RECENSE

J. L. Doob: **Stochastic processes.** John Wiley & Sons, New York 1953, stran 654.

Doobova kniha „Stochastic processes" je nejobsáhlejší z dosud napsaných knih o stochastických procesech. Starší knihy o stochastických procesech se zabývaly vždy jen specielními procesy, převážně Markovovými, a i novější knihy mají užší výběr. Aby bylo možno popsat celkové zaměření knihy, bude nejlépe promluvit stručně o pojmu stochastického procesu.

Existují v podstatě dvě *definice stochastického procesu*. První z nich, připisovaná zpravidla SLUTZKÉMU, definuje stochastický proces jako systém distribučních funkcí splňujících jisté známé podmínky. Specielně na př. u Markovových procesů je takový systém definován pravděpodobnostmi přechodu a počátečním rozložením. Podle druhé definice, pocházející v podstatě od KOLMOGOROVA, je stochastický proces definován jako pravděpodobnostní pole se systémem náhodných proměnných. Obě definice jsou ovšem ekvivalentní v tom smyslu, že systém náhodných proměnných definuje systém distribučních funkcí, které splňují zmíněné podmínky a naopak ke každému systému distribučních funkcí splňujících tyto podmínky lze podle známé Kolmogorovovy věty sestrojit alespoň jedno pravděpodobnostní pole s náhodnými proměnnými, které mají předepsaná rozložení. Podstatné je ovšem to, že každá z obou definic vyvolává zpravidla jinou thematiku. Tak první definice vede k tomu, že se pracuje pouze s danými distribučními funkcemi a výhradně analytickými prostředky se vyšetřují metody výpočtu pravděpodobností různých jevů, jejich asymptotické vlastnosti a pod. Naproti tomu druhá definice, i když právě uvedené problémy nijak nevylučuje, zahrnuje již v sobě mnoho dalších problémů, týkajících se struktury pravděpodobnostního pole a náhodných proměnných, měřitelnosti některých důležitých jevů, konvergence a spojitosti výběrových funkcí (definice výběrové funkce je uvedena dále) a pod. Problémům tohoto druhu nelze ovšem upřít jejich důležitost. Je jistě vhodné znát, zda na př. určitému jevu, jehož pravděpodobnost nás zajímá, odpovídá alespoň při některé konkretní representaci stochastického procesu měřitelná množina, t. j. zda pravděpodobnost jevu lze vůbec nějakým rozumným způsobem definovat. Avšak čtenář, kterého zajímají především aplikace stochastických procesů, tedy hlavně jejich analytický aparát, bude Doobovou knihou asi poněkud zklamán. Autor užívá totiž důsledně druhé definice a v souhlase s tím jsou v knize problémy, týkající se struktury pravděpodobnostního pole vyšetřovány velmi důkladně, zpravidla do větší hloubky a obecněji než v dosavadní časopisecké literatuře, zatím co z analytických problémů jsou uvedeny jen nejdůležitější. Celý charakter knihy vynikne snad nejlépe z následujícího stručného *obsahu.*

