ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 81 * PRAHA, 1. ·. 1956 * ČÍSLO 1

ČLÁNKY

ROZŠÍŘENÍ VĚT MENELAOVY A CEVOVY NA n-DIMENSIONÁLNÍ ÚTVARY

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

(Došlo dne 22. prosince 1954.)

DT 513.126:513.82

V n-dimensionálním eukleidovském prostoru ($n \geqq 2$) uvažuje autor geometrický útvar tvořený $n + 1$ úsečkami

$$A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n+1}A_1\,;$$

body $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ jsou lineárně nezávislé. Na tento útvar, který je jakýmsi n-dimensionálním zobecněním trojúhelníka, rozšiřuje v II. části známé věty Menelaovu a Cevovu. Ve III. části je podrobněji studováno toto rozšíření věty Cevovy.

I.

Úmluva 1,1. Budeme pracovat v n-rozměrném eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_n$, $n \geqq 2$. m-dimensionální eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$ obsažený v $\mathbf{E}_n$ a určený body

$$P_1, P_2, \ldots, P_{m+1}\,, \quad 1 \leqq m \leqq n\,,$$

budeme též označovat

$$\mathbf{E}_m = \{P_1P_2 \ldots P_{m+1}\}\,.$$

Definice 1,1. *Buďtež*

$$A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}\,, \quad 2 \leqq m \leqq n\,,$$

body z $\mathbf{E}_n$, *které při* $m < n$ *leží v jediném podprostoru* $\mathbf{E}_m$ *a při* $m = n$ *nejsou v žádné nadrovině prostoru* $\mathbf{E}_n$. *Útvar, tvořený* $m + 1$ *úsečkami*

$$A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{m+1}A_1\,,$$

nazveme mnohoúhelníkem normálním v podprostoru

$$\{A_1A_2 \ldots A_{m+1}\} \tag{1,1}$$

(pro $m = 2$ trojúhelníkem a pro $m = 3$ prostorovým čtyřúhelníkem) *a označíme jej*

$$A_1A_2 \dots A_{m+1} \,. \tag{1,2}$$

Jedině když budeme mít na mysli mnohoúhelník

$$A_1A_2 \dots A_{n+1} \tag{1,3}$$

normální v prostoru $\mathbf{E}_n$, *budeme mluvit jen o normálním mnohoúhelníku* $A_1A_2 \dots$ $\dots A_{n+1}$.

Definice 1,2. *Budiž* m *přirozené číslo,* $2 \leqq m \leqq n$. *Body*

$$A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$$

nazveme vrcholy mnohoúhelníka (1,2) *normálního v podprostoru* (1,1). *Úsečky*

$$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m+1}A_1 \,,$$

které při $m = n$ *označíme* $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, *nazveme jeho stranami. Přímky*

$$\{A_1A_2\}, \{A_2A_3\}, \dots, \{A_{m+1}A_1\}$$

nazveme přímkami jeho stran.

Dva vrcholy na téže straně mnohoúhelníka (1,2) *normálního v podprostoru* (1,1) *označíme vzájemně jako sousední.*

Věta 1,1. *Kterýchkoliv* m $(2 \leqq m \leqq n)$ *bodů z* $n + 1$ *vrcholů*

$$A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \tag{1,4}$$

normálního mnohoúhelníka (1,3) *určuje v libovolném uspořádání mnohoúhelník normální v podprostoru* $\mathbf{E}_m$.

Důkaz plyne snadno z definice 1,1.

Poznámka 1. Je zřejmé, že každou větu o normálním mnohoúhelníku (1,3) můžeme vyslovit — po patřičné změně předpokladů — i pro mnohoúhelník normální v nějakém podprostoru prostoru $\mathbf{E}_n$. Této triviální poznámky budeme později často používat.

Definice 1,3. *Nadrovinu podprostoru* (1,1), *určenou libovolnými* m *body z* $m + 1$ *vrcholů mnohoúhelníka* (1,2) *normálního v podprostoru* (1,1), *nazveme jeho stěnou.*

$(m - 2)$*-dimensionální podprostor* $\mathbf{E}_{m-2}$ *určený vrcholy mnohoúhelníka* (1,2) *normálního v podprostoru* (1,1) *s vynecháním kterýchkoliv dvou sousedních, pojmenujeme vrcholovým podprostorem tohoto mnohoúhelníka; vrcholovému podprostoru a straně, kterou neobsahuje, budeme vzájemně říkat protější.*

Nadrovinu podprostoru (1,1), *která jde vrcholovým podprostorem mnohoúhelníka* (1,2) *normálního v podprostoru* (1,1), *avšak není jeho stěnou, nazveme jeho vrcholovou nadrovinou.*

Poznámka 2. Pro $m = 2$ a jen tehdy je stěna identická s přímkou strany trojúhelníka a vrcholový podprostor splývá s vrcholem.

Úmluva 1,2. Všude v dalším označíme

$$i_1, i_2, \dots, i_r\,, \quad 1 \leqq r \leqq n + 1\,, \tag{1,5}$$

takovou skupinu r čísel z čísel

$$1, 2, \dots, n + 1\,, \tag{1,6}$$

že

$$i_1 < i_2 < \dots < i_r\,.$$

Jestliže $r \leqq n$, označíme

$$j_1, j_2, \dots, j_s$$

zbývajících $s = n - r + 1$ čísel z čísel (1,6), při čemž opět

$$j_1 < j_2 < \dots < j_s\,.$$

Úmluva 1,3. Bod na přímce strany a_i $(i = 1, 2, \dots, n + 1)$ normálního mnohoúhelníka (1,3), který je různý od vrcholů na této straně, budeme označovat B_i.

Věta 1,2. *Každá nadrovina protíná přímky alespoň dvou stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.*

Existuje nejvýše jedna nadrovina, která obsahuje dané body

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_r}\,, \quad 2 \leqq r \leqq n + 1\,, \tag{1,8}$$

a — je-li $r \leqq n$ — je rovnoběžná s přímkami stran

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s}\,, \quad s = n - r + 1\,. \tag{1,9}$$

Tato nadrovina není incidentní s žádným vrcholem normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.

Důkaz. Nejdříve dokážeme první část věty. Pro nadrovinu incidentní alespoň s jedním z vrcholů (1,4) je tvrzení triviální. Stačí tedy dokázat, že neexistuje nadrovina, která není incidentní s žádným vrcholem (1,4) a je rovnoběžná s přímkami n stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$. Předpokládejme naopak, že taková nadrovina existuje. Můžeme předpokládat, že je rovnoběžná s přímkami stran $a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$, takže je rovnoběžná i se stěnou $\{A_2A_3 \dots A_{n+1}\}$, a tedy bod A_1 byl by obsažen v této stěně, což není možné.

Správnost ostatních tvrzení je zřejmá.

Úmluva 1,4. Vrcholovou nadrovinu normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots$ $\dots A_{n+1}$, která jde vrcholovým podprostorem protějším straně a_i $(i = 1, 2, \dots, n + 1)$, budeme označovat

$$\gamma_i\,, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1\,.$$

Protíná-li vrcholová nadrovina γ_i přímku strany a_i, budeme ji též značit β_i; její průsečík s přímkou strany a_i bude vždy označen B_i.

Je-li přímka strany a_i s vrcholovou nadrovinou γ_i rovnoběžná, označíme tuto nadrovinu též $'\beta_i$.

Úmluva 1,5. Budiž $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník. Nadrovinu podprostoru

$$\{A_1A_2 \dots A_{m+1}\}\,, \quad 2 \leqq m \leqq n\,, \tag{1,1}$$

která vznikne průnikem nadroviny γ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) s tímto podprostorem, označíme

$$\gamma_i^{(m)}\,, \quad i = 1, 2, \dots, m\,.$$

Jestliže $\gamma_i = \beta_i$ resp. $\gamma_i = {'\beta_i}$, budeme též užívat tohoto označení:

$$\gamma_i^{(m)} = \beta_i^{(m)} \quad \text{resp.} \quad \gamma_i^{(m)} = {'\beta_i^{(m)}}\,.$$

Mají-li nadroviny

$$\gamma_1^{(m)}, \gamma_2^{(m)}, \dots, \gamma_m^{(m)}\,, \quad 2 \leqq m \leqq n\,, \tag{1,10}$$

podprostoru (1,1) společný bod, označíme jej $Q^{(m)}$; mají-li společný směr, označíme jej $q^{(m)}$.

