Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

REFERÁTY

Referát o přednáškách prof. WLADYSLAWA ORLICZE, konaných v matematické obci pražské dne 10. 10. 1955 a dne 17. 10. 1955.

Přednášející podal přehled o dosavadních výsledcích o Saksových prostorech (viz W. ORLICZ, Linear Operations in Saks' spaces I, Studia Mathematica *11* (1950), část II, Studia Math. *15* (1955)). Zabýval se problémem struktury Saksových prostorů, vyjádřením lineárních funkcionálů (J. MUSELIAK-W. ORLICZ, Linear functionals on the space of functions continuous in an open interval, Studia Math, *16*), otázkami spojitosti lineárních operací a posloupnostmi lineárních operací. Konečně uvedl aplikace této theorie m. j. na theorii sčitatelnosti (kromě výše uvedených prací viz též A. ALEXIEWICZ-W. ORLICZ, On summability of double sequences, Annales Polonici Math. *2* (1955) a na theorii orthogonálních řad (W. ORLICZ, On the convergence of functionals..., Studia Math. *13* (1953), W. ORLICZ, Sur la Convergence uniforme des developpements orthogonaux, Colloquium Mathematicum *1* (1948)).

Wladyslaw Orlicz, Poznaň.

O ENDOMORFISMECH ABELOVÝCH GRUP

(Referát o přednášce VLASTIMILA DLABA, přednesené v matematické obci pražské dne 14. listopadu 1955.)

Obsahem přednášky bylo studium struktury okruhu endomorfismů libovolné Abelovy grupy G pomocí struktury okruhu endomorfismů úplných grup a aplikace získaných výsledků na theorii obecných okruhů.

Přednášející v úvodu připomněl některé definice z theorie grup:*)

Grupu, jejíž každý prvek má nekonečný (resp. konečný) řád, nazveme *aperiodickou* (resp. *periodickou*); je-li řád každého prvku mocninou téhož prvočísla p, mluvíme o *p-primární* grupě. Řekneme, že grupa G^* je *úplná*, jestliže rovnice $n \cdot x = g$, n přirozené číslo, $g \in G^*$, má vždy v G^* řešení. Ke každé grupě G existuje úplná grupa G^*, jež obsahuje G; při tom mezi všemi takovými úplnými grupami existuje minimální úplná grupa $\bar{G}$ až na isomorfismus, který je rozšířením identického automorfismu grupy G, jednoznačně určená; nazveme ji *úplným uzávěrem* grupy G.

Vedle pojmu obyčejné lineární závislosti a pomocí něho odvozeného pojmu hodnosti grupy G (označeno symbolem hod (G)) zavedl přednášející pojem zobecněné hodnosti grupy G (označeno Z-hod (G)) a ukázal přednosti této definice:

Množinu nenulových prvků $\mathfrak{G} = (g_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$, $g_\alpha \in G$, *nazveme lineárně Z-nezávislou, jestliže z každé relace*

$$k_1 g_{\alpha_1} + k_2 g_{\alpha_2} + \ldots + k_n g_{\alpha_n} = 0, \quad k_i \text{ celá čísla}, \ g_\alpha \in \mathfrak{G},$$

plyne $k_i g_{\alpha_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

*) Grupou rozumí se vždy aditivně psaná Abelova grupa.

Je-li $G_{(p)}$ nenulová p-primární grupa, potom mohutnost maximálního lineárně Z-nezávislého systému v $G_{(p)}$ (která je v tomto případě invariantem grupy) nazveme zobecněnou hodností p-primární grupy $G_{(p)}$; je-li $G_{(p)} = 0$, definujme Z-hod $(G_{(p)}) = 0$. Označíme-li P periodickou část libovolné grupy G a je-li $P = \sum_p P_{(p)}$ její direktní rozklad na p-primární komponenty, nazveme zobecněnou hodností grupy G součet

$$Z\text{-hod }(G) = \text{hod }(G) + \sum_p Z\text{-hod }(P_{(p)}).$$

Zobrazení $\varkappa$ grupy G do grupy H, jež zachovává operaci, nazýváme homomorfismem grupy G do H. Všechny homomorfismy grupy G do H tvoří při známé definici sčítání Abelovu grupu $\mathfrak{K}(G, H)$. Je-li ϱ homomorfismus grupy H do F, můžeme ve známém smyslu mluvit o součinu homomorfismů $\varkappa\varrho$. Je-li $G = H = F$, mluvíme o endomorfismu grupy G; máme tedy definováno sčítání a násobení endomorfismů a při takto definovaných operacích tvoří všechny endomorfismy grupy G okruh $\mathfrak{R}(G)$ s jednotkou.