Kapitola I obsahuje kromě základních pojmů teorie pravděpodobnosti, jako pravděpodobnostní pole, náhodná proměnná, distribuční funkce a různé druhy konvergence, také pojednání o podmíněných pravděpodobnostech a charakteristických funkcích. Odstavec o podmíněných středních hodnotách a pravděpodobnostech je dosud nejúplnějším pojednáním o této části teorie pravděpodobnosti. Podmíněná střední hodnota se definuje vzhledem k některému σ-tělesu $\mathfrak{F}$ obsaženému v základním σ-tělese pravděpodobnostního pole. Přesněji řečeno, jestliže y je náhodná proměnná s konečnou střední hodnotou, pak podmíněná střední hodnota náhodné proměnné y vzhledem k σ-tělesu $\mathfrak{F}$, značená symbolem $E(y \mid \mathfrak{F})$, je $\mathfrak{F}$-měřitelná funkce, vyhovující pro všechna $\Lambda \in \mathfrak{F}$ vztahu $\int_\Lambda E(y \mid \mathfrak{F})\, \mathrm{d}P = \int_\Lambda y\, \mathrm{d}P$. Tato definice je ekvivalentní, jak lze snadno zjistit, s původní definicí Kolmogorovou, t. j. definicí podmíněné střední hodnoty vzhledem k měřitelné transformaci. Podmíněná střední hodnota vzhledem k systému náhodných proměnných je pak definována jako podmíněná střední hodnota vzhledem k minimálnímu σ-tělesu, podle něhož jsou všechny náhodné proměnné daného systému měřitelné. Kromě známých vět, obsažených již v Kolmogorovově knize „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung", jsou zde dokázány dvě věty o t. zv. podmíněných pravděpodobnostních rozloženích, t. j. o podmíněných pravděpodobnostech, které jsou skoro jistě pravděpodobnostními mírami. První z nich zhruba říká, že na borelovských množinách n-rozměrného Euklidova prostoru vždy existuje ke každému podmiňujícímu σ-tělesu podmíněné pravděpodobnostní rozložení. Druhou z těchto vět jest možno považovat za správnou versi jedné (nesprávné) věty, uveřejněné autorem v TAMS 44 (1938). Je snad vhodné upozornit zde na to, že pojem podmíněného pravděpodobnostního rozložení v širším smyslu, definovaného rovněž v tomto odstavci, nijak nesouvisí s pojmem podmíněné střední hodnoty v širším smyslu, který je definován v kap. II, § 3. Odstavec o charakteristických funkcích obsahuje kromě známé věty o inversi také několik nových nerovností.

V kapitole II je především definován pojem stochastického procesu. Stochastický proces je definován jako základní prostor Ω (jehož body jsou dále značeny ω) se σ-tělesem $\mathfrak{F}$ (takovým, že $\Omega \in \mathfrak{F}$) a pravděpodobnostní mírou P na $\mathfrak{F}$ a se systémem náhodných proměnných x_t, kde parametr t probíhá některou podmnožinu reálných čísel T. Náhodné proměnné x_t definují jedinou funkci dvou proměnných $x(t, \omega)$. Pro každé pevné ω je $x(t, \omega)$ pouze funkcí proměnné t a každou takovou funkci nazývá autor výběrovou funkcí, analogicky k terminologii matematické statistiky. Při běžné representaci stochastického procesu v prostoru všech reálných funkcí na T jest ovšem systém všech výběrových funkcí totožný se základním prostorem. Spojitosti těchto výběrových funkcí, po př. charakteru nespojitosti a limitním vlastnostem, je v knize věnována velká pozornost.

Další odstavec je věnován definici separabilního a měřitelného stochastického procesu. Stochastický proces nazývá autor separabilním, jestliže existuje posloupnost parametrů $t_j \in T$ a nulová množina Λ tak, že pro každou uzavřenou lineární množinu A a každý otevřený interval I se množiny $\{x_t(\omega) \in A, t \in IT\}$ a $\{x_{t_j}(\omega) \in A, t_j \in IT\}$ liší pouze o podmnožinu množiny Λ. Protože bez újmy obecnosti lze předpokládat, že podmnožiny nulových množin jsou měřitelné, jsou v separabilním procesu množiny tvaru $\{x_t(\omega) \in A, t \in IT\}$ měřitelné. Jak známo, běžná representace stochastického procesu v prostoru reálných funkcí v případě nespočetného T tuto vlastnost nemá. Separabilní procesy mají ještě další důležité vlastnosti, jako je měřitelnost suprema a infima měřitelných funkcí a pod. Nejdůležitější pak je věta 2.4, která říká, že každý stochastický proces lze vhodnou změnou náhodných proměnných x_t učinit separabilním se zachováním všech konečněrozměrných rozložení. Stochastický proces nazývá autor měřitelným, jestliže funkce $x(t, \omega)$ je jako funkce dvou proměnných měřitelná. Měřitelnost podle t se bere vzhledem k lebesgueovským množinám. Význam měřitelnosti je v tom, že pro měřitelný stochastický proces je možno definovat integrál výběrové funkce. Opět platí věta, že každý stochastický proces, jehož výběrové funkce jsou pro skoro všechna t spojité podle pravděpodobnosti, lze učinit měřitelným a separabilním se zachováním všech konečněrozměrných rozložení. Je známo, že v souvislosti s vyšetřováním spojitosti a měřitelnosti výběrových funkcí, se někteří autoři a především autor recensované knihy snažili obejít tyto problémy representací stochastického procesu v prostoru všech spojitých, po př. měřitelných funkcí. V recensované knize autor od těchto metod upouští a používá výhradně zmíněných dvou vět.