Nadrovinu podprostoru (1,1), obsahující podprostor $\{A_2A_3 \dots A_m\}$ a bod $Q^{(m)}$, resp. směr $q^{(m)}$, budeme značit $\gamma^{(m)}$. Existuje-li její průsečík s přímkou $\{A_1A_{m+1}\}$, bude vždy označen $B^{(m)}$.

Pro $m = n$ budeme horní index (n) též vynechávat. Dále budeme ještě klást $Q^{(0)} = A_1$ a $Q^{(1)} = B_1$.

Věta 1,3. *Nadroviny* (1,10) *podprostoru* (1,1) *jsou vrcholové nadroviny mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{m+1}$ normálního v podprostoru* (1,1).

Důkaz je zcela snadný.

Věta 1,4. *Kterýchkoliv n z $n + 1$ vrcholových nadrovin*

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ má společný právě jeden bod anebo právě jeden směr (nikoliv oba současně).

Důkaz. Větu stačí dokázat pro nadroviny $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Budiž h přirozené číslo, $2 \leqq h \leqq n - 1$.

Nechť nadroviny

$$\gamma_1^{(h)}, \gamma_2^{(h)}, \dots, \gamma_h^{(h)}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$ mají společný právě jeden bod $Q^{(h)}$ anebo právě jeden směr $q^{(h)}$ (nikoliv oba současně). Přímku, určenou bodem A_{h+2} a bodem $Q^{(h)}$ resp. směrem $q^{(h)}$, označíme třeba $p^{(h+1)}$; tohoto označení použijeme ještě i v důkazu věty 1,6.

Nadroviny

$$\gamma_1^{(h+1)}, \gamma_2^{(h+1)}, \dots, \gamma_h^{(h+1)}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$ mají zřejmě společnou právě jen přímku $p^{(h+1)}$, kterou však — jak se ihned vidí — neobsahuje podprostor $\gamma_{h+1}^{(h+1)}$, a tedy nadroviny

$$\gamma_1^{(h+1)}, \gamma_2^{(h+1)}, \dots, \gamma_{h+1}^{(h+1)}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$ mají opět společný buďto právě jeden bod $Q^{(h+1)}$ (který ovšem leží na přímce $p^{(h+1)}$), anebo právě jeden směr $q^{(h+1)}$ (obsažený pak v přímce $p^{(h+1)}$).

Poněvadž pak přímky $\gamma_1^{(2)}$ a $\gamma_2^{(2)}$ mají buďto společný právě jeden bod, anebo jsou rovnoběžné (a přitom různé), je věta indukcí dokázána.

Věta 1,5. *Budiž $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník s vrcholovými nadrovinami*

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \,. \tag{1,11}$$

Budiž m přirozené číslo, $2 \leqq m \leqq n - 1$.

Pro každé m existuje právě jeden bod $Q^{(m)}$ anebo právě jeden směr $q^{(m)}$ (nikoliv oba současně).

Důkaz je v důsledku vět 1,3 a 1,4 zcela snadný.

Věta 1,6. *Mají-li vrcholové nadroviny*

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \tag{1,11}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ společný bod Q, neleží tento bod v žádné jeho stěně.

Mají-li nadroviny (1,11) *společný směr q, pak tento směr není obsažen v žádné stěně normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.*

Důkaz. Stačí dokázat, že bod Q resp. směr q není v nadrovině $\{A_1A_2 \dots A_n\}$. Budiž h přirozené číslo, $2 \leqq h \leqq n - 1$.

Nechť bod $Q^{(h)}$ resp. směr $q^{(h)}$ není v nadrovině $\{A_1A_2 \dots A_h\}$ podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+1}\}$. Pak přímka $p^{(h+1)}$, definovaná v důkazu věty 1,4, zřejmě podprostor $\{A_1A_2 \dots A_h\}$ ani neprotíná, ani s ním není rovnoběžná (obsažena v něm ovšem není).

Nadrovina $\gamma_{h+1}^{(h+1)}$ podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$ má s nadrovinou $\{A_1A_2 \dots \dots A_{h+1}\}$ téhož podprostoru společný právě jen podprostor $\{A_1A_2 \dots A_h\}$. Existuje-li bod $Q^{(h+1)}$, je to průsečík podprostoru $\gamma_{h+1}^{(h+1)}$ s přímkou $p^{(h+1)}$. Existuje-li směr $q^{(h+1)}$, je s přímkou $p^{(h+1)}$ rovnoběžný.

Z toho ihned plyne, že bod $Q^{(h+1)}$ resp. směr $q^{(h+1)}$ není v nadrovině $\{A_1A_2 \dots \dots A_{h+1}\}$ podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$.

Poněvadž bod $Q^{(2)}$ anebo směr $q^{(2)}$ není v přímce $\{A_1A_2\}$, je naše tvrzení indukcí dokázáno.

Věta 1,7. *Budiž $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník s vrcholovými nadrovinami* (1,11). *Budiž m přirozené číslo, $2 \leqq m \leqq n - 1$.*

Existují-li body $Q^{(m+1)}$ a $Q^{(m)}$, jsou vždy různé a bod $Q^{(m)}$ je průmětem bodu $Q^{(m+1)}$ z bodu A_{m+2} na podprostor $\{A_1A_2 \dots A_{m+1}\}$.

Existují-li bod $Q^{(m+1)}$ a směr $q^{(m)}$, jsou přímka $\{A_{m+2}Q^{(m+1)}\}$ a směr $q^{(m)}$ rovnoběžné.

Existuje-li směr $q^{(m+1)}$, *existuje bod* $Q^{(m)}$ *a přímka* $\{A_{m+2}Q^{(m)}\}$ *a směr* $q^{(m+1)}$ *jsou rovnoběžné.*

Důkaz této věty plyne snadno z předcházejících vět.

Věta 1,8. *Nechť platí předpoklady věty* 1,7.

Nechť existují body $Q^{(m+1)}$ *a* $Q^{(m-1)}$. *Pak jsou vždy různé a přímka* $\{Q^{(m+1)}Q^{(m-1)}\}$ *jde bodem* B_{m+1}, *resp. rovnoběžně s přímkou* $\{A_{m+1}A_{m+2}\}$ *podle toho, zdali* $\gamma_{m+1} = \beta_{m+1}$ *nebo* $\gamma_{m+1} = {}'\beta_{m+1}$.

Nechť existuje směr $q^{(m+1)}$.

Jestliže $\gamma_{m+1} = \beta_{m+1}$, *existuje bod* $Q^{(m-1)}$ *a přímka* $\{B_{m+1}Q^{(m-1)}\}$ *a směr* $q^{(m+1)}$ *jsou rovnoběžné.*

Jestliže $\gamma_{m+1} = {}'\beta_{m+1}$, *existuje směr* $q^{(m-1)}$.

Důkaz. Abychom dokázali první tvrzení, stačí uvážit, že podprostory

$$\gamma_1^{(m+1)}, \gamma_2^{(m+1)}, \ldots, \gamma_{m-1}^{(m+1)}$$

mají společnou právě jen rovinu $\{Q^{(m-1)}A_{m+1}A_{m+2}\}$, kterou podprostor $\gamma_{m+1}^{(m+1)}$ protíná v přímce $\{Q^{(m+1)}Q^{(m-1)}\}$, obsahující i bod B_{m+1}, resp. rovnoběžnou s přímkou $\{A_{m+1}A_{m+2}\}$.

Druhé tvrzení dokážeme takto: Přímka p jdoucí bodem B_{m+1} rovnoběžně se směrem $q^{(m+1)}$ je obsažena v podprostoru $\gamma_{m+1}^{(m+1)}$, který obsahuje i podprostor $\{A_1A_2 \ldots A_m\}$. Tento podprostor protíná podle věty 1,6 přímku p v bodě, který je společným bodem podprostorů

$$\gamma_1^{(m-1)}, \gamma_2^{(m-1)}, \ldots, \gamma_{m-1}^{(m-1)},$$

t. j. bodem $Q^{(m-1)}$.

Zbývá dokázat třetí tvrzení. Budiž $\mathbf{E}_2$ rovina, jdoucí přímkou $\{A_{m+1}A_{m+2}\}$ rovnoběžně se směrem $q^{(m+1)}$. Rovina $\mathbf{E}_2$ je rovnoběžná s podprostorem $\gamma_{m+1}^{(m+1)}$, ale není v něm obsažena. Dále zřejmě není rovnoběžná s podprostorem $\{A_1A_2 \ldots \ldots A_m\}$, obsaženým v $\gamma_{m+1}^{(m+1)}$. Existuje tedy právě jeden směr, který obsahují podprostory $\{A_1A_2 \ldots A_m\}$ a $\mathbf{E}_2$. Rovinu $\mathbf{E}_2$ obsahují podprostory

$$\gamma_1^{(m+1)}, \gamma_2^{(m+1)}, \ldots, \gamma_{m-1}^{(m+1)},$$

jež tedy obsahují směr, rovnoběžný s podprostorem $\{A_1A_2 \ldots A_m\}$. Z toho však okamžitě plyne, že podprostory

$$\gamma_1^{(m-1)}, \gamma_2^{(m-1)}, \ldots, \gamma_{m-1}^{(m-1)}$$

obsahují zmíněný směr.

