Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

POZNÁMKA O PLOCHÁCH S LOKÁLNĚ SFÉRICKOU INDIKATRICÍ NORMÁLNÍ KŘIVOSTI V PĚTIROZMĚRNÉM PROSTORU

KAREL SVOBODA, Brno.

(Došlo dne 2. června 1955.) DT:513.735

Autor vyšetřuje zvláštní případ ploch s lokálně sférickou indikatricí normální křivosti v pětirozměrném prostoru konstantní křivosti a doplňuje tím výsledky uvedené v pojednání *Sur une caractérisation métrique de la surface de Véronèse.*

1. V pětirozměrném prostoru S_5 konstantní křivosti c přiřadíme každému bodu M pohyblivý reper (R) složený z ortonormálních vektorů $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$. Libovolné změně parametrů prostoru v okolí určitého bodu odpovídá změna reperu a zvláště platí rovnice tvaru

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M &= \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3 + \omega_4\mathbf{e}_4 + \omega_5\mathbf{e}_5\,, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_i &= -c\omega_i M + \omega_{i1}\mathbf{e}_1 + \omega_{i2}\mathbf{e}_2 + \omega_{i3}\mathbf{e}_3 + \omega_{i4}\mathbf{e}_4 + \omega_{i5}\mathbf{e}_5\,, \\ &(i = 1, \ldots, 5)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

při čemž ω jsou lineární formy v diferenciálech proměnných, na nichž závisí reper (R).

Formy ω vyhovují vzhledem k předpokladům o vektorech $\mathbf{e}_i$ lineárním rovnicím

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0\,, \quad (i, j = 1, \ldots, 5) \tag{2}$$

a vnějším kvadratickým relacím

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}\omega_i] &= [\omega_1\omega_{1i}] + [\omega_2\omega_{2i}] + [\omega_3\omega_{3i}] + [\omega_4\omega_{4i}] + [\omega_5\omega_{5i}]\,, \\ [\mathrm{d}\omega_{ij}] &= [\omega_{i1}\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\omega_{2j}] + [\omega_{i3}\omega_{3j}] + [\omega_{i4}\omega_{4j}] + [\omega_{i5}\omega_{5j}] - c\,[\omega_i\omega_j]\,, \\ &(i, j = 1, \ldots, 5)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

které jsou rovnicemi struktury prostoru S_5 s konstantní křivostí c. Tento prostor je pro $c = 0$ eukleidovský a pro $c \neq 0$ neeukleidovský.

Z rovnic (1) vychází pro lineární element vztah

$$\mathrm{d}s^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 + \omega_5^2. \tag{4}$$

Budeme se zabývati množinou (M) bodů M v prostoru $\mathbf{S}_5$, která je definována tímto způsobem:

Každému bodu M množiny (M) lze přiřaditi pohyblivý reper (R) takový, že příslušné formy ω vyhovují kromě rovnic (2) *soustavě Pfaffových rovnic*

$$\begin{aligned} &\omega_3 = 0\,, && \omega_4 = 0\,, && \omega_5 = 0\,,\\ &\omega_{13} = v\omega_1\,, && \omega_{14} = r\omega_1\,, && \omega_{15} = r\omega_2\,,\\ &\omega_{23} = v\omega_2\,, && \omega_{24} = -\,r\omega_2\,, && \omega_{25} = r\omega_1\,, \end{aligned} \tag{5}$$

v nichž funkce v, r jsou vázány podmínkou

$$v^2 + r^2 = R^2\,, \tag{6}$$

kde R značí kladnou konstantu.

Z rovnic (1) a (5) je patrno, že uvažovanou množinou bodu M je *plocha* vnořená do prostoru $\mathbf{S}_5$ a že pohyblivý reper přiřazený libovolnému jejímu bodu má tu vlastnost, že vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ jsou rovnoběžné s tečnou rovinou plochy v bodě M.

