Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

O MONOTONNÍCH SPOJITÝCH FUNKCÍCH, JEJICHŽ GRAF MÁ MAXIMÁLNÍ DÉLKU

JIŘÍ BEČVÁŘ, Liberec.

(Došlo dne 21. dubna 1955.) DT: 517.51

Článek se zabývá existencí neklesajících resp. rostoucích spojitých funkcí v uzavřeném intervalu, jejichž graf má maximální možnou délku. Mimo to je ukázáno, že délku grafu spojité funkce lze definovat pomocí délek vepsaných polygonů na základě konvergence bod po bodu. Podrobnějšímu studiu vlastností spojitých funkcí, jejichž graf má maximální délku, bude věnována práce M. Nekvindy.

1. Graf funkce φ, spojité a neklesající v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$, má podle běžné definice konečnou délku d, pro kterou zřejmě platí

$$\sqrt{(b-a)^2 + (\varphi(b) - \varphi(a))^2} \leqq d \leqq (b-a) + (\varphi(b) - \varphi(a)). \tag{1.1}$$

Jsou-li dána čísla a, b, a', b', $a < b$, $a' < b'$, je otázkou, zda vždy existuje v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ rostoucí spojitá funkce φ, pro kterou platí $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$ a jejíž graf má právě maximální možnou délku, t. j. rovnou číslu $(b - a) + (b' - a')$. Tento problém podle sdělení doc. Fr. Nožičky formuloval akademik E. Čech. Ukážeme v dalším, že takové funkce existují a že tvoří hustou množinu v prostoru spojitých neklesajících funkcí ψ, definovaných v intervalu $\langle a, b\rangle$ a splňujících podmínky $\psi(a) = a'$, $\psi(b) = b'$. Je zřejmé, že to stačí dokázat pro případ $a = a' = 0$, $b = b' = 1$.

2. Nechť J je uzavřený interval $\langle a, b\rangle$, $a < b$, a nechť C značí metrický prostor reálných funkcí, spojitých v J. Metrika v C je jako obvykle definována vztahem

$$\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{x \in J} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \,.$$

Budiž dále L množina těch funkcí $\lambda \in \mathsf{C}$, jejichž grafem je lomená čára, skládající se z konečného počtu úseček. Je-li $\lambda \in \mathsf{L}$, budeme říkat, že bod roviny o souřadnicích x, $\lambda(x)$, kde $x \in J$, je úhlovým bodem funkce λ, mění-li tam graf funkce λ směrnici. Mezi úhlové body funkce λ budeme počítat i body $[a, \lambda(a)]$, $[b, \lambda(b)]$. Dva různé úhlové body A, B funkce λ nazveme sousední, neexistuje-li jiný její úhlový bod, jehož x-ová souřadnice by ležela ostře mezi x-ovými souřadnicemi bodů A, B.

Každé funkci $\varphi \in \mathsf{C}$ přiřaďme množinu $L_\varphi \subset \mathsf{L}$, která se skládá právě z těch funkcí $\lambda \in \mathsf{L}$, jež splňují tuto podmínku: jestliže bod $[x, \lambda(x)]$ je úhlovým bodem funkce λ, potom platí $\lambda(x) = \varphi(x)$.

Grafy funkcí z L_φ jsou tedy tvořeny lomenými čarami, vepsanými grafu funkce φ.

Každé funkci $\lambda \in \mathsf{L}$ přiřaďme číslo $d(\lambda)$, definované ve smyslu elementární geometrie jako délka lomené čáry, která je grafem funkce λ. Tím je na množině L definován nezáporný funkcionál, který značme d.

Délka grafu libovolné funkce $\varphi \in \mathsf{C}$ se běžně definuje buď jako supremum čísel $d(\lambda)$ pro všechna $\lambda \in L_\varphi$ nebo jako limita čísel $d(\lambda_n)$, utvořených pro nějakou posloupnost funkcí $\lambda_n \in L_\varphi$, která splňuje podmínku, že norma dělení (t. j. maximum z rozdílů x-ových souřadnic dvou sousedních „dělicích" bodů funkce λ_n) konverguje k nule. Ukážeme v tomto odstavci, že při tomto druhém způsobu definice délky stačí předpokládat, že posloupnost funkcí $\lambda_n \in L_\varphi$ konverguje k φ v intervalu J bod po bodu.