Věta 1,9. *Budiž* $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ *normální mnohoúhelník s vrcholovými nadrovinami*

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \,. \tag{1,11}$$

Pro každé $m = 2, 3, \ldots, n$ *je nadrovina* $\gamma^{(m)}$ *podprostoru* $\{A_1A_2 \ldots A_{m+1}\}$ *jednoznačně určena a je vrcholovou nadrovinou mnohoúhelníka* $A_1A_2 \ldots A_{m+1}$ *normálního v podprostoru* $\{A_1A_2 \ldots A_{m+1}\}$.

Důkaz je v důsledku věty 1,6 zcela snadný.

II.

V tomto oddílu je věta 2,1 zobecněním věty Menelaovy a věta 2,3 zobecněním věty Cevovy.

Úmluva 2,1. Všude v dalším budeme předpokládat, že přímky všech stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ jsou orientovány a zavedeme si ještě toto označování:

$$k_i = (B_i; A_i, A_{i+1}) = \frac{\overrightarrow{B_iA_i}}{\overrightarrow{B_iA_{i+1}}},$$

$i = 1, 2, \dots, n + 1$; $A_{n+2} = A_1$.

Dále budeme říkat, že dvě rovnoběžné přímky jsou orientovány souhlasně (nesouhlasně), je-li možno (nelze-li) je translací ztotožnit i co do smyslu.

Věta 2,1. *Budiž $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník. Leží-li body*

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_r}, \quad 2 \leqq r \leqq n + 1, \tag{1,8}$$

v nadrovině, která je při $r \leqq n$ rovnoběžná s přímkami jeho stran

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s}, \quad r + s = n + 1, \tag{1,9}$$

je

$$k_{i_1}k_{i_2} \dots k_{i_r} = 1. \tag{2,1}$$

Důkaz. Podotkněme předně, že relace $2 \leqq r$ je nutným důsledkem věty 1,2. Nadrovinu zmíněnou ve větě 2,1 označme β.

Veďme každým vrcholem A_i $(i = 1, 2, \dots, n + 1)$ normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ přímku p_i rovnoběžnou s libovolně zvolenou přímkou nerovnoběžnou s nadrovinou β, a označme P_i průsečík přímky p_i s nadrovinou β. Orientujme libovolně $n + 1$ přímek p_i $(i = 1, 2, \dots, n + 1)$. Nechť $\varepsilon_i = + 1$ resp. $\varepsilon_i = - 1$ $(i = 1, 2, \dots, n + 1)$ podle toho, jsou-li přímky p_i a p_{i+1} orientovány souhlasně resp. nesouhlasně; $p_{n+2} = p_1$. Přímka $\{P_iP_{i+1}\}$ $(i = 1, 2, \dots, n + 1; P_{n+2} = P_1)$ protne přímku $\{A_iA_{i+1}\}$ $(A_{n+2} = A_1)$ v bodě B_i, resp. je s ní rovnoběžná, takže je patrná správnost relací

$$\frac{\overrightarrow{A_{i_l}B_{i_l}}}{\overrightarrow{A_{i_l+1}B_{i_l}}} = \varepsilon_{i_l} \frac{\overrightarrow{A_{i_l}P_{i_l}}}{\overrightarrow{A_{i_l+1}P_{i_l+1}}}, \quad l = 1, 2, \dots, r,$$

a při $r \leqq n$

$$\overrightarrow{A_{j_l}P_{j_l}} = \varepsilon_{j_l} \overrightarrow{A_{j_l+1}P_{j_l+1}}, \quad l = 1, 2, \dots, s; \; s = n + 1 - r.$$

Z nich snadno plyne

$$k_{i_1}k_{i_2} \dots k_{i_r} = \prod_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i. \tag{2,2}$$

Avšak znaménko součinu nalevo v rovnici (2,2) je nezávislé na volbě orientací přímek $p_i (i = 1, 2, \dots, n + 1)$. Orientujeme-li je třeba všechny souhlasně, je

$$\prod_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i = + 1$$

a z (2,2) plyne (2,1).

Věta 2,2. *Budiž $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník. Jestliže pro r bodů*

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_r}\,, \quad 2 \leqq r \leqq n+1\,, \tag{1,8}$$

platí relace (2,1), existuje právě jedna nadrovina, která obsahuje body (1,8) a při $r \leqq n$ je rovnoběžná s přímkami stran

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_s}\,, \quad s + r = n + 1\,, \tag{1,9}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$.

Důkaz. Podle věty 1,2 existuje taková nadrovina nejvýše jedna. Můžeme předpokládat $i_1 = 1$.

Nadrovinu, určenou jednoznačně body

$$B_{i_2}, B_{i_3}, \ldots, B_{i_r}\,, \quad 2 \leqq r \leqq n+1\,,$$

a při $r \leqq n$ rovnoběžnou s přímkami stran (1,9), označme β. Kdyby nadrovina β byla rovnoběžná s přímkou strany a_1, bylo by podle věty 2,1

$$k_{i_2}k_{i_3} \ldots k_{i_r} = 1\,,$$

a tedy srovnáním s relací (2,1) bychom dostali $(B_1; A_1, A_2) = 1$, což není možné. Existuje tedy průsečík nadroviny β s přímkou $\{A_1A_2\}$; označme jej B_1^*. Zřejmě je různý od vrcholů A_1, A_2. Podle věty 2,1 je

$$(B_1^*; A_1, A_2)\, k_{i_2}k_{i_3} \ldots k_{i_r} = 1\,,$$

z čehož srovnáním s (2,1) plyne

$$(B_1^*; A_1, A_2) = (B_1; A_1, A_2)\,,$$

t. j. $B_1^* = B_1$, c. b. d.

Věta 2,3. *Budiž $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník. Nechť jeho vrcholové nadroviny*

$$\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_r}\,, \quad 1 \leqq r \leqq n+1\,,$$

a při $r \leqq n$ ještě i vrcholové nadroviny

$$'\beta_{j_1}, '\beta_{j_2}, \ldots, '\beta_{j_s}\,, \quad r + s = n + 1\,,$$

mají všechny společný bod anebo směr.

Pak platí:

$$k_{i_1}k_{i_2} \ldots k_{i_r} = (-1)^{n+1}\,. \tag{2,3}$$

Důkaz. Pro trojúhelník je věta správná.

Označme symbolem $\alpha^{(m+1)}$ $(m = 2, 3, \ldots, n-1)$ nadrovinu podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{m+2}\}$, jednoznačně určenou bodem A_{m+2} a nadrovinou $\gamma^{(m)}$ podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{m+1}\}$.

Budiž v dalším h přirozené číslo, $2 \leqq h \leqq n-1$.

Uvažujme nyní tyto tři nadroviny

$$\alpha^{(h+1)}, \gamma_{h+1}^{(h+1)}, \gamma^{(h+1)} \tag{2,4}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$ a rovinu $\{A_1A_{h+1}A_{h+2}\}$. Každá z nadrovin (2,4) má s rovinou $\{A_1A_{h+1}A_{h+2}\}$ společnou právě jen přímku, jak se snadno zjistí. Každá z těchto přímek jde podle věty 1,9 právě jedním vrcholem trojúhelníka $A_1A_{h+1}A_{h+2}$. Avšak nadroviny (2,4) mají společný podprostor $\mathbf{E}_{h-1}$ dimense $h - 1$, který jde podprostorem $\{A_2A_3 \dots A_h\}$ a bodem $Q^{(h+1)}$, resp. rovnoběžně se směrem $q^{(h+1)}$, podle toho, existuje-li bod $Q^{(h+1)}$ anebo směr $q^{(h+1)}$; plyne to lehce z věty 1,7. Je pak zřejmé, že zmíněný průsečný podprostor $\mathbf{E}_{h-1}$ buďto rovinu $\{A_1A_{h+1}A_{h+2}\}$ protíná právě v jednom bodě, anebo existuje právě jeden směr obsažený v podprostoru $\mathbf{E}_{h-1}$ a rovině $\{A_1A_{h+1}A_{h+2}\}$. Z toho ihned plyne, že průsečné přímky nadrovin (2,4) s rovinou $\{A_1A_{h+1}A_{h+2}\}$ mají společný bod anebo jsou rovnoběžné.