K tomu, aby přednášející popsal vztah mezi okruhem endomorfismů grupy G a okruhy endomorfismů úplných grup, zavedl ještě definici *přímo* (resp. *homomorfně*) *indukovaného endomorfismu* a *přímého* (resp. *homomorfního*) *rozšíření endomorfismu*:

Je-li H podgrupou G a ε endomorfismem grupy G, řekneme, že ε indukuje přímo (resp. homomorfně) endomorfismus ε' grupy H (resp. ε^* grupy G/H), jestliže parciální zobrazení grupy H určené zobrazením ε (resp. zobrazení tříd grupy G mod *H určené zobrazením ε) je endomorfismem ε' v H (resp. ε^* v G/H).*

V obdobném smyslu definujeme přímé (resp. homomorfní) rozšíření endomorfismu ε' podgrupy $H \subset G$ (resp. ε^* grupy G/H) na grupu G.

V okruhu endomorfismů $\mathfrak{R}(G)$ nejprve přednášející upozornil na tři množiny endomorfismů, určených grupou G a nějakou její podgrupou $H \subset G$:

(I) na podokruh $\mathfrak{R}(G; H) \subset \mathfrak{R}(G)$ těch endomorfismů ε, pro něž je $H\varepsilon \subset H$,

(II) na oboustranný ideál $\mathfrak{M}(G, H) \subset \mathfrak{R}(G; H)$ těch endomorfismů ε, pro něž platí $H\varepsilon = 0$ a

(III) na oboustranný ideál $\mathfrak{N}(G, H) \subset \mathfrak{R}(G; H)$ všech endomorfismů ε, pro které je $G\varepsilon \subset H$.

Pomocí nich určil základní vztahy mezi okruhem endomorfismů grupy G, okruhem endomorfismů její podgrupy $H \subset G$ a faktorové grupy G/H. Jelikož každá grupa G je isomorfní faktorové grupě nějaké volné grupy U, $G \cong U/N$, obdržíme snadno výsledek

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(U; N)/\mathfrak{N}(U, N)\,.$$

Konstrukcí úplné grupy G^0, $G^0 \supset \overline{G} \supset G$, potom získáme obdobný vztah mezi okruhy endomorfismů grup G a G^0

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(G^0, G)/\mathfrak{M}(G^0, G)\,.$$

Přednášející naznačil ještě důkaz některých vlastností úplného uzávěru $\overline{G}$ grupy G, potřebných k dalším úvahám:

(I) je-li $\overline{g} \neq 0$, $\overline{g} \in \overline{G}$, potom existuje přirozené číslo n, že $n\overline{g} \neq 0$, $n\overline{g} \in G$;

(II) je-li G aperiodická (resp. periodická), je $\overline{G}$ aperiodická (resp. periodická);

(III) hod (G) = hod $(\overline{G})$;

(IV) Z-hod (G) = Z-hod $(\overline{G})$;

(V) je-li $G = \sum_{\alpha\in\Delta} G_\alpha$, je $\overline{G} = \sum_{\alpha\in\Delta} \overline{G}_\alpha$.

Pomocí těchto vlastností odvodil větu a ukázal na příkladech nemožnost jejího zostření:

Věta. *Okruh endomorfismů $\mathfrak{R}(G)$ grupy G je isomorfní faktorovému okruhu podokruhu* *všech endomorfismů ε^* úplného obalu $\overline{G}$, pro něž je $G\bar{\varepsilon} \subset G$, podle ideálu těch endomorfismů $\bar{\varepsilon}^*$, pro které platí $G\varepsilon^* = 0$:*

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(\overline{G}; G)/\mathfrak{M}(\overline{G}, G) .$$

Je-li speciálně G aperiodická, potom $\mathfrak{M}(\overline{G}, G) = (0)$.