Dokažme nejprve toto lemma:

Lemma 2.1. *Nechť $\varphi \in \mathsf{C}$ a nechť $\{\lambda_n\}$ je posloupnost funkcí z L_φ taková, že pro každé $x \in J$ platí $\lambda_n(x) \to \varphi(x)$. Pak posloupnost funkcí λ_n konverguje k φ v intervalu J stejnoměrně.*

Důkaz: Předpokládejme naopak, že konvergence není stejnoměrná. Pak existuje číslo $\varepsilon > 0$ a rostoucí nekonečná posloupnost indexů k taková, že ke každému k existuje bod $y_k \in J$ takový, že platí

$$|\lambda_k(y_k) - \varphi(y_k)| > \varepsilon\,. \tag{2.1}$$

Posloupnost $\{y_k\}$ má v J alespoň jeden hromadný bod y. Z posloupnosti $\{y_k\}$ lze pak zřejmě vybrat ryze monotonní posloupnost $\{y_l\}$ takovou, že $y_l \to y$ a že nadto buď pro všechna l platí $\lambda_l(y_l) < \varphi(y_l) - \varepsilon$ nebo pro všechna l platí $\lambda_l(y_l) > \varphi(y_l) + \varepsilon$. Posloupnost $\{y_l\}$ je nekonečná a pro všechny indexy l platí $y_l \neq y$. Předpokládejme dále, že $\{y_l\}$ je rostoucí a že pro všechna l platí

$$\lambda_l(y_l) < \varphi(y_l) - \varepsilon\,. \tag{2.2}$$

Zbylé tři možné případy se vyřídí podobně. Je pak $y \neq a$ a ze spojitosti funkce φ plyne, že existuje δ takové, že $0 < \delta \leqq y - a$ a že pro všechna $x \in (y - \delta, y\rangle$ platí

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{2.3}$$

Protože φ je v J omezená, existuje kladné číslo $K > 1$ takové, že pro všechna $x \in J$ je

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon K}{3}\,. \tag{2.4}$$

Konečně ježto $y_l \to y$ zleva, existuje l_0 takové, že pro všechna $l > l_0$ je

$$y - \frac{\delta}{K} < y_l < y\,. \tag{2.5}$$

Z (2.2), (2.3), (2.5) pro všechna $l > l_0$ plyne

$$\lambda_l(y_l) < \varphi(y) - \frac{2\varepsilon}{3}\,. \tag{2.6}$$

Dokažme nyní, že pro každý index $l > l_0$ je

$$\lambda_l(y) < \varphi(y) - \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{2.7}$$

Uvažme libovolné $l > l_0$. Pak z (2.2) plyne, že bod $Y_l = [y_l, \lambda_l(y_l)]$ není úhlovým bodem funkce λ_l. Nechť $U = X'X''$ je úsečka grafu funkce λ_l, procházející bodem Y_l, při čemž $X' = [x', \lambda_l(x')]$, $X'' = [x'', \lambda_l(x'')]$ jsou sousední úhlové body funkce λ_l. Je pak

$$\lambda_l(x') = \varphi(x')\,, \quad \lambda_l(x'') = \varphi(x'')\,, \quad x' < y_l < x''\,. \tag{2.8}$$

Označme ještě U_x množinu x-ových souřadnic bodů úsečky U. Rozeznávejme dva případy:

A. Úsečka U nemá kladnou směrnici. Pak pro všechna $x \in (y_l, y\rangle$, splňující podmínku $x \in U_x$, platí vzhledem k (2.6) vztah $\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{2\varepsilon}{3}$. Odtud užitím (2.3) plyne, že pro tato x platí $\lambda_l(x) < \varphi(x) - \frac{\varepsilon}{3}$. Vzhledem k (2.8) je tedy nutně $x'' \geqq y$; platí tedy $\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{2\varepsilon}{3}$ i pro $x = y$ a tedy tím spíš platí (2.7).