Užijeme nyní na ně a na trojúhelník $A_1A_{h+1}A_{h+2}$ věty Cevovy, když jsme ještě libovolně orientovali přímky $\{A_1A_3\}, \{A_1A_4\}, \dots, \{A_1A_n\}$. Existuje-li průsečík $B^{(h)}$, platí vždy právě jedna z relací:

$$\left.\begin{aligned}(B^{(h)}; A_1, A_{h+1})(B_{h+1}; A_{h+1}, A_{h+2})(B^{(h+1)}; A_{h+2}, A_1) &= -1\,,\\ (B^{(h)}; A_1, A_{h+1})(B_{h+1}; A_{h+1}, A_{h+2}) &= -1\,,\\ (B^{(h)}; A_1, A_{h+1})(B^{(h+1)}; A_{h+2}, A_1) &= -1\,.\end{aligned}\right\} \tag{2,5}$$

Neexistuje-li průsečík $B^{(h)}$, platí vždy právě jeden z těchto vztahů:

$$\left.\begin{aligned}(B_{h+1}; A_{h+1}, A_{h+2})(B^{(h+1)}; A_{h+2}, A_1) &= -1\,,\\ (B_{h+1}; A_{h+1}, A_{h+2}) &= -1\,,\\ (B^{(h+1)}; A_{h+2}, A_1) &= -1\,.\end{aligned}\right\} \tag{2,6}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $i_1 = 1$. Buďtež

$$i_1, i_2, \dots, i_{r_h}\,, \quad 1 \leqq r_h \leqq h\,,$$

všecka ta z čísel (1,5), která jsou nejvýše rovna h.

Platí-li nyní v mnohoúhelníku $A_1A_2 \dots A_{h+1}$ normálním v podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+1}\}$ pro jeho vrcholové nadroviny

$$\gamma_1^{(h)}, \gamma_2^{(h)}, \dots, \gamma_h^{(h)}, \gamma^{(h)}$$

relace

$$k_{i_1}k_{i_2} \dots k_{i_{r_h}}\,(B^{(h)}; A_{h+1}, A_1) = (-1)^{h+1}\,, \tag{2,7}$$

existuje-li průsečík $B^{(h)}$, a relace

$$k_{i_1}k_{i_2} \dots k_{i_{r_h}} = (-1)^{h+1}\,, \tag{2,8}$$

neexistuje-li průsečík $B^{(h)}$, pak z (2,5) a (2,7) a stejně i z (2,6) a (2,8) plyne, že v mnohoúhelníku $A_1A_2 \dots A_{h+2}$ normálním v podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$ platí pro jeho vrcholové nadroviny

$$\gamma_1^{(h+1)}, \gamma_2^{(h+1)}, \dots, \gamma_{h+1}^{(h+1)}, \gamma^{(h+1)}$$

relace

$$k_{i_1}k_{i_2} \dots k_{i_{r_{h+1}}}(B^{(h+1)}; A_{h+2}, A_1) = (-1)^{h+2}$$

anebo

$$k_{i_1}k_{i_2} \dots k_{i_{r_{h+1}}} = (-1)^{h+2}$$

podle toho, zdali průsečík $B^{(h+1)}$ existuje anebo ne.

Tím je naše věta indukcí dokázána, uvážíme-li ještě, že $B^{(n)} = B_{n+1}$ a $\gamma^{(n)} = \gamma_{n+1}$.

Věta 2,4. *Jestliže pro $r \geqq 1$ bodů*

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_r}, \quad 1 \leqq r \leqq n + 1, \tag{1,8}$$

na přímkách stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ platí relace (2,3), *pak existuje právě jeden bod nebo právě jeden směr, který obsahují jeho vrcholové nadroviny*

$$\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}, \quad 1 \leqq r \leqq n + 1, \tag{2,9}$$

promítající z jeho vrcholových podprostorů body (1,8), *a při $r \leqq n$ ještě jeho vrcholové nadroviny*

$$'\beta_{j_1}, '\beta_{j_2}, \dots, '\beta_{j_s}, \quad r + s = n + 1. \tag{2,10}$$

Důkaz. Podle věty 1,4 existuje takový bod anebo směr nejvýš jeden. Položme opět $i_1 = 1$. Bod resp. směr, který obsahují vrcholové nadroviny (2,9) a při $r \leqq n$ i (2,10) s výjimkou nadroviny $\beta_1 = \beta_{i_1}$, označme B resp. b. Podle věty 1,4 existuje právě jeden bod B anebo právě jeden směr b. Uvažujme nadrovinu β, určenou (podle věty 1,6 jednoznačně) vrcholovým prostorem $\{A_3A_4 \dots A_{n+1}\}$ a bodem B, resp. podmínkou, aby obsahovala směr b. Tato nadrovina (opět podle věty 1,6) neobsahuje přímku $\{A_1A_2\}$ a je vrcholovou nadrovinou normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.

Dále už zjistíme podobně jako v důkazu věty 2,2, užívajíce ovšem věty 2,3 místo věty 2,1, že bod $B_1 = B_{i_1}$ leží v nadrovině β, t. j. $\beta = \beta_1 = \beta_{i_1}$, čímž bude důkaz proveden.

Poznámka 3. Uvedenými větami není zodpověděna otázka, mají-li i vrcholové nadroviny

$$'\beta_1, '\beta_2, \dots, '\beta_{n+1} \tag{2,11}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ společný bod anebo jsou-li rovnoběžné s touž přímkou. Nadrovinami (2,11) se budeme později zabývat zvlášť; uvidíme, že odpověď na zmíněnou otázku je podstatně různá podle parity dimense n.

III.

V této části vyšetříme nutnou a postačující podmínku, aby n vrcholových nadrovin

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ bylo rovnoběžných s touž přímkou. Tuto podmínku vyjadřují věty 3,7 a 3,8; věty 3,1 až 3,6 jsou pomocné.

Věta 3,1. *Nechť pro vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ existují body

$$Q^{(n-2)}, Q^{(n-4)}, \ldots, Q^{(0)} .$$

Budiž $v = n - 2m$, kde $m = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ při n sudém a $m = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2} - 1$ při n lichém.

Pro každé m existuje jediný podprostor dimense $\left[\frac{v+1}{2}\right] + 1$, který obsahuje body

$$A_{v+1}, B_v, Q^{(v-2)}, Q^{(v-4)}, \ldots, Q^{(0)} .$$

Důkaz. V důsledku věty 1,8 stačí ukázat, že bod A_{v+1} neleží v podprostoru $\{B_vQ^{(v-2)}Q^{(v-4)} \ldots Q^{(0)}\}$. Ale to je zřejmé, neboť v opačném případě by nadrovina $\beta_v^{(v)}$ podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{v+1}\}$, která obsahuje podprostor $\{B_vQ^{(v-2)}Q^{(v-4)} \ldots Q^{(0)}\}$, obsahovala body $A_{v+1}, A_v, \ldots, A_1$. Ale to je nemožné podle věty 1,1.

Věta 3,2. *Nechť vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ mají společný bod Q. Nechť při $n > 3$ existují body

$$Q^{(n-2)}, Q^{(n-4)}, \ldots, Q^{(0)} .$$

Orientujme ještě libovolně přímku $\{QB_n\}$.

Pak platí:

$$(B_n; Q^{(n-2)}, Q) = \frac{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^n k_1k_2 \ldots k_n}{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{n-2} k_1k_2 \ldots k_{n-2}} . \tag{3,2}$$

Důkaz. Orientujme nejprve libovolně přímky

$$\{A_{n-1}A_1\}, \{A_{n-3}A_1\}, \ldots$$

a přímky

$$\{Q^{(n-2)}Q^{(n-4)}\}, \{Q^{(n-4)}Q^{(n-6)}\}, \ldots ,$$

pokud nejsou již nějak orientovány v důsledku úmluvy 2,1.

Z vět odd. II nalezneme snadno, že při n sudém

$$(B_2; Q^{(0)}, Q^{(2)}) = 1 - k_1 + k_1 k_2 \tag{3,3}$$

a při n lichém

$$(B_3; Q^{(1)}, Q^{(3)}) = \frac{1 - k_1 + k_1 k_2 - k_1 k_2 k_3}{1 - k_1}. \tag{3,4}$$

Nechť opět $v = n - 2m$, kde nyní při n sudém, $n > 2$,

$$m = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 2,$$

a při n lichém, $n > 3$,

$$m = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} - 2.$$

Zvolme nějaké v.

