ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

1

81

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 81 • Č. 1 • STR. 1—136 • PRAHA 1. IV. 1956

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky")

SVAZEK 81 (1956)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd
Praha II, Žitná 25

Obsah:

Články:

Referáty:

Recense:

Zprávy:

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 81 * PRAHA, 1. [illegible]. 1956 * ČÍSLO 1

ČLÁNKY

ROZŠÍŘENÍ VĚT MENELAOVY A CEVOVY NA n-DIMENSIONÁLNÍ ÚTVARY

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

(Došlo dne 22. prosince 1954.) DT 513.126:513.82

V n-dimensionálním eukleidovském prostoru ($n \geqq 2$) uvažuje autor geometrický útvar tvořený $n + 1$ úsečkami

$$A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n+1}A_1\,;$$

body $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ jsou lineárně nezávislé. Na tento útvar, který je jakýmsi n-dimensionálním zobecněním trojúhelníka, rozšiřuje v II. části známé věty Menelaovu a Cevovu. Ve III. části je podrobněji studováno toto rozšíření věty Cevovy.

I.

Úmluva 1,1. Budeme pracovat v n-rozměrném eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_n$, $n \geqq 2$. m-dimensionální eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$ obsažený v $\mathbf{E}_n$ a určený body

$$P_1, P_2, \ldots, P_{m+1}\,, \quad 1 \leqq m \leqq n\,,$$

budeme též označovat

$$\mathbf{E}_m = \{P_1P_2 \ldots P_{m+1}\}\,.$$

Definice 1,1. *Buďtež*

$$A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}\,, \quad 2 \leqq m \leqq n\,,$$

body z $\mathbf{E}_n$, které při $m < n$ leží v jediném podprostoru $\mathbf{E}_m$ a při $m = n$ nejsou v žádné nadrovině prostoru $\mathbf{E}_n$. Útvar, tvořený $m + 1$ úsečkami

$$A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{m+1}A_1\,,$$

nazveme mnohoúhelníkem normálním v podprostoru

$$\{A_1A_2 \ldots A_{m+1}\} \tag{1,1}$$

(pro $m = 2$ trojúhelníkem a pro $m = 3$ prostorovým čtyřúhelníkem) *a označíme jej*

$$A_1A_2 \dots A_{m+1} \,. \tag{1,2}$$

Jedině když budeme mít na mysli mnohoúhelník

$$A_1A_2 \dots A_{n+1} \tag{1,3}$$

normální v prostoru $\mathbf{E}_n$, *budeme mluvit jen o normálním mnohoúhelníku* $A_1A_2 \dots$ $\dots A_{n+1}$.

Definice 1,2. *Budiž* m *přirozené číslo,* $2 \leqq m \leqq n$. *Body*

$$A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$$

nazveme vrcholy mnohoúhelníka (1,2) *normálního v podprostoru* (1,1). *Úsečky*

$$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m+1}A_1 \,,$$

které při $m = n$ *označíme* $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, *nazveme jeho stranami. Přímky*

$$\{A_1A_2\}, \{A_2A_3\}, \dots, \{A_{m+1}A_1\}$$

nazveme přímkami jeho stran.

Dva vrcholy na téže straně mnohoúhelníka (1,2) *normálního v podprostoru* (1,1) *označíme vzájemně jako sousední.*

Věta 1,1. *Kterýchkoliv* m $(2 \leqq m \leqq n)$ *bodů z* $n + 1$ *vrcholů*

$$A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \tag{1,4}$$

normálního mnohoúhelníka (1,3) *určuje v libovolném uspořádání mnohoúhelník normální v podprostoru* $\mathbf{E}_m$.

Důkaz plyne snadno z definice 1,1.

Poznámka 1. Je zřejmé, že každou větu o normálním mnohoúhelníku (1,3) můžeme vyslovit — po patřičné změně předpokladů — i pro mnohoúhelník normální v nějakém podprostoru prostoru $\mathbf{E}_n$. Této triviální poznámky budeme později často používat.

Definice 1,3. *Nadrovinu podprostoru* (1,1), *určenou libovolnými* m *body z* $m + 1$ *vrcholů mnohoúhelníka* (1,2) *normálního v podprostoru* (1,1), *nazveme jeho stěnou.*

$(m - 2)$-*dimensionální podprostor* $\mathbf{E}_{m-2}$ *určený vrcholy mnohoúhelníka* (1,2) *normálního v podprostoru* (1,1) *s vynecháním kterýchkoliv dvou sousedních, pojmenujeme vrcholovým podprostorem tohoto mnohoúhelníka; vrcholovému podprostoru a straně, kterou neobsahuje, budeme vzájemně říkat protější.*

Nadrovinu podprostoru (1,1), *která jde vrcholovým podprostorem mnohoúhelníka* (1,2) *normálního v podprostoru* (1,1), *avšak není jeho stěnou, nazveme jeho vrcholovou nadrovinou.*

Poznámka 2. Pro $m = 2$ a jen tehdy je stěna identická s přímkou strany trojúhelníka a vrcholový podprostor splývá s vrcholem.

Úmluva 1,2. Všude v dalším označíme

$$i_1, i_2, \ldots, i_r, \quad 1 \leqq r \leqq n+1, \tag{1,5}$$

takovou skupinu r čísel z čísel

$$1, 2, \ldots, n+1, \tag{1,6}$$

že

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_r.$$

Jestliže $r \leqq n$, označíme

$$j_1, j_2, \ldots, j_s$$

zbývajících $s = n - r + 1$ čísel z čísel (1,6), při čemž opět

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_s.$$

Úmluva 1,3. Bod na přímce strany a_i ($i = 1, 2, \ldots, n+1$) normálního mnohoúhelníka (1,3), který je různý od vrcholů na této straně, budeme označovat B_i.

Věta 1,2. *Každá nadrovina protíná přímky alespoň dvou stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$.*

Existuje nejvýše jedna nadrovina, která obsahuje dané body

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_r}, \quad 2 \leqq r \leqq n+1, \tag{1,8}$$

a — je-li $r \leqq n$ — je rovnoběžná s přímkami stran

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_s}, \quad s = n - r + 1. \tag{1,9}$$

Tato nadrovina není incidentní s žádným vrcholem normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$.

Důkaz. Nejdříve dokážeme první část věty. Pro nadrovinu incidentní alespoň s jedním z vrcholů (1,4) je tvrzení triviální. Stačí tedy dokázat, že neexistuje nadrovina, která není incidentní s žádným vrcholem (1,4) a je rovnoběžná s přímkami n stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$. Předpokládejme naopak, že taková nadrovina existuje. Můžeme předpokládat, že je rovnoběžná s přímkami stran $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$, takže je rovnoběžná i se stěnou $\{A_2A_3 \ldots A_{n+1}\}$, a tedy bod A_1 byl by obsažen v této stěně, což není možné. Správnost ostatních tvrzení je zřejmá.

Úmluva 1,4. Vrcholovou nadrovinu normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots$ $\ldots A_{n+1}$, která jde vrcholovým podprostorem protějším straně a_i ($i = 1, 2, \ldots, n+1$), budeme označovat

$$\gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Protíná-li vrcholová nadrovina γ_i přímku strany a_i, budeme ji též značit β_i; její průsečík s přímkou strany a_i bude vždy označen B_i.

Je-li přímka strany a_i s vrcholovou nadrovinou γ_i rovnoběžná, označíme tuto nadrovinu též $'\beta_i$.

Úmluva 1,5. Budiž $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník. Nadrovinu podprostoru

$$\{A_1A_2 \ldots A_{m+1}\}\,, \quad 2 \leqq m \leqq n\,, \tag{1,1}$$

která vznikne průnikem nadroviny γ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) s tímto podprostorem, označíme

$$\gamma_i^{(m)}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Jestliže $\gamma_i = \beta_i$ resp. $\gamma_i = {}'\beta_i$, budeme též užívat tohoto označení:

$$\gamma_i^{(m)} = \beta_i^{(m)} \quad \text{resp.} \quad \gamma_i^{(m)} = {}'\beta_i^{(m)}\,.$$

Mají-li nadroviny

$$\gamma_1^{(m)}, \gamma_2^{(m)}, \ldots, \gamma_m^{(m)}\,, \quad 2 \leqq m \leqq n\,, \tag{1,10}$$

podprostoru (1,1) společný bod, označíme jej $Q^{(m)}$; mají-li společný směr, označíme jej $q^{(m)}$.

Nadrovinu podprostoru (1,1), obsahující podprostor $\{A_2A_3 \ldots A_m\}$ a bod $Q^{(m)}$, resp. směr $q^{(m)}$, budeme značit $\gamma^{(m)}$. Existuje-li její průsečík s přímkou $\{A_1A_{m+1}\}$, bude vždy označen $B^{(m)}$.

Pro $m = n$ budeme horní index (n) též vynechávat. Dále budeme ještě klást $Q^{(0)} = A_1$ a $Q^{(1)} = B_1$.

Věta 1,3. *Nadroviny* (1,10) *podprostoru* (1,1) *jsou vrcholové nadroviny mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{m+1}$ normálního v podprostoru* (1,1).

Důkaz je zcela snadný.

Věta 1,4. *Kterýchkoliv n z $n + 1$ vrcholových nadrovin*

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ má společný právě jeden bod anebo právě jeden směr (nikoliv oba současně).

Důkaz. Větu stačí dokázat pro nadroviny $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Budiž h přirozené číslo, $2 \leqq h \leqq n - 1$.

Nechť nadroviny

$$\gamma_1^{(h)}, \gamma_2^{(h)}, \ldots, \gamma_h^{(h)}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{h+2}\}$ mají společný právě jeden bod $Q^{(h)}$ anebo právě jeden směr $q^{(h)}$ (nikoliv oba současně). Přímku, určenou bodem A_{h+2} a bodem $Q^{(h)}$ resp. směrem $q^{(h)}$, označíme třeba $p^{(h+1)}$; tohoto označení použijeme ještě i v důkazu věty 1,6.

Nadroviny

$$\gamma_1^{(h+1)}, \gamma_2^{(h+1)}, \ldots, \gamma_h^{(h+1)}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{h+2}\}$ mají zřejmě společnou právě jen přímku $p^{(h+1)}$, kterou však — jak se ihned vidí — neobsahuje podprostor $\gamma_{h+1}^{(h+1)}$, a tedy nadroviny

$$\gamma_1^{(h+1)}, \gamma_2^{(h+1)}, \ldots, \gamma_{h+1}^{(h+1)}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$ mají opět společný buďto právě jeden bod $Q^{(h+1)}$ (který ovšem leží na přímce $p^{(h+1)}$), anebo právě jeden směr $q^{(h+1)}$ (obsažený pak v přímce $p^{(h+1)}$).

Poněvadž pak přímky $\gamma_1^{(2)}$ a $\gamma_2^{(2)}$ mají buďto společný právě jeden bod, anebo jsou rovnoběžné (a přitom různé), je věta indukcí dokázána.

Věta 1,5. *Budiž $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník s vrcholovými nadrovinami*

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \,. \tag{1,11}$$

Budiž m přirozené číslo, $2 \leqq m \leqq n - 1$.

Pro každé m existuje právě jeden bod $Q^{(m)}$ anebo právě jeden směr $q^{(m)}$ (nikoliv oba současně).

Důkaz je v důsledku vět 1,3 a 1,4 zcela snadný.

Věta 1,6. *Mají-li vrcholové nadroviny*

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \tag{1,11}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ společný bod Q, neleží tento bod v žádné jeho stěně.

Mají-li nadroviny (1,11) *společný směr q, pak tento směr není obsažen v žádné stěně normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.*

Důkaz. Stačí dokázat, že bod Q resp. směr q není v nadrovině $\{A_1A_2 \dots A_n\}$. Budiž h přirozené číslo, $2 \leqq h \leqq n - 1$.

Nechť bod $Q^{(h)}$ resp. směr $q^{(h)}$ není v nadrovině $\{A_1A_2 \dots A_h\}$ podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+1}\}$. Pak přímka $p^{(h+1)}$, definovaná v důkazu věty 1,4, zřejmě podprostor $\{A_1A_2 \dots A_h\}$ ani neprotíná, ani s ním není rovnoběžná (obsažena v něm ovšem není).

Nadrovina $\gamma_{h+1}^{(h+1)}$ podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$ má s nadrovinou $\{A_1A_2 \dots \dots A_{h+1}\}$ téhož podprostoru společný právě jen podprostor $\{A_1A_2 \dots A_h\}$. Existuje-li bod $Q^{(h+1)}$, je to průsečík podprostoru $\gamma_{h+1}^{(h+1)}$ s přímkou $p^{(h+1)}$. Existuje-li směr $q^{(h+1)}$, je s přímkou $p^{(h+1)}$ rovnoběžný.

Z toho ihned plyne, že bod $Q^{(h+1)}$ resp. směr $q^{(h+1)}$ není v nadrovině $\{A_1A_2 \dots \dots A_{h+1}\}$ podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$.

Poněvadž bod $Q^{(2)}$ anebo směr $q^{(2)}$ není v přímce $\{A_1A_2\}$, je naše tvrzení indukcí dokázáno.

Věta 1,7. *Budiž $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník s vrcholovými nadrovinami* (1,11). *Budiž m přirozené číslo, $2 \leqq m \leqq n - 1$.*

Existují-li body $Q^{(m+1)}$ a $Q^{(m)}$, jsou vždy různé a bod $Q^{(m)}$ je průmětem bodu $Q^{(m+1)}$ z bodu A_{m+2} na podprostor $\{A_1A_2 \dots A_{m+1}\}$.

Existují-li bod $Q^{(m+1)}$ a směr $q^{(m)}$, jsou přímka $\{A_{m+2}Q^{(m+1)}\}$ a směr $q^{(m)}$ rovnoběžné.

Existuje-li směr $q^{(m+1)}$, existuje bod $Q^{(m)}$ a přímka $\{A_{m+2}Q^{(m)}\}$ a směr $q^{(m+1)}$ jsou rovnoběžné.

Důkaz této věty plyne snadno z předcházejících vět.

Věta 1,8. *Nechť platí předpoklady věty* 1,7.

Nechť existují body $Q^{(m+1)}$ a $Q^{(m-1)}$. Pak jsou vždy různé a přímka $\{Q^{(m+1)}Q^{(m-1)}\}$ jde bodem B_{m+1}, resp. rovnoběžně s přímkou $\{A_{m+1}A_{m+2}\}$ podle toho, zdali $\gamma_{m+1} = \beta_{m+1}$ nebo $\gamma_{m+1} = {}'\beta_{m+1}$.

Nechť existuje směr $q^{(m+1)}$.

Jestliže $\gamma_{m+1} = \beta_{m+1}$, existuje bod $Q^{(m-1)}$ a přímka $\{B_{m+1}Q^{(m-1)}\}$ a směr $q^{(m+1)}$ jsou rovnoběžné.

Jestliže $\gamma_{m+1} = {}'\beta_{m+1}$, existuje směr $q^{(m-1)}$.

Důkaz. Abychom dokázali první tvrzení, stačí uvážit, že podprostory

$$\gamma_1^{(m+1)}, \gamma_2^{(m+1)}, \ldots, \gamma_{m-1}^{(m+1)}$$

mají společnou právě jen rovinu $\{Q^{(m-1)}A_{m+1}A_{m+2}\}$, kterou podprostor $\gamma_{m+1}^{(m+1)}$ protíná v přímce $\{Q^{(m+1)}Q^{(m-1)}\}$, obsahující i bod B_{m+1}, resp. rovnoběžnou s přímkou $\{A_{m+1}A_{m+2}\}$.

Druhé tvrzení dokážeme takto: Přímka p jdoucí bodem B_{m+1} rovnoběžně se směrem $q^{(m+1)}$ je obsažena v podprostoru $\gamma_{m+1}^{(m+1)}$, který obsahuje i podprostor $\{A_1A_2 \ldots A_m\}$. Tento podprostor protíná podle věty 1,6 přímku p v bodě, který je společným bodem podprostorů

$$\gamma_1^{(m-1)}, \gamma_2^{(m-1)}, \ldots, \gamma_{m-1}^{(m-1)},$$

t. j. bodem $Q^{(m-1)}$.

Zbývá dokázat třetí tvrzení. Budiž $\mathbf{E}_2$ rovina, jdoucí přímkou $\{A_{m+1}A_{m+2}\}$ rovnoběžně se směrem $q^{(m+1)}$. Rovina $\mathbf{E}_2$ je rovnoběžná s podprostorem $\gamma_{m+1}^{(m+1)}$, ale není v něm obsažena. Dále zřejmě není rovnoběžná s podprostorem $\{A_1A_2 \ldots \ldots A_m\}$, obsaženým v $\gamma_{m+1}^{(m+1)}$. Existuje tedy právě jeden směr, který obsahují podprostory $\{A_1A_2 \ldots A_m\}$ a $\mathbf{E}_2$. Rovinu $\mathbf{E}_2$ obsahují podprostory

$$\gamma_1^{(m+1)}, \gamma_2^{(m+1)}, \ldots, \gamma_{m-1}^{(m+1)},$$

jež tedy obsahují směr, rovnoběžný s podprostorem $\{A_1A_2 \ldots A_m\}$. Z toho však okamžitě plyne, že podprostory

$$\gamma_1^{(m-1)}, \gamma_2^{(m-1)}, \ldots, \gamma_{m-1}^{(m-1)}$$

obsahují zmíněný směr.

Věta 1,9. *Budiž $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník s vrcholovými nadrovinami*

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\,. \tag{1,11}$$

Pro každé $m = 2, 3, \ldots, n$ je nadrovina $\gamma^{(m)}$ podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{m+1}\}$ jednoznačně určena a je vrcholovou nadrovinou mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{m+1}$ normálního v podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{m+1}\}$.

Důkaz je v důsledku věty 1,6 zcela snadný.

II.

V tomto oddílu je věta 2,1 zobecněním věty Menelaovy a věta 2,3 zobecněním věty Cevovy.

Úmluva 2,1. Všude v dalším budeme předpokládat, že přímky všech stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2\dots A_{n+1}$ jsou orientovány a zavedeme si ještě toto označování:

$$k_i = (B_i; A_i, A_{i+1}) = \frac{\overrightarrow{B_iA_i}}{\overrightarrow{B_iA_{i+1}}},$$

$i = 1, 2, \dots, n+1$; $A_{n+2} = A_1$.

Dále budeme říkat, že dvě rovnoběžné přímky jsou orientovány souhlasně (nesouhlasně), je-li možno (nelze-li) je translací ztotožnit i co do smyslu.

Věta 2,1. *Budiž $A_1A_2\dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník. Leží-li body*

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_r}, \quad 2 \leqq r \leqq n+1, \tag{1,8}$$

v nadrovině, která je při $r \leqq n$ rovnoběžná s přímkami jeho stran

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s}, \quad r + s = n + 1, \tag{1,9}$$

je

$$k_{i_1}k_{i_2}\dots k_{i_r} = 1. \tag{2,1}$$

Důkaz. Podotkněme předně, že relace $2 \leqq r$ je nutným důsledkem věty 1,2. Nadrovinu zmíněnou ve větě 2,1 označme β.

Veďme každým vrcholem A_i $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ normálního mnohoúhelníka $A_1A_2\dots A_{n+1}$ přímku p_i rovnoběžnou s libovolně zvolenou přímkou nerovnoběžnou s nadrovinou β, a označme P_i průsečík přímky p_i s nadrovinou β. Orientujme libovolně $n+1$ přímek p_i $(i = 1, 2, \dots, n+1)$. Nechť $\varepsilon_i = +1$ resp. $\varepsilon_i = -1$ $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ podle toho, jsou-li přímky p_i a p_{i+1} orientovány souhlasně resp. nesouhlasně; $p_{n+2} = p_1$. Přímka $\{P_iP_{i+1}\}$ $(i = 1, 2, \dots, n+1$; $P_{n+2} = P_1)$ protne přímku $\{A_iA_{i+1}\}$ $(A_{n+2} = A_1)$ v bodě B_i, resp. je s ní rovnoběžná, takže je patrná správnost relací

$$\frac{\overrightarrow{A_{i_l}B_{i_l}}}{\overrightarrow{A_{i_l+1}B_{i_l}}} = \varepsilon_{i_l}\frac{\overrightarrow{A_{i_l}P_{i_l}}}{\overrightarrow{A_{i_l+1}P_{i_l+1}}}, \quad l = 1, 2, \dots, r,$$

a při $r \leqq n$

$$\overrightarrow{A_{j_l}P_{j_l}} = \varepsilon_{j_l}\overrightarrow{A_{j_l+1}P_{j_l+1}}, \quad l = 1, 2, \dots, s; \ s = n + 1 - r.$$

Z nich snadno plyne

$$k_{i_1}k_{i_2}\dots k_{i_r} = \prod_{i=1}^{n+1}\varepsilon_i. \tag{2,2}$$

Avšak znaménko součinu nalevo v rovnici (2,2) je nezávislé na volbě orientací přímek $p_i (i = 1, 2, \dots, n+1)$. Orientujeme-li je třeba všechny souhlasně, je

$$\prod_{i=1}^{n+1}\varepsilon_i = +1$$

a z (2,2) plyne (2,1).

Věta 2,2. *Budiž $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník. Jestliže pro r bodů*

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_r}, \quad 2 \leqq r \leqq n+1, \tag{1,8}$$

platí relace (2,1), existuje právě jedna nadrovina, která obsahuje body (1,8) a při $r \leqq n$ je rovnoběžná s přímkami stran

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s}, \quad s + r = n + 1, \tag{1,9}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.

Důkaz. Podle věty 1,2 existuje taková nadrovina nejvýše jedna. Můžeme předpokládat $i_1 = 1$.

Nadrovinu, určenou jednoznačně body

$$B_{i_2}, B_{i_3}, \dots, B_{i_r}, \quad 2 \leqq r \leqq n+1,$$

a při $r \leqq n$ rovnoběžnou s přímkami stran (1,9), označme β. Kdyby nadrovina β byla rovnoběžná s přímkou strany a_1, bylo by podle věty 2,1

$$k_{i_2}k_{i_3} \dots k_{i_r} = 1,$$

a tedy srovnáním s relací (2,1) bychom dostali $(B_1; A_1, A_2) = 1$, což není možné. Existuje tedy průsečík nadroviny β s přímkou $\{A_1A_2\}$; označme jej B_1^*. Zřejmě je různý od vrcholů A_1, A_2. Podle věty 2,1 je

$$(B_1^*; A_1, A_2)\, k_{i_2}k_{i_3} \dots k_{i_r} = 1,$$

z čehož srovnáním s (2,1) plyne

$$(B_1^*; A_1, A_2) = (B_1; A_1, A_2),$$

t. j. $B_1^* = B_1$, c. b. d.

Věta 2,3. *Budiž $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník. Nechť jeho vrcholové nadroviny*

$$\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}, \quad 1 \leqq r \leqq n+1,$$

a při $r \leqq n$ ještě i vrcholové nadroviny

$$'\beta_{j_1}, '\beta_{j_2}, \dots, '\beta_{j_s}, \quad r + s = n + 1,$$

mají všechny společný bod anebo směr.

Pak platí:

$$k_{i_1}k_{i_2} \dots k_{i_r} = (-1)^{n+1}. \tag{2,3}$$

Důkaz. Pro trojúhelník je věta správná.

Označme symbolem $\alpha^{(m+1)}$ $(m = 2, 3, \dots, n-1)$ nadrovinu podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{m+2}\}$, jednoznačně určenou bodem A_{m+2} a nadrovinou $\gamma^{(m)}$ podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{m+1}\}$.

Budiž v dalším h přirozené číslo, $2 \leqq h \leqq n-1$.

Uvažujme nyní tyto tři nadroviny

$$\alpha^{(h+1)}, \gamma_{h+1}^{(h+1)}, \gamma^{(h+1)} \tag{2,4}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$ a rovinu $\{A_1A_{h+1}A_{h+2}\}$. Každá z nadrovin (2,4) má s rovinou $\{A_1A_{h+1}A_{h+2}\}$ společnou právě jen přímku, jak se snadno zjistí. Každá z těchto přímek jde podle věty 1,9 právě jedním vrcholem trojúhelníka $A_1A_{h+1}A_{h+2}$. Avšak nadroviny (2,4) mají společný podprostor $\mathbf{E}_{h-1}$ dimense $h - 1$, který jde podprostorem $\{A_2A_3 \dots A_h\}$ a bodem $Q^{(h+1)}$, resp. rovnoběžně se směrem $q^{(h+1)}$, podle toho, existuje-li bod $Q^{(h+1)}$ anebo směr $q^{(h+1)}$; plyne to lehce z věty 1,7. Je pak zřejmé, že zmíněný průsečný podprostor $\mathbf{E}_{h-1}$ buďto rovinu $\{A_1A_{h+1}A_{h+2}\}$ protíná právě v jednom bodě, anebo existuje právě jeden směr obsažený v podprostoru $\mathbf{E}_{h-1}$ a rovině $\{A_1A_{h+1}A_{h+2}\}$. Z toho ihned plyne, že průsečné přímky nadrovin (2,4) s rovinou $\{A_1A_{h+1}A_{h+2}\}$ mají společný bod anebo jsou rovnoběžné.

Užijeme nyní na ně a na trojúhelník $A_1A_{h+1}A_{h+2}$ věty Cevovy, když jsme ještě libovolně orientovali přímky $\{A_1A_3\}, \{A_1A_4\}, \dots, \{A_1A_n\}$. Existuje-li průsečík $B^{(h)}$, platí vždy právě jedna z relací:

$$\left.\begin{aligned} (B^{(h)}; A_1, A_{h+1})(B_{h+1}; A_{h+1}, A_{h+2})(B^{(h+1)}; A_{h+2}, A_1) &= -1\,, \\ (B^{(h)}; A_1, A_{h+1})(B_{h+1}; A_{h+1}, A_{h+2}) &= -1\,, \\ (B^{(h)}; A_1, A_{h+1})(B^{(h+1)}; A_{h+2}, A_1) &= -1\,. \end{aligned}\right\} \tag{2,5}$$

Neexistuje-li průsečík $B^{(h)}$, platí vždy právě jeden z těchto vztahů:

$$\left.\begin{aligned} (B_{h+1}; A_{h+1}, A_{h+2})(B^{(h+1)}; A_{h+2}, A_1) &= -1\,, \\ (B_{h+1}; A_{h+1}, A_{h+2}) &= -1\,, \\ (B^{(h+1)}; A_{h+2}, A_1) &= -1\,. \end{aligned}\right\} \tag{2,6}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $i_1 = 1$. Buďtež

$$i_1, i_2, \dots, i_{r_h}\,, \quad 1 \leqq r_h \leqq h\,,$$

všecka ta z čísel (1,5), která jsou nejvýše rovna h.