Nyní promluvíme o jednotlivých typech stochastických procesů, které jsou v knize probírány.

Gaussův proces (Kap. II, § 3). Stochastický proces se nazývá Gaussův, jestliže všechna příslušná konečněrozměrná rozložení jsou normální (Gaussova). Tomuto procesu není věnována zvláštní kapitola a jsou zde pouze dokázány věty, týkající se toho, že ke každému stochastickému procesu s konečnými variancemi a kovariancemi existuje Gaussův proces se stejnými druhými momenty.

Pomocí Gaussových procesů je zde definován pojem „vlastnosti v širším smyslu", kterého se dále velmi často používá, a proto se o něm též zmíníme. Předpokládejme, že nějaký stochastický proces má vlastnost V, kterou lze vyjádřit pomocí variancí a kovariancí. Tuto vlastnost lze pak pro příslušný Gaussův proces vyjádřit zpravidla způsobem, který přenesen na původní proces vyslovuje nějakou přísnější podmínku V'. Pak vlastnost V je vlastnost v širším smyslu příslušná k vlastnosti V'. Na příklad orthogonalita je nezávislost v širším smyslu.

Procesy s nezávislými náhodnými proměnnými (Kap. II, § 4 a Kap. III). Časový parametr t probíhá zde pouze přirozená čísla, takže se jedná o posloupnosti nezávislých náhodných proměnných. V § 1 je dokázán nula-jednotkový zákon a Borel-Cantelliho lemma. Další odstavec obsahuje věty o konvergenci řad nezávislých náhodných proměnných. Kromě obvykle vyšetřovaných vztahů mezi konvergencí těchto řad a konvergencí příslušných řad průměrů a variancí je vyšetřován také vztah ke konvergenci součinů charakteristických funkcí. Další odstavec obsahuje různé druhy zákona velkých čísel, a to pro všechny tři možnosti, t. j. slabý, podle středu a silný. § 4 obsahuje centrální limitní věty. Tento paragraf pojednává sice o neomezeně dělitelných rozloženích (jsou dokonce definována obecněji a je dokázáno, že tato zdánlivě obecnější definice je ekvivalentní s obvyklou), centrální limitní věty zde uvedené se však zabývají jen případem, že limitní rozložení je normální.

Procesy s nekorelovanými náhodnými proměnnými (Kap. II, § 5, Kap. IV). I zde se pracuje pouze s posloupnostmi náhodných proměnných. Jedná se v podstatě o teorii orthogonálních funkcí v L_2 prostorech, je však zajímavé si uvědomit, jaký mají jednotlivé pojmy této teorie pravděpodobnostní význam. Tak na př. nejlepší aproximace dané náhodné proměnné (podle středu) vzhledem k danému orthogonálnímu systému náhodných proměnných, t. j. součet podle středu příslušné Fourrierovy řady, lze pokládat za podmíněnou střední hodnotu v širším smyslu této náhodné proměnné vzhledem k danému systému orthogonálních náhodných proměnných.

Další dva odstavce obsahují analogie některých vět z kap. III; příslušná tvrzení se pak týkají buď pouze konvergence podle středu nebo jsou předpoklady vět přísnější. V posledním odstavci je pojednáno o martingalových procesech v širším smyslu. Tento proces je zařazen do kap. IV proto, že jej lze také charakterisovat jako stochastický proces, v němž pro každou posloupnost $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$ jest náhodná proměnná $x_{t_{n+1}} - x_{t_n}$ orthogonální k x_{t_j} pro $j \leq n$. Jsou opět odvozeny analogie některých vět kap. VII, vesměs však s konvergencí podle středu.

Markovovy procesy (Kap. II, § 6, Kap. V, Kap. VI). V kap. II, § 6 je Markovův proces definován jako stochastický proces takový, že pro každou posloupnost $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ z T a každé reálné λ platí $P\{x_{t_n}(\omega) < \lambda \mid x_{t_1}, \ldots, x_{t_{n-1}}\} = P\{x_{t_n}(\omega) < \lambda \mid x_{t_{n-1}}\}$ s pravděpodobností 1. Podmíněné pravděpodobnosti jsou míněny obecně, ne nutně jako podmíněná pravděpodobnostní rozložení. Z předešlého vztahu plynoucí rovnice Chapman-Kolmogorovova má pak tvar $P(x_t(\omega) \in A \mid x_s) = E\{P\{(x_t(\omega) \in A \mid x_\tau\} \mid x_s\}$ s pravděpodobností 1.