Podle věty 3,1 je mnohoúhelník $A_{v+1} B_v Q^{(v-2)} Q^{(v-4)} \dots Q^{(0)}$ normální v podprostoru

$$\{A_{v+1} B_v Q^{(v-2)} Q^{(v-4)} \dots Q^{(0)}\}. \tag{3,5}$$

Předpokládejme, že existuje bod $B^{(v)}$. Podle věty 1,8 a věty 1,2, aplikované na uvedený mnohoúhelník, má tedy při n sudém podprostor

$$\{A_v Q^{(v)} B_{v-2} B_{v-4} \dots B_2 B^{(v)}\} \tag{3,6}$$

a při n lichém podprostor

$$\{A_v Q^{(v)} B_{v-2} B_{v-4} \dots B_3 A_2 B^{(v)}\} \tag{3,7}$$

dimense nejméně $\left[\frac{v+1}{2}\right]$. Avšak podprostor (3,6) resp. (3,7) je obsažen v nadrovinách

$$\gamma^{(v)}, \beta^{(v)}_{v-2}, \beta^{(v)}_{v-4}, \dots, \beta^{(v)}_2$$

resp.

$$\gamma^{(v)}, \beta^{(v)}_{v-2}, \beta^{(v)}_{v-4}, \dots, \beta^{(v)}_3$$

podprostoru $\{A_1 A_2 \dots A_{v+1}\}$, a tedy je dimense právě $\left[\frac{v+1}{2}\right]$, takže je nadrovinou v podprostoru (3,5).

Aplikujeme-li nyní na mnohoúhelník $A_{v+1} B_v Q^{(v-2)} Q^{(v-4)} \dots Q^{(0)}$ normální v podprostoru (3,5) a zmíněnou nadrovinu tohoto podprostoru větu 2,1, dostaneme

$$S^{(v)} \,.\, (Q^{(v)}; Q^{(v-2)}, B_v) \,.\, (A_v; B_v, A_{v+1}) \,.\, (B^{(v)}; A_{v+1}, Q^{(0)}) = 1,$$

kde při n sudém

$$S^{(v)} = \prod_{l=1}^{\frac{1}{2}v-1} (B_{2l}; Q^{(2l-2)}, Q^{(2l)})$$

a při n lichém

$$S^{(v)} = (A_2; Q^{(0)}, Q^{(1)}) \prod_{l=1}^{\frac{v-1}{2}-1} (B_{2l+1}; Q^{(2l-1)}, Q^{(2l+1)}) .$$

Podle věty 2,3, aplikované na mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_{v+1}$ normální v podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{v+1}\}$, je

$$k_1k_2 \dots k_v(B^{(v)}; A_{v+1}, A_1) = (-1)^{v+1} ,$$

a tedy

$$(B_v; Q^{(v-2)}, Q^{(v)}) = 1 - \frac{(-1)^{v+1} k_1k_2 \dots k_{v-1}(k_v - 1)}{S^{(v)}} . \tag{3,8}$$

V případě, že bod $B^{(v)}$ neexistuje, t. j. že nadrovina $\gamma^{(v)}$ podprostoru $\{A_1A_2 \dots \dots A_{v+1}\}$ je rovnoběžná s přímkou $\{A_1A_{v+1}\}$, dostaneme po malé modifikaci předcházející úvahy opět relaci (3,8).

Předpokládejme nyní, že platí

$$(B_h; Q^{(h-2)}, Q^{(h)}) = \frac{1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^h k_1k_2 \dots k_h}{1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{h-2} k_1k_2 \dots k_{h-2}} ,$$

$$h = v - 2, v - 4, \dots, h \geqq 4 .$$

V důsledku (3,3) a (3,4) je pak

$$S^{(v)} = 1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{v-2} k_1k_2 \dots k_{v-2} ,$$

a tedy podle (3,8)

$$(B_v; Q^{(v-2)}, Q^{(v)}) = \frac{1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^v k_1k_2 \dots k_v}{1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{v-2} k_1k_2 \dots k_{v-2}} .$$

Tím je věta indukcí dokázána.

Věta 3,3. *Nechť body*

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

leží právě v jedné nadrovině a budiž p přímka nerovnoběžná s touto nadrovinou. Veďme bodem P_1 resp. P_n přímku p_1 resp. p_n rovnoběžnou s přímkou p. Budiž δ libovolná nadrovina, která nejde žádným z bodů $P_1, P_2, \dots, P_n$, protíná všecky přímky

$$\{P_2P_3\}, \{P_3P_4\}, \dots, \{P_{n-1}, P_n\}, p_n, p_1 \tag{3,9}$$

postupně v bodech

$$R_2, R_3, \dots, R_{n-1}, R_n, R_{n+1}$$

a přímku $\{P_1P_2\}$ protíná buďto v bodě R_1, anebo je s ní rovnoběžná. Orientujme libovolně všecky přímky (3,9) i přímku $\{P_1P_2\}$ a položme $\varepsilon = 1$ resp. $\varepsilon = -1$ při souhlasné resp. nesouhlasné orientaci přímek p_1, p_n.

Pak platí:

$$\frac{\overrightarrow{P_n R_n}}{\overrightarrow{P_1 R_{n+1}}} \cdot \prod_{l=1}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = \varepsilon \tag{3,10}$$

resp.

$$\frac{\overrightarrow{P_n R_n}}{\overrightarrow{P_1 R_{n+1}}} \cdot \prod_{l=2}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = \varepsilon\,, \tag{3,10'}$$

podle toho, zdali nadrovina δ přímku $\{P_1P_2\}$ protíná anebo nikoliv.

Důkaz. Nechť nadrovina δ je rovnoběžná s přímkou $\{P_1P_n\}$. Podle zobecněné věty Menelaovy 2,1, aplikované na mnohoúhelník $P_1P_2 \ldots P_n$ normální v podprostoru $\{P_1P_2 \ldots P_n\}$ platí:

$$\prod_{l=1}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = 1$$

resp.

$$\prod_{l=2}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = 1\,.$$

Avšak zřejmě

$$\frac{\overrightarrow{P_n R_n}}{\overrightarrow{P_1 R_{n+1}}} = \varepsilon\,,$$

takže platí relace (3,10) resp. (3,10').

Nechť za druhé nadrovina δ protíná přímku $\{P_1P_n\}$, již jsme nějak orientovali, v bodě R, který je ovšem různý od bodů P_1, P_n. Podle věty 2,1 je

$$(R; P_n, P_1) \cdot \prod_{l=1}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = 1$$

resp.

$$(R; P_n, P_1) \cdot \prod_{l=2}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = 1\,.$$

Dále snadno zjistíme, že

$$(R; P_n, P_1) = \varepsilon \frac{\overrightarrow{P_n R_n}}{\overrightarrow{P_1 R_{n+1}}}\,.$$

Relace (3,10) resp. (3,10') platí tedy i v tomto případě.

Věta 3,4. *Nechť vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, {}'\beta_n$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ mají společný bod Q. Nechť při $n > 3$ existují body

$$Q^{(n-2)}, Q^{(n-4)}, \ldots, Q^{(0)}\,.$$

Orientujme libovolně přímku $\{QQ^{(n-2)}\}$ a položme $\varepsilon = 1$ resp. $\varepsilon = -1$ podle toho, jsou-li (rovnoběžné) přímky

$$\{A_n, A_{n+1}\}, \{QQ^{(n-2)}\} \tag{3,11}$$

orientovány souhlasně nebo nesouhlasně.

Pak platí:

$$\frac{\overrightarrow{A_{n+1}A_n}}{\overrightarrow{Q^{(n-2)}Q}} = \varepsilon(-1)^{n+1}\frac{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{n-2}k_1k_2\ldots k_{n-2}}{k_1k_2\ldots k_{n-1}}. \tag{3,12}$$

Důkaz. Předně body Q a $Q^{(n-2)}$ jsou různé a přímky (3,11) rovnoběžné podle věty 1,8.

Podle věty 3,1 je mnohoúhelník

$$A_{n+1}Q^{(n-2)}Q^{(n-4)}\ldots Q^{(0)} \tag{3,13}$$

normální v podprostoru

$$\{A_{n+1}Q^{(n-2)}Q^{(n-4)}\ldots Q^{(0)}\} \tag{3,14}$$

dimense $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Přímka $\{A_nA_{n+1}\}$ zřejmě není v tomto prostoru obsažena. Označme $\mathbf{E}$ podprostor dimense $\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$, určený podprostorem (3,14) a přímkou $\{A_nA_{n+1}\}$.