Platí-li nyní v mnohoúhelníku $A_1A_2 \dots A_{h+1}$ normálním v podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+1}\}$ pro jeho vrcholové nadroviny

$$\gamma_1^{(h)}, \gamma_2^{(h)}, \dots, \gamma_h^{(h)}, \gamma^{(h)}$$

relace

$$k_{i_1}k_{i_2} \dots k_{i_{r_h}} (B^{(h)}; A_{h+1}, A_1) = (-1)^{h+1}\,, \tag{2,7}$$

existuje-li průsečík $B^{(h)}$, a relace

$$k_{i_1}k_{i_2} \dots k_{i_{r_h}} = (-1)^{h+1}\,, \tag{2,8}$$

neexistuje-li průsečík $B^{(h)}$, pak z (2,5) a (2,7) a stejně i z (2,6) a (2,8) plyne, že v mnohoúhelníku $A_1A_2 \dots A_{h+2}$ normálním v podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{h+2}\}$ platí pro jeho vrcholové nadroviny

$$\gamma_1^{(h+1)}, \gamma_2^{(h+1)}, \dots, \gamma_{h+1}^{(h+1)}, \gamma^{(h+1)}$$

relace

$$k_{i_1}k_{i_2} \dots k_{i_{r_{h+1}}}(B^{(h+1)}; A_{h+2}, A_1) = (-1)^{h+2}$$

anebo

$$k_{i_1}k_{i_2} \dots k_{i_{r_{h+1}}} = (-1)^{h+2}$$

podle toho, zdali průsečík $B^{(h+1)}$ existuje anebo ne.

Tím je naše věta indukcí dokázána, uvážíme-li ještě, že $B^{(n)} = B_{n+1}$ a $\gamma^{(n)} = \gamma_{n+1}$.

Věta 2,4. *Jestliže pro $r \geqq 1$ bodů*

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_r}, \quad 1 \leqq r \leqq n+1\,, \tag{1,8}$$

na přímkách stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ platí relace (2,3), *pak existuje právě jeden bod nebo právě jeden směr, který obsahují jeho vrcholové nadroviny*

$$\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}, \quad 1 \leqq r \leqq n+1\,, \tag{2,9}$$

promítající z jeho vrcholových podprostorů body (1,8), *a při $r \leqq n$ ještě jeho vrcholové nadroviny*

$$'\beta_{j_1}, '\beta_{j_2}, \dots, '\beta_{j_s}, \quad r + s = n + 1\,. \tag{2,10}$$

Důkaz. Podle věty 1,4 existuje takový bod anebo směr nejvýš jeden. Položme opět $i_1 = 1$. Bod resp. směr, který obsahují vrcholové nadroviny (2,9) a při $r \leqq n$ i (2,10) s výjimkou nadroviny $\beta_1 = \beta_{i_1}$, označme B resp. b. Podle věty 1,4 existuje právě jeden bod B anebo právě jeden směr b. Uvažujme nadrovinu β, určenou (podle věty 1,6 jednoznačně) vrcholovým prostorem $\{A_3A_4 \dots A_{n+1}\}$ a bodem B, resp. podmínkou, aby obsahovala směr b. Tato nadrovina (opět podle věty 1,6) neobsahuje přímku $\{A_1A_2\}$ a je vrcholovou nadrovinou normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.

Dále už zjistíme podobně jako v důkazu věty 2,2, užívajíce ovšem věty 2,3 místo věty 2,1, že bod $B_1 = B_{i_1}$ leží v nadrovině β, t. j. $\beta = \beta_1 = \beta_{i_1}$, čímž bude důkaz proveden.

Poznámka 3. Uvedenými větami není zodpověděna otázka, mají-li i vrcholové nadroviny

$$'\beta_1, '\beta_2, \dots, '\beta_{n+1} \tag{2,11}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ společný bod anebo jsou-li rovnoběžné s touž přímkou. Nadrovinami (2,11) se budeme později zabývat zvlášť; uvidíme, že odpověď na zmíněnou otázku je podstatně různá podle parity dimense n.

III.

V této části vyšetříme nutnou a postačující podmínku, aby n vrcholových nadrovin

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ bylo rovnoběžných s touž přímkou. Tuto podmínku vyjadřují věty 3,7 a 3,8; věty 3,1 až 3,6 jsou pomocné.

Věta 3,1. *Nechť pro vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ existují body

$$Q^{(n-2)}, Q^{(n-4)}, \ldots, Q^{(0)} .$$

Budiž $v = n - 2m$, kde $m = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ při n sudém a $m = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2} - 1$ při n lichém.

Pro každé m existuje jediný podprostor dimense $\left[\frac{v+1}{2}\right] + 1$, který obsahuje body

$$A_{v+1}, B_v, Q^{(v-2)}, Q^{(v-4)}, \ldots, Q^{(0)} .$$

Důkaz. V důsledku věty 1,8 stačí ukázat, že bod A_{v+1} neleží v podprostoru $\{B_vQ^{(v-2)}Q^{(v-4)} \ldots Q^{(0)}\}$. Ale to je zřejmé, neboť v opačném případě by nadrovina $\beta_v^{(v)}$ podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{v+1}\}$, která obsahuje podprostor $\{B_vQ^{(v-2)} Q^{(v-4)} \ldots Q^{(0)}\}$, obsahovala body $A_{v+1}, A_v, \ldots, A_1$. Ale to je nemožné podle věty 1,1.

Věta 3,2. *Nechť vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ mají společný bod Q. Nechť při $n > 3$ existují body

$$Q^{(n-2)}, Q^{(n-4)}, \ldots, Q^{(0)} .$$

Orientujme ještě libovolně přímku $\{QB_n\}$.

Pak platí:

$$(B_n; Q^{(n-2)}, Q) = \frac{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^n k_1k_2 \ldots k_n}{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{n-2} k_1k_2 \ldots k_{n-2}} . \tag{3,2}$$

Důkaz. Orientujme nejprve libovolně přímky

$$\{A_{n-1}A_1\}, \{A_{n-3}A_1\}, \ldots$$

a přímky

$$\{Q^{(n-2)}Q^{(n-4)}\}, \{Q^{(n-4)}Q^{(n-6)}\}, \ldots ,$$

pokud nejsou již nějak orientovány v důsledku úmluvy 2,1.

Z vět odd. II nalezneme snadno, že při n sudém

$$(B_2; Q^{(0)}, Q^{(2)}) = 1 - k_1 + k_1 k_2 \tag{3,3}$$

a při n lichém

$$(B_3; Q^{(1)}, Q^{(3)}) = \frac{1 - k_1 + k_1 k_2 - k_1 k_2 k_3}{1 - k_1}. \tag{3,4}$$

Nechť opět $v = n - 2m$, kde nyní při n sudém, $n > 2$,

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 2,$$

a při n lichém, $n > 3$,

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2} - 2.$$

Zvolme nějaké v.

Podle věty 3,1 je mnohoúhelník $A_{v+1} B_v Q^{(v-2)} Q^{(v-4)} \ldots Q^{(0)}$ normální v podprostoru

$$\{A_{v+1} B_v Q^{(v-2)} Q^{(v-4)} \ldots Q^{(0)}\}. \tag{3,5}$$

Předpokládejme, že existuje bod $B^{(v)}$. Podle věty 1,8 a věty 1,2, aplikované na uvedený mnohoúhelník, má tedy při n sudém podprostor

$$\{A_v Q^{(v)} B_{v-2} B_{v-4} \ldots B_2 B^{(v)}\} \tag{3,6}$$

a při n lichém podprostor

$$\{A_v Q^{(v)} B_{v-2} B_{v-4} \ldots B_3 A_2 B^{(v)}\} \tag{3,7}$$

dimense nejméně $\left[\frac{v+1}{2}\right]$. Avšak podprostor (3,6) resp. (3,7) je obsažen v nadrovinách

$$\gamma^{(v)}, \beta_{v-2}^{(v)}, \beta_{v-4}^{(v)}, \ldots, \beta_2^{(v)}$$

resp.

$$\gamma^{(v)}, \beta_{v-2}^{(v)}, \beta_{v-4}^{(v)}, \ldots, \beta_3^{(v)}$$

podprostoru $\{A_1 A_2 \ldots A_{v+1}\}$, a tedy je dimense právě $\left[\frac{v+1}{2}\right]$, takže je nadrovinou v podprostoru (3,5).

Aplikujeme-li nyní na mnohoúhelník $A_{v+1} B_v Q^{(v-2)} Q^{(v-4)} \ldots Q^{(0)}$ normální v podprostoru (3,5) a zmíněnou nadrovinu tohoto podprostoru větu 2,1, dostaneme

$$S^{(v)} . (Q^{(v)}; Q^{(v-2)}, B_v) . (A_v; B_v, A_{v+1}) . (B^{(v)}; A_{v+1}, Q^{(0)}) = 1,$$

kde při n sudém

$$S^{(v)} = \prod_{l=1}^{\frac{1}{2}v-1} (B_{2l}; Q^{(2l-2)}, Q^{(2l)})$$

a při n lichém

$$S^{(v)} = (A_2; Q^{(0)}, Q^{(1)}) \prod_{l=1}^{\frac{v-1}{2}-1} (B_{2l+1}; Q^{(2l-1)}, Q^{(2l+1)}) .$$

Podle věty 2,3, aplikované na mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_{v+1}$ normální v podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{v+1}\}$, je

$$k_1k_2 \dots k_v(B^{(v)}; A_{v+1}, A_1) = (-1)^{v+1} ,$$

a tedy

$$(B_v; Q^{(v-2)}, Q^{(v)}) = 1 - \frac{(-1)^{v+1} k_1k_2 \dots k_{v-1}(k_v - 1)}{S^{(v)}} . \tag{3,8}$$

V případě, že bod $B^{(v)}$ neexistuje, t. j. že nadrovina $\gamma^{(v)}$ podprostoru $\{A_1A_2 \dots \dots A_{v+1}\}$ je rovnoběžná s přímkou $\{A_1A_{v+1}\}$, dostaneme po malé modifikaci předcházející úvahy opět relaci (3,8).

Předpokládejme nyní, že platí

$$(B_h; Q^{(h-2)}, Q^{(h)}) = \frac{1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^h k_1k_2 \dots k_h}{1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{h-2} k_1k_2 \dots k_{h-2}} ,$$

$$h = v - 2, v - 4, \dots, h \geqq 4 .$$

V důsledku (3,3) a (3,4) je pak

$$S^{(v)} = 1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{v-2} k_1k_2 \dots k_{v-2} ,$$

a tedy podle (3,8)

$$(B_v; Q^{(v-2)}, Q^{(v)}) = \frac{1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^v k_1k_2 \dots k_v}{1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{v-2} k_1k_2 \dots k_{v-2}} .$$

Tím je věta indukcí dokázána.

Věta 3,3. *Nechť body*

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

leží právě v jedné nadrovině a budiž p přímka nerovnoběžná s touto nadrovinou. Veďme bodem P_1 resp. P_n přímku p_1 resp. p_n rovnoběžnou s přímkou p. Budiž δ libovolná nadrovina, která nejde žádným z bodů $P_1, P_2, \dots, P_n$, protíná všecky přímky

$$\{P_2P_3\}, \{P_3P_4\}, \dots, \{P_{n-1}, P_n\}, p_n, p_1 \tag{3,9}$$

postupně v bodech

$$R_2, R_3, \dots, R_{n-1}, R_n, R_{n+1}$$

a přímku $\{P_1P_2\}$ protíná buďto v bodě R_1, anebo je s ní rovnoběžná. Orientujme libovolně všecky přímky (3,9) i přímku $\{P_1P_2\}$ a položme $\varepsilon = 1$ resp. $\varepsilon = -1$ při souhlasné resp. nesouhlasné orientaci přímek p_1, p_n.

Pak platí:

$$\frac{\overrightarrow{P_nR_n}}{\overrightarrow{P_1R_{n+1}}} \cdot \prod_{l=1}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = \varepsilon \tag{3,10}$$

resp.

$$\frac{\overrightarrow{P_nR_n}}{\overrightarrow{P_1R_{n+1}}} \cdot \prod_{l=2}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = \varepsilon\,, \tag{3,10'}$$

podle toho, zdali nadrovina δ přímku $\{P_1P_2\}$ protíná anebo nikoliv.

Důkaz. Nechť nadrovina δ je rovnoběžná s přímkou $\{P_1P_n\}$. Podle zobecněné věty Menelaovy 2,1, aplikované na mnohoúhelník $P_1P_2 \ldots P_n$ normální v podprostoru $\{P_1P_2 \ldots P_n\}$ platí:

$$\prod_{l=1}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = 1$$

resp.

$$\prod_{l=2}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = 1\,.$$

Avšak zřejmě

$$\frac{\overrightarrow{P_nR_n}}{\overrightarrow{P_1R_{n+1}}} = \varepsilon\,,$$

takže platí relace (3,10) resp. (3,10′).

Nechť za druhé nadrovina δ protíná přímku $\{P_1P_n\}$, již jsme nějak orientovali, v bodě R, který je ovšem různý od bodů P_1, P_n. Podle věty 2,1 je

$$(R; P_n, P_1) \cdot \prod_{l=1}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = 1$$

resp.

$$(R; P_n, P_1) \cdot \prod_{l=2}^{n-1} (R_l; P_l, P_{l+1}) = 1\,.$$

Dále snadno zjistíme, že

$$(R; P_n, P_1) = \varepsilon\,\frac{\overrightarrow{P_nR_n}}{\overrightarrow{P_1R_{n+1}}}\,.$$

Relace (3,10) resp. (3,10′) platí tedy i v tomto případě.

Věta 3,4. *Nechť vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, {}'\beta_n$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ mají společný bod Q. Nechť při $n > 3$ existují body

$$Q^{(n-2)}, Q^{(n-4)}, \ldots, Q^{(0)}\,.$$

Orientujme libovolně přímku $\{QQ^{(n-2)}\}$ a položme $\varepsilon = 1$ resp. $\varepsilon = -1$ podle toho, jsou-li (rovnoběžné) přímky

$$\{A_n, A_{n+1}\}, \{QQ^{(n-2)}\} \tag{3,11}$$

orientovány souhlasně nebo nesouhlasně.

Pak platí:

$$\frac{\overrightarrow{A_{n+1}A_n}}{\overrightarrow{Q^{(n-2)}Q}} = \varepsilon(-1)^{n+1}\frac{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{n-2}k_1k_2\ldots k_{n-2}}{k_1k_2\ldots k_{n-1}}. \tag{3,12}$$

Důkaz. Předně body Q a $Q^{(n-2)}$ jsou různé a přímky (3,11) rovnoběžné podle věty 1,8.

Podle věty 3,1 je mnohoúhelník

$$A_{n+1}Q^{(n-2)}Q^{(n-4)}\ldots Q^{(0)} \tag{3,13}$$

normální v podprostoru

$$\{A_{n+1}Q^{(n-2)}Q^{(n-4)}\ldots Q^{(0)}\} \tag{3,14}$$

dimense $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Přímka $\{A_nA_{n+1}\}$ zřejmě není v tomto prostoru obsažena.

Označme **E** podprostor dimense $\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$, určený podprostorem (3,14) a přímkou $\{A_nA_{n+1}\}$.

Předpokládejme nejprve, že přímka $\{A_1A_{n+1}\}$ protíná vrcholovou nadrovinu $\gamma^{(n)} = \{QA_2A_3\ldots A_n\} = \beta_{n+1}$ v bodě B_{n+1}. Podle věty 1,8 a podle věty 1,2, aplikované na mnohoúhelník (3,13) normální v podprostoru (3,14), leží při n sudém body

$$A_n, Q, B_{n-2}, B_{n-4}, \ldots, B_2, B_{n+1} \tag{3,15}$$

a při n lichém body

$$A_n, Q, B_{n-2}, B_{n-4}, \ldots, B_3, A_2, B_{n+1} \tag{3,16}$$

v podprostoru dimense nejméně $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Avšak při n sudém leží body (3,15) v nadrovinách

$$\beta_{n+1}, \beta_{n-2}, \beta_{n-4}, \ldots, \beta_2$$

a při n lichém body (3,16) v nadrovinách

$$\beta_{n+1}, \beta_{n-2}, \beta_{n-4}, \ldots, \beta_3,$$

takže body (3,15) resp. (3,16) leží v nějaké nadrovině δ podprostoru **E**.

Můžeme tedy na útvar složený v podprostoru **E** z přímek stran mnohoúhelníka (3,13) s výjimkou přímky $\{A_{n+1}Q^{(n-2)}\}$ a přímek $\{A_nA_{n+1}\}$ a $\{Q^{(n-2)}Q\}$ a jeho zmíněnou nadrovinu δ aplikovat větu 3,3; tak dostaneme

$$(B_{n+1}; A_{n+1}, A_1) \,.\, S^{(n)} \,.\, \frac{\overrightarrow{Q^{(n-2)}Q}}{\overrightarrow{A_{n+1}A_n}} = \varepsilon. \tag{3,17}$$

Avšak podle věty 2,3 je

$$k_1k_2 \dots k_{n-1}k_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

a podle věty 3,2

$$S^{(\overset{*}{n})} = 1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{n-2}\, k_1k_2 \dots k_{n-2}\,.$$

Z toho a (3,17) plyne pak ihned relace (3,12).

Nechť za druhé přímka $\{A_1A_{n+1}\}$ je rovnoběžná s vrcholovou nadrovinou $\gamma^{(n)} = {}'\beta_{n+1}$. Pak jednoduchou modifikací výše provedené úvahy dospějeme pomocí věty 3,3 k relaci

$$S^{(n)} \,.\, \frac{\overrightarrow{Q^{(n-2)}Q}}{\overrightarrow{A_{n+1}A_n}} = \varepsilon\,,$$

při čemž nyní

$$k_1k_2 \dots k_{n-1} = (-1)^{n+1}\,,$$

takže opět platí (3,12).

Věta 3,5. *Budiž $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník. Nechť jeho vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \tag{3,1}$$

obsahují všecky směr q. Nechť při $n \geqq 5$ existují body

$$Q^{(n-3)}, Q^{(n-5)}, \dots, Q^{(0)}\,.$$

Pak platí:

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^n\, k_1k_2 \dots k_n = 0\,. \tag{3,18}$$

Důkaz. Pro $n = 2$ se věta dokáže snadno. Nechť tedy $n \geqq 3$.

Vrcholy

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, A_{n+1}$$

označme po řadě též takto:

$$\overset{*}{A}_1, \overset{*}{A}_2, \dots, \overset{*}{A}_{\overset{*}{n}-1}, \overset{*}{A}_{\overset{*}{n}}, \overset{*}{A}_{\overset{*}{n}+1}\,,$$

takže ovšem

$$\overset{*}{n} = n - 1\,,$$

a uvažujme mnohoúhelník

$$\overset{*}{A}_1\overset{*}{A}_2 \dots \overset{*}{A}_{\overset{*}{n}+1} \tag{3,19}$$

normální v podprostoru

$$\{\overset{*}{A}_1\overset{*}{A}_2 \dots \overset{*}{A}_{\overset{*}{n}+1}\}\,. \tag{3,20}$$

Pro tento mnohoúhelník budeme v dalším užívat označení z úmluv 1,3, 1,4 a 1,5 s připojenými hvězdičkami, jako kdyby byl normálním mnohoúhelníkem.

Vrcholové nadroviny

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-2}, \gamma_{n+1}\,, \tag{3,21}$$

kde nadrovina γ_{n+1} jde podprostorem $\{A_2A_3 \ldots A_n\}$ rovnoběžně se směrem q, mají společnou přímku p, která jde bodem A_n rovnoběžně se směrem q.

Přímka p protíná podle věty 1,7 podprostor (3,20) v bodě, který označíme Y a který je společným bodem těch vrcholových nadrovin mnohoúhelníka (3,19) normálního v podprostoru (3,20), které vzniknou průnikem nadrovin (3,21) s podprostorem (3,20). Užijeme-li — za výše uvedené konvence — úmluvy 1,4, můžeme tyto vrcholové nadroviny mnohoúhelníka (3,19) normálního v podprostoru (3,20) označit takto:

$$\overset{*}{\beta}_1, \overset{*}{\beta}_2, \ldots, \overset{*}{\beta}^{\bullet}_{n-1}, \overset{*}{\gamma}^{\bullet}_{n+1} .$$

Označme $\overset{*}{\gamma}^{\bullet}_n$ nadrovinu podprostoru (3,20), která je podle věty 1,6 jednoznačně určena podprostorem $\{\overset{*}{A}_1\overset{*}{A}_2 \ldots \overset{*}{A}^{\bullet}_{n-1}\}$ a bodem Y a která je vrcholovou nadrovinou mnohoúhelníka (3,19). V označení z úmluvy 1,5 můžeme tedy vzhledem k výše provedené konvenci psát

$$Y = \overset{*}{Q}^{(\dot{n})} = \overset{*}{Q} ;$$

dále se snadno zjistí, že

$$Q^{(n-3)} = \overset{*}{Q}^{(\dot{n}-2)},\ Q^{(n-5)} = \overset{*}{Q}^{(\dot{n}-4)},\ \ldots,\ Q^{(0)} = \overset{*}{Q}^{(0)} . \tag{3,22}$$

Orientujme ještě libovolně přímku $\{\overset{*}{A}^{\bullet}_n\overset{*}{A}^{\bullet}_{n+1}\}$. Budeme v dalším rozlišovat dva případy podle toho, zdali $\overset{*}{\gamma}^{\bullet}_n = \overset{*}{\beta}^{\bullet}_n$ anebo $\overset{*}{\gamma}^{\bullet}_n = '\overset{*}{\beta}^{\bullet}_n$.

Nechť předně vrcholová nadrovina $\overset{*}{\gamma}^{\bullet}_n = \overset{*}{\beta}^{\bullet}_n$ mnohoúhelníka (3,19) protíná přímku $\{\overset{*}{A}^{\bullet}_n\overset{*}{A}^{\bullet}_{n+1}\}$ v bodě $\overset{*}{B}^{\bullet}_n$. Podle věty 2,3, aplikované jednak na mnohoúhelník (3,19) normální v podprostoru (3,20), jednak na normální mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, dostaneme snadno

$$(\overset{*}{B}^{\bullet}_n;\ \overset{*}{A}^{\bullet}_n, \overset{*}{A}^{\bullet}_{n+1}) = -\ k_{n-1}k_n , \tag{3,23}$$

takže

$$1 + k_{n-1}k_n \neq 0 . \tag{3,24}$$

Podle věty 1,8 jsou body $\overset{*}{B}^{\bullet}_n$, $\overset{*}{Q}$ a $\overset{*}{Q}^{(\dot{n}-2)}$ různé a leží na přímce. Přímka $\overset{*}{p}$ vedená bodem $\overset{*}{Q}^{(\dot{n}-2)}$ rovnoběžně se směrem q (je rovnoběžná s přímkou $p = \{A_n\overset{*}{Q}\}$, a tedy) protne rovinu $\{A_{n-1}A_nA_{n+1}\}$ v bodě X přímky $\{A_n\overset{*}{B}^{\bullet}_n\}$ různém od bodů A_n, $\overset{*}{B}^{\bullet}_n$. Přímku $\overset{*}{p}$ obsahují zřejmě vrcholové nadroviny β_{n-1}, β_n normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, a tedy jejich průsečné přímky $\{B_{n-1}A_{n+1}\}$ a $\{B_nA_{n-1}\}$ s rovinou $\{A_{n-1}A_nA_{n+1}\}$ jdou bodem X.

Orientujme libovolně přímky $\{\overset{*}{B}^{\bullet}_n\overset{*}{Q}\}$ a $\{\overset{*}{B}^{\bullet}_nA_n\}$. Zřejmě

$$(\overset{*}{B}^{\bullet}_n;\ \overset{*}{Q}^{(\dot{n}-2)}, \overset{*}{Q}) = (\overset{*}{B}^{\bullet}_n;\ X, A_n) . \tag{3,25}$$

Vzhledem k (3,22) můžeme na mnohoúhelník (3,19) normální v podprostoru (3,20) aplikovat větu 3,2, a tak dostaneme

$$(\overset{*}{B}{}^{\bullet}_{n};\ \overset{*\bullet}{Q}{}^{(n-2)},\ \overset{*}{Q}) =$$

$$= \frac{1}{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{n-3}\,k_1k_2\ldots k_{n-3}}\,. \tag{3,26}$$

$$.\{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{n-2}.k_1k_2\ldots k_{n-2} +$$

$$+ (-1)^{n-1}\,k_1k_2\ldots k_{n-2}\,(\overset{*}{B}{}^{\bullet}_{n};\ \overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n};\ \overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1})\}\,.$$

V rovině $\{A_{n-1}A_nA_{n+1}\}$ snadno zjistíme, že

$$(\overset{*}{B}{}^{\bullet}_{n};\ X,\ A_n) = \frac{k_{n-1}}{k_{n-1} - (1 + k_{n-1}k_n)}\,.$$

Srovnáním s (3,26) dostaneme vzhledem k (3,23) až (3,25) relaci (3,18).

Nechť za druhé vrcholová nadrovina $\overset{*}{\gamma}{}^{\bullet}_{n} = {}'\overset{*}{\beta}{}^{\bullet}_{n}$ mnohoúhelníka (3,19) normálního v podprostoru (3,20) je s přímkou $\{\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n}\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1}\}$ rovnoběžná.