Tím se objevila souvislost okruhu $\mathfrak{R}(G)$ s okruhy endomorfismů úplných grup a nutnost studia těchto okruhů. Jelikož každá úplná grupa A je direktním součtem aditivních grup racionálních čísel R a Prüferových grup $G(p^\infty)$ typu p^∞ vzhledem k různým prvočíslům p, je obecný tvar grupy A

$$A = \sum_{0 \leq \alpha_{(0)} < \tau_{(0)}} R_{\alpha_{(0)}} + \sum_{0 \leq \alpha_{(1)} < \tau_{(1)}} G_{\alpha_{(1)}}(p_1^\infty) + \ldots + \sum_{0 \leq \alpha_{(n)} < \tau_{(n)}} G_{\alpha_{(n)}}(p_n^\infty) + \ldots , \tag{1}$$

$p_1 < p_2 < \ldots$ všechna prvočísla.

Je tedy účelné nejprve obecně studovat okruh endomorfismů direktního součtu grup

$$G = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} G_\alpha .$$

Popis okruhu endomorfismů tohoto direktního součtu podal přednášející větou, která je zobecněním věty Kiškiny. Zatím co Kiškina se omezovala při studiu okruhu endomorfismů direktního součtu grup na konečný direktní součet, zobecnil přednášející její výsledek zavedením nového pojmu zobecněného průniku na nekonečný direktní součet.

Zobecněným průnikem systému $(K_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ podgrup $K_\alpha \subset G$ v grupě G

$$\overline{\bigcap_{\alpha \in \Delta}} K_\alpha = D$$

nazveme podgrupu $D \subset G$, která se skládá z těch prvků, které až na konečný počet indexů α leží ve všech podgrupách K_α. Zmíněná věta potom zní:

Věta. *Budiž $G = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} G_\alpha$. Označme $\overline{\mathfrak{D}}_\tau$ množinu všech čtvercových matic $(\varkappa_{\alpha\beta})$ typu τ, kde $\varkappa_{\alpha\beta}$ je homomorfismus grupy G_α do grupy G_β (pro $\alpha = \beta$ se zřejmě jedná o endomorfismus grupy G_α), při čemž pro pevné α $(0 \leqq \alpha < \tau)$ splňují jádra $K_{\alpha\beta} \subset G_\alpha$ homomorfismů $\varkappa_{\alpha\beta}$ vztah*

$$\overline{\bigcap_{0 \leq \beta < \tau}} K_{\alpha\beta} = G_\alpha . \tag{2}$$

Potom tato množina s maticovým sčítáním a násobením tvoří okruh a je

$$\mathfrak{R}(G) \cong \overline{\mathfrak{D}}_\tau .$$

V dalším vyšetřil přednášející ještě grupy homomorfismů grupy R do R, $G(p^\infty)$ do $G(q^\infty)$ $(p = q, p \neq q)$ a R do $G(p^\infty)$ a uvedl isomorfní representaci těchto grup pomocí grup racionálních a p-adických čísel. Při tom odvodil pro tato čísla podmínky, plynoucí ze vztahu (2); výsledek možno pak formulovat větou:

Věta. *Budiž A úplná grupa tvaru (1). Potom její okruh endomorfismů $\mathfrak{R}(A)$ je isomorfní okruhu $\mathfrak{D}_\nu$ čtvercových matic $A = (a_{\alpha\beta})$ typu $\nu = \tau_{(0)} + \tau_{(1)} + \ldots + \tau_{(n)} + \ldots$,* kde

pro $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$, $0 \leqq \beta < \tau_{(0)}$ je $a_{\alpha\beta}$ racionální číslo,

pro $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$, $\tau_{(i-1)} < \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ je $a_{\alpha\beta}$ p_i-adické číslo,

pro $\tau_{(i-1)} < \alpha < \tau_{(i)}$, $\tau_{(i-1)} < \beta < \tau_{(i)}$, $(i = 1, 2, \ldots)$ je $a_{\alpha\beta}$ celé p_i-adické číslo a ostatní $a_{\alpha\beta} = 0$, s obyčejným maticovým sčítáním a násobením.