Předpokládejme nejprve, že přímka $\{A_1A_{n+1}\}$ protíná vrcholovou nadrovinu $\gamma^{(n)} = \{QA_2A_3\ldots A_n\} = \beta_{n+1}$ v bodě B_{n+1}. Podle věty 1,8 a podle věty 1,2, aplikované na mnohoúhelník (3,13) normální v podprostoru (3,14), leží při n sudém body

$$A_n, Q, B_{n-2}, B_{n-4}, \ldots, B_2, B_{n+1} \tag{3,15}$$

a při n lichém body

$$A_n, Q, B_{n-2}, B_{n-4}, \ldots, B_3, A_2, B_{n+1} \tag{3,16}$$

v podprostoru dimense nejméně $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Avšak při n sudém leží body (3,15) v nadrovinách

$$\beta_{n+1}, \beta_{n-2}, \beta_{n-4}, \ldots, \beta_2$$

a při n lichém body (3,16) v nadrovinách

$$\beta_{n+1}, \beta_{n-2}, \beta_{n-4}, \ldots, \beta_3\,,$$

takže body (3,15) resp. (3,16) leží v nějaké nadrovině δ podprostoru $\mathbf{E}$.

Můžeme tedy na útvar složený v podprostoru $\mathbf{E}$ z přímek stran mnohoúhelníka (3,13) s výjimkou přímky $\{A_{n+1}Q^{(n-2)}\}$ a přímek $\{A_nA_{n+1}\}$ a $\{Q^{(n-2)}Q\}$ a jeho zmíněnou nadrovinu δ aplikovat větu 3,3; tak dostaneme

$$(B_{n+1}; A_{n+1}, A_1)\,.\,S^{(n)}\,.\,\frac{\overrightarrow{Q^{(n-2)}Q}}{\overrightarrow{A_{n+1}A_n}} = \varepsilon\,. \tag{3,17}$$

Avšak podle věty 2,3 je

$$k_1 k_2 \dots k_{n-1} k_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

a podle věty 3,2

$$S^{(\overset{*}{n})} = 1 - k_1 + k_1 k_2 - \dots + (-1)^{n-2} k_1 k_2 \dots k_{n-2} .$$

Z toho a (3,17) plyne pak ihned relace (3,12).

Nechť za druhé přímka $\{A_1 A_{n+1}\}$ je rovnoběžná s vrcholovou nadrovinou $\gamma^{(n)} = {}'\beta_{n+1}$. Pak jednoduchou modifikací výše provedené úvahy dospějeme pomocí věty 3,3 k relaci

$$S^{(n)} \cdot \frac{\overrightarrow{Q^{(n-2)} Q}}{\overrightarrow{A_{n+1} A_n}} = \varepsilon ,$$

při čemž nyní

$$k_1 k_2 \dots k_{n-1} = (-1)^{n+1} ,$$

takže opět platí (3,12).

Věta 3,5. *Budiž $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník. Nechť jeho vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \tag{3,1}$$

obsahují všecky směr q. Nechť při $n \geqq 5$ existují body

$$Q^{(n-3)}, Q^{(n-5)}, \dots, Q^{(0)} .$$

Pak platí:

$$1 - k_1 + k_1 k_2 - \dots + (-1)^n k_1 k_2 \dots k_n = 0 . \tag{3,18}$$

Důkaz. Pro $n = 2$ se věta dokáže snadno. Nechť tedy $n \geqq 3$.

Vrcholy

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, A_{n+1}$$

označme po řadě též takto:

$$\overset{*}{A}_1, \overset{*}{A}_2, \dots, \overset{*}{A}_{\overset{*}{n}-1}, \overset{*}{A}_{\overset{*}{n}}, \overset{*}{A}_{\overset{*}{n}+1} ,$$

takže ovšem

$$\overset{*}{n} = n - 1 ,$$

a uvažujme mnohoúhelník

$$\overset{*}{A}_1 \overset{*}{A}_2 \dots \overset{*}{A}_{\overset{*}{n}+1} \tag{3,19}$$

normální v podprostoru

$$\{\overset{*}{A}_1 \overset{*}{A}_2 \dots \overset{*}{A}_{\overset{*}{n}+1}\} . \tag{3,20}$$

Pro tento mnohoúhelník budeme v dalším užívat označení z úmluv 1,3, 1,4 a 1,5 s připojenými hvězdičkami, jako kdyby byl normálním mnohoúhelníkem.

Vrcholové nadroviny

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-2}, \gamma_{n+1} , \tag{3,21}$$

kde nadrovina γ_{n+1} jde podprostorem $\{A_2A_3 \dots A_n\}$ rovnoběžně se směrem q, mají společnou přímku p, která jde bodem A_n rovnoběžně se směrem q.

Přímka p protíná podle věty 1,7 podprostor (3,20) v bodě, který označíme Y a který je společným bodem těch vrcholových nadrovin mnohoúhelníka (3,19) normálního v podprostoru (3,20), které vzniknou průnikem nadrovin (3,21) s podprostorem (3,20). Užijeme-li — za výše uvedené konvence — úmluvy 1,4, můžeme tyto vrcholové nadroviny mnohoúhelníka (3,19) normálního v podprostoru (3,20) označit takto:

$$\overset{*}{\beta}_1, \overset{*}{\beta}_2, \dots, \overset{*}{\beta}{}^{\bullet}_{n-1}, \overset{*}{\gamma}{}^{\bullet}_{n+1} .$$

Označme $\overset{*}{\gamma}{}^{\bullet}_n$ nadrovinu podprostoru (3,20), která je podle věty 1,6 jednoznačně určena podprostorem $\{\overset{*}{A}_1\overset{*}{A}_2 \dots \overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n-1}\}$ a bodem Y a která je vrcholovou nadrovinou mnohoúhelníka (3,19). V označení z úmluvy 1,5 můžeme tedy vzhledem k výše provedené konvenci psát

$$Y = \overset{*}{Q}{}^{(\dot{n})} = \overset{*}{Q} ;$$

dále se snadno zjistí, že

$$Q^{(n-3)} = \overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)}, \; Q^{(n-5)} = \overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-4)}, \; \dots, \; Q^{(0)} = \overset{*}{Q}{}^{(0)} . \tag{3,22}$$

Orientujme ještě libovolně přímku $\{\overset{*}{A}{}^{\bullet}_n\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1}\}$. Budeme v dalším rozlišovat dva případy podle toho, zdali $\overset{*}{\gamma}{}^{\bullet}_n = \overset{*}{\beta}{}^{\bullet}_n$ anebo $\overset{*}{\gamma}{}^{\bullet}_n = {}'\overset{*}{\beta}{}^{\bullet}_n$.

Nechť předně vrcholová nadrovina $\overset{*}{\gamma}{}^{\bullet}_n = \overset{*}{\beta}{}^{\bullet}_n$ mnohoúhelníka (3,19) protíná přímku $\{\overset{*}{A}{}^{\bullet}_n\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1}\}$ v bodě $\overset{*}{B}{}^{\bullet}_n$. Podle věty 2,3, aplikované jednak na mnohoúhelník (3,19) normální v podprostoru (3,20), jednak na normální mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, dostaneme snadno

$$(\overset{*}{B}{}^{\bullet}_n; \overset{*}{A}{}^{\bullet}_n, \overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1}) = - k_{n-1}k_n , \tag{3,23}$$

takže

$$1 + k_{n-1}k_n \neq 0 . \tag{3,24}$$

Podle věty 1,8 jsou body $\overset{*}{B}{}^{\bullet}_n$, $\overset{*}{Q}$ a $\overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)}$ různé a leží na přímce. Přímka $\overset{*}{p}$ vedená bodem $\overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)}$ rovnoběžně se směrem q (je rovnoběžná s přímkou $p = \{A_n\overset{*}{Q}\}$, a tedy) protne rovinu $\{A_{n-1}A_nA_{n+1}\}$ v bodě X přímky $\{A_n\overset{*}{B}{}^{\bullet}_n\}$ různém od bodů A_n, $\overset{*}{B}{}^{\bullet}_n$. Přímku $\overset{*}{p}$ obsahují zřejmě vrcholové nadroviny β_{n-1}, β_n normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, a tedy jejich průsečné přímky $\{B_{n-1}A_{n+1}\}$ a $\{B_nA_{n-1}\}$ s rovinou $\{A_{n-1}A_nA_{n+1}\}$ jdou bodem X.