V libovolném bodě plochy jest její *normální křivost* definována vektorem kolmým k tečné rovině, jehož souřadnicemi jsou kvadratické formy

$$\begin{aligned} \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} &= v(\omega_1^2 + \omega_2^2)\,,\\ \omega_1\omega_{14} + \omega_2\omega_{24} &= r(\omega_1^2 - \omega_2^2)\,,\\ \omega_1\omega_{15} + \omega_2\omega_{25} &= 2r\omega_1\omega_2\,, \end{aligned} \tag{7}$$

dělené výrazem ds^2. Položíme-li $\omega_1 = ds\,.\cos\Theta$, $\omega_2 = ds\,.\sin\Theta$ a označíme-li X_3, X_4, X_5 souřadnice vektoru normální křivosti v prostoru $\mathbf{S}_3$, který je totálně kolmý k tečné rovině plochy (M) v bodě M, dostaneme

$$X_3 = v\,,\quad X_4 = r\cos 2\Theta\,,\quad X_5 = r\sin 2\Theta\,. \tag{8}$$

Mění-li se Θ, vyplní koncový bod vektoru normální křivosti kuželosečku, která se nazývá *indikatrix normální křivosti* uvažované plochy v bodě M.

Z rovnic (8) vychází podle (6) $X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = R^2$, takže uvažovaná plocha má vlastnost, že *indikatrix normální křivosti v každém bodě plochy je kružnice ležící na kouli prostoru $\mathbf{S}_3$, která má konstantní poloměr R a střed v příslušném bodě plochy.*

Je zřejmé, že r značí poloměr indikatrice a v vzdálenost její roviny od bodu plochy. Budeme říkati, že tyto plochy mají lokálně sférickou indikatrici normální křivosti.

2. Vyšetříme nyní existenci a obecnost ploch, které mají výše uvedenou vlastnost, při čemž budeme předpokládati $v \neq 0$. Případ $v = 0$ podrobně vyšetřil O. Borůvka v pojednání *Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante* (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 106, 1929).

Vnějším diferencováním rovnic (5) a užitím rovnic struktury (3) dostaneme především vnější kvadratické relace

$$
\begin{aligned}
&\left[\omega_1\left(\frac{\mathrm{d}v}{r} - \omega_{34}\right)\right] - [\omega_2\omega_{35}] = 0\,,\\
&[\omega_1\omega_{35}] - \left[\omega_2\left(\frac{\mathrm{d}v}{r} + \omega_{34}\right)\right] = 0\,,\\
&\left[\omega_1\left(\frac{\mathrm{d}r}{r} + \frac{v}{r}\,\omega_{34}\right)\right] + [\omega_2(2\omega_{12} - \omega_{45})] = 0\,,\\
&[\omega_1(2\omega_{12} - \omega_{45})] - \left[\omega_2\left(\frac{\mathrm{d}r}{r} - \frac{v}{r}\,\omega_{34}\right)\right] = 0\,,\\
&\left[\omega_1\left(2\omega_{12} - \frac{v}{r}\,\omega_{35} - \omega_{45}\right)\right] - \left[\omega_2\,\frac{\mathrm{d}r}{r}\right] = 0\,,\\
&\left[\omega_1\,\frac{\mathrm{d}r}{r}\right] + \left[\omega_2\left(2\omega_{12} + \frac{v}{r}\,\omega_{35} - \omega_{45}\right)\right] = 0\,,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

v nichž diferenciály funkcí v a r vyhovují podle (6) podmínce

$$
v\,\mathrm{d}v + r\,\mathrm{d}r = 0\,. \tag{10}
$$

Z (9) a (10) plyne, že soustava Pfaffových rovnic (5) není v involuci. Prodloužíme ji proto rovnicemi

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}v}{r} = 2(A\omega_1 - B\omega_2)\,, \quad 2\omega_{12} - \omega_{45} = \frac{v}{r}\,(B\omega_1 + A\omega_2)\,,\\
&\omega_{34} = -A\omega_1 - B\omega_2\,, \quad \omega_{35} = B\omega_1 - A\omega_2\,,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

v nichž A, B jsou nové funkce.

Podmínky integrability prodloužené soustavy rovnic (5), (11) dostaneme pak ve tvaru

$$
\begin{aligned}
&[\omega_1(\mathrm{d}A + B\omega_{12})] - [\omega_2(\mathrm{d}B - A\omega_{12})] = 0\,,\\
&[\omega_1(\mathrm{d}B - A\omega_{12})] + [\omega_2(\mathrm{d}A + B\omega_{12})] +\\
&+ \frac{r}{v}\left(6r^2 - 2v^2 - 2c - \sqrt{1 + 2\,\frac{v^2}{r^2}\,.\sqrt{A^2 + B^2}}\right)[\omega_1\omega_2] = 0\,,\\
&[\omega_1(\mathrm{d}A + B\omega_{12})] + [\omega_2(\mathrm{d}B - A\omega_{12})] - 2\,\frac{v}{r}\,AB\,[\omega_1\omega_2] = 0\,,\\
&[\omega_1(\mathrm{d}B - A\omega_{12})] - [\omega_2(\mathrm{d}A + B\omega_{12})] + \frac{v}{r}\,(A^2 - B^2)[\omega_1\omega_2] = 0\,.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Z rovnic (12) je však patrno, že také prodloužená soustava Pfaffových rovnic není v involuci. Položíme proto znovu na základě Cartanova lemmatu