Při tom pro pevné α, $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$ je mezi $a_{\alpha\beta}$ pouze konečný počet nenulových racionálních čísel, konečný počet necelých p_i-adických čísel $(i = 1, 2, \ldots)$ a pro $\tau_{(i-1)} < \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots$ pevné) jakož i pro pevné $\alpha > \tau_{(0)}$ mají všechna p_i-adická čísla až na konečný počet ve známé representaci pomocí nekonečných posloupností pro libovolné přirozené číslo m_0 prvních m_0 složek nulových.

Odtud ovšem snadno vyplývá tvar matic okruhu $\mathfrak{O}_\nu$, je-li specielně grupa A aperiodická (resp. periodická).

V závěru přednášející ukázal užití popsaných výsledků v theorii obecných okruhů. Využil známého Dorrohova vnoření okruhu $\mathfrak{R}$ bez jednotky do okruhu $\mathfrak{R}^*$ s jednotkou, při čemž ukázal, že mezi hodností $\mathfrak{n}$ aditivní grupy okruhu $\mathfrak{R}$ a hodností $\mathfrak{n}^*$ aditivní grupy okruhu $\mathfrak{R}^*$ platí v případě, že hodnost $\mathfrak{n}$ je nekonečná, rovnost $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}$, v případě, že je konečná, vztah $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n} + 1$. Uvědomíme-li si ještě, že každý okruh s jednotkou je isomorfní podokruhu okruhu endomorfismů nějaké grupy, na př. své aditivní grupy, dostáváme řadu výsledků; uveďme aspoň nejdůležitější:

Věta. *Okruh endomorfismů $\mathfrak{R}(G)$ grupy G je isomorfní faktorovému okruhu vhodného podokruhu okruhu matic $\mathfrak{O}_\nu$, popsaného předchozí větou. Je-li G aperiodická, pak je $\mathfrak{R}(G)$ (ve smyslu isomorfismu) podokruhem $\mathfrak{O}_\nu$:*

$$\mathfrak{R}(G) \subset \mathfrak{O}_\nu .$$

Každý okruh endomorfismů může být tedy získán tvořením podokruhů a faktorových okruhů ze známých okruhů matic $\mathfrak{O}_\nu$. Do jaké míry lze toto tvrzení obrátit — t. j. otázka, které jsou to podokruhy či faktorové okruhy, jež jsou okruhy endomorfismů — je zatím otevřeným problémem.

Důležitost popsaného okruhu $\mathfrak{O}_\nu$ je ještě patrnější z následující věty:

Věta. *Budiž $\mathfrak{R}$ libovolný okruh. Potom ve smyslu isomorfismu platí: Buď je $\mathfrak{R}$ podokruhem $\mathfrak{O}_\nu$, nebo existuje podokruh $\mathfrak{O}'_\nu \subset \mathfrak{O}_\nu$ a oboustranný ideál $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{O}'_\nu$, že je*

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{O}'_\nu/\mathfrak{M} .$$

Je-li aditivní grupa daného okruhu $\mathfrak{R}$ aperiodická hodnosti $\mathfrak{n}$, potom ve smyslu isomorfismu platí

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{O}_{\tau^*} ,$$

kde $\mathfrak{O}_{\tau^*}$ je okruh matic $(a_{\alpha\beta})$ typu τ^*, jejichž prvky jsou racionální čísla, při čemž pro pevné α je jen konečný počet $a_{\alpha\beta} \neq 0$ a mohutnost ordinálního čísla τ je rovna $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n} + 1$), je-li $\mathfrak{n}$ nekonečné (resp. konečné). Má-li tedy okruh $\mathfrak{R}$ aperiodickou aditivní grupu konečné hodnosti n, je ve smyslu isomorfismu podokruhem okruhu čtvercových $(n + 1)$-řadých matic, a je-li při tom $\mathfrak{R}$ okruhem s jednotkou, dokonce podokruhem okruhu n-řadých matic nad tělesem racionálních čísel.

Vlastimil Dlab, Praha.

O ASYMPTOTICKÝCH VLASTNOSTECH INTEGRÁLŮ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

(Referát o přednášce prof. K. V. Atkinsona přednesené v matematické obci pražské dne 12. prosince 1955.)

