z nichž každých $n + 1$ tvoří simplex s hlavním bodem (tyto soustavy existují pro každé μ, $-1 < \mu \leqq n$). Studium těchto soustav však přesahuje rámec geometrie simplexu.

9. Závěr. Tato práce byla pojata trochu šíře, aby byl získán materiál, o který se může zájemce o studium geometrie simplexů opřít. Z neřešených problémů zde stojí za zmínku zobecnění Brocardových útvarů pro simplex. Rovněž kvalitativní stránka geometrie simplexu (t. j. studium nejen rovností, ale i nerovností) zasluhuje pozornosti.

LITERATURA

[1] *B. Bydžovský:* Základy teorie determinantů a matic a jich užití, Praha 1930.

[2] *E. Čech:* Základy analytické geometrie, I, II, Praha 1951, 1952.

[3] *E. Egerváry:* On orthocentric simplexes, Acta Math. Szeged. IX (1950), 218—226.

[4] Enciclopedia d. matematiche elementari, II. 1, Milano 1937.

[5] *I. M. Gelfand:* Lineární algebra, Praha 1953.

[6] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[7] *P. H. Schoute:* Mehrdimensionale geometrie I, Leipzig 1902.

Резюме

ГЕОМЕТРИЯ СИМПЛЕКСА В E_n, III

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler), Прага.

(Поступило в редакцию 21/IV 1955 г.)

В этой третьей, завершающей части работы, первая часть которой была опубликована в настоящем журнале *79* (1954), 270—297, а вторая часть также в настоящем журнале *80* (1955), 462—476, автор исследует специальные виды симплексов.

Прежде всего рассматривается прямоугольный n-симплекс определенного типа, $(n - 1)$-мерные грани которого можно занумеровать номерами $1, 2, \ldots, n + 1$ так, что как раз внутренние углы φ_{12} (между гранями 1 и 2), $\varphi_{23}, \varphi_{34}, \ldots, \varphi_{n,n+1}$ являются острыми, все же остальные внутренние углы между этими гранями — прямые.

В теореме 32 доказывается, что *необходимым и достаточным условием для того, чтобы n-симплекс был прямоугольным симплексом этого типа, является существование отличных друг от друга чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ таких, что квадраты длин ребер e_{ij} удовлетворяют соотношениям*

$$e_{ij} = |c_i - c_j| \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n + 1)\,.$$

Отсюда непосредственно следует (теорема 33), что *каждая m-мерная грань* ($1 < m \leqq n - 1$) *является в свою очередь прямоугольным симплексом этого типа.* В частности каждая двумерная грань будет прямоугольным треугольником. Справедливо, однако, и обратное урверждение (теорема 34): *n-симплекс, каждая двумерная грань которого является прямоугольным треугольником, представляет собой прямоугольный симплекс рассматриваемого типа.*

В теореме 35 доказываются еще два свойства прямоугольного n-симплекса этого типа:

1. *Центр описанного (n — 1)-шара лежит в центре единственного самого длинного ребра;*

2. *в E_n, содержащем этот n-симплекс, существует прямоугольный параллелепипед, среди вершин которого встречаются все вершины n-симплекса.*

В дальнейших теоремах 36—39 исследуются некоторые свойства ортоцентрических симплексов и ортоцентрических систем $n + 2$ точек в E_n (т. е. $n + 1$ вершин ортоцентрического n-симплекса и точки пересечения его высот).

Прежде всего для сжатости изложения вводится понятие *равносторонней n-гиперболы*, как рациональной алгебраической кривой n-й степени в E_n, имеющей n взаимно перпендикулярных асимптотических направлений. Две такие n-гиперболы в E_n называются для краткости *независимыми*, если обе системы их n асимптотических направлений *независимы* в следующем смысле: ни в одном k-мерном (несобственном) линейном пространстве ($0 \leqq k \leqq n - 1$), определенном $k + 1$ асимптотическими направлениями одной n-гиперболы, не лежит больше чем k асимптотических направлений другой.