V kap. V, § 5 je však definován homogenní Markovův proces s diskretním časem (t. j. T je množina všech přirozených čísel) pro libovolnou abstraktní množinu stavů, a to jako míra na obvyklém minimálním σ-tělese v kartézském součinu prostorů X pomocí pravděpodobnostních přechodů $p(\xi, A)$. Možnost konstrukce takové pravděpodobnostní míry plyne z věty, kterou dokázal C. T. Ionescu Tulcea (Atti Accad. Naz. Lincei Rend. *(8) 7* (1949)) a která je také uvedena v recensované knize v dodatku na str. 613—615. Takto definovaný Markovův proces odpovídá t. zv. definitnímu procesu ve známém Kolmogorovově článku „Über die analytischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Math. Ann. *104* (1931)), kde se však možnost konstrukce pravděpodobnostní míry nevyšetřuje. Upozorňujeme, že pro bezprostřední aplikaci zmíněné věty je předpoklad diskretního parametru t podstatný. V obecném případě není jasné, zda lze bez dalších předpokladů o množině stavů pravděpodobnostní míru konstruovat.

Markovův proces s diskretním časem a konečně mnoha stavy je probrán v kap. V, § 4. Je uvedena obvyklá klasifikace stavů a jsou dokázány ergodické věty. Maticové metody není použito. V § 5 jsou pak tyto výsledky přeneseny na obecný homogenní Markovův proces s diskretním časem, ovšem za jistých dodatečných předpokladů. Jedná se vesměs o zobecnění Doeblinových výsledků. V dalších dvou odstavcích je pak pojednáno o zákonu velkých čísel a o centrální limitní větě pro posledně uvedený typ Markovova procesu. Poslední paragraf pojednává o Markovových procesech v širším smyslu. Jsou definovány obdobně, v definici je obyčejná podmíněná střední hodnota nahrazena podmíněnou střední hodnotou v širším smyslu.

Markovovým procesům (téměř výhradně homogenním) se spojitým časem, t. j. pro $T = \langle 0, \infty)$, jest věnována kap. VI. V § 1 je probrán případ konečného počtu stavů. Autor předpokládá pouze spojitost pravděpodobností přechodu, derivovatelnost již dokazuje. Kromě ergodické věty, která je zde jednodušší, neboť neexistují cyklické skupiny, je tento odstavec věnován charakteru nespojitosti výběrových funkcí. Obdobné problémy jsou studovány v § 2 pro případ spojitého systému stavů. Autor se zde omezuje na representaci stochastického procesu v prostoru všech reálných funkcí, takže bez újmy obecnosti může předpokládat, že podmíněné pravděpodobnosti jsou podmíněná pravděpodobnostní rozložení. Poslední odstavec je věnován difusnímu procesu.

Martingalové procesy (Kap. II, § 7, Kap. VII). Stochastický proces se nazývá martingalovým procesem, jestliže má všechny střední hodnoty konečné a jestliže pro libovolnou posloupnost $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$ $x_{t_n} = E\{x_{t_{n+1}} \mid x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}\}$ s pravděpodobností 1. Jestliže v předešlém vztahu platí místo rovnosti pouze nerovnost $\leq$, nazývá se proces semi-martingalovým. Neexistuje žádný český termín pro tyto procesy a název užitý v této recensi není asi nejvhodnější. Semi-martingalový proces je v knize definován po prvé a platí pro něj všechna hlavní tvrzení jako pro procesy martingalové. Procesy martingalové byly již studovány dříve různými autory. Jedním z důvodů, proč byla těmto procesům věnována pozornost, je to, že jsou modelem náhodné hry, která je v jistém smyslu „spravedlivá". Mají však důležitější aplikace jak v teorii stochastických procesů, tak i v teorii míry a integrálu i jinde. Hlavním výsledkem jsou věty o konvergenci výběrových funkcí, které platí jak pro diskretní případ tak i pro spojitý; zde ovšem za předpokladu separability stochastického procesu. Pro diskretní parametr jsou v knize uvedeny aplikace této věty na konvergenci řady nezávislých náhodných proměnných, zákon velkých čísel, důkaz Jessenovy věty o konvergenci posloupnosti integrálů v nekonečném kartézském součinu, o konvergenci podílu dvou měr k Radon-Nikodymově derivaci a dále aplikace na některé problémy matematické statistiky.