Orientujme libovolně přímky $\{\overset{*}{B}{}^{\bullet}_n\overset{*}{Q}\}$ a $\{\overset{*}{B}{}^{\bullet}_nA_n\}$. Zřejmě

$$(\overset{*}{B}{}^{\bullet}_n; \overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)}, \overset{*}{Q}) = (\overset{*}{B}{}^{\bullet}_n; X, A_n) . \tag{3,25}$$

Vzhledem k (3,22) můžeme na mnohoúhelník (3,19) normální v podprostoru (3,20) aplikovat větu 3,2, a tak dostaneme

$$
\begin{aligned}
&(\overset{*}{B}{}^{\bullet}_{n};\ \overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)},\ \overset{*}{Q}) = \\
&= \frac{1}{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{n-3}\, k_1k_2 \ldots k_{n-3}} \,. \qquad (3{,}26)\\
&.\{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{n-2}\, k_1k_2 \ldots k_{n-2} + \\
&\qquad + (-1)^{n-1}\, k_1k_2 \ldots k_{n-2}\, (\overset{*}{B}{}^{\bullet}_{n};\ \overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n};\ \overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1})\}\,.
\end{aligned}
$$

V rovině $\{A_{n-1}A_nA_{n+1}\}$ snadno zjistíme, že

$$
(\overset{*}{B}{}^{\bullet}_{n};\ X,\ A_n) = \frac{k_{n-1}}{k_{n-1} - (1 + k_{n-1}k_n)}\,.
$$

Srovnáním s (3,26) dostaneme vzhledem k (3,23) až (3,25) relaci (3,18).

Nechť za druhé vrcholová nadrovina $\overset{*}{\gamma}{}^{\bullet}_{n} = {}'\overset{*}{\beta}{}^{\bullet}_{n}$ mnohoúhelníka (3,19) normálního v podprostoru (3,20) je s přímkou $\{\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n}\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1}\}$ rovnoběžná.

Podle věty 1,8 jsou body $\overset{*}{Q}$ a $\overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)}$ různé a přímky $\{\overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)}\overset{*}{Q}\}$ a $\{\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n}\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1}\} = \{A_{n-1}A_{n+1}\}$ rovnoběžné. Orientujme libovolně tyto dvě přímky a položme $\overset{*}{\varepsilon} = 1$ resp. $\overset{*}{\varepsilon} = -1$ při jejich souhlasné resp. nesouhlasné orientaci. Je zřejmé, že přímka $\overset{*}{p}$ protíná i nyní rovinu $\{A_{n-1}A_nA_{n+1}\}$ v bodě X, jímž opět jdou její průsečné přímky $\{B_{n-1}A_{n+1}\}$ a $\{B_nA_{n-1}\}$ s vrcholovými nadrovinami β_{n-1} a β_n normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ a který má tu vlastnost, že přímka $\{XA_n\}$ je rovnoběžná s přímkou $\{A_{n-1}A_{n+1}\}$. Orientujme libovolně i přímku $\{XA_n\}$ a položme $\varepsilon' = 1$ při souhlasné a $\varepsilon' = -1$ při nesouhlasné orientaci přímek $\{XA_n\}$ a $\{\overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)}\overset{*}{Q}\}$. Zřejmě

$$
\overrightarrow{\overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)}\overset{*}{Q}} = \varepsilon'\overrightarrow{XA_n}\,. \tag{3,27}
$$

Podle věty 3,4, kterou vzhledem k (3,22) opět můžeme aplikovat na mnohoúhelník (3,19) normální v podprostoru (3,20), je

$$
\frac{\overrightarrow{\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1}\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n}}}{\overrightarrow{\overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)}\overset{*}{Q}}} = \overset{*}{\varepsilon}(-1)^{\dot{n}+1}\,.\,\frac{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{n-3}\, k_1k_2 \ldots k_{n-3}}{k_1k_2 \ldots k_{n-2}}\,. \tag{3,28}
$$

V rovině $\{A_{n-1}A_nA_{n+1}\}$ zřejmě platí

$$
\frac{\overrightarrow{A_{n+1}A_{n-1}}}{\overrightarrow{XA_n}} = \overset{*}{\varepsilon}\varepsilon' k_{n-1}\,,
$$

takže podle (3,27)

$$
\frac{\overrightarrow{\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1}\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n}}}{\overrightarrow{\overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)}\overset{*}{Q}}} = \frac{\overrightarrow{A_{n+1}A_{n-1}}}{\overrightarrow{\overset{*}{Q}{}^{(\dot{n}-2)}\overset{*}{Q}}} = +\overset{*}{\varepsilon}k_{n-1}\,. \tag{3,29}
$$

Uvážíme-li, že nyní ještě $k_{n-1}k_n + 1 = 0$, dostaneme srovnáním (3,28) s (3,29) opět relaci (3,18).

Tím je věta 3,5 dokázána.

Úmluva 3,1. Budiž $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník s vrcholovými nadrovinami

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n . \tag{3,1}$$

Buďtež u, v celá nezáporná čísla taková, že

$$2 \leqq u + 2 \leqq v \leqq n .$$

Budiž $h = 2, 3, \ldots, v - u$.

Označme

$$\beta^{(h)}_{u+1}, \beta^{(h)}_{u+2}, \ldots, \beta^{(h)}_{u+h} \tag{3,30}$$

nadroviny podprostoru

$$\{A_{u+1}A_{u+2} \ldots A_{u+h+1}\} , \tag{3,31}$$

které jsou jeho průniky s nadrovinami

$$\beta_{u+1}, \beta_{u+2}, \ldots, \beta_{u+h} .$$

Podprostory (3,30) jsou zřejmě vrcholové nadroviny mnohoúhelníka $A_{u+1}A_{u+2} \ldots A_{u+h+1}$ normálního v podprostoru (3,31); podle věty 1,4 existuje buďto právě jeden bod jim společný, který pak označíme $Q^{(h)}_{u+1}$, anebo právě jeden směr jim společný, který budeme značit $q^{(h)}_{u+1}$.

Položme ještě $Q^{(1)}_{u+1} = B_{u+1}$ a $Q^{(0)}_{u+1} = A_{u+1}$.

Mnohoúhelník

$$A_{u+1}A_{u+2} \ldots A_{v+1} \tag{3,32}$$

normální v podprostoru $\{A_{u+1}A_{u+2} \ldots A_{v+1}\}$ nazveme přípustným, jestliže $v - u \leqq 4$ anebo jestliže při $v - u > 4$ existují body

$$Q^{(v-u-3)}_{u+1}, Q^{(v-u-5)}_{u+1}, \ldots, Q^{(0)}_{u+1} .$$

Poznámka 4. Mnohoúhelník (3,32) může být přípustný při vhodné volbě vrcholových nadrovin $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ a při jiné volbě nikoliv. Avšak výše zavedená zkratka „přípustného mnohoúhelníka" nám později velmi usnadní vyjadřování a nepovede k nedorozuměním.

Věta 3,6. *Nechť vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ obsahují všecky směr q. Budiž h přirozené číslo, $2 \leqq h < n$. Nechť dále vrcholové nadroviny

$$\beta^{(h)}_1, \beta^{(h)}_2, \ldots, \beta^{(h)}_h$$

mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{h+1}$ normálního v podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{h+1}\}$ mají všecky společný směr $q^{(h)}$.

Pak je vždy

$$h \leqq n - 3$$

a vrcholové nadroviny

$$\beta_{h+2}^{(n-h-1)}, \beta_{h+3}^{(n-h-1)}, \ldots, \beta_{n}^{(n-h-1)} \tag{3,33}$$

mnohoúhelníka $A_{h+2}A_{h+3} \ldots A_{n+1}$ *normálního v podprostoru*

$$\{A_{h+2}A_{h+3} \ldots A_{n+1}\} \tag{3,34}$$

mají všecky společný směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$.

Důkaz. Nechť $h = n - 1$. Nadroviny

$$\beta_1^{(n-1)}, \beta_2^{(n-1)}, \ldots, \beta_{n-1}^{(n-1)}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_n\}$ mají podle věty 1,7 a prvního předpokladu dokazované věty společný bod $Q^{(n-1)}$, a tedy v důsledku druhého jejího předpokladu mají společnou celou přímku. To však odporuje větě 1,4.

Nechť $h = n - 2$. Nadroviny

$$\beta_1^{(n-2)}, \beta_2^{(n-2)}, \ldots, \beta_{n-2}^{(n-2)}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{n-1}\}$ mají společný bod $Q^{(n-2)}$ podle věty 1,8, a tudíž podle předpokladu i přímku společnou, což odporuje větě 1,4.

Tím je první část věty dokázána. Přejdeme k důkazu druhé části.