Asymptotická theorie diferenciálních rovnic stojí mezi kvalitativní theorií diferenciálních rovnic a mezi integračními metodami, které hledají přesné řešení. Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) , \quad y = (y_1, \ldots, y_n) , \quad f = (f_1, \ldots, f_n) . \tag{1}$$

V asymptotické theorii diferenciálních rovnic dokazujeme vztahy typu

$$y(t) = z(t) + o(1) ,$$

nebo

$$y(t) = z(t) + o(\|z(t)\|) ,$$

kde $y(t)$ je libovolné (resp. dané) řešení rovnice (1) a funkce $z(t)$ zpravidla vyhovuje jiné rovnici

$$\frac{dz}{dt} = g(z, t) , \tag{2}$$

a tak v asymptotické theorii porovnáváme vlastnosti integrálů rovnic (1) a (2).

Nejjednodušší je „theorie poruch" pro rovnici

$$\dot{y} = 0 . \tag{3}$$

Rovnici (3) srovnáváme s rovnicí

$$\dot{y} = Ay , \quad A = \{a_{i,k}(t)\} \tag{4}$$

a klademe otázku: *Jaké podmínky musí splňovat matice A, aby každý integrál $y(t) \neq 0$ rovnice (4) měl konečnou limitu $y(\infty) \neq 0$ pro $t \to \infty$?*

Snadno lze dokázat, že postačující podmínka je $\int^{\infty} \|A\| \, dt < \infty$, kde $\|A\| = \sum_{i,k} |a_{i,k}(t)|$.

Jinou cestu k odpovědi na položenou otázku nabízí tato úvaha: Platí-li $A(t_1) A(t_2) = A(t_2) A(t_1)$ pro libovolná čísla t_1, t_2, potom rovnice (4) má integrál

$$y(t) = y(0) \, . \exp \{ \int_0^t A(u) \, du \} .\text{[1]}$$

Existuje-li nevlastní integrál $\int_t^{\infty} A(u) \, du = B(t)$ a platí-li $A(t) B(t) = B(t) A(t)$, potom rovnice (4) má obecný integrál

$$y(t) = \exp \{B(t)\} \, . \, c ,$$

kde vektor c je integrační konstanta; zřejmě pak existuje $y(\infty) = c$. Limita $y(\infty)$ existuje také tehdy, nahradíme-li předpoklad, že matice $A(t)$ a $B(t)$ jsou komutativní, předpokladem, že matice $A(t)$ a $B(t)$ jsou asymptoticky komutativní, t. j., že platí

$$\int^{\infty} \|A(t) B(t) - B(t) A(t)\| \, dt < \infty .$$

Odtud snadno přejdeme k jinému případu: Nechť konstantní matice A_0 má pouze imaginární charakteristická čísla, navzájem různá. Porovnávejme rovnice

$$\dot{y} = A_0 y , \tag{5}$$

$$\dot{y} = (A_0 + A) \, y , \quad A = A(t) . \tag{6}$$

Substitucí $z = \exp \{- A_0 t\} \, . \, y$ rovnice (5) a (6) přejdou v rovnice

$$\dot{z} = 0 , \tag{7}$$

$$\dot{z} = \exp \{- A_0 t\} \, . \, A \, . \exp \{A_0 t\} \, . \, z . \tag{8}$$

Dospíváme k výsledku: *Integrály rovnice (5) a (6) jsou si asymptoticky rovny, je-li splněna jedna ze tří podmínek*

1. $\int^{\infty} \|A\| \, dt < \infty$, (9)

---

[1]) $\exp \{C\}$ znamená matici $I + \frac{1}{1!} C + \frac{1}{2!} C^2 + \dots$

2. $\int\limits^{\infty} \|\exp\{-A_0 t\}\, A(t) \exp\{A_0 t\}\| \,\mathrm{d}t < \infty$, (10)

3. *integrál* $\int\limits_t^{\infty} \exp\{-A_0 u\}\, A(u) \exp\{A_0 u\} \,\mathrm{d}u = D(t)$ (11)

konverguje a matice $\exp\{-A_0 t\}\, A(t) \exp\{A_0 t\}$ *a* $D(t)$ *jsou asymptoticky komutativní.*

Obraťme se k oscilatorickým rovnicím 2. řádu. Pro integrály rovnice

$$\ddot{y} + (1 + g(t))\, y = 0\,, \quad g(t) \underset{t \to \infty}{\to} 0\,, \tag{12}$$

