M]}$ pro tuto extremální funkci M. Čitatel zlomku má hodnotu $\frac{1}{2}[\Gamma(z, z) + \Gamma(1-z, 1-z]$, což ze souměrnosti Γ je rovno $\Gamma(z, z)$. Jmenovatel je $\lambda[M]$, tedy číslo vyhovující integrální rovnici

$$\int_0^1 \Gamma(x, s)\, y(s)\, \mathrm{d}M(s) = \lambda y(x) ;$$

ta se v našem případě redukuje na soustavu rovnic

$$\tfrac{1}{2}\Gamma(z, z)\, y(z) + \tfrac{1}{2}\Gamma(z, 1-z)\, y(1-z) = \lambda y(z) ,$$

$$\tfrac{1}{2}\Gamma(1-z, z)\, y(z) + \tfrac{1}{2}\Gamma(1-z, 1-z)\, y(1-z) = \lambda y(1-z) .$$

*) $\bar{M}$ vznikne z M souměrností podle bodu $\frac{1}{2}$.