Z věty 1,6 plyne, že směr q není obsažen v podprostorech $\{A_1A_2 \ldots A_{h+1}\}$ a $\{A_{h+2}A_{h+3} \ldots A_{n+1}\}$, takže není rovnoběžný ani se směrem $q^{(h)}$, o němž se snadno zjistí, že není rovnoběžný s podprostorem $\{A_{h+2}A_{h+3} \ldots A_{n+1}\}$. Nadroviny

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h, \tag{3,35}$$

jež obsahují podprostor (3,34) a směr q s ním nerovnoběžný, protínají se v podprostoru dimense právě $n - h$; označme jej $\mathbf{E}_{n-h}$. Avšak nadroviny (3,35) jsou všecky rovnoběžné i se směrem $q^{(h)}$, což znamená, že v prostoru $\mathbf{E}_{n-h}$ je obsažena rovina $\mathbf{E}_2$, obsahující směry q a $q^{(h)}$. Ježto rovina $\mathbf{E}_2$ není rovnoběžná s podprostorem (3,34), s nímž leží v podprostoru $\mathbf{E}_{n-h}$, protíná jej právě v přímce. Dokážeme o ní, že určuje směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$, který obsahují všecky nadroviny (3,33) podprostoru (3,34).

Uvažujme kteroukoliv z nadrovin

$$\beta_{h+2}, \beta_{h+3}, \ldots, \beta_n. \tag{3,36}$$

Ta obsahuje podprostor $\{A_1A_2 \ldots A_{h+1}\}$, a tedy i rovinu obsahující směry q a $q^{(h)}$, t. j. rovinu rovnoběžnou s rovinou $\mathbf{E}_2$, obsahující směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$. Obsahují tedy všechny nadroviny (3,36) směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$. Poněvadž pak směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$ leží v podprostoru (3,34) a podprostory (3,33) jsou jeho řezy s nadrovinami (3,36), platí i o nadrovinách (3,33) podprostoru (3,34), že obsahují směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$.

Tím je celý důkaz proveden.

Věta 3,7. *Nechť vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ *obsahují všecky směr* q.

Pak platí:

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^n k_1k_2 \ldots k_n = 0 \,. \tag{3,18}$$

Důkaz. V důsledku věty 3,5 stačí dokazovat větu 3,7 pro $n \geqq 5$ a ten případ, že neexistují všecky body $Q^{(n-3)}, Q^{(n-5)}, \ldots, Q^{(0)}$.

Pak lze najít takové přirozené číslo $s_1 \geqq 2$, že mnohoúhelník

$$A_1A_2 \ldots A_{s_1+1} \tag{3,37$_1$}$$

normální v podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{s_1+1}\}$ je přípustný a existuje směr $q_1^{(s_1)}$ ($= q^{(s_1)}$ v označení z úmluvy 1,5). Podle věty 3,6 je $s_1 \leqq n - 3$ a pro mnohoúhelník

$$A_{s_1+2}A_{s_1+3} \ldots A_{n+1} \tag{3,38$_1$}$$

normální v podprostoru $\{A_{s_1+2}A_{s_1+3} \ldots A_{n+1}\}$ existuje směr $q_{s_1+2}^{(n-s_1-1)}$.

Není-li už mnohoúhelník (3,38$_1$) přípustný, pak lze opět nalézt takové přirozené číslo $s_2 \geqq s_1 + 3$, že mnohoúhelník

$$A_{s_1+2}A_{s_1+3} \ldots A_{s_2+1} \tag{3,37$_2$}$$

normální v podprostoru $\{A_{s_1+2}A_{s_1+3} \ldots A_{s_2+1}\}$ je přípustný a existuje směr $q_{s_1+2}^{(s_2-s_1-1)}$. Opět podle věty 3,6 je $s_2 \leqq n - 3$ a pro mnohoúhelník

$$A_{s_2+2}A_{s_2+3} \ldots A_{n+1} \tag{3,38$_2$}$$

normální v podprostoru $\{A_{s_2+2}A_{s_2+3} \ldots A_{n+1}\}$ existuje směr $q_{s_2+2}^{(n-s_2-1)}$.

Není-li už mnohoúhelník (3,38$_2$) přípustný, pak pokračujeme-li tak dále, dojdeme po konečném počtu kroků k mnohoúhelníku

$$A_{s_v+2}A_{s_v+3} \ldots A_{n+1} \tag{3,38$_v$}$$

normálnímu v podprostoru $\{A_{s_v+2}A_{s_v+3} \ldots A_{n+1}\}$, který je přípustný, a pro který existuje směr $q_{s_v+2}^{(n-s_v-1)}$. Přitom je

$$2 \leqq s_1, \; s_1 + 3 \leqq s_2, \; s_2 + 3 \leqq s_3, \; \ldots, \; s_v + 3 \leqq n \,;$$
$$v \geqq 1 \,.$$

Na všecky mnohoúhelníky (3,37$_1$), (3,37$_2$), ..., (3,37$_v$), (3,38$_v$) (mnohoúhelník (3,37$_v$) je ovšem přípustný mnohoúhelník $A_{s_{v-1}+2}A_{s_{v-1}+3} \ldots A_{s_v+1}$) můžeme aplikovat větu 3,5. Tak dostaneme:

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{s_1} k_1k_2 \ldots k_{s_1} = 0 \,,$$
$$1 - k_{s_1+2} + k_{s_1+2}k_{s_1+3} - \ldots + (-1)^{s_2-s_1-1} k_{s_1+2}k_{s_1+3} \ldots k_{s_2} = 0 \,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1 - k_{s_v+2} + k_{s_v+2}k_{s_v+3} - \ldots + (-1)^{n-s_v-1} k_{s_v+2}k_{s_v+3} \ldots k_n = 0 \,.$$

Násobíme-li druhou, třetí atd. až $(v + 1)$-ní z těchto rovnic postupně

$$(-1)^{s_1+1} k_1k_2 \dots k_{s_1+1},\ (-1)^{s_2+1} k_1k_2 \dots k_{s_2+1},\ \dots,\ (-1)^{s_v+1} k_1k_2 \dots k_{s_v+1}\,,$$

a pak všecky rovnice sečteme, dostaneme (3,18).

Věta 3,8. *Nechť pro n bodů*

$$B_1, B_2, \dots, B_n \tag{3,39}$$

na přímkách stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ *platí relace* (3,18). *Pak existuje právě jeden směr, obsažený ve všech vrcholových nadrovinách*

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, *které z jeho vrcholových podprostorů promítají body* (3,39).

Důkaz. Podle věty 1,4 existuje takový směr nejvýše jeden.

Kdyby vrcholové nadroviny $\beta_1^{(n-1)}, \beta_2^{(n-1)}, \dots, \beta_{n-1}^{(n-1)}$ mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots \dots A_n$ normálního v podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_n\}$ byly všecky rovnoběžné s touž přímkou, bylo by podle věty 3,7

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{n-1} k_1k_2 \dots k_{n-1} = 0\,,$$

a tedy srovnáním s (3,18) bychom dostali $k_1k_2 \dots k_n = 0$. Plyne tudíž z věty 1,4 existence bodu $Q^{(n-1)}$.

Nadroviny $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ mají podle věty 1,4 zřejmě společnou právě jen přímku $\{A_{n+1}Q^{(n-1)}\}$. Označme β nadrovinu, která jde podprostorem $\{A_1A_2 \dots \dots A_{n-1}\}$ rovnoběžně s touto přímkou. Nadrovina β zřejmě nesplývá se stěnou $\{A_1A_2 \dots A_n\}$, a kdyby šla vrcholem A_{n+1}, pak proti větě 1,6 by podprostor $\{A_1A_2 \dots A_{n-1}\}$ obsahoval bod $Q^{(n-1)}$. Nadrovina β je tudíž vrcholová nadrovina normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.

Kdyby nadrovina β byla rovnoběžná s přímkou $\{A_nA_{n+1}\}$, existoval by podle věty 1,8 pro mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_{n-1}$ normální v podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{n-1}\}$ směr $q^{(n-2)}$ a podle věty 3,7 by bylo

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{n-2} k_1k_2 \dots k_{n-2} = 0\,.$$

Srovnáním s (3,18) plyne

$$k_1k_2 \dots k_{n-1}(1 - k_n) = 0\,,$$

což je nemožné.

To znamená, že nadrovina β protíná přímku $\{A_nA_{n+1}\}$ v nějakém bodě B_n^*. Podle věty 3,7 je

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{n-1} k_1k_2 \dots k_{n-1} + \\ + (-1)^n k_1k_2 \dots k_{n-1}(B_n^*; A_n, A_{n+1}) = 0\,.$$