Podle věty 1,8 jsou body $\overset{*}{Q}$ a $\overset{*\bullet}{Q}{}^{(n-2)}$ různé a přímky $\{\overset{*\bullet}{Q}{}^{(n-2)}\overset{*}{Q}\}$ a $\{\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n}\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1}\} = \{A_{n-1}A_{n+1}\}$ rovnoběžné. Orientujme libovolně tyto dvě přímky a položme $\overset{*}{\varepsilon} = 1$ resp. $\overset{*}{\varepsilon} = -1$ při jejich souhlasné resp. nesouhlasné orientaci. Je zřejmé, že přímka $\overset{*}{p}$ protíná i nyní rovinu $\{A_{n-1}A_nA_{n+1}\}$ v bodě X, jímž opět jdou její průsečné přímky $\{B_{n-1}A_{n+1}\}$ a $\{B_nA_{n-1}\}$ s vrcholovými nadrovinami β_{n-1} a β_n normálního mnohoúhelníka $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ a který má tu vlastnost, že přímka $\{XA_n\}$ je rovnoběžná s přímkou $\{A_{n-1}A_{n+1}\}$. Orientujme libovolně i přímku $\{XA_n\}$ a položme $\varepsilon' = 1$ při souhlasné a $\varepsilon' = -1$ při nesouhlasné orientaci přímek $\{XA_n\}$ a $\{\overset{*\bullet}{Q}{}^{(n-2)}\overset{*}{Q}\}$. Zřejmě

$$\overrightarrow{\overset{*\bullet}{Q}{}^{(n-2)}\overset{*}{Q}} = \varepsilon'\overrightarrow{XA_n}\,. \tag{3,27}$$

Podle věty 3,4, kterou vzhledem k (3,22) opět můžeme aplikovat na mnohoúhelník (3,19) normální v podprostoru (3,20), je

$$\frac{\overrightarrow{\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1}\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n}}}{\overrightarrow{\overset{*\bullet}{Q}{}^{(n-2)}\overset{*}{Q}}} = \overset{*}{\varepsilon}(-1)^{n+1}\,.\,\frac{1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{n-3}\,k_1k_2\ldots k_{n-3}}{k_1k_2\ldots k_{n-2}}\,. \tag{3,28}$$

V rovině $\{A_{n-1}A_nA_{n+1}\}$ zřejmě platí

$$\frac{\overrightarrow{A_{n+1}A_{n-1}}}{\overrightarrow{XA_n}} = \overset{*}{\varepsilon}\varepsilon' k_{n-1}\,,$$

takže podle (3,27)

$$\frac{\overrightarrow{\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n+1}\overset{*}{A}{}^{\bullet}_{n}}}{\overrightarrow{\overset{*\bullet}{Q}{}^{(n-2)}\overset{*}{Q}}} = \frac{\overrightarrow{A_{n+1}A_{n-1}}}{\overrightarrow{\overset{*\bullet}{Q}{}^{(n-2)}\overset{*}{Q}}} = +\,\overset{*}{\varepsilon}k_{n-1}\,. \tag{3,29}$$

Uvážíme-li, že nyní ještě $k_{n-1}k_n + 1 = 0$, dostaneme srovnáním (3,28) s (3,29) opět relaci (3,18).

Tím je věta 3,5 dokázána.

Úmluva 3,1. Budiž $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ normální mnohoúhelník s vrcholovými nadrovinami

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n . \tag{3,1}$$

Buďtež u, v celá nezáporná čísla taková, že

$$2 \leqq u + 2 \leqq v \leqq n .$$

Budiž $h = 2, 3, \dots, v - u$.

Označme

$$\beta^{(h)}_{u+1}, \beta^{(h)}_{u+2}, \dots, \beta^{(h)}_{u+h} \tag{3,30}$$

nadroviny podprostoru

$$\{A_{u+1}A_{u+2} \dots A_{u+h+1}\} , \tag{3,31}$$

které jsou jeho průniky s nadrovinami

$$\beta_{u+1}, \beta_{u+2}, \dots, \beta_{u+h} .$$

Podprostory (3,30) jsou zřejmě vrcholové nadroviny mnohoúhelníka $A_{u+1}A_{u+2} \dots A_{u+h+1}$ normálního v podprostoru (3,31); podle věty 1,4 existuje buďto právě jeden bod jim společný, který pak označíme $Q^{(h)}_{u+1}$, anebo právě jeden směr jim společný, který budeme značit $q^{(h)}_{u+1}$.

Položme ještě $Q^{(1)}_{u+1} = B_{u+1}$ a $Q^{(0)}_{u+1} = A_{u+1}$.

Mnohoúhelník

$$A_{u+1}A_{u+2} \dots A_{v+1} \tag{3,32}$$

normální v podprostoru $\{A_{u+1}A_{u+2} \dots A_{v+1}\}$ nazveme přípustným, jestliže $v - u \leqq 4$ anebo jestliže při $v - u > 4$ existují body

$$Q^{(v-u-3)}_{u+1}, Q^{(v-u-5)}_{u+1}, \dots, Q^{(0)}_{u+1} .$$

Poznámka 4. Mnohoúhelník (3,32) může být přípustný při vhodné volbě vrcholových nadrovin $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ a při jiné volbě nikoliv. Avšak výše zavedená zkratka „přípustného mnohoúhelníka" nám později velmi usnadní vyjadřování a nepovede k nedorozuměním.

Věta 3,6. *Nechť vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ *obsahují všecky směr* q. *Budiž* h *přirozené číslo,* $2 \leqq h < n$. *Nechť dále vrcholové nadroviny*

$$\beta^{(h)}_1, \beta^{(h)}_2, \dots, \beta^{(h)}_h$$

mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{h+1}$ *normálního v podprostoru* $\{A_1A_2 \dots A_{h+1}\}$ *mají všecky společný směr* $q^{(h)}$.

Pak je vždy

$$h \leqq n - 3$$

a vrcholové nadroviny

$$\beta_{h+2}^{(n-h-1)}, \beta_{h+3}^{(n-h-1)}, \ldots, \beta_{n}^{(n-h-1)} \tag{3,33}$$

mnohoúhelníka $A_{h+2}A_{h+3} \ldots A_{n+1}$ *normálního v podprostoru*

$$\{A_{h+2}A_{h+3} \ldots A_{n+1}\} \tag{3,34}$$

mají všecky společný směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$.

Důkaz. Nechť $h = n - 1$. Nadroviny

$$\beta_1^{(n-1)}, \beta_2^{(n-1)}, \ldots, \beta_{n-1}^{(n-1)}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_n\}$ mají podle věty 1,7 a prvního předpokladu dokazované věty společný bod $Q^{(n-1)}$, a tedy v důsledku druhého jejího předpokladu mají společnou celou přímku. To však odporuje větě 1,4.

Nechť $h = n - 2$. Nadroviny

$$\beta_1^{(n-2)}, \beta_2^{(n-2)}, \ldots, \beta_{n-2}^{(n-2)}$$

podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{n-1}\}$ mají společný bod $Q^{(n-2)}$ podle věty 1,8, a tudíž podle předpokladu i přímku společnou, což odporuje větě 1,4.

Tím je první část věty dokázána. Přejdeme k důkazu druhé části.

Z věty 1,6 plyne, že směr q není obsažen v podprostorech $\{A_1A_2 \ldots A_{h+1}\}$ a $\{A_{h+2}A_{h+3} \ldots A_{n+1}\}$, takže není rovnoběžný ani se směrem $q^{(h)}$, o němž se snadno zjistí, že není rovnoběžný s podprostorem $\{A_{h+2}A_{h+3} \ldots A_{n+1}\}$. Nadroviny

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h, \tag{3,35}$$

jež obsahují podprostor (3,34) a směr q s ním nerovnoběžný, protínají se v podprostoru dimense právě $n - h$; označme jej $\mathbf{E}_{n-h}$. Avšak nadroviny (3,35) jsou všecky rovnoběžné i se směrem $q^{(h)}$, což znamená, že v prostoru $\mathbf{E}_{n-h}$ je obsažena rovina $\mathbf{E}_2$, obsahující směry q a $q^{(h)}$. Ježto rovina $\mathbf{E}_2$ není rovnoběžná s podprostorem (3,34), s nímž leží v podprostoru $\mathbf{E}_{n-h}$, protíná jej právě v přímce. Dokážeme o ní, že určuje směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$, který obsahují všecky nadroviny (3,33) podprostoru (3,34).

Uvažujme kteroukoliv z nadrovin

$$\beta_{h+2}, \beta_{h+3}, \ldots, \beta_n. \tag{3,36}$$

Ta obsahuje podprostor $\{A_1A_2 \ldots A_{h+1}\}$, a tedy i rovinu obsahující směry q a $q^{(h)}$, t. j. rovinu rovnoběžnou s rovinou $\mathbf{E}_2$, obsahující směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$. Obsahují tedy všechny nadroviny (3,36) směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$. Poněvadž pak směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$ leží v podprostoru (3,34) a podprostory (3,33) jsou jeho řezy s nadrovinami (3,36), platí i o nadrovinách (3,33) podprostoru (3,34), že obsahují směr $q_{h+2}^{(n-h-1)}$.

Tím je celý důkaz proveden.

Věta 3,7. *Nechť vrcholové nadroviny*

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ *obsahují všecky směr* q.

Pak platí:

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^n k_1k_2 \ldots k_n = 0\,. \tag{3,18}$$

Důkaz. V důsledku věty 3,5 stačí dokazovat větu 3,7 pro $n \geqq 5$ a ten případ, že neexistují všecky body $Q^{(n-3)}, Q^{(n-5)}, \ldots, Q^{(0)}$.

Pak lze najít takové přirozené číslo $s_1 \geqq 2$, že mnohoúhelník

$$A_1A_2 \ldots A_{s_1+1} \tag{3,37$_1$}$$

normální v podprostoru $\{A_1A_2 \ldots A_{s_1+1}\}$ je přípustný a existuje směr $q_1^{(s_1)}$ ($= q^{(s_1)}$ v označení z úmluvy 1,5). Podle věty 3,6 je $s_1 \leqq n - 3$ a pro mnohoúhelník

$$A_{s_1+2}A_{s_1+3} \ldots A_{n+1} \tag{3,38$_1$}$$

normální v podprostoru $\{A_{s_1+2}A_{s_1+3} \ldots A_{n+1}\}$ existuje směr $q_{s_1+2}^{(n-s_1-1)}$.

Není-li už mnohoúhelník (3,38$_1$) přípustný, pak lze opět nalézt takové přirozené číslo $s_2 \geqq s_1 + 3$, že mnohoúhelník

$$A_{s_1+2}A_{s_1+3} \ldots A_{s_2+1} \tag{3,37$_2$}$$

normální v podprostoru $\{A_{s_1+2}A_{s_1+3} \ldots A_{s_2+1}\}$ je přípustný a existuje směr $q_{s_1+2}^{(s_2-s_1-1)}$. Opět podle věty 3,6 je $s_2 \leqq n - 3$ a pro mnohoúhelník

$$A_{s_2+2}A_{s_2+3} \ldots A_{n+1} \tag{3,38$_2$}$$

normální v podprostoru $\{A_{s_2+2}A_{s_2+3} \ldots A_{n+1}\}$ existuje směr $q_{s_2+2}^{(n-s_2-1)}$.

Není-li už mnohoúhelník (3,38$_2$) přípustný, pak pokračujeme-li tak dále, dojdeme po konečném počtu kroků k mnohoúhelníku

$$A_{s_v+2}A_{s_v+3} \ldots A_{n+1} \tag{3,38$_v$}$$

normálnímu v podprostoru $\{A_{s_v+2}A_{s_v+3} \ldots A_{n+1}\}$, který je přípustný, a pro který existuje směr $q_{s_v+2}^{(n-s_v-1)}$. Přitom je

$$2 \leqq s_1,\; s_1 + 3 \leqq s_2,\; s_2 + 3 \leqq s_3,\; \ldots,\; s_v + 3 \leqq n\,;$$
$$v \geqq 1\,.$$

Na všecky mnohoúhelníky (3,37$_1$), (3,37$_2$), ..., (3,37$_v$), (3,38$_v$) (mnohoúhelník (3,37$_v$) je ovšem přípustný mnohoúhelník $A_{s_{v-1}+2}A_{s_{v-1}+3} \ldots A_{s_v+1}$) můžeme aplikovat větu 3,5. Tak dostaneme:

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^{s_1} k_1k_2 \ldots k_{s_1} = 0\,,$$
$$1 - k_{s_1+2} + k_{s_1+2}k_{s_1+3} - \ldots + (-1)^{s_2-s_1-1} k_{s_1+2}k_{s_1+3} \ldots k_{s_2} = 0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1 - k_{s_v+2} + k_{s_v+2}k_{s_v+3} - \ldots + (-1)^{n-s_v-1} k_{s_v+2}k_{s_v+3} \ldots k_n = 0\,.$$

Násobíme-li druhou, třetí atd. až $(v + 1)$-ní z těchto rovnic postupně

$$(-1)^{s_1+1} k_1 k_2 \dots k_{s_1+1},\ (-1)^{s_2+1} k_1 k_2 \dots k_{s_2+1},\ \dots,\ (-1)^{s_v+1} k_1 k_2 \dots k_{s_v+1}\,,$$

a pak všecky rovnice sečteme, dostaneme (3,18).

Věta 3,8. *Nechť pro n bodů*

$$B_1, B_2, \dots, B_n \tag{3,39}$$

na přímkách stran normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ *platí relace* (3,18). *Pak existuje právě jeden směr, obsažený ve všech vrcholových nadrovinách*

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \tag{3,1}$$

normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, *které z jeho vrcholových podprostorů promítají body* (3,39).

Důkaz. Podle věty 1,4 existuje takový směr nejvýše jeden.

Kdyby vrcholové nadroviny $\beta_1^{(n-1)}, \beta_2^{(n-1)}, \dots, \beta_{n-1}^{(n-1)}$ mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots$ $\dots A_n$ normálního v podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_n\}$ byly všecky rovnoběžné s touž přímkou, bylo by podle věty 3,7

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{n-1} k_1k_2 \dots k_{n-1} = 0\,,$$

a tedy srovnáním s (3,18) bychom dostali $k_1k_2 \dots k_n = 0$. Plyne tudíž z věty 1,4 existence bodu $Q^{(n-1)}$.

Nadroviny $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ mají podle věty 1,4 zřejmě společnou právě jen přímku $\{A_{n+1}Q^{(n-1)}\}$. Označme β nadrovinu, která jde podprostorem $\{A_1A_2 \dots$ $\dots A_{n-1}\}$ rovnoběžně s touto přímkou. Nadrovina β zřejmě nesplývá se stěnou $\{A_1A_2 \dots A_n\}$, a kdyby šla vrcholem A_{n+1}, pak proti větě 1,6 by podprostor $\{A_1A_2 \dots A_{n-1}\}$ obsahoval bod $Q^{(n-1)}$. Nadrovina β je tudíž vrcholová nadrovina normálního mnohoúhelníka $A_1A_2 \dots A_{n+1}$.

Kdyby nadrovina β byla rovnoběžná s přímkou $\{A_nA_{n+1}\}$, existoval by podle věty 1,8 pro mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_{n-1}$ normální v podprostoru $\{A_1A_2 \dots A_{n-1}\}$ směr $q^{(n-2)}$ a podle věty 3,7 by bylo

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{n-2} k_1k_2 \dots k_{n-2} = 0\,.$$

Srovnáním s (3,18) plyne

$$k_1k_2 \dots k_{n-1}(1 - k_n) = 0\,,$$

což je nemožné.

To znamená, že nadrovina β protíná přímku $\{A_nA_{n+1}\}$ v nějakém bodě B_n^*. Podle věty 3,7 je

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^{n-1} k_1k_2 \dots k_{n-1} +$$
$$+ (-1)^n k_1k_2 \dots k_{n-1}(B_n^*; A_n, A_{n+1}) = 0\,.$$

Srovnáním s relací (3,18) dostaneme okamžitě $B_n^* = B_n$, čímž je důkaz proveden.

Poznámka 5. Platí-li relace (3,18) a ještě $k_1 k_2 \dots k_{n+1} = (-1)^{n+1}$, platí i dalších n relací, odvozených z (3,18) cyklickou záměnou indexů. Geometrický význam toho je zcela jasný.

Резюме

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМ МЕНЕЛАЯ И ЧЕВЫ НА n-РАЗМЕРНЫЕ ФИГУРЫ

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага.

(Поступило в редакцию 22/XII 1954 г.)

Пусть в n-размерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}_n$ точки

$$A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \tag{1}$$

линейно независимы. Фигура, составленная из $n + 1$ абсцисс

$$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n+1}A_1 , \tag{2}$$

которую автор называет нормальным многоугольником $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ является n-размерным обобщением треугольника. Точки (1) он называет его вершинами, абсциссы (2) его сторонами $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$. и прямые определенные ими, прямыми его сторон. Подпространство размера $n - 2$, которое определено вершинами (2) за исключением двух соседних, лежащих на стороне a_i ($i = 1, 2, \dots, n + 1$), называет автор вершинным подпространством, противоположным стороне a_i. Гиперплоскость, которая содержит это подпространство, но никакую из исключенных вершин, называет автор вершинной гиперплоскостью.

Пусть B_i ($i = 1, 2, \dots, n + 1$) — точка на прямой стороны a_i, отличная от вершин A_i, A_{i+1} ($A_{n+2} = A_1$) и β_i — вершинная гиперплоскость, проходящая через точку B_i и вершинное подпространство, противоположное стороне a_i.

$n + 1$ точек

$$B_1, B_2, \dots, B_{n+1} \tag{3}$$

лежит самое больше в одной гиперплоскости, и $n + 1$ вершинных гиперплоскостей

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1} \tag{4}$$

имеют самое больше одну общую точку или самое больше одно общее направление (т. е. самое больше одну „точку в бесконечности“).

Пусть прямые сторон нормального многоугольника $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ ориентированы произвольно, и пусть введено еще следующее обозначение:

$$k_i = \frac{\overrightarrow{A_iB_i}}{\overrightarrow{A_{i+1}B_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1 .$$

Главным результатом работы являются следующие теоремы:

1. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы точки* (3) *лежали в гиперплоскости:*

$$k_1k_2 \dots k_{n+1} = 1.$$

2. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы вершинные гиперплоскости* (4) *имели общую точку или направление:*

$$k_1k_2 \dots k_{n+1} = (-1)^{n+1} . \tag{5}$$

3. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы вершинные гиперплоскости* (4), *для которых имеет силу* (5), *имели совместное направление (и, следовательно, не точку)*:

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^n k_1k_2 \dots k_n = 0 .$$

Первая теорема является n-размерным распространением известной теоремы Менелая, и вторая - теоремы Чевы. Это можно выразить тоже в более общей форме, как показано в этой работе. При помощи указанных теорем будет в будущем нормальный многоугольник исследован более подробно.

L'ÉLARGISSEMENT DU THÉORÈME DE MÉNÉLAÜS ET DE CÉVA SUR LES FIGURES n-DIMENSIONNELLES

ZBYNĚK NÁDENÍK, Prague.

(Reçu le 22 décembre 1954.)

Supposons que les points

$$A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \tag{1}$$

d'un espace euclidien à n dimensions E_n sont linéairement indépendants. La figure, formée par les $n + 1$ segments

$$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n+1}A_1 , \tag{2}$$

que l'auteur appelle le polygone normal $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, est une généralisation d'un triangle. Dans le travail présent, on appelle les points (1) les sommets de ce polygone normal, les segments (2) leur côtés $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ et les droites déterminées par les segments (2) les droites de leur côtés. Le sous-espace à $n - 2$

dimensions qui est déterminé univoquement par les sommets (1) par l'exclusion de deux sommets voisins sur le côté a_i ($i = 1, 2, \ldots, n + 1$), est appellé par l'auteur le sous-espace de sommet opposé au côté a_i. L'hyperplan qui passe par ce sous-espace et qui ne contient aucun de ces deux sommets omis, est appellé l'hyperplan de sommet.

Soit B_i ($i = 1, 2, \ldots, n + 1$) le point sur la droite du côté a_i distinct des sommets A_i, A_{i+1} ($A_{n+2} = A_1$) et β_i l'hyperplan de sommet passant par le point B_i et par le sous-espace de sommet opposé au côté a_i. Par les $n + 1$ points

$$B_1, B_2, \ldots, B_{n+1} \tag{3}$$

passe au plus un hyperplan et les $n + 1$ hyperplans de sommet

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1} \tag{4}$$

ont commun au plus un point ou au plus une direction (c'est-à-dire au plus un „point à l'infini"), mais non un point et aussi une direction.

Orientons arbitrairement les droites des côtés du polygone normal $A_1A_2 \ldots \ldots A_{n+1}$ et introduisons encore cette notation:

$$k_i = \frac{\overrightarrow{A_iB_i}}{\overrightarrow{A_{i+1}B_i}}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n + 1\,.$$

Les résultats fondamentaux du travail présent sont les théorèmes suivants:

1. *La condition nécessaire et suffisante pour que les points* (3) *soient dans un hyperplan est*

$$k_1k_2 \ldots k_{n+1} = 1\,.$$

2. *La condition nécessaire et suffisante pour que les hyperplans de sommet* (4) *aient commun un point ou une direction est*

$$k_1k_2 \ldots k_{n+1} = (-1)^{n+1}\,. \tag{5}$$

3. *La condition nécessaire et suffisante pour que les hyperplans de sommet* (4) *pour lesquelles on a la rélation* (5), *aient une direction commune (et alors non un point), est*

$$1 - k_1 + k_1k_2 - \ldots + (-1)^n\, k_1k_2 \ldots k_n = 0\,.$$

Le premier resp. deuxième théorème est un élargissement n-dimensionnel du théorème de Ménélaüs resp. de Céva bien connu. Dans le travail présent ces deux théorèmes sont expliqués aussi dans une forme plus générale. A l'aide de ces théorèmes le polygone normal sera étudié plus profondement plus tard.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

POZNÁMKA K PŘÍMKOVÉ GEOMETRII ROZVINUTELNÝCH PLOCH

KAREL HAVLÍČEK, Praha.

(Došlo dne 14. ledna 1955.) DT: 513.716.3

Každou přímkovou plochu v trojrozměrném projektivním prostoru lze vyjádřit analyticky tak, že přímkové souřadnice jejích tvořících přímek jsou funkcemi jednoho parametru. Je-li daná plocha rozvinutelná, pak derivace těchto přímkových souřadnic určují stejným způsobem další přímkovou plochu, t. zv. derivovanou plochu dané rozvinutelné plochy. V tomto článku je podána konstrukce rozvinutelné plochy, známe-li její plochu derivovanou.

1. Kleinovo zobrazení všech přímek trojrozměrného projektivního prostoru S_3 na body regulární nadkvadriky (t. zv. *K-kvadriky*), vnořené do pětirozměrného projektivního prostoru S_5, vede k tomu, že obrazem přímkové plochy z S_3 je křivka v S_5, ležící na K-kvadrice. Šest projektivních homogenních souřadnic bodů této křivky závisí pak na jednom proměnném parametru t; jejich derivace, pokud existují, určují při zvoleném faktoru úměrnosti homogenních souřadnic v S_5 druhou křivku, která už ovšem na K-kvadrice ležet nemusí. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby i tato druhá křivka ležela na K-kvadrice, čili aby byla obrazem nějaké přímkové plochy, je ta, aby první křivka byla obrazem plochy rozvinutelné. Druhá křivka je pak obrazem přímkové plochy, kterou jsem nazval derivovanou plochou dané rozvinutelné plochy. Není obtížné určit vlastnosti této derivované plochy, známe-li danou rozvinutelnou plochu. To jsem ukázal v jedné starší práci.[1]) Pro úplnost je třeba ukázat i postup obrácený, jak totiž lze rozvinutelnou plochu určiti, známe-li její plochu derivovanou. Celá konstrukce je velmi jednoduchá. Protože však jde v podstatě o hledání primitivních funkcí, omezíme se na reálné funkce reálné proměnné t. Zvolíme-li za souřadnice v S_5 Plückerovy přímkové souřadnice, budou reálným bodům na K-kvadrice v S_5 odpovídat reálné přímky v S_3. Jde tedy o přirozené doplnění výše citované práce, kde byly rovněž studovány reálné přímkové plochy s reálnými tvořícími přímkami. Také symboliku zde zachováme stejnou[2]).

[1]) *K. Havlíček* [2].

[2]) Viz také *V. Hlavatý* [4].

2. Projektivní homogenní souřadnice bodu X v trojrozměrném projektivním prostoru S_3 označme x^i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Jsou-li Y, Z dva takové body o souřadnicích y^i, resp. z^i $(i = 1, 2, 3, 4)$, pišme

$$p^{ij} = \varrho \begin{vmatrix} y^i, y^j \\ z^i, z^j \end{vmatrix}, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

kde $\varrho \neq 0$ je libovolný faktor úměrnosti. Plückerovy bodové souřadnice $p^1, \ldots, p^6$ přímky, která je incidentní s body Y, Z, očíslujeme podle předpisu

$$p^1 = p^{14},\ p^2 = p^{24},\ p^3 = p^{34},\ p^4 = p^{23},\ p^5 = p^{31},\ p^6 = p^{12}.$$

Tyto souřadnice splňují kvadratickou rovnici

$$\mathfrak{p} \times \mathfrak{p} = 0, \tag{2}$$

kde jsme pro stručnost označili $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p} = 2\,(p^1p^4 + p^2p^5 + p^3p^6)$. Šest Plückerových souřadnic $p^1, \ldots, p^6$, jež symbolisujeme souhrnně a krátce znakem $\mathfrak{p}$, lze interpretovat jako homogenní souřadnice bodu v S_5, kde rovnice (2) představuje regulární nadkvadriku, kterou jsme označili názvem K-kvadrika. Každá přímka prostoru S_3 je tím zobrazena vzájemně jednoznačně do bodu K-kvadriky, vnořené do S_5 a obráceně jen body této K-kvadriky jsou obrazy přímek prostoru S_3. Protože každá přímková plocha v S_3 se přitom zobrazí jako křivka ležící na K-kvadrice, lze souřadnice jejích přímek vyjádřit jako funkce jednoho parametru t, symbolicky psáno

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(t),$$

kde funkce $\mathfrak{p}(t)$ (t. j. funkce $p^1(t), \ldots, p^6(t)$) splňují určité předpoklady[3]) a kde parametr t probíhá nějaký interval J. Táž plocha je ovšem dána i rovnicemi

$$'\mathfrak{p} = f\mathfrak{p}(t), \tag{3}$$

kde $f \neq 0$ je libovolný faktor Plückerových homogenních souřadnic, který může býti také funkcí parametru t (symbolika je snadno srozumitelná). Derivaci podle parametru t označíme v dalším tečkou, druhou derivaci dvěma tečkami, tedy na příklad $\mathfrak{p}^{\cdot} = \dfrac{\mathrm{d}\mathfrak{p}}{\mathrm{d}t}$, $\mathfrak{p}^{\cdot\cdot} = \dfrac{\mathrm{d}^2\mathfrak{p}}{\mathrm{d}t^2}$. Lze dokázat následující tvrzení[4]):

Nutná a postačující podmínka pro to, aby přímková plocha o rovnicích $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(t)$ *byla rozvinutelná, je splnění rovnice*

$$\mathfrak{p}^{\cdot} \times \mathfrak{p}^{\cdot} = 0 \tag{4}$$

pro všechny hodnoty t intervalu J. Toto tvrzení je f-invariantní, t. j. nezávislé na volbě faktoru úměrnosti f Plückerových souřadnic, čili je nezávislé na transformaci (3). V případě, že daná plocha je rozvinutelná, je tedy splněna rovnice (4), takže funkce $\mathfrak{p}^{\cdot}(t)$ splňují rovnici K-kvadriky a určují přímkovou

[3]) *V. Hlavatý* [4], sešit I., str. 41—43.