Procesy s nezávislými přírůstky (Kap. II, § 9, Kap. VIII). Tyto procesy jsou charakterisovány tím, že pro každou posloupnost $t_1 < \ldots < t_n$ jsou náhodné proměnné $x_{t_2} - x_{t_1}$

..., $x_{t_n} - x_{t_{n-1}}$ nezávislé. Autor se dále zabývá jen spojitým případem, neboť diskretní proces tohoto typu představují součty nezávislých proměnných, které jsou důkladně probrány v kap. III. Autor studuje nejdříve Wienerův proces (nazývá jej procesem Brownova pohybu) a dokazuje, že skoro všechny výběrové funkce tohoto procesu jsou spojité. V § 7 je naopak dokázáno, že Wienerův proces je touto vlastností mezi procesy s nezávislými přírůstky v podstatě charakterisován. V dalších odstavcích je studován Poissonův proces a dále obecný proces s nezávislými přírůstky, a to opět spojitost výběrových funkcí. Důležitou úlohu při tom má t. zv. centrování procesu, t. j. odečtení vhodné funkce $f(t)$ od náhodných proměnných x. Poslední část kapitoly je věnována vlastnostem charakteristických funkcí těchto procesů, které musí zřejmě splňovat známou podmínku pro nekonečně dělitelná rozložení.

Procesy s nekorelovanými nebo orthogonálními přírůstky (Kap. II, § 10, Kap. IX). Tyto procesy jsou podle autorovy terminologie procesy s nezávislými přírůstky v širším smyslu. Převážná část této kapitoly je věnována pojmu stochastického integrálu. V § 2 je definován stochastický integrál $\int \Phi(t)\, dy(t)$, kde $y(t)$ jsou náhodné proměnné, tvořící stochastický proces s orthogonálními přírůstky. Takový integrál je opět náhodnou proměnnou. V § 5 je definice zobecněna na případ, že Φ jest také funkcí ω, za dodatečného předpokladu, že $y(t)$ tvoří také martingalový proces. Náhodné proměnné $x(t) = \int_a^t \Phi(s, \omega)\, dy(s)$ pak tvoří také martingalový proces a je dokázáno, že za jistých předpokladů lze naopak martingalový proces representovat stochastickým integrálem, a to tak, že $y(t)$ tvoří Wienerův proces.

Stacionární stochastické procesy. (Kap. II, § 8, Kap. X, Kap. XI). Striktně stacionární stochastický proces je definován jako proces, jehož všechny konečněrozměrné distribuční funkce jsou invariantní vůči časovému posunutí. Stochastický proces s konečnými druhými momenty, jehož kovarianční funkce mezi x_s a x_{s+t} je nezávislá na s, nazývá autor stacionárním v širším smyslu. Kapitola X je věnována diskretním stacionárním procesům. U striktně stacionárního procesu se studuje vztah k bodovým a množinovým transformacím, zachovávajícím míru. Striktně stacionární proces lze totiž definovat pomocí jedné náhodné proměnné a cyklické grupy vytvořené transformací σ-tělesa náhodných jevů na sebe, při čemž tato transformace je v podstatě isomorfismem vzhledem ke komplementům a spočetným sjednocením a zachovává míru. Stacionarita v širším smyslu je pak definována také jako obvykle metodou Hilbertových prostorů. Tato kapitola obsahuje řadu důležitých výsledků. Jako nejdůležitější je možno jmenovat zobecnění Birkhoff-Chinčinovy věty o konvergenci skoro jistě aritmetických průměrů ke střední hodnotě podmíněné σ-tělesem invariantních podmnožin, jejímž přímým důsledkem je za předpokladu metrické transitivity obvyklá Birkhoff-Chinčinova věta, dále zákon velkých čísel pro stacionární stochastické procesy v širším smyslu, dále věty o vlastnostech korelačních funkcí a spektrálních funkcí s důkazem Bochner-Chinčinovy věty, statistické odhady jednotlivých bodů korelačních a spektrálních funkcí s použitím příslušných zákonů velkých čísel a věty o spektrálním rozkladu. Obsahem kap. XI je zhruba totéž pro případ spojitého parametru. I celkové uspořádání je stejné až na některé podrobnosti týkající se integrace výběrových funkcí.