(zde $n = 1$, y je reálné číslo), platí asymptotický vzorec

$$y = A \cos\left(\int\limits_0^t \sqrt{1 + g(u)}\,\mathrm{d}u + B\right) + o(1)\,, \tag{13}$$

je-li splněna jedna z těchto tří podmínek:

1. $\int\limits^{\infty} |g(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$, (14)

2. konvergují integrály

$$\int\limits^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad I_1(t) = \int\limits_t^{\infty} g(u) \cos 2u \,\mathrm{d}u\,, \quad I_2(t) = \int\limits_t^{\infty} g(u) \sin 2u \,\mathrm{d}u\,, \tag{15}$$

$$\int\limits^{\infty} |g(t)|\, |I_1(t)| \,\mathrm{d}t\,, \quad \int\limits^{\infty} |g(t)|\, |I_2(t)| \,\mathrm{d}t\,,$$

3. funkce $g(t)$ má derivaci $\dot{g}(t)$, $\int\limits^{\infty} |\dot{g}(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$. (16)

Dosah podmínky (15) si ujasníme, položíme-li

$$g(t) = \frac{\cos kt}{t^\alpha}\,, \quad \alpha > \frac{1}{2}\,, \quad k \neq 0, \pm 2\,.$$

Podmínka (15) je splněna a pro integrály dif. rovnice

$$\ddot{y} = \left(1 + \frac{\cos kt}{t^\alpha}\right) y = 0$$

dostáváme asymptotický vzorec

$$y = A \cos (t + C) + o(1)\,.$$

Je-li však $\alpha = \frac{1}{2}$, podmínka (15) splněna není a pro integrály diferenciální rovnice

$$\ddot{y} + \left(1 + \frac{\cos kt}{t^{\frac{1}{2}}}\right) y = 0\,, \quad k \neq 0, \pm 1, \pm 2 \tag{17}$$

platí asymptotický vzorec

$$y = A \cos (t + \tfrac{1}{2}(k^2 - 4)^{-1} \log t + B) + o(1)\,. \tag{18}$$

Při odvození formule (18) lze použít Floquetovy theorie pro lineární rovnice s periodickými koeficienty. Jestliže v rovnici (17) necháme „zamrznout" faktor, který se pomalu mění, dostaneme rovnici

$$\ddot{y} + \left(1 + \frac{\cos kt}{\sqrt{T}}\right) y = 0\,. \tag{19}$$

Integrály rovnice (19) mají „průměrnou frekvenci". Nechť $N(x, T)$ je počet nulových bodů (libovolně zvoleného) integrálu rovnice (19) na intervalu $0 \leq t \leq x$. Limita

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi\, N(x, T)}{x} = \omega(T)$$

existuje a asymptotické frekvence $\omega(T)$ pro rovnici (19) užijeme jako okamžité frekvence pro rovnici (17). Odvodíme formuli

$$y(t) = A \cos \left(\int_0^t \omega(T)\, \mathrm{d}T + B\right) + o(1)$$

a tak dospějeme ke vzorci (18).

Výsledky platné pro lineární rovnice mají analogie pro quasilineární rovnice. Všimněme si rovnice

$$\ddot{y} + y\left(1 + \frac{y^2}{t^\alpha}\right) = 0\,. \tag{20}$$

Je-li $\alpha > 0$, integrály rovnice (20) jsou omezené (pro $t \to \infty$). Je-li dokonce $\alpha > 1$, potom pro integrály rovnice (20) platí asymptotický vzorec

$$y = A \cos (t + B) + o(1)$$

(což plyne snadno z toho, že $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|y^3(t)|}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t < \infty$ pro každý integrál). Je-li však $0 < \alpha \leq 1$, potom nelineární člen má podstatný vliv. Obdobně jako v případě rovnice (17) rovnici (20) porovnáme s rovnicí

$$\ddot{y} + y\left(1 + \frac{y^2}{(T)^\alpha}\right) = 0\,. \tag{21}$$

Rovnice (21) má vesměs periodická řešení, periody těchto řešení však závisí na amplitudě.[2]) Také pro rovnici (20) lze dokázat formuli

$$y = A \cos \left(\int^t \omega(T)\, \mathrm{d}T + B\right) + o(1)\,,$$

kde $\omega(T)$ je frekvence integrálu rovnice (21); je však třeba určit závislost frekvence na amplitudě. Téže methody lze užít ke studiu značně širší třídy rovnic.