[4]) *K. Havlíček* [2], věta (2,2), str. 2.

plochu, totiž derivovanou plochu dané rozvinutelné plochy.[5]) Protože od uveřejnění citované už mé práce uplynula delší doba, opakuji zde z ní bez důkazu některé výsledky[6]), jichž je v dalším užito a jež platí za předpokladů tam uvedených. Z nich zvlášť zdůrazňuji předpoklad o tom, že matice

$$\|\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^{\cdot}, \mathfrak{p}^{\cdot\cdot}\|$$

má pro všechny hodnoty uvažovaného intervalu hodnost $h = 3$. Tím je z našich úvah vyloučen svazek přímek procházejících jedním bodem a ležících v jedné rovině.

Každá rozvinutelná plocha je buď plochou tečen nějaké křivky nebo kuželem.

Každá hodnota t_0 parametru t určuje na rozvinutelné ploše přímku $\mathfrak{p}(t_0)$ a na její derivované ploše přímku $\mathfrak{p}^{\cdot}(t_0)$. Přímky $\mathfrak{p}(t_0)$ a $\mathfrak{p}^{\cdot}(t_0)$ se nazývají přímky *sdružené*[7]) a protínají se v kuspidálním bodě dané rozvinutelné plochy; rovina jimi určená je tečnou rovinou dané rozvinutelné plochy a dotýká se jí podél povrchové přímky $\mathfrak{p}(t_0)$. Je-li rozvinutelná plocha plochou tečen křivky C, pak body této křivky a jen tyto body jsou kuspidálními body dané plochy; protože povrchové přímky příslušné derivované plochy podle předcházejícího procházejí těmi kuspidálními body, leží křivka C i na ploše derivované; derivovaná plocha je tu tvořena přímkami $\mathfrak{p}^{\cdot}(t)$, jež leží v tečných rovinách plochy tečen křivky C a z nichž každá protíná sdruženou přímku $\mathfrak{p}(t)$ v bodě, ve kterém se přímka $\mathfrak{p}(t)$ dotýká křivky C. Je-li křivka C rovinná, pak příslušná derivovaná plocha je opět množina tečen jiné rovinné křivky, jež leží v téže rovině jako křivka C. — Je-li rozvinutelná plocha kuželem o vrcholu V, který je zde ovšem jediným jejím kuspidálním bodem, pak příslušná derivovaná plocha je opět kuželem o témže vrcholu V.

Protože přímka $\mathfrak{p}^{\cdot}(t)$ není f-invariantní, odpovídají různým volbám faktoru f v rovnicích (3) případně různé derivované plochy téže plochy rozvinutelné. K dané rozvinutelné ploše existuje tedy nekonečně mnoho derivovaných ploch. Tyto derivované plochy jsou buď všechny nerozvinutelné (což nastane tehdy, je-li daná rozvinutelná plocha plochou tečen prostorové křivky) nebo jsou všechny rozvinutelné (což nastane tehdy, je-li daná rozvinutelná plocha kuželem nebo množstvím tečen rovinné křivky) a vždy tvoří parabolickou přímkovou kongruenci.[8]) Dvěma různými faktory úměrnosti f_1, f_2 dané rozvinutelné plochy jsou určeny dvě různé derivované plochy tehdy a jen tehdy, když poměr těchto faktorů není konstantní.

---

[5]) Není-li daná plocha rozvinutelná, pak není splněna ani rovnice (4). V tom případě nelze funkce $\mathfrak{p}^{\cdot}(t)$ interpretovat jako souřadnice přímky a o derivované ploše nelze tedy hovořit. Rovnice (4) může pak být splněna jen pro isolované hodnoty parametru t, což vede k torsálním přímkám dané plochy.

[6]) Srovnej hlavně větu (2,7) a celý odstavec 6 v uvedené práci [2].

[7]) Jejich obrazy v S_5 jsou totiž dva body na K-kvadrice, které jsou vzhledem ke K-kvadrice polárně sdruženy.

[8]) Parabolickou kongruenci zde uvažuji ve smyslu definice, kterou uvádí V. *Hlavatý* [4], sešit I, str. 110—114 a 129—132.

3. K definici plochy derivované připojme pro jednoduchost vyjadřování další pojem a vyslovme obojí společnou definicí. Tučné typy $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ a pod. symbolisují i nadále Plückerovy souřadnice.

Definice. *Budiž dána rozvinutelná plocha Π rovnicemi*

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) . \tag{5}$$

Pak přímková plocha Ω daná rovnicemi

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) , \tag{6}$$

kde $\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)$, se nazývá derivovaná plocha plochy Π. Obráceně plocha Π se nazývá primitivní plocha plochy Ω.

Poznámka. Je dobře mít stále na paměti, že primitivní plocha k dané ploše přímkové (pokud ovšem existuje) je vždy rozvinutelná. (Viz definici.)

Především doplňme předcházející výsledky ještě jednou větou, která je sice jejich jednoduchým důsledkem, ale která v minulé práci [2] nebyla výslovně uvedena.

Věta 1. *Budiž Π plocha tečen prostorové křivky* C. *Potom křivka* C *je asymptotickou křivkou na každé derivované ploše plochy Π.*

Důkaz. Plochu Π, která je ovšem rozvinutelná, vyjádříme rovnicemi (5) a její derivovanou plochu Ω rovnicemi (6). Z předcházejícího víme, že křivka C leží na ploše Ω. Zbývá dokázat, že je to asymptotická křivka na ploše Ω. Sledujme proto libovolnou oskulační rovinu ϱ křivky C. Tato rovina je zároveň tečnou rovinou plochy Π, jak je známo z elementární diferenciální geometrie. Je tedy určena dvěma sdruženými přímkami $\mathbf{p}(t_0)$ a $\mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}}(t_0) = \mathbf{q}(t_0)$, jak bylo uvedeno v odstavci 2. To znamená, že rovina ϱ je zároveň tečnou rovinou plochy Ω v uvažovaném bodě křivy C, neboť je incidentní s přímkou $\mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}}(t_0)$ plochy Ω a s tečnou $\mathbf{p}(t_0)$ křivky C, jež na ploše Ω leží. Rovina ϱ dotýká se tedy plochy Ω v průsečíku sdružených přímek $\mathbf{p}(t_0)$ a $\mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}}(t_0)$, t. j. v bodě křivky C. Křivka C má tedy tu vlastnost, že její oskulační roviny jsou tečnými rovinami plochy Ω, což je známá charakteristická vlastnost asymptotických křivek. (V. Hlavatý [3], str. 319.)

Chceme-li obráceně hledat plochu primitivní k dané přímkové ploše, plyne už z věty 1, že takovou primitivní plochu musíme hledat jedině mezi plochami tečen asymptotických křivek dané plochy. Samostatně pak bude nutno řešit ty případy, kdy na dané přímkové ploše všechny asymptotické čáry jsou vesměs přímkami, takže o ploše tečen takové čáry nelze mluvit; to nastává jen u kvadrik a u ploch rozvinutelných a těch si všimneme až v odstavci 4. Obrátíme se tedy nejdřív k plochám, na nichž existují asymptotické křivky, které nejsou přímkami. Odvoďme nejdřív pomocnou větu, která se týká libovolné takové plochy, jež nemusí být nutně přímková.

Věta 2. *Budiž Ω plocha, na níž jsou dvě různé soustavy reálných asymptotických čar a budiž* C *jedna z těchto asymptotických čar, jež není přímkou. Potom plocha* *tečen křivky* C *je primitivní plochou k přímkové ploše, která je tvořena asymptotickými tečnami plochy Ω sestrojenými v bodech křivky* C, *jež nejsou tečnami křivky* C (t. j. jsou tečnami asymptotických čar plochy Ω, které patří do té soustavy, do níž nepatří křivka C).

Důkaz. Parametrické rovnice plochy Ω jsou

$$x^i = x^i(u, v)\,, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\,,$$

kde $x^i(u, v)$ jsou funkce parametrů u, v, mající spojité parciální derivace druhého řádu. Při výpočtu bude třeba určit Plückerovy souřadnice asymptotických tečen plochy Ω; tyto tečny jsou ovšem nezávislé na volbě parametrů u, v. Proto můžeme zvolit parametrický systém libovolně. Zvolme parametrickou soustavu na ploše Ω tak, aby křivky $u =$ const. byly asymptotické křivky plochy Ω té soustavy, do níž patří křivka C. Potom ve všech bodech uvažované plochy Ω je splněna rovnice[9])

$$x^i_{vv} = \alpha x^i_u + \beta x^i_v + \gamma x^i\,, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\,, \tag{7}$$

kde α, β, γ jsou funkce parametrů u, v, a kde jsme pro stručnost položili

$$x^i_u = \frac{\partial x^i}{\partial u}\,, \quad x^i_v = \frac{\partial x^i}{\partial v}\,, \quad x^i_{uu} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^2}\,, \quad x^i_{vv} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial v^2}\,.$$

Plückerovy souřadnice tečen parametrických křivek $u =$ const. jsou úměrny determinantům matice

$$\left\| \begin{matrix} x^1, & x^2, & x^3, & x^4 \\ x^1_v, & x^2_v, & x^3_v, & x^4_v \end{matrix} \right\|.$$

Podle vzorce (1) můžeme pro ně psát

$$p^{ij} = \varrho \begin{vmatrix} x^i\,, & x^j \\ x^i_v\,, & x^j_v \end{vmatrix}\,, \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4\,; \quad \varrho \neq 0)\,. \tag{8}$$

Podobně pro souřadnice $\mathfrak{q}$ parametrických křivek $v =$ const. užijeme vzorců

$$q^{ij} = \varrho \begin{vmatrix} x^i\,, & x^j \\ x^i_u\,, & x^j_u \end{vmatrix}\,, \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4\,; \quad \sigma \neq 0)\,. \tag{9}$$

Budiž nyní křivka C parametrickou křivkou $u = u_0$, kde u_0 je konstanta. Rovnice křivky C na ploše Ω lze pak psát ve tvaru

$$u = u_0\,, \quad v = t\,,$$

chceme-li písmenem t označit její proměnný parametr. V bodech křivky C jsou funkce, vyskytující se ve vzorcích (7), (8), (9), funkcemi jedné proměnné t a protože $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 1$, platí pro každou přípustnou funkci $\varphi(u, v)$

$$\varphi^{\cdot} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,. \tag{10}$$

---

[9]) Viz na příklad *G. Fubini — E. Čech* [1], str. 43—46.

Ukážeme nejdřív, že faktor ϱ ve vzorcích (8) lze tak volit, aby bylo

$$(p^{ij})^{\cdot} = \tau q^{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4\,; \quad \tau \neq 0)\,, \tag{11}$$

čili podle (10)

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial v} = \tau q^{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4; \quad \tau \neq 0)\,. \tag{12}$$

Jednoduchým počtem zjistíme z rovnic (8), že je

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial v} = \varrho \begin{vmatrix} x^i, & x^j \\ x^i_{vv}, & x^j_{vv} \end{vmatrix} + \frac{1}{\varrho}\, p^{ij} \frac{\partial \varrho}{\partial v}\,.$$

Dosazením ze (7) a po jednoduché úpravě s použitím rovnic (8) a (9) máme

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial v} = \tau q^{ij} + p^{ij} \left(\beta + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial v}\right),$$

kde $\tau = \frac{\varrho \alpha}{\sigma}$. Volíme-li tedy ϱ tak, aby bylo

$$\beta + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial v} = 0\,, \tag{13}$$

pak budou splněny rovnice (12) a tedy i (11), jakmile bude $\varrho \neq 0$. Přechodem k parametru t lze podle (10) přepsat rovnici (13) na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\beta + \frac{1}{\varrho}\, \varrho^{\cdot} = 0\,. \tag{14}$$

Tato rovnice má vždy nenulové řešení pro ϱ. Lze tedy volit faktor $\varrho \neq 0$ tak, aby platily vztahy (12), resp. (11). Rovnice (14) tedy umožňuje volit faktor ϱ tak, aby derivovaná plocha plochy tečen křivky **C** byla tvořena tečnami parametrických křivek v = const., jak ukazují rovnice (11). Odtud už plyne důkaz věty 2, neboť vzhledem k předpokladu existence dvou různých soustav reálných asymptotických čar na ploše Ω můžeme zvolit parametry asymptotické, takže i druhá soustava křivek v = const. je tvořena asymptotickými čarami. Lze tedy faktor ϱ volit tak, aby derivovaná plocha tečen křivky **C** byla tvořena asymptotickými tečnami plochy Ω, jak je o tom ve větě 2 řeč, což jinými slovy znamená, že plocha tečen křivky **C** je primitivní plochou k ploše asymptotických tečen tam popsané. Tím je věta 2 dokázána.

Věta 3. *Budiž dána nerozvinutelná přímková plocha Ω, jež není kvadrikou. Pak plocha tečen kterékoli její asymptotické křivky, jež není přímkou, je primitivní plochou plochy Ω. Přímky všech primitivních ploch dané plochy Ω tvoří parabolickou přímkovou kongruenci.*

Důkaz. Jedna soustava asymptotických čar plochy Ω je tvořena jejími povrchovými přímkami, druhá soustava je od ní různá, protože předpokládáme, že plocha Ω není rozvinutelná. Protože tato plocha není kvadrikou, obsahuje asymptotické čáry, které nejsou přímkami. Jsou tedy splněny předpoklady věty 2, jejímž přímým důsledkem je první tvrzení obsažené ve větě 3. Druhé tvrzení o parabolické kongruenci je bezprostřední aplikací známé skutečnosti, že tečny asymptotických čar jedné soustavy, jež není soustavou přímek, tvoří parabolickou kongruenci[10]). Tím je věta 3. dokázána. Zároveň je podána konstrukce primitivní plochy k ploše Ω.

Jsou-li rovnice plochy Ω ve tvaru

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(t)\,, \tag{15}$$

pak i rovnice

$$'\mathfrak{q} = f\mathfrak{q}(t)\,, \quad f \neq 0 \tag{16}$$

určují tutéž plochu Ω. Různou volbou faktoru f můžeme zde dostat různé primitivní plochy k ploše Ω. Všimněme si tu jednoho detailu.

Věta 4. *Budiž Ω plocha z věty 3, vyjádřená rovnicemi* (15), *resp.* (16). *Je-li její primitivní plocha Π určena dvěma různými faktory f_1, f_2 v rovnicích* (16), *pak poměr těchto faktorů je konstantní.*

Důkaz. Buďtež $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1(t)$ a $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2(t)$ rovnice dvou primitivních ploch Π_1, Π_2 plochy Ω, takže tedy

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1^{\cdot}(t) &= f_1\mathfrak{q}(t)\,, \\ \mathfrak{p}_2^{\cdot}(t) &= f_2\mathfrak{q}(t)\,, \end{aligned} \tag{17}$$

kde $f_1 \neq 0$ a $f_2 \neq 0$ jsou funkce parametru t. Jsou-li obě plochy Π_1, Π_2 totožné, čili určují-li oba faktory f_1 a f_2 tutéž primitivní plochu, je nutně $\mathfrak{p}_1(t) = \varrho\mathfrak{p}_2(t)$, kde $\varrho \neq 0$ je funkce parametru t. Odtud derivováním plyne

$$\mathfrak{p}_1^{\cdot}(t) = \varrho^{\cdot}\mathfrak{p}_2(t) + \varrho\mathfrak{p}_2^{\cdot}(t)\,.$$

Po dosazení ze (17) a po jednoduché úpravě máme

$$(f_1 - \varrho f_2)\,\mathfrak{q}(t) = \varrho^{\cdot}\mathfrak{p}_2(t)\,.$$

Protože však Ω je plocha nerozvinutelná a Π_2 je plocha rozvinutelná, nejsou obě tyto plochy totožné a poslední rovnice nemůže být tedy splněna jinak než tak, že se anulují oba koeficienty

$$f_1 - \varrho f_2 = 0\,, \quad \varrho^{\cdot} = 0\,.$$

Druhá z těchto podmínek dává $\varrho = \text{const.}$ a potom z první z nich plyne $\dfrac{f_1}{f_2} = \varrho = \text{const.}$, čímž je věta 4 dokázána.

Věta 4 udává jen podmínku nutnou pro vztah dvou různých faktorů, jež vedou k téže ploše primitivní. Ale tato podmínka není postačující, jak ukazuje následující příklad.

V pravoúhlých souřadnicích nehomogenních x, y, z vyšetřujeme dvě šroubovice o rovnicích

$$x = r_a \cos t\,, \quad y = r_a \sin t\,, \quad z = kt\,, \quad (a = 1, 2)\,, \tag{18}$$

---

[10]) Viz na příklad *V. Hlavatý* [4], sešit I., str. 113, věta (3,2).

kde $r_1 \neq r_2$ a k jsou nenulové konstanty a parametr t probíhá interval J. Plochy tečen těchto šroubovic mají v Plückerových souřadnicích tyto rovnice:

$$\begin{aligned} p_a^1 &= r_a \sin t\,, & p_a^4 &= kr_a (\sin t - t \cos t)\,, \\ p_a^2 &= -r_a \cos t\,, & p_a^5 &= -kr_a (\cos t + t \sin t)\,, \\ p_a^3 &= -k\,, & p_a^6 &= r_a r_a\,^{11})\,, \quad (a = 1, 2)\,. \end{aligned} \tag{19}$$

To jsou při $r_1 \neq r_2$ dvě různé plochy, jež však mají tutéž společnou plochu derivovanou, jejíž rovnice jsou

$$\begin{aligned} q^1 &= f \cos t\,, & q^4 &= fkt \sin t\,, \\ q^2 &= f \sin t\,, & q^5 &= -\,fkt \cos t\,, \quad (f \neq 0)\,, \\ q^3 &= 0\,, & q^6 &= 0\,, \end{aligned} \tag{20}$$

jak se snadno přesvědčíme pouhým derivováním rovnic (19). Položíme-li v rovnicích (20) $f = r_1$, resp. $f = r_2$, dostaneme první, resp. druhou z ploch (19) jako primitivní k ploše (20), při čemž poměr těchto faktorů $\frac{r_1}{r_2} = c$ je konstantní. (Plocha (20) je šroubový konoid pravoúhlý, v našem případě je to plocha hlavních normál první i druhé šroubovice (18), na níž obě tyto šroubovice jsou ovšem asymptotickými křivkami.)

K úvahám tohoto odstavce připojme ještě poznámku. Věta 3 zaručuje existenci primitivní plochy k ploše Ω, která je tam podrobně popsaná, podává i konstrukci takové primitivní plochy, ale nedává methodu pro výpočet Plückerových souřadnic jejích přímek. V podstatě jde o úlohu, k daným šesti funkcím najít takové primitivní funkce, které splňují rovnici (2) základní K-kvadriky, což není problém právě elementární. To nepřekvapuje, uvědomíme-li si, že celá úloha je ekvivalentní s hledáním asymptotických čar na ploše Ω, což samo o sobě vede na rovnici Riccatiho, kterou obecně nelze řešit pouhými kvadraturami. Je to samostatný problém z matematické analysy, kterým jsem se však nezabýval.

4. Obraťme se pro úplnost k případům, které jsme v předcházejícím odstavci vyloučili.

Věta 5. *K regulární kvadratické ploše neexistuje žádná plocha primitivní.*

Důkaz je tu nepřímý. Předpokládejme, že k regulární kvadratické ploše Ω existuje primitivní plocha Π. Mohou nastat dvě možnosti.

1. Je-li Π plochou tečen prostorové křivky C, pak podle věty 1 je C asymptotickou křivkou na ploše Ω, což je ve sporu s předpokladem, neboť na kvadratické ploše jsou asymptotické čáry vesměs přímkami. Tento případ tedy nastat nemůže.

---

[11]) Píši zde součin $r_a r_a$ místo obvyklé mocniny z toho důvodu, aby nenastala kolise s označením indexů souřadnic, jež píši vpravo nahoře, abych zachoval symboliku citovaných prací [2] a [4].

2. Je-li Π plocha tečen rovinné křivky nebo kužel, pak každá její derivovaná plocha (a tedy i plocha Ω) je rozvinutelná. Ale regulární kvadrika Ω není nikdy rozvinutelná. I druhá možnost tedy vede ke sporu a věta 5 je tím dokázána.

Věta 6. *K ploše tečen prostorové křivky neexistuje plocha primitivní.*

Důkaz nepřímý je obdobný předcházejícímu; danou plochu tečen označme Ω a předpokládejme, že k ní existuje plocha primitivní Π.

1. Je-li Π plochou tečen prostorové křivky, pak každá její derivovaná plocha, tedy i Ω, je nerozvinutelná (viz odst. 2), což je spor s předpokladem.

2. Je-li Π kuželem, resp. plochou tečen křivky rovinné, je každá její derivovaná plocha opět kuželem, resp. plochou tečen rovinné křivky, což je zase spor s předpokladem, že Ω je plocha tečen křivky prostorové. Neexistuje tedy primitivní plocha k ploše Ω, čímž je věta 6 dokázána.

Existenci primitivních ploch v posledních dvou příkladech lze nejjednodušeji prokázat výpočtem; geometricky jsou tyto případy málo zajímavé.

Věta 7. *Budiž Ω kužel o vrcholu V. Primitivní plocha plochy Ω je opět kužel o vrcholu V.*

Věta 8. *Budiž Ω množství tečen rovinné křivky* C. *Primitivní plocha plochy Ω je opět množství tečen rovinné křivky, jež leží v teže rovině jako křivka* C.

Důkazy obou vět 7 a 8 lze provést společně. Je-li totiž plocha kuželem (resp. množstvím tečen rovinné křivky C), pak souřadnice $\mathfrak{q}(t)$ běžné její tvořící přímky lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathfrak{q}(t) = m_1(t)\,\mathfrak{c}_1 + m_2(t)\,\mathfrak{c}_2 + m_3(t)\,\mathfrak{c}_3\,, \tag{21}$$

kde $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$ jsou tři pevné lineárně nezávislé přímky, jdoucí vrcholem V (resp. ležící v rovině křivky C)[12]); přitom $m_a(t)$ jsou pro $a = 1, 2, 3$ funkce parametru t, o nichž předpokládáme, že k nim existují primitivní funkce $M_a(t)$, takže $M_a^{\cdot}(t) = m_a(t)$. Rovnice

$$\mathfrak{p}(t) = M_1(t)\,\mathfrak{c}_1 + M_2(t)\,\mathfrak{c}_2 + M_3(t)\,\mathfrak{c}_3 \tag{22}$$

určují zřejmě primitivní plochu k ploše (21). Derivováním (22) dostaneme totiž (21). Protože (22) jsou rovnice téhož typu jako (21), je plocha jimi určená opět kuželem o vrcholu V (resp. množstvím tečen rovinné křivky, která leží v téže rovině jako křivka C).

Závěrem ještě několik slov. Není snad třeba ani podrobně odůvodňovat, že vlastnosti, vyslovené ve větě 3 a ve větách 5—8 jsou invariantní vůči projektivní transformaci v prostoru S_3. Přejdeme-li dále od Plückerových souřadnic k jiným projektivním homogenním souřadnicím v S_5, bude mít každá přímka nové souřadnice $u^i (i = 1, \ldots, 6)$, jež s Plückerovými souřadnicemi p^i souvisí vztahem

$$u^i = \sum_{j=1}^{6} c^i_j p^j\,, \qquad (i = 1, \ldots, 6)\,,$$

---

[12]) Viz *V. Hlavatý* [4], sešit I., str. 44.

kde předpokládáme, že c^i_j jsou reálné konstanty, pro které je Det $|c^i_j| \neq 0$. Derivace souřadnic p^i se transformují ovšem stejnou transformací. I když se přitom změní rovnice (2) K-kvadriky, zůstane definice derivovaných, resp. primitivních ploch nezávislá na této transformaci. Proto mají tyto pojmy geometrický obsah.

LITERATURA

[1] *G. Fubini - E. Čech:* Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces (Gauthier-Villars et C^ie, Paris 1931.)

[2] *K. Havlíček:* Rozvinutelné plochy v přímkové diferenciální geometrii. (Rozpravy II. třídy České akademie, ročník LIII, číslo 42, Praha 1944.)

[3] *V. Hlavatý:* Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet. (Jednota čs. matematiků a fysiků, Praha 1937.)

[4] *V. Hlavatý:* Differenciální přímková geometrie. (Česká akademie, Praha 1941.)

Резюме

ЗАМЕТКА К ЛИНЕЙЧАТОЙ ГЕОМЕТРИИ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Карел Гавличек (Karel Havlíček), Прага.

