v $\langle\alpha, \beta\rangle$ graf příslušné funkce ψ měl délku $(\beta - \alpha) + (\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))$. Všechny tyto funkce ψ tvoří dohromady v $\langle 0, 1\rangle$ funkci χ, která je rostoucí a spojitá. Je pak

$$d(\chi) = d_{\langle 0, 1\rangle}(\chi) = \sum [(\beta - \alpha) + (\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))] = 2\,,$$

neboť zřejmě $\sum(\beta - \alpha) = 1$, $\sum(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha)) = 1$. Dále platí $\varrho(\chi, \lambda) < \frac{1}{2}\varepsilon$ a vzhledem k $\varrho(\lambda, \varphi) < \frac{1}{2}\varepsilon$ je $\varrho(\chi, \varphi) < \varepsilon$. Tedy D^* je hustá v M, jak jsme chtěli dokázat.

Резюме

О МОНОТОННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ, ГРАФИК КОТОРЫХ ИМЕЕТ МАКСИМАЛЬНУЮ ДЛИНУ

Й. БЕЧВАРЖ (Jiří Bečvář), Либерец.

(Поступило в редакцию 21/IV 1955.)

Целью статьи является доказательство следующих двух теорем:

1. *Пусть* C — пространство функций, непрерывных в сегменте $J = \langle a, b\rangle$, $a < b$, с метрикой $\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \max\limits_{x \in J} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathsf{C}$. *Пусть* $\varphi \in \mathsf{C}$ *и пусть* $\{\lambda_n\}$ *есть последовательность функций из* C, *графиками которых являются ломанные, вписанные графику функции* φ. *Если* $\lambda_n(x) \to \varphi(x)$ *для каждого* $x \in J$, *то* $\lambda_n \to \varphi$ *равномерно в* J *и* $d(\lambda_n) \to d(\varphi)$, *где* d *означает длину графика соответствующей функции.*

2. *Пусть* M *есть пространство всех неубывающих функций* $\varphi \in \mathsf{C}$, *которые удовлетворяют условию* $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$, $a' < b'$. *Пусть* D^* (D) *есть множество всех функций* $\varphi \in \mathsf{M}$, *которые возрастают (неубывают) и для которых* $d(\varphi) = (b - a) + (b' - a')$. *Тогда множество* D^* (*тем более и* D) *является плотным в* M.

Доказательство проводится путём непосредственной конструкции; для случая множества D дается также доказательство, основанное на теореме Бэра.