Если теперь (теорема 36) *система $n + 2$ точек в E_n обладает тем свойством, что существуют две независимые равносторонние n-гиперболы, проходящие обе через все точки системы, то эта система является ортоцентрической. Всякая рациональная алгебраическая кривая n-й степени, проходящая через $n + 2$ точки ортоцентрической системы в E_n, является равносторонней n-гиперболой.*

Доказательство теоремы основывается на вспомогательной теореме, утверждающей, что *для двух независимых* (в указанном выше смысле) *систем, состоящих из n линейно независимых точек каждая, в проективном (n — 1)-мерном пространстве существует не более одной регулярной гиперквадрики, по отношению к которой обе системы являются автополярными.*

Далее (теорема 37), *для ортоцентрического n-симплекса, точка пересечения высот которого не лежит ни в одной из гиперплоскостей симметрии ребер, существует точно одна равносторонняя n-гипербола, проходящая* *через вереины и через центр тяжести. Эта равносторонняя n-гипербола,* являющаяся обобщением известной гиперболы Киперта для треугольника, *имеет асимптотические направления, тождественные с направлениями осей гиперэллипсоидов Штейнера* (эти оси определяются однозначно) *и содержит основания всех нормалей, опущенных из точки пересечения высот симплекса на произвольную регулярную гиперквадрику из штейнеровской системы гиперквадрик* (это связка гиперквадрик, содержащая описанный гиперэллипсоид Штейнера и двойную несобственную гиперплоскость).

В следующей теореме 38 сформулировано одно характерное свойство ортоцентрических симплексов, для которых точка пересечения высот является внутренней точкой (т. наз. *положительно ортоцентрических симплексов*). *Симплекс является положительно ортоцентрическим тогда и только тогда, если существует такая внутренняя его точка P, что для каждой самосопряженной точки S (поскольку она отлична от P) того взаимно-обратного преобразования по отношению к симплексу* (т. е. преобразования, имеющего в барицентрических координатах вид $x'_i = \frac{c_i}{x_i}$ для действительных $c_i \neq 0$), *при котором центр тяжести и точка P соответствуют друг другу, справедливо утверждение, что прямая PS перпендикулярна к гармонической поляре точки S относительно симплекса. P будет тогда точкой пересечения высот симплекса.*

Другой *характерной* особенностью ортоцентрических n-симплексов (теорема 39) является то, что *для внутренних углов φ_{ij} $(n - 1)$-мерных граней существуют действительные числа c_i так, что*

$$\cos \varphi_{ij} = c_i c_j \quad \text{для} \quad i \neq j\,.$$

В теореме 40 показано, что *характерным свойством т. наз. равногранних n-симплексов, у которых объёмы всех $(n - 1)$-мерных граней одинаковы, является то, что совпадают две* (а тогда и все три) *из следующих трех точек: центр тяжести, центр вписанного $(n - 1)$-шара и точка Лемуана. Для того, чтобы в n-симплексе центр тяжести совпадал с центром описанного $(n - 1)$-шара, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов длин ребер, выходящих из одной вершины, была для всех вершин одна и та же* (теорема 41).

В теореме 42 показано, что *для любого $n > 2$ существуют неравносторонние n-симплексы с одной единственной замечательной точкой* (центром тяжести).

В дальнейших теоремах исследуется другой класс симплексов, а именно тех, для которых существуют действительные числа α, β и ненулевые действительные числа $t_1, \ldots, t_{n+1}$ так, что квадраты длин ребер e_{ij} n-симплекса можно выразить в виде

$$e_{ij} = \alpha(t_i^2 + t_j^2) + 2t_i t_j\,, \quad i \neq j\,. \tag{*}$$

В этот класс симплексов можно при специальном выборе отношения $\alpha : \beta$ включить ряд типов симплексов, имеющих определенное простое свойство, получающееся путем обобщения какого-либо свойства треугольника.

Итак (теорема 44) *для того, чтобы для n-симплекса с вершинами $O_1, \ldots, \ldots, O_{n+1}$ существовала точка $P \neq O_i$ так, что все углы между (неориентированными) прямыми PO_i, PO_j для $i \neq j$ равны между собой (таким образом P является обобщенной точкой Торричелли в треугольнике), необходимо и достаточно, чтобы симплекс был типа* (*) *для* $\alpha = n\beta$.