(Поступило в редакцию 14/I 1955)

Если линейчатые координаты Плюкера обозначены символом $\mathbf{p}$, то каждая линейчатая поверхность дана уравнениями $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$, где $\mathbf{p}(t)$ — функции параметра t. Для того, чтобы линейчатая поверхность, заданная уравнениями

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) \tag{1}$$

была развертывающейся, необходимо и достаточно, чтобы производные $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$ определяли опять-таки линейчатую поверхность, уравнения которой можно писать в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

Поверхность (2) называем *производной* поверхностью развертывающейся поверхности (1); наоборот, развертывающуюся поверхность (1) называем *примитивной* поверхностью к поверхности (2).

Но поверхность (1) определена также уравнениями $'\mathbf{p} = f\,\mathbf{p}(t)$, где f — коэффициент пропорциональности координат Плюкера. Отсюда следует,

что к поверхности (1) существует бесконечно много производных поверхностей. Аналогичным способом получим бесконечно много поверхностей, примитивных к данной поверхности.

Важнейшие свойства этих поверхностей следующие:

кривая возврата развертывающейся поверхности является на каждой из ее производных поверхностей асимптотической кривой.

Наоборот: *Пусть Ω — произвольная линейчатая поверхность, на которой имеются асимптотические линии, не являющиеся прямыми; тогда поверхность, образованная касательными к любой из этих асимптотических линий, является примитивной поверхностью к поверхности Ω.*

Прямые всех примитивных поверхностей к поверхности Ω образуют параболическую линейчатую конгруэнцию. Аналогично и прямые всех производных поверхностей данной развертывающейся поверхности образуют также параболическую линейчатую конгруэнцию.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ZUR LINIENGEOMETRIE DER ABWICKELBAREN FLÄCHEN

KAREL HAVLÍČEK, Praha.

(Vorgelegt am 14. Jänner 1955.)

Sind Plückersche Linienkoordinaten einer Geraden mit $\mathfrak{p}$ symbolisiert, dann ist jede Regelfläche durch die Gleichungen $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(t)$ gegeben, wo $\mathfrak{p}(t)$ Funktionen von t sind. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Regelfäche

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(t) \tag{1}$$

abwickelbar sei, ist: die Ableitungen $\frac{d\mathfrak{p}}{dt}$ stellen wieder eine Regelfläche dar, deren Gleichungen man in der Form

$$\mathfrak{q} = \frac{d\mathfrak{p}(t)}{dt} \tag{2}$$

schreiben kann. Die Fläche (2) nennen wir *abgeleitete* Fläche der abwickelbaren Fläche (1). Umgekehrt die abwickelbare Fläche (1) nennen wir *primitive* Fläche der Fläche (2).

Die Fläche (1) wird aber auch durch die Gleichungen $'\mathfrak{p} = f\mathfrak{p}(t)$ bestimmt, wobei f ein Proportionalitätsfaktor der Plückerschen Koordinaten bedeutet. Daraus folgt, dass zur gegebenen Fläche (1) unendlich viele abgeleiteten

Flächen bestehen. Ganz ähnlich bekommt man zur gegebenen Regelfläche unendlich viele primitiven Flächen.

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Flächen kann man folgendermassen zusammenfassen:

Die Rückkehrkurve der abwickelbaren Fläche ist eine Asymptottenlinie ihrer abgeleiteten Fläche.

Umgekehrt: *Sei Ω eine beliebige Regelfläche, welche Asymptotenlinien, die von Geraden verschieden sind, enthält; dann ist die Tangentenfläche jeder diesen Asymptotenlinien die primitive Fläche der Fläche Ω.* Daraus folgt:

Die Geraden aller primitiven Flächen der Fläche Ω bilden eine parabolische Geradenkongruenz. Und ähnlich die Geraden aller abgeleiteten Flächen einer abwickelbaren Fläche bilden auch eine parabolische Geradenkongruenz.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

ROZVOJ ANALYTICKÉ FUNKCE V „TAYLOROVU" ŘADU S PROMĚNNÝM STŘEDEM

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha.

(Došlo dne 14. ledna 1955.) DT 517.531:517.513

V této práci je uvažován „Taylorův" rozvoj analytické funkce s proměnným středem závislým na jistém parametru t. Pro spec. hodnoty t dostáváme tak různé rozvoje; mezi nimi pak Taylorův rozvoj a rozvoj konvergující v t. zv. polygonu konvergence (srov. podobný pojem v knize ÉMILA BORELA: Leçon sur les séries divergentes, Paris 1901, IV. a V. kap.). Spojitou změnou parametru lze konvergenční obor tohoto rozvoje spojitě měnit, zvětšovat nebo zmenšovat. Tyto rozvoje tvoří v jistém smyslu spojitý přechod mezi elementem-mocninnou řadou dané funkce a funkcí samou.

Budiž dána analytická funkce $f(z)$ svým elementem

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k . \tag{1}$$

Analytickým pokračováním tohoto elementu obdržíme množinu M singulárních bodů funkce $f(z)$, která může býti isolovaná (jako na př. u funkcí meromorfních) nebo neisolovaná (na př. singulární body vyplní oblouk nějaké křivky).

Sestrojme v z-rovině oblast H (tak zv. hvězdu) násl. způsobem: Spojme všechny singulární body funkce $f(z)$ s bodem z_0. Na každé z těchto přímek zvolme pak tu polopřímku s počátkem v singulárním bodě, jež neobsahuje bod z_0. Dostaneme tak jednoduše souvislou oblast H, která obsahuje vnitřek konvergenčního kruhu mocninné řady (1). Analytickým pokračováním řady (1) v této hvězdě dostaneme podle věty o monodromii jednoznačnou větev funkce $f(z)$. Znakem $f(z)$ budeme dále označovati pouze tuto větev. Sestrojíme nyní t. zv. polygon konvergence funkce $f(z)$ tím způsobem, že v každém singulárním bodě α vztyčíme kolmici na „paprsek" hvězdy. Každá kolmice rozdělí z-rovinu na dvě poloroviny. Průnik všech otevřených polorovin obsahujících bod z_0 jest oblastí, jež má tyto vlastnosti: jest konvexní; vnitřek konvergence kruhu řady (1) je její částí; funkce $f(z)$ je v ní regulární. Tuto oblast označíme zkráceně PK.

Poznámka. Je-li $f(z)$ meromorfní, pak hranicí PK je polygon. Vyplňují-li sing. body nějaký oblouk, pak tento oblouk je úpatnicí „příslušného" oblouku hranice PK pro střed z_0. Na př.: Když singulární body vyplňují přímku, pak hranicí PK je parabola, jež má onu přímku za vrcholovou tečnu a bod z_0 za ohnisko. Obecněji je hranice PK složena z oblouků křivek, které jsou obálkami kolmic vztyčených v singulárních bodech na „paprsky" hvězdy.

Věta 1. *Pro funkci $f(z)$ platí v jejím PK rozvoj*

$$f(z) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta) \, . \, (z - \zeta)^n \, , \tag{2}$$

kde $\zeta = z_0 + \frac{1}{2}(z - z_0)$.

Důkaz. Bod ζ je střed úsečky $z_0 z$. Je-li $z = z_1$ pevný bod, pak řada (2) je mocninná řada konvergující uvnitř kružnice $|z - \zeta| < |\alpha - \zeta|$, kde α je singulární bod nejbližší bodu ζ. Je-li nyní koncový bod z této úsečky proměnný, řada (2) konverguje pro všechna z splňující nerovnost

$$|z - z_0 - \tfrac{1}{2}(z - z_0)| < |\alpha - z_0 - \tfrac{1}{2}(z - z_0)| \, ,$$

t. j.

$$(\bar{\alpha} - \bar{z}_0)\, z + (\alpha - z_0)\, \bar{z} + \alpha \bar{z}_0 + \bar{\alpha} z_0 - 2\alpha\bar{\alpha} < 0 \, , \tag{3}$$

což je otevřená polorovina s bodem z_0, jejíž hranicí je kolmice v bodě α na spojnici jeho s bodem z_0. Průnik takovýchto polorovin pro všechny sing. body α jest právě PK funkce $f(z)$.

Poznámka. Proměnný střed řady (2) v případě, že hranicí PK je nějaká křivka, leží tedy v oblasti s bodem z_0, ohraničené křivkou homothetickou s hranicí PK pro střed v bodě z_0 a poměr 1 : 2.

Rozvoj pro funkci $f(z)$ v jejím PK se získá tedy velice „lacino": Jest to formálně Taylorova řada o proměnném středu ζ. Ve většině případů konverguje však tato řada v daleko větší oblasti než je konvergenční kruh mocninné řady (1) a její konvergence uvnitř PK je také stejnoměrná. Mohli bychom provádět analytické pokračování pomocí těchto „elementů". Řada (2) odstraňuje tedy tu „nepříjemnost", že konvergenční kruh se nedá rozšířit i když na jeho obvodě leží jediný singulární bod.

Pro $z_0 = 0$ dostaneme analogon k řadě Maclaurinově

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{z}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^n .$$

V dalším sestrojíme rozvoje pro funkci $f(z)$, jež tvoří jakýsi spojitý přechod mezi jejím Taylorovým rozvojem a funkcí samou, t. j. rozvoje, jejichž konvergenční obory se dají neomezeně zvětšovat. Přitom řada (2) bude v nich zahrnuta jako speciální případ. Nahradíme totiž kolmice na paprsky hvězdy v singulárních bodech kruhovými oblouky.

Věta 2. *Budiž $\zeta = z_0 + t(z - z_0)$, kde t je reálný parametr a $\alpha \neq z_0$ nechť je libovolný singulární bod funkce (z). Pak rozvoj*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta)(z - \zeta)^n \tag{4}$$

konverguje pro $t > \frac{1}{2}$ resp. $t < \frac{1}{2}$ vně resp. uvnitř každé kružnice incidentní se singulárním bodem α, se středem na přímce $z_0\alpha$, pro jejíž poloměr r v případě, že $t > \frac{1}{2}$ platí $\lim_{t\to 1} r = 0$. Při tom konvergenční obor obsahuje vždy jisté okolí bodu z_0.

Důkaz. Jako v předchozím případě řada (4) konverguje pro z splňující nerovnost

$$|z - z_0 - t(z - z_0)| < |\alpha - z_0 - t(z - z_0)| ,$$

kde α je nejbližší singulární bod k bodu ζ, t. j. pro

$$(1 - 2t) z\bar{z} + [t\bar{\alpha} - (1 - t) \bar{z}_0] z + [t\alpha - (1 - t) z_0] \bar{z} + (1 - t) \,.$$
$$. (\bar{\alpha} z_0 + \alpha \bar{z}_0) - \alpha\bar{\alpha} < 0 \,.$$

Pro $\frac{1}{2} < t$ resp. $t < \frac{1}{2}$ dostáváme tak vnějšek resp. vnitřek kružnice incidentní se singulárním bodem α, o středu v bodě $z^* = \frac{t - 1}{2t - 1} z_0 + \frac{t}{2t - 1} \alpha$ a poloměru $r = \left|\frac{t - 1}{2t - 1}\right| |z_0 - \alpha|$. Řada (4) konverguje tedy v prvním případě vně všech takovýchto kružnic, ve druhém případě uvnitř. Jest $\lim_{t\to 1} r = 0$. Konvergenční obor vždy existuje a obsahuje nějaké okolí bodu z_0. Nechť totiž β je střed úsečky $z_0\alpha$. Roste-li parametr t od $-\infty$ do $+\infty$, pohybuje se střed z^* po přímce $z_0\alpha$ od bodu β přes z_0 do ∞ a odtud zase přes bod α k β. Pro $t < 0$ je uvnitř úsečky $z_0\beta$ (pro $t = 0$ je $z^* = z_0$), pro $0 < t < \frac{1}{2}$ je na polopřímce s počátečním bodem z_0, jež neobsahuje α (pro $t = \frac{1}{2}$ je $z^* = \infty$), pro $\frac{1}{2} < t < 1$ je na paprsku hvězdy (pro $t = 1$ v bodě α), pro $1 < t$ uvnitř úsečky $\alpha\beta$ (pro $t = \infty$ zase v bodě β).

Poznámka. Jako spec. případy dostaneme z rozvoje (4) Taylorovu řadu (1) (pro $t = 0$), řadu o jednom členu, totiž $f(z)$ (pro $t = 1$) a řadu (2) (pro $t = \frac{1}{2}$). Pro $\frac{1}{2} \leq t < 1$ obsahuje příslušný konvergenční obor polygon konvergence, pro $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ konvergenční kruh řady (1).

Ukážeme, že polygon konvergence funkce $f(z)$ lze ještě jistým způsobem deformovat. Omezíme se pro jednoduchost na případ $z_0 = 0$.

Položíme-li

$$t = r + is \,, \quad z = x + iy \,, \quad \alpha = a + bi \,,$$

kde r, s, x, y, a, b jsou reálná čísla, dostaneme z nerovnosti (3)

$$(1 - 2r)(x^2 + y^2) + 2(ar + sb)\, x + 2(br - sa)\, y - (a^2 + b^2) < 0 \,.$$

Pro $r = \frac{1}{2}$ je to zase otevřená polorovina s počátkem, jejíž hranicí jest přímka incidentní s α. Pro úhel φ, který svírá paprsek hvězdy s touto přímkou, platí

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2s}$. Je tedy tento úhel nezávislý na singulárním bodě α. Pro $s = 0$ dostaneme PK, kdežto pro $s \neq 0$ dostaneme oblast, jež vznikne z PK otočením každé jeho strany kolem bodu α o úhel $\varphi - \frac{1}{2}\pi$. Tento „deformovaný" PK neobsahuje tedy již konvergenční kruh řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, z^n$. Je-li $r \neq \frac{1}{2}$, $s \neq 0$, dostaneme jako konvergenční obor průnik všech vnějšků resp. vnitřků kružnic majících v bodech α tečny o směrnicích $\frac{ar - sb - a}{-br - sa + b}$. Úhel φ, který svírá paprsek hvězdy s příslušnou tečnou, je zase nezávislý na poloze bodu α, neboť platí $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1-r}{s}$.

Nechť nyní $f(z)$ je racionální funkce.

Analogicky s technikou rozvoje funkcí v potenční řady uvedeme zde jiný způsob rozvoje funkce $f(z)$ v řadu (4) pro $t = 1 - \frac{1}{2^m}$, kde m je přirozené číslo.

Rozložme racionální funkci $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (kde polynomy $P(z)$, $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ jsou nesoudělné, při čemž $a_0 \neq 0$ a stupeň $Q(z)$ je větší než stupeň $P(z)$) na částečné zlomky tvaru

$$\frac{A}{(\alpha - z)^k} \quad (\alpha \neq 0)\,.$$

Platí nyní

$$\frac{A}{\alpha^k}\left(1 - \frac{z}{2\alpha} - \frac{z}{2\alpha}\right)^{-k} = \frac{2^k A}{(2\alpha - z)^k}\left(1 - \frac{z}{2\alpha - z}\right)^{-k}.$$

Jestliže $|z| < |2\alpha - z|$, pak

$$\frac{A}{(\alpha - z)^k} = \frac{2^k A}{(2\alpha - z)^k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-k}{n} \left(\frac{z}{2\alpha - z}\right)^n. \tag{5}$$

Množina bodů splňujících předchozí nerovnosti (pro každý singulární bod α) je však PK dané funkce. Sečtením všech řad (5) pro všechna α dostaneme žádaný rozvoj $f(z)$ v PK. Snadno se zjistí, že tento rozvoj lze psáti ve tvaru uvedeném ve větě 1.

Proveďme tento postup ještě jednou, t. j. položme

$$\frac{A}{(\alpha - z)^k} = \frac{2^k A}{(2\alpha - z)^k}\left(1 - \frac{z}{4\alpha - 2z} - \frac{z}{4\alpha - 2z}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{2^k A}{(2\alpha - z)^k}\left(1 - \frac{z}{4\alpha - 2z}\right)^{-k}\left(1 - \frac{z}{4\alpha - 3z}\right)^{-k} = \frac{4^k A}{(4\alpha - 3z)^k}\left(1 - \frac{z}{4\alpha - 3z}\right)^{-k}.$$

Za předpokladu, že

$$|z| < |4\alpha - 3z|\,,$$

je tedy

$$\frac{A}{(\alpha - z)^k} = \frac{2^{2k}A}{[2^2\alpha - (2^2 - 1)\, z]^k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-k}{n} \frac{z^n}{[2^2\alpha - (2^2 - 1)\, z]^n} \, .$$

Tato řada konverguje vně kružnice

$$2z\bar{z} - 3\bar{\alpha}z - 3\alpha\bar{z} + 4\alpha\bar{\alpha} = 0 \, .$$

Sečtením všech takových řad pro všechna α dostaneme rozvoj konvergující vně všech těchto kružnic.

Po m takovýchto krocích dostaneme indukcí

$$\frac{A}{(\alpha - z)^k} = \frac{2^{mk}A}{[2^m\alpha - (2^m - 1)\, z]^k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-k}{n} \frac{z^n}{[2^m\alpha - (2^m - 1)\, z]^n} \, .$$

Tato řada konverguje vně kružnice incidentní s bodem α, o poloměru $r = \frac{|\alpha|}{2^m - 2}$ a středu $z = \frac{2^m - 1}{2^m - 2}\, \alpha$.

Snadno zjistíme, že sečtením těchto řad pro všechna α dostaneme řadu (4), kde $z_0 = 0$, $t = 1 - \frac{1}{2^m}$, t. j.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)} \left(\frac{2^m - 1}{2^m}\, z\right) \left(\frac{z}{2^m}\right)^n . \tag{7}$$

Tedy po m krocích, kde

$$m = \left[\frac{\log \left(\frac{M}{\varepsilon} + 2 \right)}{\log 2} \right] + 1 \, , \quad (M = \mathrm{Max}\, (|\alpha|)) \, ,$$

dostaneme tak řadu konvergující vně všech kružnic incidentních s body α o poloměrech menších než ε.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

O EXISTENČNÝCH ALGEBRÁCH

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Došlo dne 29. ledna 1955.) DT: 512.9

Odsek 1 (doplnený na návrh recenzenta) má úvodný charakter. Jeho cieľom je oboznámiť čitateľa s pojmami ďalej užívanými (z ktorých nový je len pojem existenčnej algebry) a stručne informovať o význame doplňkovitosti relácií kongruentnosti. V odseku 2 sa dokazuje, že každá trieda existenčných algebier obsahuje algebru, ktorej relácie kongruentnosti sú nie doplňkové. V 3. odseku je dokázaná nesprávnosť istého tvrdenia G. Birkhoffa o algebrách s jednoprvkovými operáciami.

1

V abstraktnej algebre sa vyšetrujú množiny, na ktorých sú definované určité operácie. Za podstatne dôležité pritom nepovažujeme vlastnosti prvkov týchto množín, ale vlastnosti operácií. Zovšeobecnením známych pojmov grupy, okruhu, telesa a pod. dochádzame k obecnému pojmu algebry (viď [1], [2]):

Nech je daná množina A a množina operácií $F = \{f_\alpha\}$, pre ktoré platí: ku každej operácii $f_\alpha \in F$ existuje prirodzené číslo $n = n(\alpha)$ tak, že operácia f_α priradzuje každej postupnosti $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ($x_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$) určitý prvok $x = f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ z množiny A. Množina A s danou množinou operácií sa nazýva algebra.

Operácie $f_\alpha \in F$ nazývame základnými operáciami; bez ujmy všeobecnosti môžeme predpokladať, že v množine operácií F sa nachádza tiež operácia f_{α_1}, pre ktorú $n(\alpha_1) = 1$ a pre každé $x \in A$ platí $f_{\alpha_1}(x) = x$. Základné operácie nazývame tiež polynomami 1. stupňa. Indukciou definujeme polynomy n-tého stupňa ako výrazy tvaru $f_\alpha(u_1, \ldots, u_n)$, kde $f_\alpha \in F$ a $u_1, \ldots, u_n$ sú polynomy najviac $n - 1$ stupňa. Význam výrazu „funkčná hodnota polynomu" a „polynom o n premenných" je zrejmý. Ak g, h sú polynomy o n premenných, a ak pre každú postupnosť $\{x_1, \ldots, x_n\}$ prvkov z A platí $g(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n)$, hovoríme, že polynomy g, h sú si identicky rovné a píšeme $g \equiv h$.

Primitívnou triedou algebier nazývame triedu všetkých algebier, pre ktoré platí: 1. množina operácií $F = \{f_i\}$ je pre každú algebru tejto triedy tá istá, 2. je daná *množina dvojíc polynomov G tak, že pre každú dvojicu polynomov $(g_i^1, g_i^2) \in G$ a pre každú algebru tejto triedy platí $g_i^1 \equiv g_i^2$.*

Mnohé vety, ktoré boli pôvodné známe pre niektoré špeciálne triedy algebier (napr. pre grupy), sa dajú zovšeobecniť na obecné algebry. Pri zovšeobecnení vynikne podstata vety, ukáže sa logický dosah potrebných predpokladov a „odfiltrujú" sa vlastnosti špeciálneho typu algebry, ktoré na platnosť vety nemajú vplyv. Typickým príkladom takéhoto postupu sú vety Jordan-Hölderova a Schreierova (viď napr. [3]), dokázané pôvodne pre grupy, z ktorých temer bezprostredne vyplýva komplex ďalších dôležitých viet. Rad závažných prác bol venovaný postupnému zovšeobecňovaniu Jordan-Hölderovej vety (výčet týchto prác je uvedený v knihe [1], str. 89 (angl. vydanie); na príslušnom mieste ruského prekladu pripomína prekladateľ, že v poslednom čase vyšlo viac nových prác o zovšeobecnení vety Jordana-Höldera a uvádza tri najdôležitejšie z nich).[1])

Pri zovšeobecnení vety Jordana-Höldera naobecné algebry je podstatný predpoklad o doplňkovosti relácií kongruentnosti. Tento pojem je definovaný nasledovne:

Relácia kongruentnosti na algebre A je ekvivalencia[2]) *$x\,R\,y$ taká, že pre každé $f_\alpha \in F$ zo vzťahov $x_i\,R\,y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ vyplýva $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\,R\,f_\alpha(y_1, \ldots, y_n)$. (Hovoríme tiež, že relácia R je súhlasná so všetkými operáciami $f_\alpha \in F$.) Relácie kongruentnosti (resp. ekvivalencie) R, R' na algebre A sú doplňkové, ak pre každú trojicu $x, y, z \in A$ zo vzťahov $x\,R\,y$, $y\,R'\,z$ vyplýva existencia prvku u, pre ktorý platí $x\,R'\,u$, $u\,R\,z$.*

Podľa G. Birkhoffa dôležitosť doplňkových relácií kongruentnosti prvýkrát výslovne zdôraznili P. Dubreil a M. Dubreil-Jacotin (viď [4]). Z predpokladu doplňkovosti relácií kongruentnosti vyplývajú okrem spomínaných viet typu Jordana-Höldera aj vety o rozkladoch obecnej algebry na priamy súčin a polopriamy súčin, umožňujúce za určitých predpokladov skúmať štruktúru algebier a spôsob, akým sú tieto algebry zostrojené pomocou algebier s jednoduchšími vlastnosťami. O. Borůvka a O. Ore podrobne vyšetrili vlastnosti doplňkových ekvivalencií; ukázalo sa, že tento pojem patrí medzi základné pojmy v teorii rozkladov množín (viď [5], str. 10—19, [6], str. 590).

Z predošlého vyplýva, že má význam položiť si otázku: Za akých predpokladov sú všetky relácie kongruentnosti na algebrách určitej triedy navzájom doplňkové? V nedávno vyšlej práci [2] A. I. Malcev úplne vyriešil túto otázku pre primitívne triedy algebier. Odvodil nutnú a postačujúcu podmienku, ktorú musí splňovať primitívna trieda, aby každá algebra tejto triedy mala všetky relácie kongruentnosti navzájom doplňkové.

---

[1]) Vo februárovom čísle Mathematical Reviews (1955) sa recenzujú tiež dve práce o zovšeobecnení Jordan-Hölderovej vety.

[2]) Ekvivalencia je binárna relácia R, splňujúca podmienky 1. $x\,R\,x$ pre každé $x \in A$, 2. $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$, 3. $x\,R\,y$, $y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$.

Sú známe mnohé dôležité triedy algebier, ktoré sú nie primitívnymi triedami. Majú totiž okrem vlastností, ktoré možno popísať pomocou identít, aj vlastnosti iného charakteru. Najdôležitejšie vlastnosti iného druhu sú tieto:

1. *Existenčné vlastnosti. Ak $g(z, z_1, \ldots, z_n)$ je pevne zvolený polynom o $n + 1$ premenných v triede $\mathfrak{A}$, môžeme vysloviť nasledovnú vlastnosť, žiadanú od triedy $\mathfrak{A}$: ak S je ľubovolná algebra triedy $\mathfrak{A}$ a ak $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sú ľubovoľné prvky z algebry S, existuje v algebre S jediný prvok x, vyhovujúci rovnici $g(x, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) = x_{n+1}$.* (I)

2. *Relácie. Na algebrách triedy $\mathfrak{A}$ môžu byť definované isté relácie, súvisiace s algebraickými operáciami tejto triedy.*

Bolo by zaujímavé uvážiť, do akej miery a akým spôsobom sa dajú Maľcevove výsledky rozšíriť aj na algebry, majúce vlastnosti všetkých spomenutých druhov. Zdá sa účelným vyšetrovať najprv niektorý zo špeciálnych prípadov, v istom zmysle opačných k pojmu primitívnej triedy: ,,existenčné algebry" (v ktorých nepredpokladáme žiadne identity, len existenčné vlastnosti), alebo ,,algebry s reláciami" (bez existenčných vlastností a bez identít, týkajúcich sa samotných algebraických operácií).