B. Úsečka U má kladnou směrnici s. Dokažme, že pak nutně $s < \frac{\varepsilon K}{3\delta}$. Předpokládejme totiž naopak, že platí $s \geqq \frac{\varepsilon K}{3\delta}$. Pak pro všechna $x \leqq y_l$, splňující podmínku $x \in U_x$, dostáváme $\lambda_l(x) = \lambda_l(y_l) + s(x - y_l) \leqq \lambda_l(y_l) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y_l)$ a odtud dle (2.6)

$$\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y_l)\,. \tag{2.9}$$

Rozeznávejme nyní dva logicky možné případy:

a) $y - \delta < x \leqq y_l$. Je pak $x - y_l \leqq 0$ a tedy z (2.9) plyne $\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{2\varepsilon}{3} = \left(\varphi(y) - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \frac{\varepsilon}{3}$ a odtud dle (2.3)

$$\lambda_l(x) < \varphi(x) - \frac{\varepsilon}{3} < \varphi(x)\,.$$

b) $x \leqq y - \delta$. Upravme (2.9) takto:

$$\lambda_l(x) < \varphi(y) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}\left(-\frac{2\delta}{K}\right) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y_l).$$

Dle (2.5) odtud plyne

$$\lambda_l(x) < \varphi(y) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(y_l - y) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y_l) = \varphi(y) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y).$$

Odtud a z nerovnosti $x \leqq y - \delta$ dostáváme

$$\lambda_l(x) < \varphi(y) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(y - \delta - y) = \varphi(y) - \frac{\varepsilon K}{3},$$

což vzhledem k (2.4) dává opět $\lambda_l(x) < \varphi(x)$.

Dokázali jsme tedy v obou případech a), b), že pro všechna $x \leqq y_l$, $x \in U_x$, platí $\lambda_l(x) < \varphi(x)$. Speciálně tedy i pro $x = x'$. To je však ve sporu s (2.8). Tedy nemůže být $s \geqq \frac{\varepsilon K}{3\delta}$, což jsme chtěli ukázat. Nechť tedy $s < \frac{\varepsilon K}{3\delta}$. Pro všechna $x \in (y_l, y\rangle$, $x \in U_x$, platí pak

$$\lambda_l(x) = \lambda_l(y_l) + s(x - y_l) < \lambda_l(y_l) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y_l). \tag{2.10}$$

Ježto dle (2.5) je $x - y_l < \frac{\delta}{K}$, plyne z (2.10) $\lambda_l(x) < \lambda_l(y_l) + \frac{\varepsilon}{3}$, což dle (2.6) dává $\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{\varepsilon}{3}$. Odtud vzhledem k (2.3) dostáváme $\lambda_l(x) < \varphi(x)$ pro všechna naše x. Vzhledem k (2.8) musí tedy být $x'' > y$, tedy nerovnost $\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{\varepsilon}{3}$ platí i pro $x = y$. Tím dostáváme opět (2.7).

Úhrnem jsme tedy pro všech nekonečně mnoho vybraných indexů $l > l_0$ dokázali platnost vztahu (2.7). Tento výsledek je však ve sporu s předpokladem věty, podle něhož $\lambda_l(y) \to \varphi(y)$. Tedy konvergence funkcí λ_n k φ je v J stejnoměrná.[1])

Nyní již můžeme dokázat tuto větu:

Věta 2.1. *Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu* 2.1. *Označme $s(\varphi)$ supremum všech čísel $d(\lambda)$ pro všechna $\lambda \in L_\varphi$. Potom posloupnost čísel $d(\lambda_n)$ má limitu a ta je rovna číslu $s(\varphi)$.*

Důkaz: Zvolme libovolné číslo $s' < s(\varphi)$. Pak existuje funkce $\lambda \in L_\varphi$ taková, že $d(\lambda) > s'$. Její úhlové body buďte $U_0, U_1, \ldots, U_r$, jejich x-ové souřadnice $x_0, x_1, \ldots, x_r$. Budiž dále λ' libovolná funkce z L_φ. Utvořme z λ, λ' novou funkci $\bar{\lambda} \in \mathsf{L}$ takovou, že a) každý úhlový bod funkcí λ, λ' leží na grafu funkce $\bar{\lambda}$,

[1]) Lemma 2.1 lze dokázat též takto: Dá se dokázat že všechny funkce z L_φ jsou stejně spojité, a odtud už jak známo stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{\lambda_n\}$ plyne.

