Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

NĚKOLIK VLASTNOSTÍ VRCHOLOVÝCH NADROVIN NORMÁLNÍHO MNOHOÚHELNÍKA

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

(Došlo dne 23. května 1955.)

DT: 513.343
513.82

V článku jsou odvozeny některé vlastnosti vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka, které budou později též potřebné k jeho dalšímu studiu.

Označení i názvosloví v tomto článku je totéž jako v autorově práci „Rozšíření věty Menelaovy a Cevovy na n-dimensionální útvary", Časopis pro pěst. mat. *81* (1956), č. 1. Odkazy v dalším textu týkají se všechny této práce.

Předmětem našich úvah bude opět normální mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ n-rozměrného eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ $(n \geqq 2)$. Podle dřívějších úmluv bude bod na přímce jeho strany a_i $(i = 1, 2, \dots, n + 1)$ různý od vrcholů označen B_i a nadrovina, která jej spojuje s vrcholovým podprostorem protějším straně a_i, bude označena β_i. Vrcholová nadrovina, která jde vrcholovým podprostorem protějším straně a_i rovnoběžně s přímkou této strany a_i, bude označena $'\beta_i$.

Věta 1. *Budiž n liché. Nechť body*

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_r}, \quad 1 \leqq r \leqq n + 1, \tag{1}$$

leží v nadrovině β, která je při $r \leqq n$ rovnoběžná s přímkami stran

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s}, \quad s = n - r + 1 .\text{*)} \tag{2}$$

Pak vrcholové nadroviny

$$\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}, \quad 1 \leqq r \leqq n + 1, \tag{3}$$

a při $r \leqq n$ ještě vrcholové nadroviny

$$'\beta_{j_1}, '\beta_{j_2}, \dots, '\beta_{j_s}, \quad s = n - r + 1, \tag{4}$$

mají společný právě jeden bod B anebo právě jeden směr b a obráceně.

Při n sudém věta neplatí.

---

*) Viz úmluvu 1,2 cit. práce.

Důkaz plyne bezprostředně z vět 2,1—2,4 citované práce.

Poznámka 1. Věta ukazuje, že vlastnosti normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ budou různé podle parity dimense n. Později poznáme tyto rozdíly podrobněji.

Věta 2. *Nadrovina β a bod B nebo směr b z věty 1 jsou incidentní.*

Důkaz. Označme $\mathbf{E}_{n-2}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n + 1$, $(n - 2)$-dimensionální podprostor, který je průnikem nadroviny β s vrcholovou nadrovinou β_k (je-li k mezi čísly $i_1, i_2, \dots, i_r$) nebo $'\beta_k$ (je-li $r \leqq n$ a k mezi čísly $j_1, j_2, \dots, j_s$).

Podprostory $\mathbf{E}_{n-2}^{(1)}, \mathbf{E}_{n-2}^{(3)}, \dots, \mathbf{E}_{n-2}^{(n)}$ mají společný podprostor, který z bodů (1) obsahuje ty, jež mají liché indexy a při $r \leqq n$ je rovnoběžný s přímkami těch stran (2), které mají opět liché indexy (existují-li ovšem takové). Tento podprostor má dimensi $\frac{1}{2}(n + 1) - 1$, jak snadno plyne z věty 1,1 citované práce; označíme jej $\mathbf{E}^*$.

Podobně mají i podprostory $\mathbf{E}_{n-2}^{(2)}, \mathbf{E}_{n-2}^{(4)}, \dots, \mathbf{E}_{n-2}^{(n+1)}$ společný podprostor, který jde těmi z bodů (1), jež mají sudé indexy a při $r \leqq n$ je rovnoběžný s přímkami těch stran (2), které mají rovněž sudé indexy. Tento podprostor je opět dimense $\frac{1}{2}(n + 1) - 1$ a označíme jej $\mathbf{E}^{**}$.

Podprostory $\mathbf{E}^*$ a $\mathbf{E}^{**}$ leží v nadrovině β prostoru $\mathbf{E}_n$, avšak nikoliv v podprostoru dimense menší než $n - 1$ (viz opět větu 1,2 citované práce). To znamená, že mají společný buďto právě jeden bod B, anebo právě jeden směr b. Poněvadž pak tento bod B (směr b) je společný nadrovině β i všem vrcholovým nadrovinám (3) a při $r \leqq n$ i vrcholovým nadrovinám (4), je věta dokázána.

Definice 1. *Vrcholovou nadrovinu normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, která je rovnoběžná s přímkou jeho strany protější vrcholovému podprostoru, jímž prochází, nazveme význačnou vrcholovou nadrovinou.*

Věty 3 a 4 dokážeme současně.

Věta 3. *Budiž n sudé. $n + 1$ význačných vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ nemá společný žádný bod ani žádný směr.*

Věta 4. *Budiž n liché. $n + 1$ význačných vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ má společný právě jeden směr, který nazveme jeho význačným směrem.*

Důkazy věty 3 a 4: Předpokládejme, že jsme prostor $\mathbf{E}_n$ vnořili do nějakého $(n + 1)$-dimensionálního prostoru $\mathbf{E}_{n+1}$. Zvolme nyní v $\mathbf{E}_{n+1}$ nadrovinu $\mathbf{E}_n^*$ tak, aby nadrovinu $\mathbf{E}_n$ protínala v podprostoru dimense $n - 1$, který není rovnoběžný s přímkou žádné strany mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ normálního v $\mathbf{E}_n$. Zvolme dále bod S tak, aby existoval průsečík spojnice bodů A_i a S s nadrovinou $\mathbf{E}_n^*$ a označme jej A_i^* $(i = 1, 2, \dots, n + 1)$. Taková volba nadroviny $\mathbf{E}_n^*$ a bodu S je vždy možná a mnohoúhelník $A_1^*A_2^* \dots A_{n+1}^*$ je zřejmě normální v $\mathbf{E}_n^*$. Označme ještě β_i^* průmět podprostoru $'\beta_i$ $(i = 1, 2, \dots, n + 1)$ z bodu S do nadroviny $\mathbf{E}_n^*$. Dostaneme tak ovšem vrcholové nadroviny mnohoúhelníka $A_1^*A_2^* \dots A_{n+1}^*$ normálního v $\mathbf{E}_n^*$.