V poslední kapitole XII pojednává autor o predikci ve stochastických procesech stacionárních v širším smyslu. Jak je obvyklé, omezuje se na lineární predikci, která minimalisuje střední kvadratickou chybu. Zásadně se rozlišují případy diskretního a spojitého parametru. Na konci kapitoly je pak stručná zmínka o mnohonásobné predikci v konečněrozměrných stochastických procesech stacionárních v širším smyslu.

Na konci knihy jsou připojeny dva dodatky. První z nich — Supplement — obsahuje některé věty z teorie míry a integrálu, kterých se v knize používá. Četba tohoto dodatku před studiem knihy je velmi vhodná k pochopení autorovy symboliky. Druhý dodatek —

Appendix — obsahuje poznámky k jednotlivým kapitolám, většinou odkazy na původní literaturu.

Kniha je psána srozumitelněji než většina autorových prací, hlavně pokud se týká formulace definic a vět. Přesto však studium knihy není lehké. Není to způsobeno tím, že by kniha vyžadovala velkých předběžných znalostí — čtenář vystačí se znalostí základů teorie míry a integrálu v abstraktních prostorech — nýbrž tím, že důkazy jsou místy velmi zhuštěny a ověřování jednotlivých kroků je velmi pracné. To ovšem nemůže nijak snížit význam této knihy, která je vlastně první monografií o matematické teorii stochastických procesů, založené důsledně na Kolmogorovově definici. Její vliv se již ostatně v literatuře projevuje.

Miloslav Jiřina a *Antonín Špaček*, Praha.

N. I. Achijezer: **Teorie aproximací.** Z ruštiny přeložil Dr *Otto Vejvoda*. Vyšlo v Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1955, 344 stran, 10 obrázků, cena brož. Kčs 21,— (místo původních Kčs 70,—).

Překladem Achijezerovy knihy o theorii aproximace je v naší literatuře poprvé zastoupena tato důležitá větev matematické analysy, zajímavá a bohatá vnitřní krásou i užitečná pro aplikace. Tato theorie je od svého vzniku spjata se jmény ruských a sovětských učenců, jejichž přínos je nejvýznamnější co do počtu i hodnoty výsledků. Monografií a učebnic o theorii aproximace není dosud ve světové literatuře mnoho a výsledky z této oblasti matematiky jsou uloženy hlavně v časopiseckých pojednáních.

Achijezerova kniha je zaměřena k obecným otázkám theorie aproximace v reálném oboru. Rozsáhlý materiál je rozdělen do šesti kapitol a závěrečné části knihy, obsahující doplňky a úlohy.

První kapitola, pojednávající o problémech aproximace v lineárním normovaném prostoru, tvoří obecný podklad theorie. Formuluje se v ní základní úloha theorie aproximace, zavádí se pojem metrického prostoru a lineárního normovaného prostoru, jsou tu uvedeny příklady a blíže vyšetřen Hilbertův prostor (orthonormované soustavy, proces orthogonalisace), prostor všech spojitých funkcí na daném intervalu a prostory L^p. Dokazuje se věta o aproximaci prvku lineárního normovaného prostoru pomocí lineárních kombinací daných lineárně nezávislých prvků tohoto prostoru a uvedena postačující podmínka pro jednoznačnost (ostře normované prostory), dále věta o aproximaci prvku Hilbertova prostoru pomocí prvků jeho podprostoru, Weierstrassovy věty a jejich zobecnění na L^p, Müntzova věta a Rieszova věta o lineárním funkcionálu v úplném Hilbertově prostoru.

Ve druhé kapitole jsou vyloženy klasické Čebyševovy výsledky z theorie aproximace a jejich zobecnění; v souvislosti s tím jsou vyšetřeny některé další problémy a zejména je uvedena Haarova a Markovova věta.