V tejto poznámke sa vyšetruje doplňkovosť relácií kongruentnosti pre triedy existenčných algebier. Dokážeme, že výsledky sú v určitom zmysle negatívne: existenčné vlastnosti samy o sebe (bez ich kombinácie s vlastnosťami iného druhu) nemajú žiadny vplyv na doplňkovosť relácií kongruentnosti. Zdá se zaujímavým, že v súhre s vlastnosťami, definovanými pomocou identít, takýto vplyv môžu mať; nech $\mathfrak{A}$ je trieda primitívnych algebier, z ktorých nie všetky majú relácie kongruentnosti doplňkové. Nech $\mathfrak{A}_1$ je trieda všetkých algebier, ktoré patria do triedy $\mathfrak{A}$ a ktoré okrem toho splňujú určité existenčné vlastnosti. Môže sa stať, že všetky algebry triedy $\mathfrak{A}_1$ majú relácie kongruentnosti doplňkové (viď príklad v poznámkach za definíciou 2).

Ak každá algebra S triedy $\mathfrak{A}$ má jediný prvok, potom vyšetrovanie doplňkovosti relácií kongruentnosti na algebrách triedy $\mathfrak{A}$ je triviálne. V ďalšom budeme predpokladať, že aspoň jedna algebra uvažovanej triedy algebier má viac ako jeden prvok. (Z nižšie uvedenej vety 2 vyplýva, že pre triedy existenčných algebier takýto predpoklad nemusíme vyslovovať: pre ľubovoľnú triedu existenčných algebier $\mathfrak{A}$ a ľubovoľné kardinálne číslo α existuje taká algebra S patriaca do triedy $\mathfrak{A}$, že kardinálne číslo množiny S je väčšie ako α.)

Pripomeňme nakoniec definíciu priameho súčinu dvoch algebier a faktorovej algebry vzhľadom k určitej relácii kongruentnosti:

Nech A, B sú algebry triedy $\mathfrak{A}$ s množinou operácií F. Nech C je množina všetkých dvojíc (a, b), $a \in A$, $b \in B$. Pre $f \in F$ definujeme

$$f((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = (f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) .$$

Tým je na množine C definovaná určitá algebra s množinou operácií F; označujeme ju $A \times B$ a nazývame priamym súčinom algebier A, B.

Nech R je relácia kongruentnosti na algebre A s množinou operácií F. Ak $x \in A$, označme $\bar{x}$ množinu všetkých prvkov $x' \in A$, pre ktoré platí $x' R x$. Systém všetkých množín $\bar{x}$ označme $\bar{A}$. Pre $f \in F$ definujeme $f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{y}$. Množinu $\bar{A}$ s takto definovanými operáciami $f \in F$ nazývame faktorovou algebrou na A vytvorenou reláciou kongruentnosti R a označujeme A/R.

2

Definícia 1. *Nech $\mathfrak{A}$ je (neprázdna) trieda všetkých algebier, ktoré majú nasledujúce vlastnosti: 1. v každej algebre triedy $\mathfrak{A}$ sú definované základné operácie $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $f_i \in A$; pre rôzne operácie f_i môžu byť príslušné čísla n rôzne, $n = n(i)$, množina $\{n(i)\}$ je ohraničená a existuje aspoň jedna operácia $f_{i_0} \in A$, pre ktorú $n(i_0) \geq 2$; 2. je daná množina polynomov $g_j(z, z_1, \ldots, z_n)$, $g_j \in B$, zostrojených pomocou základných operácií $f_i \in A$ tak, že platí: ak $g \in B$ a ak S je ľubovoľná algebra triedy $\mathfrak{A}$, potom ku každej konečnej postupnosti o $n + 1$ prvkoch $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$ existuje jediný prvok $x \in S$, vyhovujúci rovnici $g(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$. Hovoríme, že $\mathfrak{A}$ je trieda existenčných algebier.*

Poznámky. 1. Predpoklad o existenci aspoň jednej základnej operácie f_{i_0}, ktorá má najmenej dve premenné, je potrebný k tomu, aby bolo možné zostrojiť aspoň jeden polynom g_j, ktorý by mal viac ako jednu premennú. Niekoľko poznámok o algebrách, v ktorých každá základná operácia (a tedy tiež každý polynom) má len jednu premennú, tvorí obsah nasledujúceho odseku 3.

2. Nech S je algebra, patricaca do triedy existenčných algebier $\mathfrak{A}$. Používajme (všade ďalej) označenia z definície 1. Nech R je relácia kongruentnosti na S. Príslušná faktorová algebra nemusí patriť do triedy $\mathfrak{A}$; od relácie R nežiadame, aby zachovávala „existenčné vlastnosti". Ak $G \in B$ a $\bar{x}$ označuje triedu vzhľadom k relácii R, obsahujúcu prvok x, rovnica $g(\bar{x}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{x}_{n+1}$ má zrejme aspoň jedno riešenie, môže mať však aj viac riešení.

Definícia 2. *a) Nech $\mathfrak{A}$ je nejaká trieda algebier. Budeme hovoriť, že $\mathfrak{A}$ má vlastnosť doplňkovosti, ak pre ľubovoľnú algebru S z triedy $\mathfrak{A}$, ľubovoľné prvky $x, y, z \in S$ a ľubovoľné relácie kongruentnosti R_1, R_2 na S zo vzťahu $x R_1 y R_2 z$ vyplýva existencia prvku u, vyhovujúceho vzťahu $x R_2 u R_1 z$.*

b) Budeme hovoriť, že trieda algebier $\mathfrak{A}$ má vlastnosť silnej nedoplňkovosti, ak obsahuje algebru S, pre ktorú platí: K ľubovoľnému prvku $x \in S$ existujú relácie kongruentnosti R_1, R_2 na S a nekonečne mnoho dvojíc $y, z \in S$, tak, že platí $x R_1 y R_2 z$, a v S neexistuje prvok u, ktorý by vyhovoval vzťahu $x R_2 u R_1 z$.

c) Budeme hovoriť, že trieda algebier $\mathfrak{A}$ má vlastnosť (**A**)*, ak pre ľubovoľnú algebru S, patriacu do $\mathfrak{A}$, platí: každý vytvorujúci rozklad R na S je jednoznačne určený ľubovoľnou zo svojich tried; ak $\mathfrak{A}$ nemá vlastnosť* (**A**)*, hovoríme, že má vlastnosť* (**A**′)*.*

Poznámky. 1. Ak trieda $\mathfrak{A}$ má vlastnosť silnej nedoplňkovosti, zrejme nemá vlastnosť doplňkovosti; ak nemá vlastnosť doplňkovosti, nemusí ešte mať vlastnosť silnej nedoplňkovosti.

2. Nech $\mathfrak{A}$ je primitívna trieda algebier, majúca vlastnosť silnej nedoplňkovosti a vlastnosť (**A**'). Nech $\mathfrak{B}$ je trieda tých algebier, ktoré patria do $\mathfrak{A}$ a ktoré mimo identít, žiadaných v triede $\mathfrak{A}$, splňujú ešte nejakú existenčnú vlastnosť. Môže sa stať, že trieda $\mathfrak{B}$ má vlastnosť doplňkovosti a vlastnosť (**A**). Príklad. Nech $\mathfrak{A}$ je trieda všetkých pologrúp. Ľahko sa zistí, že $\mathfrak{A}$ má vlastnosť silnej nedoplňkovosti a vlastnosť (**A**'). Nech $\mathfrak{B}$ je trieda tých pologrúp S, v ktorých pre $a, b \in S$ rovnice $ax = b$, $ya = b$ majú jediné riešenie. Potom $\mathfrak{B}$ je trieda všetkých grúp; je známe, že trieda $\mathfrak{B}$ má vlastnosť doplňkovosti a vlastnosť (**A**).

3. Typickým príkladom triedy existenčných algebier je trieda všetkých kvazigrúp (ak kvazigrupu definujeme ako algebru s jednou binárnou operáciou — násobením a žiadame existenciu prvkov x, y, pre ktoré je $ax = b$, $ya = b$). V Birkhoffovom probléme 31 (viď [1], str. 130) je položená otázka, či trieda všetkých kvazigrúp $\mathfrak{A}$ má vlastnosť doplňkovosti. G. TREVISAN v práci [7] a VAN ŠI-CIAN v práci [8] (túto prácu poznám len z referátu v časopise Referativnyj žurnal, *11*, 1954) dokázali, že trieda všetkých kvazigrúp nemá vlastnosť doplňkovosti. Uvedieme jednoduchý dôkaz nasledujúceho silnejšieho tvrdenia:

Veta 1. *Každá trieda existenčných algebier má vlastnosť silnej nedoplňkovosti a vlastnosť* (A').

Dôkaz. Nech $\mathfrak{A}$ je trieda existenčných algebier. Nech S_0 je algebra triedy $\mathfrak{A}$, obsahujúca aspoň dva prvky. Priamy súčin $S_0 \times S_0 = S$ je zrejme tiež algebra triedy $\mathfrak{A}$; algebra S obsahuje viac ako tri prvky. Nech N je množina všetkých celých čísiel. Uvažujme množinu S' všetkých funkcií $x = f(n)$, ktorých oblasťou definície je N, a ktorých funkčné hodnoty patria do S. Nech $f_i(x_1, \ldots, x_m)$ je operácia, definovaná na algebrách triedy $\mathfrak{A}$. Ak $h_1, \ldots, h_m \in S'$, utvoríme pomocou týchto prvkov novú funkciu $f_i(h_1, \ldots, h_m) \in S'$ tak, že položíme

$$f_i(h_1, \ldots, h_m)(n) = f_i(h_1(n+1), \ldots, h_m(n+1))$$

pre každé $n \in N$. Tým sme na S' definovali všetky operácie f_i, ktoré sú definované na algebrách triedy $\mathfrak{A}$. Uvažujme rovnicu

$$g(h, h_1, \ldots, h_n) = h_{n+1} ,$$

kde $h_1, \ldots, h_{n+1}$ sú dané prvky z množiny S'. Ľahko sa dokáže, že táto rovnica má jediné riešenie $h(n)$. Teda S' je algebra triedy $\mathfrak{A}$.

Nech h_1 je ľubovoľný prvok algebry S'. Zvoľme si číslo $n_0 \in N$ a zostrojme funkcie $h_2(n)$, $h_3(n)$ takto:

1. pre $n = n_0$ si zvolíme hodnoty $h_2(n_0)$, $h_3(n_0) \in S$ tak, aby prvky $h_1(n_0)$, $h_2(n_0)$, $h_3(n_0)$ boli navzájom rôzne;

2. pre $n < n_0$ položíme $h_2(n_0) = h_3(n_0) = h_1(n_0)$;
3. pre $n > n_0$ môžu byť $h_2(n)$, $h_3(n)$ ľubovoľné prvky, patriace do S.

Definujme relácie R_1, R_2 na S' takto: pre $h, h' \in S'$ položíme $h\, R_1\, h'$ $(h\, R_2\, h')$, ak

1. pre $n < n_0$ platí $h(n) = h'(n)$,
2. prvky $h(n_0)$, $h'(n_0)$ sú si alebo rovné, alebo jeden z nich je rovný $h_1(n_0)$ $(h_2)(n_0))$ a druhý $h_3(n_0)$.

Ľahko sa zistí, že R_1, R_2 sú relácie kongruentnosti na S' a že pre ne platí $h_1 R_1 h_3 R_2 h_2$.

Ak by existoval prvok $h_4 \in S'$, vyhovujúci podmienkám

$$h_1 R_2 h_4 \ (1)\,, \qquad h_4 R_1 h_2 \ (2)\,,$$

vyplývalo by zo vzťahu (1) $h_1(n_0) = h_4(n_0)$ a zo vzťahu (2) $h_4(n_0) = h_2(n_0)$, t. j. $h_1(n_0) = h_2(n_0)$, čo je spor s predpokladom. Keďže hodnoty $h_2(n)$, $h_3(n)$ pre $n > n_0$ sú ľubovoľné, existuje takýchto dvojíc h_2, h_3 nekonečne mnoho. Tým je dokané, že trieda $\mathfrak{A}$ má vlastnosť silnej nedoplňkovosti.

Definujme ďalej na algebre S' reláciu R_3 tak, že položíme $h\, R_3\, h'$ vtedy a len vtedy, ak pre $n < n_0$ platí $h(n) = h'(n)$. Ľahko sa zistí, že R_3 je relácia kongruentnosti na S. Nech $\bar{h}$ $(\tilde{h})$ je trieda vytvorujúceho rozkladu $R_1(R_3)$, obsahujúca prvok h. Zrejme platí $\bar{h}_2 = \tilde{h}_3$. Keďže $R_1 \neq R_3$, trieda $\mathfrak{A}$ má vlastnosť (**A**').

Poznámka. Nech $\mathfrak{A}$ je trieda existenčných algebier, nech S je algebra triedy $\mathfrak{A}$, nech C je množina všetkých relácií kongruentnosti na S, nech C_1 je množina tých relácií kongruentnosti na S, ktoré zachovávajú aj existenčné vlastnosti. (Podrobnejšie: ak $R \in C_1$, $g \in B$ a $\bar{x}$ je trieda vzhľadom k relácii R, obsahujúca prvok x, potom rovnica $g(\bar{x}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{x}_{n+1}$ má jediné riešenie $\bar{x}$.) Ak by sme si všímali len relácie kongruentnosti, patriace do C_1, úvaha by sa redukovala na prípad, vyšetrovaný A. I. Maľcevom. Mohli by sme totiž považovať priradenie $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \to x$ (pričom x je prvok, vyhovujúci rovnici (I)), za novú operáciu F, definovanú na algebrách triedy $\mathfrak{A}$. Relácie množiny C_1 sú súhlasné s operáciou F; medzi operáciami $f \in A$ a novozavedenými operáciami F by mohli platiť nejaké identity. Množina C_1 môže mať vlastnosti, ktoré neplatia pre celú množinu C. V práci [2] Maľcev dokázal tvrdenie: ak S je kvazigrupa, potom ľubovoľné dve relácie kongruentnosti z množiny C_1 sú doplňkové. Z predošlej vety 1 plynie, že trieda všetkých kvazigrúp má vlastnosť silnej nedoplňkovosti.

Definícia 3. *Nech $\mathfrak{A}$ je trieda existenčných algebier s operáciami $f_i \in A$ a s existenčnými rovnicami $g_i = x_{n+1}$, $g_i \in B$. Nech S je algebraický systém, v ktorom pre niektoré usporiadané skupiny prvkov sú definované operácie $f(x_1, \ldots, x_n)$, a v ktorých pre $g_i \in B$ rovnica $g_i(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ má najviac jedno riešenie. Potom hovoríme, že S je čiastočná algebra triedy $\mathfrak{A}$. (Množinu S, v ktorej sú nie definované žiadne operácie, považujeme tiež za čiastočnú algebru triedy $\mathfrak{A}$).*

Veta 2. *Každá čiastočná algebra triedy existenčných algebier $\mathfrak{A}$ sa dá vnoriť do vhodnej algebry triedy $\mathfrak{A}$. (Podrobnejšie: ak S_1 je čiastočná algebra triedy $\mathfrak{A}$, existuje algebra S triedy $\mathfrak{A}$, pre ktorú platí 1. $S_1 \subset S$, 2. ak pre $x_1, \ldots, x_n \in S_1$ je v S_1 definovaná operácia $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ ($f_i \in A$), potom jej výsledok v S_1 je rovnaký ako výsledok tejto operácie, provedenej v S.)*

Princip dôkazu je rovnaký ako v dôkaze vety 1 v práci [9]. Náčrt dôkazu: uvažujme všetky polynomy, utvorené pomocou operácií, definovaných na algebrách triedy $\mathfrak{A}$. Ak pre ľubovoľný takýto polynom $F(z_1, \ldots, z_n)$ nie je definovaný výsledok operácie $F(x_1, \ldots, x_n)$ $(x_1, \ldots, x_n \in S_1)$, považujeme výraz $F(x_1, \ldots, x_n)$ za nový prvok, ktorý pridáme k množine S_1; po pridaní všetkých takýchto prvkov dostávame množinu S_1'. Ak $g_1 \in B$ a ak pre $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S_1$ rovnica $g_i(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ nemá riešenie v S_1 (a teda ani v S_1'), pridáme k množine S_1' nový prvok x, pre ktorý položíme z definície $g_i(x, x_1, \ldots, x_n)$ rovné x_{n+1}. Po pridaní všetkých takto získaných prvkov x dostávame množinu $S_2 \supset S_1'$. Analogicky zostrojíme k množine S_2 množinu S_3 atď. Ľahko sa zistí, že na množine $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ sú definované všetky operácie $f_i \in A$ a každá rovnica $g_i(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$, $g_i \in B, x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$ má v S jediné riešenie. Teda S vyhovuje podmienkám vety.

Poznámka. Nech na množine S_1 sú nie definované žiadné operácie. Utvorme príslušnú algebru S podľa dôkazu predošlej vety. Je prirodzené nazvať S voľnou algebrou triedy $\mathfrak{A}$, vytvorenou množinou generátorov S_1. Nech α resp. β resp. γ sú kardinálne čísla množiny S_1, resp. A, resp. S. Z predošlej konštrukcie vyplýva platnosť tvrdení:

1. Ak množiny S_1, A sú najviac spočetné, potom množina S je spočetná.

2. Ak aspoň jedno z kardinálnych čísiel α, β je nekonečné, potom $\gamma = \max .(\alpha, \beta)$.

3. K ľubovoľnému nekonečnému kardinálnemu číslu $\delta \geqq \beta$ existuje algebra S triedy $\mathfrak{A}$, ktorá má kardinálne číslo δ.

3

Tento odsek sa týka doplňkových relácií kongruentnosti, nesúvisí však priamo s existenčnými algebrami. Hovoríme, že algebra A s množinou operácií $f_\alpha \in F$ má len jednoprvkové operácie, ak pre všetky operácie $f_\alpha \in F$ platí $n(\alpha) = 1$. V knihe [1] vyslovuje G. Birkhoff nasledujúce tvrdenie (v inej slovnej formulácii):

(B) *Ak algebra A má len jednoprvkové operácie, potom všetky jej relácie kongruentnosti sú dolpňkové vtedy a len vtedy, keď algebra A má najviac tri relácie kongruentnosti:*

Tvrdenie „vtedy“ je zrejmé (ak má algebra najviac tri relácie kongruentnosti, potom má najviac jednu netriviálnu[3]) reláciu kongruentnosti, z čoho plynie tvrdenie „vtedy").

Tvrdenie „len vtedy" je nesprávne. Existuje nekonečne mnoho algebier, ktoré majú len jednoprvkové operácie, ktorých všetky relácie kongruentnosti sú doplňkové a ktoré majú viac ako tri relácie kongruentnosti. Dôkaz vyplýva z nasledujúcich jednoduchých príkladov.

Príklad 1. Nech G je grupa, ktorá má viac ako tri relácie kongruentnosti. Uvažujme algebru A, definovanú takto: prvky algebry A sú tie isté ako prvky grupy G; množina operácií $F = \{f_a, g_a\}$ na algebre A je tvorená všetkými operáciami tvaru

$$f_a(x) = ax\,, \quad g_a(x) = xa\,,$$

kde výrazy vpravo sú súčiny v grupe G a a je ľubovoľný prvok grupy G. Zrejme každá relácia R, ktorá je reláciou kongruentnosti na grupe G, je zároveň reláciou kongruentnosti na algebre A, a opačne. Algebra A má viac ako tri relácie kongruentnosti, všetky relácie kongruentnosti doplňkové a len jednoprvkové operácie.

V predošlom príklade algebra A je zrejme len „iným vyjadrením" grupy G. Obecnejšie, je zejmé, že n-árna operácia $f(x_1, \ldots, x_n)$ se dá „vyjadriť" pomocou systému (môže sa stať, že nekonečného) jednoprvkových operácií $f(x, a_1, \ldots, \ldots, a_{n-1})$, atď., kde a_i sú pevné prvky algebry A. Uvedený príklad nás nabáda zosilniť predpoklady v tvrdení (**B**) a vylúčiť možnosť „iného vyjadrenia" tým, že žiadame, aby algebra A mala len jedinú operáciu f, a aby táto operácia bola jednoprvková. Takto zúžené tvrdenie (**B**) by však bolo tiež nesprávne, ako ukazuje nasledujúci príklad:

Príklad 2. Nech algebra A má 4 prvky, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, a jednoprvkovú operáciu f, pre ktorú platí $f(1) = 4$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $f(4) = 1$. Netriviálne relácie kongruentnosti na A sú dané rozkladmi $\{(1, 2), (3, 4)\}$, $\{(1, 3), (2, 4)\}$, $\{(1, 4), (2, 3)\}$. Ľahko sa preverí, že všetky relácie kongruentnosti sú navzájom doplňkové.

LITERATÚRA

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, New York, 1948 (Теория структур, Москва, 1952).

[2] *А. И. Мальцев:* К общей теории алгебраических систем, Мат: сборник *35* (77) (1954), 3—20.

[3] *А. Г. Курош:* Теория групп, Москва, 1953.

[4] *P. Dubreil:* Algèbre, Paris, 1946.

[5] *O. Borůvka:* O rozkladech množin, Rozpravy II. tř. České Akad., roč. *53* (1943), č. 23.

[6] *O. Ore:* Theory of equivalence relations, Duke Math. J. *9* (1942), 573—627.

[7] *G. Travisan:* Construzione di quasigruppi con relazioni di congruenza non permutabili, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova *22* (1953), 11—22.

[3]) t. j. rôznu od relácie R_m, v ktorej $x R y$ vtedy a len vtedy, keď $x = y$, a zároveň rôznu od relácie R_M, v ktorej $x R y$ pre každú dvojicu $x, y \in A$.

[8] *Van Ši-Cian:* Poznámky o doplňkovosti relácií kongruentnosti, Šusjue Sjuebao *3* (1953), č. 2, 133—141 (čínsky, ang. résumé), (Реферативный журнал 1 (1954), 5477).

[9] *G. E. Bates - F. Kiokmeister:* A note on homomorphic mappings of quasigroups into multiplicative systems, Proc. Amer. Math. Soc. (1948), 1180—1184.

Резюме

О Э. АЛГЕБРАХ

Ян Якубик (Ján Jakubík), Кошице.

(Поступило в редакцию 29/I 1955)

Выражения алгебра, отношение конгруэнтности, примитивный класс алгебр, операция, полином имеют в этой работе тот же смысл, что и в работах [1], [2].

Пусть $\mathfrak{A}$ — класс всех алгебр, имеющих следующие свойства:

1. на каждой из алгебр класса $\mathfrak{A}$ определены основные операции $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $f_i \in A$, для различных операций f_i могут быть различными и соответствующие числа n, $n = n(i)$, множество $\{n(i)\}$ ограничено, и существует по крайней мере одна операция $f_{i_0} \in A$, для которой $n(i_0) \geqq 2$;

2. дано множество полиномов $g_j(z, z_1, \ldots, z_n)$, $g_j \in B$, построенных при помощи основных операций $f_i \in A$ так, чтобы имело место следующее утверждение: если $g \in B$ и если S — произвольная алгебра класса $\mathfrak{A}$, то для каждой упорядоченной группы элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in S$ существует один единственный элемент $x \in S$ такой, что $g(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$. Тогда о классе $\mathfrak{A}$ говорим, что это класс э. алгебр.

Пусть $\mathfrak{A}$ — класс э. алгебр. Алгебраическую систему S, в которой определены для некоторых (не обязательно для всех) упорядоченных групп элементов $x_1, \ldots, x_n$ операции $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $f_i \in A$ и в которой уравнение $g(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ для $g \in B$ имеет самое больше одно решение, называем частичной алгеброй класса э. алгебр $\mathfrak{A}$.

Скажем, что класс алгебр $\mathfrak{A}$ обладает свойством (**N**) (сильной недополнительностью), если в нем содержится алгебра S, удовлетворяющая следующим условиям: для любого элемента $x \in S$ существуют отношения конгруэнтности R и R' на S, и существует бесконечно много пар элементов y, $z \in S$ таких, что $xRyR'z$, и в S не существует элемента u, который удовлетворял бы соотношению $xR'uRz$.

Скажем, что класс $\mathfrak{A}$ обладает свойством (**A**), если для любой алгебры S, принадлежащей классу $\mathfrak{A}$, справедливо, что каждое отношение конгруэнтности на S определено однозначно любым из своих классов. Класс алгебр обладает свойством (**A'**), если не обладает свойством (**A**).

Теорема 1. *Всякий класс э. алгебр обладает свойствами* (**N**) и (**A**′).

Теорема 2. *Всякую частичную алгебру класса э. алгебр* $\mathfrak{A}$ *можно погрузить в алгебру класса* $\mathfrak{A}$.

Следствие: для любого кардинального числа α существует в классе $\mathfrak{A}$ алгебра S, кардинальное число которой $\geqq \alpha$.

Набросок доказательства теоремы 1. В классе э. алгебр $\mathfrak{A}$ выберем алгебру S, в которой находятся по крайней мере три элемента. Пусть S' — множество всех функций $h(n)$, которые орпеделены на множестве $N = \{0, 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots\}$ и функциональные значения которых принадлежат S. На S' определим операции $f_i \in A$ уравнением

$$f_i(h_1, \ldots, h_m)(n) = f_i(h_1(n+1), \ldots, h_m(n+1)) .$$

Тогда S' есть алгебра класса $\mathfrak{A}$. Пусть $h_1 \in S'$. Возьмем произвольное число $n_0 \in N$ и найдем $h_2, h_3 \in S'$ так, чтобы 1. элементы $h_i(n_0)$, $i = 1, 2, 3$ были взаимно различными, 2. для $n < n_0$ $h_1(n) = h_2(n) = h_3(n)$. Для h, $h' \in S'$ положим $h\, R_1\, h'$ ($h\, R_2\, h'$) тогда и только тогда, если 1. для $n < n_0$ будет $h(n) = h'(n)$, 2. элементы $h(n_0)$, $h'(n_0)$ либо равны между собой, либо один из них равен $h_1(n_0)$ ($h_2(n_0)$), а второй — $h_3(n_0)$. Очевидно, R_1, R_2 являются отношениями конгруэнтности на S', и выполняется условие, высказанное в свойстве (**N**). Для доказательства того, что имеет место свойство (**A**), достаточно рассмотреть отношение конгруэнтности R_3, в котором $h\, R_3\, h'$ тогда и только тогда, если для $n < n_0$ $h(n) = h'(n)$, и сравнить его с отношением конгруэнтности R_1.