b) každý úhlový bod funkce $\bar{\lambda}$ je úhlovým bodem alespoň jedné z funkcí λ, λ'. Funkce $\bar{\lambda}$ je tím jednoznačně určena a je pak zřejmě $\bar{\lambda} \in L_\varphi$. Dále platí

$$d(\bar{\lambda}) \geqq d(\lambda')\,, \quad d(\bar{\lambda}) \geqq d(\lambda) > s'\,. \tag{2.11}$$

Funkce $\bar{\lambda}$ vznikne z λ' „přidáním" bodů $U_0, U_1, \ldots, U_r$. Několikerým užitím trojúhelníkové nerovnosti v rovině dostáváme odtud

$$d(\bar{\lambda}) \leqq d(\lambda') + 2 \sum_{i=0}^{r} |\lambda(x_i) - \lambda'(x_i)| = d(\lambda') + 2 \sum_{i=0}^{r} |\varphi(x_i) - \lambda'(x_i)|\,. \tag{2.12}$$

Odtud dále plyne

$$d(\bar{\lambda}) - d(\lambda') \leqq 2(r + 1)\, \varrho(\varphi, \lambda')\,. \tag{2.13}$$

Volme nyní za λ' postupně funkce λ_n z naší posloupnosti. Dle lemmatu 2.1 platí $\varrho(\varphi, \lambda_n) \to 0$. Odtud, z (2.13) a z (2.11) plyne, že pro dost velká n bude $d(\lambda_n) > s'$. Tím je věta dokázána a tím zároveň i naše tvrzení o možnosti definovat délku shora zmíněným způsobem.

Dokažme v tomto odstavci ještě lemma, kterého užijeme v dalším odstavci:

Lemma 2.2. *Funkcionál d je na množině* C *zdola polospojitý.*

Důkaz: Nechť φ je libovolná funkce z C a nechť $d' < d(\varphi)$ je libovolné číslo. Máme dokázat, že pak platí $d(\psi) > d'$ pro každou funkci $\psi \in$ C takovou, že $\varrho(\varphi, \psi)$ je dost malé. Zvolme funkce $\lambda \in L_\varphi$, $\lambda' \in L_\psi$, přitom nechť λ splňuje podmínku $d(\lambda) > d'$. Funkce λ nechť má úhlové body $U_0, \ldots, U_r$ s x-ovými souřadnicemi $x_0, \ldots, x_r$. Utvořme novou funkci $\bar{\lambda} \in$ L, která je jednoznačně určena tím, že a) každý úhlový bod funkce λ leží na jejím grafu, b) každý úhlový bod funkce λ', který nemá společnou x-ovou souřadnici se žádným úhlovým bodem funkce λ, leží na jejím grafu, c) každý její úhlový bod je úhlovým bodem alespoň jedné z funkcí λ, λ'. Podobně jako v důkazu věty 2.1 dostáváme pak

$$\begin{aligned} d' < d(\lambda) \leqq d(\bar{\lambda}) \leqq d(\lambda') + 2 \sum_{i=0}^{r} |\lambda(x_i) - \lambda'(x_i)| = \\ = d(\lambda') + 2 \sum_{i=0}^{r} |\varphi(x_i) - \lambda'(x_i)| \leqq d(\lambda') + 2(r + 1)\, \varrho(\varphi, \lambda') \leqq \\ \leqq d(\psi) + 2(r + 1)\, [\varrho(\varphi, \psi) + \varrho(\psi, \lambda')]\,. \end{aligned}$$

Odtud je vidět, že bude-li $\varrho(\varphi, \psi)$ dost malé, bude $d(\psi) > d'$, neboť k danému ψ můžeme volit λ' tak, aby $\varrho(\psi, \lambda')$ bylo libovolně malé. Tím je lemma dokázáno.

3. V tomto odstavci se vraťme k problému formulovanému v odst. 1. Nechť symboly C, L, L_φ mají týž význam jako dříve, omezme se však nyní až do konce na případ $J = \langle 0, 1 \rangle$. Nechť dále C′ značí množinu těch funkcí $\varphi \in$ C, pro něž $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. M budiž množina těch funkcí z C′, které jsou neklesající, a konečně M^* množina rostoucích funkcí z C'. Ve všech případech jde o metrické prostory.