Třetí kapitola obsahuje stručný výklad theorie Fourierových řad, nástin Plancherelovy theorie, důkaz věty Watsonovy, Fejérovy a Young-Hardyovy; dále se studuje pojem Fourierovy transformace a konvoluce dvou funkcí, definuje se Stěklovova funkce a stanoví se její vyjádření trigonometrickým integrálem, dokazuje se věta o několikanásobně monotonních funkcích a věta o sdružených funkcích.

Čtvrtá kapitola je věnována studiu některých extrémních vlastností celistvých transcendentních funkcí exponenciálního typu. Dokazuje se Wiener-Paleyova věta a zobecnění Bernštejnovy nerovnosti. Dále jsou uvedeny některé vlastnosti t. zv. Levitanových polynomů, důkaz Fejér-Rieszovy věty a kriterium vyjádřitelnosti spojité funkce ve tvaru Fourier-Stieltjesova integrálu; tyto odstavce jsou většinou zpracovány podle M. G. Krejna.

Jádrem páté kapitoly jsou důkazy známých Jacksonových vět o harmonické aproximaci diferencovatelných funkcí a k nim obrácených Bernštejnových vět spolu s důkazem Bernštejnovy věty o harmonické aproximaci analytických funkcí. Jacksonovy věty jsou vhodně zasazeny do rámce obecnějších úvah a doplněny Fejérovou methodou konstrukce aproximujících funkcí; obrácené věty jsou zobecněny na prostor L^p.

V šesté kapitole je dokázána Wienerova věta o aproximaci a jsou uvedeny některé její aplikace.

V poslední části knihy je shrnuto 35 příkladů, rozdělených do pěti odstavců, tvořících myšlenkové celky. Jde zpravidla o řešení konkretních problémů, které doplňují předcházející obecné úvahy.

Závěrečné poznámky obsahují hlavně literární údaje. Kniha je opatřena přehledem zkratek a označení a rejstříkem.

Výklad je jasný a ucelený, avšak velmi stručný. Věty jsou uváděny v co nejobecnější formulaci a s důkazy co možná nejjednoduššími a nejkratšími; přípravné poznatky jsou vyloženy jen v rozsahu nezbytném pro další použití. Autor systematicky činí literární odkazy a upozorňuje na zobecnění a novější výsledky, z nichž mnohé jsou zde knižně zpracovány poprvé. Ke studiu knihy stačí solidní vědomosti ze základů analysy. Kniha však není úvodem do theorie aproximace a sotva by bylo možno ji doporučit úplnému začátečníkovi. Její velké přednosti ocení čtenář, který již zná základy této theorie, na příklad z velmi přístupné a zdařilé Natansonovy učebnice konstruktivní theorie funkcí, a může si z Achijezerovy knihy své vědomosti znamenitě prohloubit a rozšířit.

Český překlad je pečlivý; to dokazuje i skutečnost, že v něm byly odstraněny některé drobné nedostatky originálu. Překladatel byl často postaven před problémy rázu terminologického a jazykového, s nimiž se odpovědně vyrovnal. Je třeba při této příležitosti ukázat na nejednotnost a četné jazykové kazy naší matematické mluvy. Bylo by záslužné, kdyby matematikové věnovali pozornost těmto otázkám a ve spolupráci s jazykovými odborníky přikročili k jejich řešení. — Tiskových chyb je v knize málo a čtenář si je snadno sám opraví.

O kvalitách Achijezerovy knihy svědčí mimo jiné i to, že byla nedávno přeložena do němčiny. Její český překlad znamená obohacení naší matematické literatury.

Ladislav Kosmák, Praha.

I. P. Natanson: **Sčítání nekonečně malých veličin.** Z ruského originálu přeložil ing. *Milan Ullrich.* Vydalo SNTL, Praha, 1955, 72 stran, 26 obrázků, cena Kčs 3,16.