Теорема 1. является обобщением результата Г. Тревисана [7], который решил частично проблему Биркгоффа ([1], проблема 31). Построение, примененное в доказательстве теоремы 1 основательно проще и короче построения Тревисана. Что касается тоеремы 2, то ход доказательства здесь совпадает с ходом доказательства теоремы 1 в работе [9].

Наконец, на простых примерах показана несправедливость одного утверждения Г. Биркгоффа об отношениях конгруэнтности на алгебрах с одинарными операциями ([1], стр. 131, упражнение 3).

Summary

ON THE EXISTENCE ALGEBRAS

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Received January 29, 1955.)

The concepts algebra, congruence relation on an algebra, primitive class of algebras, operation, and polynomial are used in the sense of [1] and [2].

Let $\mathfrak{A}$ be the class of all algebras with the following properties:

1. in each algebra S of the class $\mathfrak{A}$ the fundamental operations $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $f_i \in A$ are defined; for different i the numbers n need not be equal, $n = n(i)$, the set of all $n(i)$ is bounded and there exists $f_{i_0} \in A$ such that $n(i_0) \geqq 2$.

2. there is given a set of polynomials $g_j(z, z_1, \ldots, z_n)$, $g_j \in B$ constructed by means of the fundamental operations $f_i \in A$ such that for $g \in B$ each algebra S of the class $\mathfrak{A}$ and every finite sequences $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$ there exists a uniquely determined element $x \in S$ which satisfies the equation $g(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$. We say that $\mathfrak{A}$ is a class of existence algebras.

Let $\mathfrak{A}$ be a class of existence algebras. If on the set S for some (not necessarily all) finite sequences $x_1, \ldots, x_n \in S$ the operations $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $f_i \in A$ are defined such that the equation $g_j(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ has (for fixed $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$) not more than one solution $x \in S$, S is a partial algebra of the class $\mathfrak{A}$.

A class of algebras $\mathfrak{A}$ has the property (**N**) (strong non-permutability) if there exists an algebra S in $\mathfrak{A}$ such that for each $x \in S$ there exist congruence relations R, R' on S and an infinity of pairs of elements $y, z \in S$ for which $x\, R\, y\, R'\, z$ and there does not exist $u \in S$ with the property $x\, R'\, u\, R\, y$.

A class of algebras $\mathfrak{A}$ has the property (**A**), if congruence relations R on each algebra S of the class $\mathfrak{A}$ are uniquely determined by each class of S/R. A class $\mathfrak{A}$ has the property (**A'**), if it has not the property (**A**).

Theorem 1. *Every class of existence algebras has the properties* (**N**) *and* (**A'**).

Theorem 2. *Each partial algebra of the class $\mathfrak{A}$ of existence algebras can be imbedded in an algebra of the class $\mathfrak{A}$.*

Corollary: if α is a cardinal number and $\mathfrak{A}$ a class of existence algebras, there exists in $\mathfrak{A}$ an algebra S the cardial number of which is $\geqq \alpha$.

Sketch of proof of theorem 1. Let $\mathfrak{A}$ be a class of existence algebras. Let S be an algebra with more than two elements which is contained in $\mathfrak{A}$. Let S' be the set of all functions $h(n)$, where $n = 0, 1, 2, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$ and $h(n) \in S$. For $f_i \in A$, $h_j \in S'$ we define $f_i(h_1, \ldots, h_m)\,(n) = f_i(h_1(n + 1), \ldots, h_m(n + 1))$. Then, S' is an algebra of the class $\mathfrak{A}$. Let h_1 be a fixed (but arbitrary) element of S', n_0 a fixed (but arbitrary) integer. We find $h_2, h_3 \in S'$ such that 1. no two of the elements $h_1(n_0), h_2(n_0), h_3(n_0)$ are equal, 2. $n < n_0 \Rightarrow h_1(n_0) = h_2(n_0) = h_3(n_0)$. For $h, h' \in S'$ we put $h\, R_1\, h'$ $(h\, R_2\, h')$ if 1. the elements $h(n_0)$, $h'(n_0)$ are equal or one of them is equal to $h_1(n_0)$ $(h_2(n_0))$ and the second is equal to $h_3(n_0)$ 2. $n < n_0 \Rightarrow h(n) = h'(n)$. Clearly, R_1, R_2 are congruence relations on S' and R_1, R_2 are not permutable. This proves the property (**N**). To prove the property (**A'**) it is sufficient to consider the congruence relation R_3 on S' in which $h\, R_3\, h'$ if and only if $n < n_0 \Rightarrow h(n) = h'(n)$ and to relate it with the congruence relation R_1.

Theorem 1 is a generalization of a theorem of G. TREVISIAN ([7]) solving a problem of G. BIRKHOFF ([1], problem 31), his construction being rather complicated. The proof of theorem 2 does not differ from the method used in [9].

Finally, it is proved by simple examples that a statement contained in [1] (p. 87, exercise 3) on algebras with unary operations is not true.

STOCHASTICKÉ POČETNÍ METHODY

VÁCLAV DUPAČ, Praha.

(Došlo dne 14. února 1955.) DT 517:6:519.28

Některé matematické početní úlohy lze přibližně řešit methodami, založenými na theorii náhodného výběru. Článek pojednává o užití těchto method k výpočtu určitých integrálů, objemů vícerozměrných těles, inversní matice a čísla π. Některé výsledky jsou původní.

1. Úvod. Jednou z klasických úloh z okruhu t. zv. geometrických pravděpodobností je Buffonova úloha s jehlou. Na rovinu, rozdělenou na pásy soustavou rovnoběžných přímek o jednotkové vzdálenosti, hoďme náhodným způsobem jehlu délky $l < 1$. Jest určiti pravděpodobnost P, že jehla protne některou přímku soustavy. Snadno se zjistí, že

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{2l}{\pi} .$$

Tento výsledek dává pak možnost stanoviti experimentálně přibližnou hodnotu čísla π. Jest

$$\pi = \frac{2l}{P}, \text{ t. j. přibližně } \pi \cong \frac{2ln}{m},$$

kde n je celkový počet provedených hodů a m je počet hodů, v nichž jehla protala přímku; přitom výraz $\frac{2ln}{m}$ představuje náhodnou proměnnou, která s n neomezeně vzrůstajícím konverguje k π s pravděpodobností 1.

Neobvyklost tohoto způsobu určení čísla π spočívá v tom, že numerický početní problém je nahrazen ekvivalentním problémem stochastickým, a ten se pak řeší specificky stochastickou methodou, totiž náhodným výběrem (opakovaným pokusem). Methody tohoto typu budeme nazývat stochastickými početními methodami (v literatuře se někdy nazývají methodami Monte Carlo).

Zajímavá je už sama skutečnost, že úlohy zcela nenáhodového charakteru lze řešit náhodným výběrem. Avšak pozoruhodnější je to, že v určitých úlohách je řešení stochastickou methodou výhodnější (někdy dokonce v jistém smyslu přesnější) než řešení obvyklými methodami. Ukážeme si několik příkladů tohoto typu.

2. Výpočet integrálů. V určitém integrálu $\int_0^1 f(x)\,dx$ považujme integrační proměnnou x za náhodnou proměnnou s rovnoměrným rozložením pravděpodobností v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Potom $f(x)$ je rovněž náhodná proměnná (ovšem obecně s jiným rozložením pravděpodobností) a integrál $\int_0^1 f(x)\,dx$ má význam její střední hodnoty. Ze známých vět počtu pravděpodobnosti následuje pak tvrzení:

Nechť $I = \int_a^b f(x)\,dx$ je konečný Lebesgueův integrál v konečných mezích. Nechť $J = \int_a^b f^2(x)\,dx < +\infty$. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou nezávislé náhodné proměnné, vesměs s rovnoměrným rozložením pravděpodobností v $\langle a, b\rangle$.

Potom náhodná proměnná

$$\hat{I} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

je nestranným, asymptoticky normálním odhadem čísla I, se směrodatnou odchylkou

$$\sigma(\hat{I}) = [(b-a)\,J - I^2]^{-\frac{1}{2}}\, n^{-\frac{1}{2}} = \sigma n^{-\frac{1}{2}}.$$

To znamená

$$E(\hat{I}) = I\,, \tag{1}$$

kde E značí střední hodnotu;

$$P(|\hat{I} - I| < k_\varepsilon \sigma n^{-\frac{1}{2}}) \cong 1 - \varepsilon\,, \tag{2}$$

kde k_ε je dáno rovnicí

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{k_\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1 - \varepsilon.$$

Tato věta dává tedy methodu numerického výpočtu I. Aby však výpočet byl prakticky proveditelný (na př. pomocí tabulek náhodných čísel), je třeba připojit předpoklad (A), že uzávěr množiny bodů nespojitosti funkce $f(x)$ má Lebesgueovu míru 0.

Za tohoto předpokladu, je-li ε libovolné kladné číslo, existuje ke skoro každému $x \in \langle a, b\rangle$ přirozené číslo $s_0(x, \varepsilon)$ tak, že

$$|f(x) - f(\sum_{i=0}^{s} \alpha_i \cdot 10^{-i})| < \varepsilon \text{ pro všechna } s \geqq s_0\,,$$

kde $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot 10^{-i}$ značí desetinný rozvoj čísla x.

Pro každé $k = 1, \ldots, n$ lze náhodnou proměnnou x_k vyjádřit ve tvaru nekonečného desetinného zlomku

$$x_k = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{kl} \cdot 10^{-l},$$

kde α_{kl}, $l = 1, 2, \ldots$ jsou náhodné proměnné, které nabývají pouze hodnot $0, 1, 2, \ldots, 9$. Je-li dáno $\varepsilon > 0$, definujme náhodnou proměnnou $s_{k,\varepsilon}$ jako nejmenší přirozené číslo s, pro něž platí nerovnost

$$\operatorname*{Max}_{\alpha_{k,s+1};\, \alpha_{k,s+2};\, \ldots} \left| f\left(\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{kl} \cdot 10^{-l}\right) - f\left(\sum_{l=0}^{s} \alpha_{kl} \cdot 10^{-l}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{3}$$

Z předpokladu (A) vyplývá, že náhodná proměnná $s_{k,\varepsilon}$ je konečná s pravděpodobností 1. Definujme posléze náhodnou proměnnou $y_{k,\varepsilon}$ vztahem $y_{k,\varepsilon} = \sum_{l=0}^{s_{k,\varepsilon}} \alpha_{kl} \cdot 10^{-l}$. Označíme-li jako $\hat{I}_\varepsilon$ náhodnou proměnnou $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(y_{k,\varepsilon})$, potom „chyba ze zaokrouhlení" $|\hat{I}_\varepsilon - \hat{I}|$ je menší než ε s pravděpodobností 1.

Lze tedy hodnoty náhodných proměnných x_k nahradit (na příklad) úseky o délce s číslic z tabulek náhodných čísel, považujeme-li tyto úseky za prvých s decimál veličiny x_k. Přitom s volíme tak velké, aby platila nerovnost (3).

Srovnejme přesnost stochastické methody s přesností běžných method, na př. lichoběžníkové a Simpsonovy. Zjistíme, že posledně jmenované methody dávají (při stejném počtu dělících bodů n) chybu řádově značně menší:

$$|I - I_{\text{lich}}| < C_1 n^{-2}; \quad |I - I_{\text{simp}}| < C_2 n^{-4}$$

(nehledě k tomu, že tyto nerovnosti platí jistě, zatím co (2) dává ohraničení chyby jen s určitou pravděpodobností).

V praxi však počítáme s nepříliš velkými hodnotami n a tu je třeba při srovnání různých method přihlédnout i k velikosti konstant C_1, C_2, $k_\varepsilon \sigma$:

$$C_1 = \frac{(b-a)^3}{12} \operatorname*{Max}_{a \leq x \leq b} |f''(x)|,$$

$$C_2 = \frac{(b-a)^5}{180} \operatorname*{Max}_{a \leq x \leq b} |f^{\mathrm{IV}}(x)|,$$

$$k_\varepsilon \sigma = k_\varepsilon [(b-a)\, J - I^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Mohou nastat případy, kdy druhá (resp. čtvrtá) derivace funkce f je značně velká, není ohraničená v $\langle a, b \rangle$, nebo pro některá x vůbec neexistuje. Někdy lze tyto singularity vhodnými úpravami odstranit, někdy však nikoli.

Konstanta σ má naproti tomu tu pozoruhodnou vlastnost, že nezávisí na hodnotě derivací, a může být velmi malá i při složitém průběhu funkce f.

Jako příklad uveďme integrál

$$I = \int_0^{e^{-\pi}} \sqrt[10]{|\sin(\log x)|}\, dx .$$

K bezprostřednímu výpočtu tohoto integrálu nelze spolehlivě užít žádné z běžných numerických method. (V intervalu $\langle 0, e^{-\pi} \rangle$ je nekonečně mnoho bodů x, pro něž $f'(x)$ neexistuje.) Naopak stochastická methoda dává konstantu $\sigma \doteq 46 \cdot 10^{-4}$, t. j.

$$|\hat{I} - I| < 46k_\varepsilon \cdot 10^{-4}n^{-\frac{1}{2}} \text{ s pravděpodobností } \cong 1 - \varepsilon ,$$

což je ve srovnání s velikostí hodnoty $I \doteq 393 \cdot 10^{-4}$ uspokojivá přesnost. Zvolíme-li $n = 25$ a vezmeme-li jako náhodný výběr tohoto rozsahu prvých 25 řádků tabulek Kendall - Babington Smithových, dostáváme odhad

$$\hat{I} \doteq 3976 \cdot 10^{-5} ,$$

zatím co skutečná hodnota integrálu jest

$$I \doteq 3934 \cdot 10^{-5} ;$$

t. j. relativní chyba je menší než $1{,}1\,\%$.

3. Výpočet objemů těles v r-rozměrném eukleidovském prostoru. Nejprve připomeňme definice několika pojmů:

Tělesem v E_r budeme rozumět ohraničenou, uzavřenou oblast v E_r; *objemem tělesa* — jeho Jordanovu míru v E_r (pokud existuje).

Jednotkovou krychlí J_r budeme rozumět r-rozměrnou krychli objemu 1, s vrcholem v počátku, která celá leží v nezáporné části prostoru E_r.

Plochou v E_r rozumíme spojitý obraz jednotkové krychle J_{r-1}; plochu L v E_r nazveme *rektifikace schopnou*, jestliže existuje zobrazení φ a konstanta c tak, že platí

1. $L = \varphi(J_{r-1})$,
2. $\varrho_r(\varphi(x), \varphi(y)) \leqq c\, \varrho_{r-1}(x, y)$ pro každé $x \in J_{r-1}$, $y \in J_{r-1}$.

(Pro $r = 2$ — t. j. v rovině — souhlasí tento pojem s pojmem rektifikace schopné křivky.)

Položme si nyní tuto úlohu:

Jest vypočítati přibližně objem V tělesa M v E_r, definovaného nerovnostmi a implicitními vztahy mezi proměnnými, které nedovolují vyjádřit hranici tělesa explicitně (jako funkci parametrů), umožňují však rozhodnout o každém bodu $x \in E_r$, zda náleží nebo nenáleží do M.

Předpokládáme, že těleso M má objem; mimo to předpokládejme (zřejmě bez újmy obecnosti), že M je obsaženo v jednotkové krychli J_r.

Matematický způsob přibližného výpočtu objemu V spočívá v tom, že jednotkovou krychli J_r rozdělíme pravoúhlou sítí na n krychlí o hraně délky h (přitom jest $nh^r = 1$), z každé krychle vezmeme vrchol, který je nejblíže počátku, a zjistíme, zda náleží nebo nenáleží do M.

Nechť m těchto vrcholů náleží do M; potom přibližná hodnota je

$$\tilde{V} = mh^r = \frac{m}{n};$$

přitom platí $\tilde{V} \to V$ pro $n \to \infty$. Abychom získali řádový odhad chyby $|\tilde{V} - V|$, musíme připojit další předpoklad (B):

Hranice H tělesa M se skládá z konečného počtu rektifikace schopných ploch.

Za tohoto předpokladu platí

$$|\tilde{V} - V| = 0(h) = 0(n^{-\frac{1}{r}}). \tag{1}$$

(Obecně nelze tento odhad snížit. Řádově lepší odhad platí pro koule, elipsoidy a jistá speciální konvexní tělesa; objem těchto těles není však třeba počítat přibližnými methodami.)

Důkaz tvrzení (1). Předpokládejme pro jednoduchost, že hranici H tvoří jediná rektifikace schopná plocha $L = \varphi(J_{r-1})$. Rozdělme J_{r-1} na krychle K_i, vesměs o hraně délky $\dfrac{h}{(c + \varepsilon)\sqrt{r-1}}$, kde c má význam konstanty uvedené v definici rektifikace schopné plochy, ε je kladné číslo. Počet krychlí K_i jest $\left(\dfrac{(c+\varepsilon)\sqrt{r-1}}{h}\right)^{r-1} = Ah^{1-r}$, jestliže — opět pro jednoduchost — předpokládáme, že $\dfrac{(c+\varepsilon)\sqrt{r-1}}{h}$ je celé číslo. Tím dostáváme i rozdělení plochy L na Ah^{1-r} ploch $S_i = \varphi(K_i)$ o průměru $d(S_i) < h$; zřejmě každá plocha S_i může mít neprázdný průnik nejvýše se 2^r krychlemi o hraně h, na něž je rozdělena J_r. (Mezi libovolnými $2^r + 1$ krychlemi existují totiž aspoň dvě, jejichž vzdálenost je $\geq h$.) Celkem tedy má H neprázdný průnik nejvýš se 2^rAh^{1-r} krychlemi. Tvrzení (1) plyne odtud, že chyba $|\tilde{V} - V|$ je nutně nejvýš rovna objemu těchto krychlí, t. j. $|\tilde{V} - V| \leq 2^rAh$.

Obraťme se nyní ke *stochastickému řešení* dané úlohy.

Nechť $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ jsou nezávislé r-rozměrné náhodné proměnné, vesměs s rovnoměrným v J_r rozložením. Nechť m' je počet těch $\boldsymbol{x}_i$, pro něž $\boldsymbol{x}_i \in M$. Ježto $P(\boldsymbol{x}_i \in M) = V$, má m' zřejmě binomické rozložení pravděpodobností $b(n; V)$, a tudíž náhodná proměnná

$$\hat{V} = \frac{m'}{n}$$

je nestranným, asymptoticky normálním odhadem čísla V, se směrodatnou odchylkou

$$\sigma(\hat{V}) = [V(1 - V)]^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Aby výpočet stochastickou methodou byl prakticky proveditelný, musíme opět připojit předpoklad (B). Pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ lze potom náhodnou proměnnou $\mathbf{x}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{ir})$ nahradit náhodnou proměnnou $\mathbf{y}_i = (\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{ir})$, kde $\eta_{ik} = \sum_{l=1}^{s} \alpha_l \cdot 10^{-l}$, je-li $\xi_{ik} = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \cdot 10^{-l}$ (s je pevně zvolené přirozené číslo; α_l píšeme místo α_{ikl}). Pravděpodobnost P_0, že buďto $\mathbf{x}_i \in M$ a současně $\mathbf{y}_i \in' M$, ňebo $\mathbf{y}_i \in M$ a současně $\mathbf{x}_i \in' M$, je totiž nejvýš rovna objemu těch krychlí o hraně 10^{-s} (na něž si mysleme rozdělenu krychli J_r), které mají neprázdný průnik s plochou L; t. j. — jak plyne z důkazu (1) — $P_0 \leqq \text{const } 10^{-s}$.

Označíme-li jako m'' počet těch $\mathbf{y}_i$, pro něž $\mathbf{y}_i \in M$, potom rozdíl $\left|\frac{m''}{n} - \frac{m'}{n}\right|$ — „chyba ze zaokrouhlení" — je náhodná proměnná, jejíž střední hodnota

$$E\left|\frac{m''}{n} - \frac{m'}{n}\right| \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_0 \leqq \text{const } 10^{-s}$$

a směrodatná odchylka (jak se snadno zjistí) jest nejvýš rovna výrazu const $10^{-\frac{s}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$. Volbou dostatečně velkého s lze chybu ze zaokrouhlení prakticky vyloučit.

Můžeme tedy r-rozměrnou veličinu $\mathbf{x}_i$ nahradit (na příklad) r úseky o délce s číslic z tabulek náhodných čísel, považujeme-li tyto úseky za konečné desetinné rozvoje jejích souřadnic $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{ir}$.

Srovnejme přesnost obou method — matematické a stochastické — při stejném počtu n bodů, jejichž příslušnost k M zjišťujeme:

První methoda dává odhad

$$|\tilde{V} - V| < kn^{-\frac{1}{r}},$$

druhá — jak plyne z Čebyševovy nerovnosti — dává odhad $|\hat{V} - V| < k'_\varepsilon n^{-\frac{1}{2}}$ s pravděpodobností $> 1 - \varepsilon$, kde $k'_\varepsilon = \sqrt{V(1 - V)} \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$; to znamená

1. přesnost stochastické methody nezávisí na dimensi r,

2. pro $r > 2$ jest $n^{-\frac{1}{2}} < n^{-\frac{1}{r}}$, t. j. stochastická methoda dává v jistém smyslu lepší výsledek než matematická.

Nejlepší výsledek však dostaneme, jestliže obě methody kombinujeme:

Rozdělme opět J_r na n krychlí $I_1, I_2, \ldots, I_n$ o hraně h. Označme V_i objem tělesa $M \cap I_i$. V každé krychli I_i zvolme náhodně bod $\tilde{\mathbf{x}}_i$ (t. zn. $\tilde{\mathbf{x}}_i$ je r-rozměrná náhodná proměnná s rovnoměrným v I_i rozložením pravděpodobností, $\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_n$ jsou nezávislé); budiž $\tilde{m}$ počet těch $\tilde{\mathbf{x}}_i$, pro něž $\tilde{\mathbf{x}}_i \in M$. Ježto $P(\tilde{\mathbf{x}}_i \in M) = nV_i$, má $\tilde{m}$ zřejmě Poissonovo binomické rozložení pravděpodobností, se střední hodnotou $E(\tilde{m}) = nV$ a rozptylem $\sigma^2(\tilde{m}) = \sum_{i=1}^{n} n V_i(1 - nV_i)$. Za předpokladu (B) jest počet krychlí I_i, pro něž $n V_i(1 - nV_i) \neq 0$ nejvýš řádu $O(h^{1-r}) = O(n^{1-\frac{1}{r}})$. Poněvadž $n V_i(1 - nV_i) \leqq \frac{1}{4}$ $(i = 1, \ldots, n)$ jest $\sigma^2(\tilde{m}) = O(n^{1-\frac{1}{r}})$.

Odtud následuje, že náhodná proměnná $\hat{V} = \frac{\tilde{m}}{n}$ je nestranným odhadem čísla V se směrodatnou odchylkou $\sigma(\hat{V}) = O(n^{-\frac{r+1}{2r}})$.

Pro $r > 1$ jest $n^{-\frac{r+1}{2r}} < n^{-\frac{1}{2}} \leqq n^{-\frac{1}{r}}$, t. j. smíšená methoda je přesnější než methoda předchozí.

Všimněme si ještě jedné souvislosti s otázkou *mřížových bodů*. Z theorie čísel je znám tento výsledek:

Nechť L je uzavřená konvexní plocha v E_r, která obsahuje uvnitř bod $(0, \ldots, 0)$ a která má ve všech bodech totální křivost různou od nuly. Pro $x \geqq 0$ budiž $L(x)$ plocha, jež vznikne z L homothetickou transformací v poměru $\sqrt{x} : 1$ vzhledem k počátku. Označme $V(x)$ objem tělesa omezeného plochou $L(x)$; jako $A(x)$ označme počet bodů s vesměs celočíselnými souřadnicemi, které leží v tělese omezeném plochou $L(x)$.

Potom (za určitých dodatečných předpokladů o ploše L) platí:

$$\frac{A(x) - V(x)}{x^\Theta} \to 0 \text{ pro } x \to \infty, \text{ pro každé } \Theta > \frac{r}{2} - \frac{r}{r+1}.$$

Uvažujme nyní následující stochastickou modifikaci problému.

Nechť L je uzavřená rektifikace schopná plocha v E_r. Nechť $L(x)$ a $V(x)$ mají obdobný význam jako výše. V každé jednotkové krychli s celočíselnými vrcholy zvolme náhodně (a nezávisle na ostatních krychlích) jeden bod. Nechť $\tilde{A}(x)$ značí počet těchto bodů, které leží v tělese omezeném plochou $L(x)$. Potom platí $\frac{\tilde{A}(x) - V(x)}{x^\Theta} \to 0$ (pro $x \to \infty$) podle pravděpodobnosti, pro každé $\Theta > \frac{r-1}{4}$.

(Jest ovšem $\frac{r-1}{4} < \frac{r}{2} - \frac{r}{r+1}$ pro každé $r > 1$.)

4. Výpočet inversní matice. Připomeňme nejprve definici a základní vlastnosti *Markovových řetězců*. Markovovým řetězcem (přesněji: jednoduchým homogenním M-ým řetězcem) nazýváme níže popsaný proces:

Systém S probíhá v nespojitém čase $t = 0, 1, 2, \ldots$ konečnou množinu stavů $A_1, A_2, \ldots, A_r$ podle stochastického zákona, splňujícího podmínku: Podmíněná pravděpodobnost, že systém bude v čase t (> 0) ve stavu A_k, za předpokladu určitého průběhu předcházejícího (A_i v čase $t - 1$, A_h v čase $t - 2$, A_g v čase $t - 3, \ldots$), závisí pouze na A_i a na A_k a je konstantní vzhledem k t.

Označíme-li stavy přirozenými čísly $1, 2, \ldots, r$, lze Markovův řetězec interpretovat jako posloupnost náhodných proměnných, nabývajících celočíselných hodnot $1, 2, \ldots, r$ a splňujících zmíněnou podmínku.

Podmíněné pravděpodobnosti $P(x_t = k \mid x_{t-1} = i)$ se nazývají pravděpodobnosti přechodu a značí se p_{ik}. Hodnoty p_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$ tvoří nezápornou čtvercovou matici **P** s řádkovými součty vesměs rovnými jedné. Naopak každá matice těchto vlastností (t. zv. stochastická matice) definuje spolu s vektorem počátečních pravděpodobností určitý Markovův řetězec.