V souhlase s (1.1) platí pro každou $\varphi \in \mathsf{M}$

$$\sqrt{2} \leqq d(\varphi) \leqq 2. \tag{3.1}$$

Definujme nyní: D je množina všech $\varphi \in \mathsf{M}$ takových, že $d(\varphi) = 2$, D^* je množina všech $\varphi \in \mathsf{M}^*$ takových že $d(\varphi) = 2$. V tomto odstavci ukážeme, jak lze užít Baireovy věty k důkazu tvrzení, že D je hustá v M, což je tvrzení poněkud slabší než to, které je vysloveno v odst. 1. K tomu uveďme několik poznámek. Především prostor C' je zřejmě úplný. Dále: prostory M, M^* nejsou kompaktní a prostor M^* není ani úplný. Naproti tomu snadno dokážeme toto lemma:

Lemma 3.1. *Prostor* M *je úplný.*

Důkaz: Vzhledem k úplnosti prostoru C' stačí dokázat, že M je uzavřená množina v C'. Mějme tedy posloupnost funkcí $\varphi_n \in \mathsf{M}$, které ve smyslu metriky v C' konvergují k funkci $\varphi \in \mathsf{C}'$. Je-li $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, pak pro všechna n je $\varphi_n(x_1) \leqq \varphi_n(x_2)$. Protože $\varphi_n(x_1) \to \varphi(x_1)$, $\varphi_n(x_2) \to \varphi(x_2)$, je i $\varphi(x_1) \leqq \varphi(x_2)$. Tedy $\varphi \in \mathsf{M}$ a M je tedy uzavřená v C, c. b. d.

Nyní můžeme přistoupit k důkazu našeho tvrzení:

Věta 3.1. *Množina* D *je hustá v* M.

Důkaz: Definujme množiny $A_n \subset \mathsf{M}$ takto: A_n je množina všech funkcí $\varphi \in \mathsf{M}$ takových, že

$$d(\varphi) \leqq 2 - \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Zřejmě pro každé n platí $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \neq A_{n+1}$. Ježto funkcionál d je dle lemmatu 2.2 na M polospojitý zdola, jsou jak známo všechny množiny A_n uzavřené v M. Definujme $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Dokažme, že A_n jsou řídké v M a tedy že množina A je první kategorie v M. Protože každá A_n je uzavřená, stačí dokázat, že pro každé n je množina $\mathsf{M} - A_n$ hustá v M. Ježto však zřejmě množina $\mathsf{M} \cap \mathsf{L}$ je hustá v M, stačí k tomu dokázat, že $(\mathsf{M} \cap \mathsf{L}) - A_n$ je hustá v A_n. Nechť tedy $\varphi \in A_n$ a nechť $\varepsilon > 0$ je dané číslo. Pak existuje funkce $\bar{\lambda} \in L_\varphi$ taková, že $\varrho(\bar{\lambda}, \varphi) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Funkce $\bar{\lambda}$ je neklesající. Nechť α resp. β je minimální resp. maximální hodnota směrnic úseček, které tvoří graf funkce $\bar{\lambda}$. Čísla α, β jsou konečná a platí $0 \leqq \alpha \leqq \beta$. Sestrojme funkci $\lambda \in \mathsf{L} \cap \mathsf{M}$, jejíž graf se skládá ze dvou úseček, jejichž společný bod má x-ovou souřadnici $c \in (0, 1)$, při čemž a) v intervalu $\langle 0, c \rangle$ směrnice grafu funkce λ je α', $0 \leqq \alpha' \leqq \alpha$, b) v intervalu $\langle c, 1 \rangle$ směrnice grafu funkce λ je $\beta' \geqq \beta$, c) $d(\lambda) > 1 - \frac{1}{2^n}$.
Rozdělme nyní každou úsečku grafu funkce $\bar{\lambda}$ na m stejných dílů. Každou takovou částečnou úsečku (pokud není vodorovná, kdy ji ponecháme) na-

hraďme dvěma úsečkami, vycházejícími z jejích koncových bodů, z nichž jedna má směrnici α', druhá β'; jejich délku volme tak, aby vznikl graf nějaké funkce z $\mathsf{L} \cap \mathsf{M}$. Je vidět, že při dost velkém m dostaneme graf jisté funkce $\lambda' \in \mathsf{L} \cap \mathsf{M}$, pro kterou platí $\varrho(\lambda', \bar{\lambda}) < \frac{1}{2}\varepsilon$, $d(\lambda') = d(\lambda)$. Odtud plyne $\lambda' \in (\mathsf{L} \cap \cap \mathsf{M}) - A_n$ a dále