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}A + B\omega_{12} =\\
&= \frac{r}{2v}\left(6r^2 - 2v^2 - 2c - \sqrt{1 + 2\,\frac{v^2}{r^2}\,.\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{v^2}{r^2}\,.\sqrt{A^2 - B^2}\right)\omega_1 + \frac{v}{r}\,AB\omega_2\,,\\
&\mathrm{d}B - A\omega_{12} =\\
&= -\frac{v}{r}\,AB\omega_1 - \frac{r}{2v}\left(6r^2 - 2v^2 - 2c - \sqrt{1 + 2\,\frac{v^2}{r^2}\,.\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{v^2}{r^2}\,.\sqrt{A^2 - B^2}\right)\omega_2\,.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Vnějším diferencováním pak dostaneme z rovnic (13) relace

$$\begin{aligned} B\{(v^2 + r^2)(A^2 + B^2 - 6r^2 + 2v^2 + 2c) - 10v^2r^2\} &= 0 , \\ A\{(v^2 + r^2)(A^2 + B^2 - 6r^2 + 2v^2 + 2c) - 10v^2r^2\} &= 0 . \end{aligned} \tag{14}$$

Z nich je patrno, že je třeba rozlišovati dva případy podle toho, zda obě veličiny A, B jsou nebo nejsou současně rovny nule.

Buď nejprve $A = B = 0$. Pfaffovy rovnice (11) mají v tomto případě tvar

$$\mathrm{d}v = 0 , \ 2\omega_{12} - \omega_{45} = 0 , \ \omega_{34} = 0, \ \omega_{35} = 0 \tag{15}$$

a uvažované plochy mají vlastnost, že vzdálenost v roviny indikatrice od příslušného bodu plochy je konstantní. Z (6) pak vychází, že poloměr r indikatrice je rovněž konstantní.

Podmínkou integrability soustavy rovnic (5) a (15) je podle (12) $3r^2 - v^2 - c = 0$, takže uvedená soustava je úplně integrabilní a její obecné řešení závisí jen na konstantách.

Předpokládejme nyní, že není současně $A = B = 0$, takže podle (11) v není konstantní podél celé plochy. Podle (14) je pak

$$(v^2 + r^2)(A^2 + B^2 - 6r^2 + 2v^2 + 2c) - 10v^2r^2 = 0 . \tag{16}$$

Diferencováním tohoto vztahu a dosazením podle (10), (11), (12) dostaneme relaci, kterou lze na základě (16) zjednodušiti na tvar

$$(v^2 + r^2)\, c + (v^2 - r^2)(v^2 + 6r^2) = 0 .$$

Tato relace vede pak po opětovném diferencování a odloučení výrazu $v\,\mathrm{d}v$, který je podle předpokladu různý od nuly, k podmínce

$$17r^2 - 3v^2 = 0 .$$

Odtud pak stejným postupem odvodíme spor s uvedeným předpokladem. Uvažované plochy tedy v tomto případě neexistují.

3. Shrnutím předcházející úvahy dospíváme k tomuto výsledku:

V pětirozměrném prostoru konstantní křivosti c existuje právě jedna třída ploch, které mají lokálně sférickou indikatrici normální křivosti, ležící na kouli s konstantním poloměrem a se středem v příslušném bodě plochy a v rovině neprocházející tímto bodem. Vzdálenost roviny indikatrice od bodu plochy a tedy také její poloměr jsou u těchto ploch konstantní.

V pojednání *Sur une caractérisation métrique de la surface de Véronèse* (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 368, 1955) jsem odvodil, že tyto plochy jsou dokonale určeny tím, že jejich lokálně sférická indikatrix normální křivosti má konstantní poloměr podél celé plochy, a uvedl základní geometrické vlastnosti těchto ploch. Zejména jsem zjistil, že každá taková plocha je *Veronesovou plochou* v projektivně rozšířeném prostoru $\mathbf{S}_5$, a podal tak metrické vlastnosti klasické Veronesovy plochy.