Ve sbírce Populární přednášky o matematice, o níž jsme referovali v loňském ročníku Časopisu, *80* (1955), str. 246, vyšel jako jedenáctý svazek překlad knížky „Суммирование бесконечно малых величин" z pera leningradského matematika I. P. Natansona, známého u nás hlavně svými učebnicemi theorie funkcí reálné proměnné a konstruktivní theorie funkcí. Úkolem knížky je seznámit čtenáře s pojmem limity součtu mnoha malých sčítanců a přiblížit mu tak základní myšlenku integrálního počtu. V šesti kapitolkách podává autor řešení vhodných geometrických a fysikálních úloh (výpočet tlaku kapaliny na svislou stěnu, práce potřebné k vyčerpání kapaliny z nádob, určení objemu těles, kvadratura paraboly, elipsy a sinusoidy, výpočet efektivního proudu); v první kapitole dokazuje pro pozdější účely potřebné vzorce pro $\sum_{k=1}^{n} k^m$ při $m = 1, 2, 3$ a zavádí sumační znak. Na konci knížky je uvedeno 16 úloh jako cvičení.

Výklad je přístupný a zajímavý (knížka vznikla z autorových přednášek pro žáky devátých a desátých tříd); jeho snad jediným kazem je, že autor nerozlišuje v označení přibližné součty od jejich limity. I když tato skutečnost nemusí vést k omylu, neboť čtenář ze souvislosti pochopí, oč jde, je to zbytečná nedůslednost.

K českému překladu napsal akademik E. Čech předmluvu, v níž knížku výstižně zhodnotil.

Ladislav Kosmák, Praha.

A. I. Markuševič: **Komplexní čísla a konformní zobrazení.** Z ruštiny přeložil ing. *Milan Ullrich*. Vydalo SNTL, Praha, 1955, 76 stran, 45 obrázků, cena Kčs 2,75. Předmluvu k českému vydání napsal doc. *Jan Vyšín*.

Podkladem pro tuto knížku, která vychází jako 12. svazek Populárních přednášek o matematice, byla autorova přednáška pro žáky devátých a desátých tříd středních škol. Knížka obsahuje geometrický výklad aritmetiky komplexních čísel a vlastností některých jednoduchých funkcí komplexní proměnné jako transformací v rovině; poučí však čtenáře také o některých aplikacích theorie funkcí komplexní proměnné, zejména v kartografii a při konstrukci křídla letadla. V odstavcích, v nichž se pojednává o konformním zobrazení, bylo ovšem nutno se zříci přesných důkazů a spokojit se jejich názorným náznakem.

Knížka může být velmi užitečná především pro žáky středních škol. Přirozeně a srozumitelně je seznámí s komplexními čísly (o nichž mají ve většině případů asi značně neurčitou a formální představu) a přesvědčí je o praktickém významu theorie funkcí komplexní proměnné; není však pochyby o tom, že i jejich učitelé se z ní dovědí leccos nového.

Ladislav Kosmák, Praha.

I. R. Šafarevič: **O řešení rovnic vyšších stupňů (Sturmova metoda).** Z ruského originálu přeložil ing. *Milan Ullrich*, předmluvu k českému vydání napsal doc. dr *Karel Hruša*. Vydalo SNTL jako 13. svazek Populárních přednášek o matematice, Praha, 1955, 36 stran, 10 obrázků, cena Kčs 1,20.

Známá Sturmova věta o počtu kořenů algebraické rovnice (s reálnými koeficienty) v daném intervalu je nejen zajímavá, ale i prakticky důležitá, neboť zároveň umožňuje přibližný výpočet kořenů. Šafarevičova knížečka je věnována důkazu této věty. Ze čtyř kapitolek, na něž je rozdělena, mají první tři přípravný charakter: V první se stanoví meze kořenů algebraické rovnice, druhá pojednává o společných kořenech mnohočlenů a vícenásobných kořenech, ve třetí se studuje pojem charakteristiky dvojice mnohočlenů. Čtvrtá část obsahuje vlastní důkaz Sturmovy věty a příklady na její použití.

Knížka je vcelku napsána velmi svěže a srozumitelně, najdeme v ní však několik nedopatření. Nejzávažnějším z nich je mezera v důkazu Sturmovy věty, způsobená zamlčením předpokladu, že krajní body intervalu, v němž vyšetřujeme daný polynom, nejsou kořeny mnohočlenů tvořících Sturmův řetězec tohoto polynomu. Kromě toho najdeme v knížce několik míst formulovaných s hlediska začátečníka poněkud nejasně.

U čtenáře se předpokládají jen nejzákladnější matematické vědomosti. Plný užitek přinese knížka žákům, kteří ji budou číst pod vedením zkušeného učitele.

Ladislav Kosmák, Praha.