$$\varrho(\lambda', \varphi) \leqq \varrho(\bar{\lambda}, \varphi) + \varrho(\bar{\lambda}, \lambda') < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Tím jsme dokázali, že $(\mathsf{M} \cap \mathsf{L}) - A_n$ je množina, hustá v A_n. Tedy A je první kategorie v M. Avšak M je dle lemmatu 3.1 úplný prostor. Tedy dle Baireovy věty množina $\mathsf{M} - A$ je hustá v M. Avšak zřejmě $\mathsf{M} - A = \mathsf{D}$. Tím je věta dokázána.

Ježto $\mathsf{M} \neq \emptyset$, plyne z věty 3.1 speciálně existence funkcí z M, jejichž graf má délku 2.

4. Dokažme nyní v plném rozsahu tvrzení, uvedené v odst. 1. V našem důkazu bude zároveň zahrnuta konstrukce rostoucí spojité funkce z C', jejíž graf má délku 2. Tuto konstrukci lze snadno doplnit tak, aby byla efektivní.

Věta 4.1. *Množina* D^* *je hustá v* M.

Důkaz: Budiž $\varphi \in \mathsf{M}$, $\varepsilon > 0$. Snadno se dokáže, že pak existuje funkce $\lambda \in L_\varphi \cap \mathsf{M}^*$ taková, že $\varrho(\lambda, \varphi) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Funkce λ je rostoucí, jejím grafem je stoupající lomená čára. Rozdělme nyní každou úsečku grafu funkce λ na m stejných dílů. Každou takovou částečnou úsečku AB (A je levý, B pravý její koncový bod) nahraďme dvěma úsečkami AC, BC se společným koncem C, a to tak, že AC je rovnoběžná s osou x, BC s osou y. Úhrnem dostaneme lomenou čáru λ^* (která ovšem není grafem žádné funkce), pro jejíž každý bod $[x, y]$ platí $y \leqq \lambda(x)$. Při dosti velkém m dosáhneme toho, že nadto pro každý bod $[x, y]$ čáry λ^* platí $\lambda(x) - y < \frac{1}{2}\varepsilon$. Uvažme nyní libovolnou vodorovnou úsečku čáry λ^*. Nechť její konce jsou body $[a, a']$, $[b, a']$, $0 \leqq a < b \leqq 1$, $a' = \lambda(a)$ a nechť na ni zprava navazuje úsečka rovnoběžná s osou y s koncovými body $[b, a']$, $[b, b']$, $b' = \lambda(b) > a'$. V intervalu $\langle a, b \rangle$ nyní zkonstruujeme funkci ψ, která tam bude rostoucí, jejíž graf tam bude mít délku $(b - a) + (b' - a')$, pro kterou bude platit

$$\psi\,(a) = a', \ \psi(b) = b' \tag{4.1}$$

a která bude pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ vyhovovat vztahům

$$\psi(x) \leqq \lambda(x)\,, \quad \lambda(x) - \psi(x) < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{4.2}$$