Závěrem se prof. Atkinson zmínil o dosud nеřešené otázce, která spočívá ve studiu souvislosti integrálů „podstatně" nelineárních rovnic, na př. rovnic

$$\ddot{y} + y^3 = 0\,,$$

$$\ddot{y} + y^3 + \frac{y^5}{t} = 0\,.$$

Výsledky, které přednesl, dávají nové a významné poznatky o asymptotickém chování integrálů diferenciálních rovnic a mají zvláštní cenu v tom, že zavádějí názorné fysikální pojmy jako frekvence, amplituda, akce, kinetická a potenciální energie a ukazují užitečnost těchto pojmů pro širokou třídu rovnic.

Jaroslav Kurzweil, Praha.

---

[2]) Pro každý integrál rovnice (21) platí $(\dot{y})^2 + y^2 + \dfrac{y^4}{2(T)^\alpha} = C^2$. Kladnou konstantu C nazýváme amplitudou příslušného integrálu.

KONGRUENCE W

(Referát o přednášce akademika EDUARDA ČECHA konané dne 9. ledna 1956 v matematické obci pražské.)

Pojem kongruencí W vznikl při studiu t. zv. Weingartenových ploch, pro něž Gaussova resp. střední křivost je vázána relací $\psi(K, H) = 0$; tyto plochy jsou charakterisovány tím, že (obecně) jejich normály jsou tečnami dvou ploch a korespondence mezi těmito plochami je asymptotická. Kongruencí přímek L budeme nyní rozuměti libovolný dvouparametrový systém přímek; omezíme se při tom na ty kongruence, jež jsou vytvořeny společnými tečnami dvou (t. zv. fokálních) ploch. Kongruencí L je určena jistá korespondence mezi fokálními plochami; odpovídají-li si v ní asymptotické křivky obou ploch, mluvíme o kongruenci W.

Akad. E. ČECH vybudoval rozsáhlou theorii korespondencí mezi kongruencemi přímek v projektivním trojdimensionálním prostoru; viz práce *Transformation développables des congruences des droites*, *Déformation projective des congruences W* a další, jež všechny budou uveřejněny v mezinárodním časopise.

Důležitou partií theorie kongruencí přímek je studium korespondencí mezi dvěma kongruencemi přímek a zvláště projektivní deformace druhého řádu, již je možno rozložiti na řadu jednodušších korespondencí. Pomocí těchto úvah byla zobecněna Cartanova existenční věta o kongruencích R, což jsou kongruence (nutně W), jejichž fokální plochy připouštějí netriviální projektivní deformace druhého řádu:

Buďte dány dvě diferenciální rovnice $\left(\frac{du_1}{du_2}\right)^2 = f_i(u, v)$, $i = 1, 2$; pak existují (a závisí na šesti funkcích jedné proměnné) kongruence přímek, pro něž $u_i = \text{const}$ jsou rozvinutelné plochy a na i-té fokální ploše jsou asymptotiky určeny uvedenou i-tou rovnicí. Pro kongruence R je totiž možno voliti $f_i(u, v) = (-1)^i$.

Zajímavá je otázka po „počtu" kongruencí, jež jsou v projektivní deformaci s danou kongruencí. Ke každé kongruenci přímek L v S_3 existuje v S_3^*, duálním k S_3, kongruence L vytvořená svazky rovin s osami v přímkách kongruence L; je to t. zv. dualisace kongruence L. Dualisace je projektivní deformací právě tehdy, je-li L kongruencí W. Je možno zavésti třídu kongruencí W s t. zv. asymptotickou dualisací, jež nebudu geometricky popisovati; nyní se ukáže: každá kongruence W připouští maximálně ∞^6 projektivních deformací, jež nejsou v lineárním komplexu a nemají asymptotickou dualisaci, každá kongruence s asymptotickou dualisací připouští projektivní deformace (opět s asymptotickou dualisací) závislé na jedné funkci jedné proměnné; jedna z těchto projektivních deformací leží v lineárním komplexu.

Další práce budou obsahovati prohloubení dosažených výsledků a theorii kongruencí W, připouštějících grupy projektivních deformací v sebe.

Alois Švec, Praha.