Для того, чтобы (теорема 45) *точки касания $P_1, \ldots, P_{n+1}$ $(n - 1)$-шара, вписанного (в более широком смысле слова) в n-симплекс с вершинами $O_1, \ldots, \ldots, O_{n+1}$ (P_i лежат в грани, противолежащей O_i), обладали тем свойством, что прямые O_iP_i проходят через одну и ту же точку Q, необходимо и достаточно, чтобы n-симплекс был типа* (*) *для $\alpha = (n - 1)\,\beta$. Точка Q является таким образом обобщенной точкой Жергонна в треугольнике.*

В теореме 46, далее, показано, что *необходимое и достаточное условие для того, чтобы для n-симплекса существовал $(n - 1)$-шар, касающийся всех его* (если нужно, продолженных) *ребер, имеет вид: n-симплекс принадлежит типу* (*) *для $\alpha = \beta$. Тогда существует точка R* (другое обобщение жергонновой точки треугольника), *которая лежит во всех гиперплоскостях, соединяющих точки касания $(n - 1)$-шара в каком-либо ребре с $(n - 2)$-мерной гранью, противолежащей этому ребру.*

В указанный класс можно включить и *изодинамические симплексы*, для которых существуют два (или один) изодинамических центра, в которых пересекаются все $(n - 1)$-шары K_{ij}^k, $k \neq i \neq j \neq k$, содержащие точки X, для которых

$$\overline{XO_i} : \overline{XO_j} = \overline{O_kO_i} : \overline{O_kO_j}\,,$$

где $O_1, \ldots, O_{n+1}$ — вершины симплекса.

Изодинамические симплексы (теорема 47) — *это те симплексы типа* (*), *для которых* $\alpha = 0$.

К симплексам типа (*) можно отнести еще другие типы специальных симплексов, напр., положительно ортоцентрические симплексы для $\beta = 0$ и т. п.

В теореме 53 дана геометрическая характеристика n-симплексов указанного типа. Прежде всего вводится понятие *главной точки* n-симплекса: *это* (поскольку такая точка существует) *точка H, которая не лежит ни* *в одной грани симплекса и или не совпадает с центром тяжести, и тогда его квадратичная поляра относительно симплекса является квадрикой вращения с осью, проходящей через H, или совпадает с центром тяжести, и тогда симплекс равносторонний.* В первом случае соответственная ось вращения называется *главной осью* n-симплекса, а (единственный) $(n - 1)$-шар, входящий в связку, определенную квадратичной полярой точки H относительно симплекса и двойной линейной полярой точки H относительно симплекса, называется *главным* $(n - 1)$*-шаром.* Если еще ввести число μ (*тип* главной точки) при помощи определенного двойного отношения в указанной связке квадрик, то можно утверждать, что *n-симплекс будет вида* (*) *тогда и только тогда, если это n-симплекс с главной точкой (типа $\mu = \alpha/\beta$).*

Из выражения (*) следует, что *все грани n-симплекса с главной точкой типа μ являются в свою очередь симплексами с главной точкой типа μ* (теорема 54).

Если дан n-симплекс с главной точкой типа μ, где μ — целое, $0 < \mu \leqq \leqq n - 1$, то (теорема 55) *существует* $(n - 1)$*-шар* (главный $(n - 1)$-шар), *касающийся всех μ-мерных граней n-симплекса, причем все линейные пространства, каждое из которых соединяет точку касания в такой грани с противолежащей $(n - \mu - 1)$-мерной гранью, проходят через одну и ту же точку* (главную точку). *Это свойство характерно для n-симплексов с главной точкой типа μ, $\mu = 1, \ldots, n - 1$.*

В дальнейших теоремах показано, что *всякий n-симплекс с главной точкой возникает из некоторого положительно ортоцентрического n-симплекса путем растяжения в определенном направлении* (теорема 56). Отсюда легко следует (теорема 58), что *n-симплекс с главной точкой обладает тем* (не характерным) *свойством, что все высоты пересекают одну прямую* (главную ось).

Другое свойство n-симплекса с главной точкой, являющиеся *характерным*, состоит в том, что *для симплекса существует система $n + 1$ ориентированных $(n - 1)$-шаров (причем центр каждого из них лежит в одной из вершин), пересекающихся под одним и тем же (обобщенным) углом* (теорема 61). С этим связан второй способ образования n-симплексов с главной точкой: *Если построить вокруг всех вершин равностороннего n-симплекса $(n - 1)$-шары одинаковых радиусов* (действительных или чисто мнимых) *и если преобразовать эту систему $n + 1$ $(n - 1)$-шаров при помощи какой-либо шаровой инверсии, то центры преобразованных $(n - 1)$-шаров, если они не лежат в гиперплоскости, образуют вершины n-симплекса с главной точкой. Этим способом можно образовать каждый n-симплекс с главной точкой.*

В теореме 62 показано, что *если центр главного $(n - 1)$-шара K n-сим-*