Označme $\delta = (b - a) + (b' - a')$. Body $[a, a']$, $[b, b']$ a půlící bod úsečky, kterou tyto dva body určují, nazveme dělicími body řádu 0. (Dva dělicí body nazveme sousední v podobném smyslu, jako jsme to dělali dříve u úhlových bodů.) Úsečka $[a, a']\,[b, b']$ je v intervalu $\langle a, b \rangle$ grafem funkce, kterou označme ψ_0. Každou úsečku, která je určena dvěma sousedními dělicími body A, B řádu 0, nahraďme dvěma úsečkami se společným koncem C, které vycházejí z bodů A resp. B, při čemž bod C je takový, že jeho x-ová souřadnice leží ostře mezi x-ovými souřadnicemi bodů A, B, podobně i y-ová souřadnice leží ostře mezi y-ovými souřadnicemi bodů A, B a bod C leží pod grafem funkce ψ_0. Nadto ještě volme bod C tak, aby úhrnná délka takto zkonstruované lomené čáry byla větší než $\delta(1 - \frac{1}{2})$. Tato lomená čára je grafem v $\langle a, b\rangle$ rostoucí spojité funkce, kterou označme ψ_1. Dělicími body řádu 1 nazveme dělicí body řádu 0 a dále body, které půlí úsečky, tvořící graf funkce ψ_1. Pro každé dva sousední dělicí body řádu 1 proveďme konstrukci zcela analogickou jako v předchozím případě, a to tak, aby úhrnná délka lomené čáry, kterou tak pro interval $\langle a, b\rangle$ dostaneme, byla větší než $\delta(1 - \frac{1}{2^2})$. Tato čára je v $\langle a, b\rangle$ grafem funkce, kterou označme ψ_2. Dále definujeme dělicí body řádu 2, konstruujeme funkci ψ_3, jejíž graf má délku větší než $\delta\left(1 - \frac{1}{2^3}\right)$ atd. Obecně graf funkce ψ_n nechť má délku větší než $\delta\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ (zřejmě vždy má délku $< \delta$). Úhrnem dostaneme v $\langle a, b\rangle$ posloupnost rostoucích funkcí ψ_n, jejichž grafy jsou lomené čáry. Označme D množinu dělicích bodů všech řádů, D_x resp. D_y množinu x-ových resp. y-ových souřadnic bodů z D. Zřejmě D_x je hustá v $\langle a, b\rangle$, D_y v $\langle a', b'\rangle$. Pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je zřejmě posloupnost čísel $\psi_n(x)$ nerostoucí a zdola omezená číslem $\lambda(x) - \varepsilon/2$. Definujme tedy funkci ψ v $\langle a, b\rangle$ vztahem

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)\,. \tag{4.3}$$

Poznamenejme, že je-li $[x, y]$ dělicí bod řádu n, pak leží na grafu každé funkce ψ_m s $m \geqq n$. Dále zřejmě každý bod $[x, y] \in D$ leží na grafu funkce ψ, t. j. grafy funkcí ψ_n jsou polygony, vepsané grafu funkce ψ.

Dokažme, že ψ je v $\langle a, b\rangle$ rostoucí. Nechť $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$. Pak existuje dělicí bod $[x, y] \in D$ takový, že $x_1 < x < x_2$. Nechť $[x, y]$ je řádu n (a tedy i všech vyšších). Pak $y = \psi_n(x)$ a ježto ψ_n je rostoucí, je $\psi_n(x_1) < \psi_n(x) = y < \psi_n(x_2)$. Je však $y = \psi(x)$ a ježto posloupnost $\{\psi_n(x_1)\}$ je nerostoucí, máme dle (4.3) $\psi(x_1) \leqq \psi_n(x_1) < \psi_n(x) = \psi(x)$. S druhé strany pro každé $m \geqq n$ je $\psi(x) = \psi_m(x) < \psi_m(x_2)$, tedy v limitě i $\psi(x) \leqq \psi(x_2)$. Úhrnem tedy $\psi(x_1) < \psi(x_2)$, jak jsme chtěli dokázat.

Vztahy (4.1), (4.2) jsou z konstrukce zřejmé. Snadno je vidět, že půlením úseček v naší konstrukci jsme dosáhli toho, že (4.3) platí v $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně; tedy ψ je v $\langle a, b\rangle$ spojitá. Můžeme tedy psát $\psi_n \in L_\psi$ pro každé n. Podle věty 2.1 tedy $d_{\langle a, b\rangle}(\psi_n) \to d_{\langle a, b\rangle}(\psi)$, označíme-li symbolem $d_{\langle a, b\rangle}$ délku grafu příslušné funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Avšak $d_{\langle a, b\rangle}(\psi_n) \to \delta$, tedy $d_{\langle a, b\rangle}(\psi) = \delta = (b - a) + (b' - a') = (b - a) + (\lambda(b) - \lambda(a))$. Tím jsme v $\langle a, b\rangle$ zkonstruovali funkci ψ žádaných vlastností. To provedeme v každém intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, který je tvořen x-ovými souřadnicemi vodorovných úseček grafu čáry λ^*, a to tak, aby platily vztahy, odpovídající vztahům (4.1), (4.2), a aby