Prvky n-té mocniny matice **P** mají tento význam: $p_{ik}^{(n)} = P(x_{t+n} = k \mid x_t = i)$. Za určitých předpokladů existují $\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)} = p_k^{(\infty)}$ jako čísla nezávislá na i. Stavy A_k, pro něž $p_k^{(\infty)} = 0$, nazývají se přechodné, ostatní návratné. Existuje-li v řetězci jediný stav návratný, nazývá se stavem absorpčním. Název vystihuje tu okolnost, že při libovolných počátečních pravděpodobnostech přejde systém s pravděpodobností 1 v konečném čase do absorpčního stavu a nadále v něm setrvá.

Na základě theorie Markovových řetězců lze odvodit stochastickou methodu výpočtu inversní matice. Mějme regulární matici $\boldsymbol{A} = \|a_{ik}\|$ stupně r-tého takovou, že matice $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ je nezáporná, s řádkovými součty vesměs menšími jedné. Hledáme inversní matici $\boldsymbol{A}^{-1} = \|a_{ik}^{(-1)}\|$.

Uvažujme vroubenou matici $\tilde{\boldsymbol{P}}$, která vznikne z matice **P** připojením $r + 1$-ého řádku $(0, \ldots, 0, 1)$ a $r + 1$-ého sloupce $(p_1, \ldots, p_r, 1)$ kde $p_i = 1 - \sum_{k=1}^{r} p_{ik}$.

Zřejmě $\tilde{\boldsymbol{P}}$ je stochastická matice; z jejího tvaru je patrno, že řetězec, který definuje, obsahuje absorpční stav $(r + 1)$. (To znamená, že skoro každá realisace řetězce skončí po konečně mnoha krocích ve stavu $(r + 1)$.)

Nechť τ je náhodná proměnná, která značí dobu setrvání systému ve třídě přechodných stavů:

$$\tau = \operatorname*{Max}_{x_t \neq r+1} t\,.$$

Definujme náhodné proměnné g_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ *takto:*

$$g_k = \begin{cases} \dfrac{1}{p_k}, & \text{jestliže } x_\tau = k\,, \\ 0, & \text{jestliže } x_\tau \neq k\,. \end{cases}$$

Potom platí

(1) $E(g_k \mid x_0 = i) = a_{ik}^{(-1)}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$,

(2) $\sigma_{ik}^2 = \sigma^2(g_k \mid x_0 = i) = \dfrac{1}{p_k}\, a_{ik}^{(-1)}(1 - p_k a_{ik}^{(-1)})$,

(3) $E(\tau \mid x_0 = i) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} p_{ij} a_{jk}^{(-2)} p_k$.

Důkaz. 1. $E(g_k \mid x_0 = i) = \dfrac{1}{p_k} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ik}^{(j)} p_k = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ik}^{(j)}$,

t. j.

$$\|E(g_k \mid x_0 = i)\| = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}^j = (\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Poslední rozvoj platí, neboť

$$\operatorname*{Max}_i |\lambda_i(\mathbf{P})| \leqq \operatorname*{Max}_i \sum_{k=1}^{r} p_{ik} < 1 .$$

2. $E(g_k^2 \mid x_0 = i) = \dfrac{1}{p_k^2} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ik}^{(j)} p_k = \dfrac{1}{p_k} a_{ik}^{(-1)};$

3. $E(\tau \mid x_0 = i) = \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \sum_{k=1}^{r} p_{ik}^{(\tau)} p_k$, t. j. $\|E(\tau \mid x_0 = i)\| = \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \mathbf{P}^\tau \boldsymbol{p} = \mathbf{P}(\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-2} \boldsymbol{p} =$
$= \mathbf{P}\mathbf{A}^{-2}\boldsymbol{p}$, kde $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$.

S praktického hlediska je účelné odvodit odhady pro σ_{ik}^2 a $E(\tau)$, které neobsahují prvky neznámé matice $\mathbf{A}^{-1}$. Položme

$$p = \operatorname*{Max}_k p_k\,, \quad P = \operatorname*{Max}_k \frac{1}{p_k}\,.$$

Jako $N(\,.\,)$ označme normu matice, totiž největší z řádkových součtů prostých hodnot jejích prvků.

Potom platí

(4) $\sigma_{ik} \leqq \dfrac{1}{2p_k}$ $\quad (i, k = 1, 2, \ldots, r)$,

(5) $N(\|\sigma_{ik}^2\|) \leqq P^2 - 1$.

(6) $E(\tau \mid x_0 = i) \leqq P^2 p(1 - p_i)$.

Důkaz. 4. $p_k a_{ik}^{(-1)} = P(x_\tau = k \mid x_0 = i) \leqq 1$, odtud $\sigma_{ik}^2 \leqq \dfrac{1}{4p_k^2}$.

5. $N(\|\sigma_{ik}^2 + [a_{ik}^{(-1)}]^2\|) \leqq \operatorname*{Max}_k \dfrac{1}{p_k} N(\mathbf{A}^{-1}) \leqq P \,.\, \dfrac{1}{1 - N(\mathbf{P})} = P^2$.

Ježto $\mathbf{A}^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}^j \geqq \mathbf{E}$, jest $a_{ii}^{(-1)} \geqq 1$, $a_{ik}^{(-1)} \geqq 0$ pro všechna i, k, a tedy také $\sum_{k=1}^{r} [a_{ik}^{(-1)}]^2 \geqq 1$ pro všechna i.

6. $E(\tau \mid x_0 = i) \leqq \operatorname*{Max}_l p_l \,.\, \sum_{j=1}^{r} p_{ij} \sum_{k=1}^{r} a_{jk}^{(-2)} \leqq p\, N(\mathbf{A}^{-2}) \sum_{j=1}^{r} p_{ij} \leqq (1 - p_i) P^2 p$.

Při praktickém užití metody lze postupovat na příklad takto:

Provedeme n nezávislých realisací Markovova řetězce, při čemž počáteční stavy lze volit nenáhodně. Sestavíme čtvercovou tabulku hodnot n_{ik}, totiž absolutních četností realisací, pro něž $x_0 = i$, $x_\tau = k$. Řádky této tabulky dělíme pak řádkovými součty $n_i = \sum_k n_{ik}$, sloupce dělíme čísly p_k (první sloupec číslem p_1 atd.).

Prvky takto získané matice $\hat{\mathbf{A}}$ jsou nestrannými odhady jim odpovídajících prvků inversní matice $\mathbf{A}^{-1}$. Řádky matice $\hat{\mathbf{A}}$ jsou (stochasticky) nezávislé; jak se snadno zjistí, má i-tý řádek asymptoticky r-rozměrné normální rozložení s kovarianční maticí

$$\frac{1}{n_i}\|{}_i\mu_{jk}\|, \quad \text{kde} \quad {}_i\mu_{kk} = \sigma^2_{ik}, \quad {}_i\mu_{jk} = -\, a^{(-1)}_{ij} a^{(-1)}_{ik} \quad \text{pro} \quad j \neq k .$$

(Závislosti uvnitř řádků matice $\hat{\mathbf{A}}$ vyplývají odtud, že při tomto postupu odhadujeme současně celý řádek matice $\mathbf{A}^{-1}$.)

Určitou modifikací popsané methody lze zeslabit předpoklady, omezující její použitelnost; o matici $\mathbf{A}$ stačí předpokládat, že $\mathbf{P} = \text{mod}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ je matice s řádkovými součty vesměs menšími jedné. (Symbolem mod (.) značíme matici, která vznikne z dané matice nahrazením každého prvku jeho prostou hodnotou.)

Modifikace spočívá v tom, že náhodné proměnné g_k je třeba definovat takto: (q_{ij} značí prvek matice $\mathbf{E} - \mathbf{A}$)

$$g_k = \begin{cases} \dfrac{1}{p_k} \,.\, \text{sgn}\,(q_{x_0x_1} q_{x_1x_2} \ldots q_{x_{\tau-1}x_\tau}), & \text{jestliže } x_\tau = k\,, \\ 0, & \text{jestliže } x_\tau \neq k\,. \end{cases}$$

Pro praktický výpočet to znamená, že po každé realisaci zaznamenáváme do čtvercové tabulky ± 1, podle toho, jakým způsobem přešel systém ze stavu počátečního do stavu absorpčního.

Výrazy pro σ^2_{ik} a $E(\tau)$ je třeba pozměnit:

$$\sigma^2_{ik} = \frac{t^{(-1)}_{ik}}{p_k} - [a^{(-1)}_{ik}]^2\,; \quad \sigma_{ik} < \frac{1}{p_k}\,;$$

$$N(\|\sigma^2_{ik}\|) < P^2\,; \quad E(\tau \mid x_0 = i) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} p_{ij} t^{(-2)}_{jk} p_k\,,$$

kde $\mathbf{T} = \mathbf{E} - \mathbf{P}$. Ostatní platí beze změny.

Upozorněme ještě na to, že stochastická methoda umožňuje vypočítat určitý prvek (nebo řádek) inversní matice, aniž by bylo třeba počítat celou inversní matici.

Na následujícím — velmi jednoduchém — příkladě ukážeme, jak lze provést výpočet pomocí tabulek *náhodných čísel.*

Mějme matici

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}8 \end{Vmatrix}.$$

Potom

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{Vmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Vezměme dvojici sousedních sloupců číslic v tabulkách náhodných čísel; tyto sloupce považujme za stavy (1) a (2). Začněme na příklad ve stavu (1) a postupujeme shora dolů podle tohoto předpisu:

číslice 0 značí přechod z (1) do (2), resp. opačně;

číslice 1, 2 značí setrvání v daném stavu;

číslice 3 až 9 značí přechod do stavu (3), t. j. ukončení řetězce.

Tento předpis zřejmě realisuje řetězec, definovaný stochastickou maticí $\tilde{\boldsymbol{P}}$.

Vzhledem ke speciálnímu tvaru matice $\boldsymbol{A}$ stačí vypočítat pouze první řádek inversní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$. Použijeme-li tabulek Kendall-Babington Smithových a volíme-li $n = 1000$, dostáváme odhad

$$\hat{\boldsymbol{A}} \doteq \begin{Vmatrix} 1{,}273 & 0{,}156 \\ . & . \end{Vmatrix}$$

zatím co správný výsledek jest (zaokrouhleno na 3 des. místa)

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} 1{,}270 & 0{,}159 \\ 0{,}159 & 1{,}270 \end{Vmatrix} .$$

Ostatní konstanty:

$$\sigma_{ik} \doteq 0{,}45 \quad (i, k = 1, 2) \quad (\text{odhad (4)} \ \sigma_{ik} \leqq 0{,}71) ,$$

$$E(\tau \mid x_0 = i) \doteq 0{,}34 \quad (i = 1, 2) \quad (\text{odhad (6)} \ E(\tau \mid x_0 = i) \leqq 0{,}43) .$$

5. Ohraničení čísla π. Někdy vedou stochastické methody k výsledkům, které platí jistě — nikoli jen s určitou pravděpodobností. Jako příklad uvedeme stochastický důkaz tvrzení, že číslo π leží v intervalu $\langle 3{,}1380; 3{,}1481 \rangle$.

Mějme v rovině dánu trojúhelníkovou síť, tvořenou třemi soustavami rovnoběžných přímek o jednotkové kolmé vzdálenosti, při čemž přímky těchto soustav svírají s osou X úhly $0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$.

Na rovinu házejme náhodně úsečku délky l. (Slovu „náhodně“ je zde rozuměti takto: poloha (x, y) středu úsečky je dvojrozměrná náhodná proměnná s libovolným rozložením; úhel Θ, který svírá úsečka s osou X, je náhodná proměnná s rovnoměrným rozložením v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$; (x, y) a Θ jsou nezávislé.) Nechť c značí počet přímek sítě, které úsečka protne, dělený délkou úsečky. Dopadne-li úsečka pod úhlem Θ, nabude náhodná proměnná c hodnoty

$$\frac{1}{l}\left([l|\sin\Theta|] + \left[l\left|\sin\left(\Theta - \frac{\pi}{3}\right)\right|\right] + \left[l\left|\sin\left(\Theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right|\right] + \alpha\right)$$

kde hranaté závorky značí největší celé části a α je některé z čísel 0, 1, 2, 3, v závislosti na poloze středu úsečky.

Nahradíme-li c náhodnou proměnnou c', která v tomto případě nabude hodnoty

$$|\sin\Theta| + \left|\sin\left(\Theta - \frac{\pi}{3}\right)\right| + \left|\sin\left(\Theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right|$$

nezávisle na poloze středu úsečky, dopustíme se chyby, kterou lze učinit libovolně malou, volíme-li l dostatečně velké.

Pro momenty náhodné proměnné c' dostáváme tyto výrazy:

$$E(c') = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(|\sin\Theta| + \left|\sin\left(\Theta - \frac{\pi}{3}\right)\right| + \left|\sin\left(\Theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right|\right) d\Theta = \frac{6}{\pi}\,;$$

$$E(c'^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(|\sin\Theta| + \left|\sin\left(\Theta - \frac{\pi}{3}\right)\right| + \left|\sin\left(\Theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right|\right)^2 d\Theta = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\,;$$

$$\sigma^2 = \sigma^2(c') = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - \frac{36}{\pi^2}\,.$$

Úpravou posledního vztahu dostaneme kvadratickou rovnici pro π:

$$(2 - \sigma^2)\,\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi - 36 = 0\,,\quad \text{t. j. } \pi = \frac{-3\sqrt{3} + \sqrt{27 + 144(2 - \sigma^2)}}{2(2 - \sigma^2)}\,.$$

Tento zlomek definuje funkci $\hat{\pi}(\sigma^2)$, považujeme-li σ^2 za proměnnou.

Snadno se zjistí, že σ^2 leží nutně v mezích od 0 do $\dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{4}$. Hodnota 0 odpovídá případu, kdy úsečka protne při každém hodu týž počet přímek; hodnota $\dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{4}$ odpovídá případu, kdy v polovině hodů úsečka protne minimální počet přímek ($c' = \sqrt{3}$; to nastane tehdy, dopadne-li úsečka rovnoběžně s některou soustavou) a v polovině hodů protne maximální počet přímek ($c' = 2$; to nastane tehdy, půlí-li úsečka úhel dvou sousedních soustav).

Ježto $\hat{\pi}(\sigma^2)$ je v daném intervalu rostoucí a $\hat{\pi}(0) = 3{,}1380\ldots$, $\hat{\pi}\left(\dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{4}\right) = 3{,}14803\ldots$, platí $3{,}1380 < \pi < 3{,}1481$.

LITERATURA

K § 1: Řešení Buffonovy úlohy viz na př.:

[1] *B. V. Gněděnko*: Kurs těoriji věrojatnostěj, Moskva 1950, str. 35; experimentální určení čísla π viz tamtéž, str. 347.

K § 2: Jak vyplývá z recense v Math. Rev. 14 (1953), str. 457, zabývá se různými stochastickými methodami výpočtu určitých integrálů $\int_0^1 f(x)\,dx$ ze spojité funkce $f(x)$ T. Kitagawa v článku:

[2] *T. Kitagawa*: Random integrations, Bull. Math. Statist. 4 (Fukuoka, 1950), str. 15–21.

K § 3: Viz článek:

[3] *K. D. Tocher*: Application of automatic computers to sampling experiments, Jrn. Roy. Stat. Soc., Series B 1954/No. 1, str. 49.

Tocher neuvádí předpoklady, za nichž odhady platí. Smíšená methoda a poznámka o „znáhodněných" mřížových bodech jsou nové.
Citovanou větu z theorie mřížových bodů viz:

[4] *S. Krupička*: O mřížových bodech ve vícerozměrných prostorech (disertační práce).
K § 4: Myšlenka pochází od *J. v. Neumanna* a *S. Ulama*. Po prvé byla publikována (v poněkud obecnější formě) v článku:

[5] *G. E. Forsythe & R. A. Leibler*: Matrix inversion by a Monte Carlo method, Math. Tab., 1950, str. 127—129.

Vzorce (3), (4), (5), (6) jsou nové.

K § 5: Uvedený výsledek je obměnou výsledku Mantelova, který užívá čtverečkové sítě a dokazuje, že π leží v intervalu $\langle 3{,}1231; 3{,}1752\rangle$ — viz:

[6] *N. Mantel*: An extension of the Buffon needle problem, Ann. Math. Stat. 24 (1953), str. 674—677.

Резюме

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

ВАЦЛАВ ДУПАЧ (Václav Dupač), Прага.

(Поступило в редакцию 14/II 1955 г.)

В статье докладывается о применении так называемых методов Монтэ Карло в численном анализе. В § 1-ом природа этого применения объясняется на примере экспериментального определения числа π. В § 2-ом изучаются свойства величины $\hat{I} = (b - a)\, n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$, — где x_k независимые, равномерно распределенные в $\langle a, b\rangle$ случайные величины, как статистической оценки интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$. В § 3-ем исследуется подробнее мысль Точера [3] о стохастическом вычислении объемов многомерных тел, определенных сложными неявными взаимоотношениями между координатами. Приходится к методу, который является комбинацией математического метода и метода Монтэ Карло, и который дает найлучшую оценку ошибки. Приводится результат, который можно назвать стохастическим видоизменением проблемы целых точек. В § 4-ом описывается обращение матрицы методом Форсейта-Лейблера [5]. Новыми являются формулы (3)—(6), т. е. верхние оценки для σ_{ik}^2 и $E(\tau)$, несодержащие элементов незнакомой обратной матрицы. В § 5-ом доказано только при помощи элементарных средств теории вероятностей, что π лежит в промежутке $\langle 3{,}1380;$

3,1481⟩. Этот результат является небольшим улучшением результата, приведенного в работе Мантела [6]. Выводы §§ 2-ого и 4-ого иллюстрированы двумя численными примерами.

Summary

STOCHASTIC NUMERICAL METHODS

VÁCLAV DUPAČ, Praha.

(Received February 14, 1955.)

The paper reports about the application of the so-called Monte Carlo methods in numerical calculation. The nature of this application is enlightened in § 1 by the example of the empirical determination of π. In § 2 the statistic $I = (b - a)\, n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ — where x_k are independent, uniformly distributed in $\langle a, b\rangle$ — is studied, as an estimator of the integral $\int_a^b f(x)\, dx$. (Cf. KITAGAWA [2].) A numerical example is given. In § 3 an idea due to TOCHER [3] is developed concerning the Monte Carlo evaluation of volumes of multidimensional bodies which are defined by complicated implicit relations between coordinates. A method is deduced which is a combination of the mathematical method and the Monte Carlo one, and which gives (in certain sense) the best accuracy. A result is given which can be called the stochastic modification of the lattice points problem. In § 4, matrix inversion by a Monte Carlo method is described, according to FORSYTHE-LEIBLER [5]. New are the formulae (3)—(6), i. e. the upper estimates of σ^2 and $E(\tau)$ in which the elements of the unknown inverse matrix do not occur. In § 5, the assertion $\pi \in (3{,}1380; 3{,}1481)$ is proved in a purely probabilistic way. This result is a slight improvement of an analogous result contained in a paper of MANTEL [6].

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

O JEDNOM PROBLÉMU Z THEORIE KODOVÁNÍ

JAROMÍR ABRHAM, MILOSLAV DRIML, Praha.

(Došlo dne 15. února 1955.) DT: 621.39.001

V článku je podána methoda tvoření pětipísmenných kodových slov, z nichž každá dvě se liší alespoň na třech místech.

1. Úvod

Státní a obchodní telegramy se zasílají většinou kodovaně. Ponejvíce se používá s ohledem na sazební předpisy kodů s pětipísmennými slovy. K usnadnění luštění zkomolenin, ke kterým někdy při telegrafní přepravě dochází, vyžaduje se zpravidla, aby se kodová slova lišila mezi sebou v určitém počtu míst. Většina dosavadních kodů byla založena na principu dvoumístného rozlišení, jehož nevýhodou je, že nedovoluje jednoznačně vyluštit zkomoleninu, vzniklou na jednom místě; tuto potíž odstraňuje třímístné rozlišení kodových slov.

Slov s třímístným rozlišením bylo po prvé použito v „*Bentley's Second Phrase Code*" (1. vydání 1929) ke kodování čísel a peněžních částek; nejrozsáhlejší skupina takových slov tohoto kodu obsahuje však pouze 4052 takových slov z 26písmenné abecedy. Při tom není udán způsob tvoření těchto slov.

Výsledků obsažených v této práci bylo použito při sestavování kodových slov pro připravovaný kod Čs. obchodní komory *Unicode.*

Matematicky budeme formulovat problém tvoření kodových slov s třímístným rozlišením tímto způsobem:

Buďtež dány konečné uspořádané množiny $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_5$ o stejném počtu prvků rovném n. Kartézský součin $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \ldots \times \mathfrak{M}_5$ obsahuje n^5 prvků tvaru $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5]$, kde $\alpha_i \in \mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Nadále budeme, jak je zvykem v theorii informací, nazývati množiny $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, *abecedami*, jejich prvky *písmeny* a pětice z jejich kartézského součinu *slovy*. Budeme se zabývati otázkou, kolik lze vybrat slov tak, aby se každá dvě z nich lišila alespoň na třech místech. Takováto slova budeme nazývati slovy s třímístným rozlišením.

2. Dosažitelný počet slov s třímístným rozlišením

Věta 1. *Slov s třímístným rozlišením lze vybrat nejvýše* n^3.

Důkaz. Aby nenastala shoda na třech místech, musí se každá dvě slova lišit alespoň na jednom místě v libovolné uvažované trojici; takových slov při dané trojici existuje právě n^3.

Uvedená věta udává pouze horní hranici, kterou počet slov s třímístným rozlišením nemůže překročit. Tato hranice však není vždy dosažitelná. Je-li na př. $n = 2$, $\mathfrak{M}_i = \{A, B\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$, pak můžeme vytvořit nejvýše čtyři slova s třímístným rozlišením. Jsou to na př. slova $AAAAA$, $AABBB$, $BBAAB$, $BBBBA$. Vybereme-li však slova $AAAAA$, $BBBBB$, nebo libovolná jiná dvě slova, která se liší na všech pěti místech, zjistíme snadno, že k nim nemůžeme přidat žádné další slovo, zachovávající podmínku třímístného rozlišení. Odtud je zřejmé, že dosažitelný počet slov s třímístným rozlišením závisí na způsobu jejich vybírání. Je proto vhodné zavésti tuto definici:

Způsob vybírání kodových slov nazveme optimálním, vede-li k vybrání maximálního dosažitelného počtu slov.

Dalším naším úkolem bude nalézti optimální způsob vybírání slov s třímístným rozlišením.

3. Způsob tvoření slov s třímístným rozlišením

Vyjdeme ze systému pěti vedle sebe položených uspořádaných abeced $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_5$. Písmena každé z abeced očíslujeme čísly $0, 1, \ldots, n - 1$. Budiž r celé nezáporné číslo menší než n. Budeme značit $\mathfrak{M}_i^{(r)}$ takovou cyklickou permutaci abecedy $\mathfrak{M}_i$, v níž na nultém místě stojí r-té písmeno původního uspořádání. Místo $\mathfrak{M}_i^{(0)}$ budeme ve shodě s dosavadním značením psáti pouze $\mathfrak{M}_i$. Jsou-li dána celá čísla a, b, c — nazveme je charakteristikami — taková, že $0 \leqq a, b, c \leqq n - 1$ a probíhají-li s, t nezávisle čísla $0, 1, \ldots, n - 1$, tvoříme slova takto:

Na prvé místo slova postavíme s-té písmeno abecedy $\mathfrak{M}_1$, na druhé místo s-té písmeno abecedy $\mathfrak{M}_2^{(a)}$, na třetí místo t-té písmeno abecedy $\mathfrak{M}_3$, na čtvrté místo t-té písmeno abecedy $\mathfrak{M}_4^{(b)}$, na páté místo q-té písmeno abecedy $\mathfrak{M}_5^{(c)}$, kde $q \equiv s + t \pmod{n}$, $0 \leqq q \leqq n - 1$. (Symbol $\equiv$ zde značí kongruenci podle vyznačeného modulu.)

Tím dostáváme vzájemně jednoznačné přiřazení dvojic $(0, s)$, (a, s), $(0, t)$, (b, t), (c, q) a abeced $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_5$. Dále uvedené vlastnosti popsaného postupu se nezmění, nahradíme-li u abeced $\mathfrak{M}_i$ indexy $1, 2, \ldots, 5$ jejich libovolnou permutací.

Je zřejmé, že vyložený postup dovoluje při pevných hodnotách charakteristik a, b, c vytvoření n^2 slov, z nichž každá dvě se liší alespoň na třech místech.

Odvodíme nyní podmínky pro charakteristiky a, b, c, při jejichž splnění se slova utvořená za pomoci různých hodnot těchto charakteristik liší alespoň na třech místech.

Věta 2. *Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby při dvou různých trojicích charakteristik a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 neexistovala dvojice slov se shodou na třech místech je*

$$a_1 \not\equiv a_2 \pmod n, \quad b_1 \not\equiv b_2 \pmod n, \quad c_1 \not\equiv c_2 \pmod n,$$
$$a_1 - c_1 \not\equiv a_2 - c_2 \pmod n, \quad b_1 - c_1 \not\equiv b_2 - c_2 \pmod n, \tag{1}$$
$$a_1 + b_1 - c_1 \not\equiv a_2 + b_2 - c_2 \pmod n.$$

Důkaz. Ke shodě na 1. a 2. místě slova nedojde tehdy a jen tehdy, když

$$a_1 \not\equiv a_2 \pmod n.$$

Tím je vyloučena možnost shody na 1., 2., 3.; 1., 2., 4. a 1., 2., 5. místě. Podobně ke shodě na 3. a 4. místě nedojde v žádné dvojici slov tehdy a jen tehdy, když

$$b_1 \not\equiv b_2 \pmod n.$$

Tím je vyloučena možnost shody na 1., 3., 4.; 2., 3., 4. a 3., 4., 5. místě. Uvážíme ještě zbývající možnosti. Ke shodě na 1., 3., 5. místě slova nedojde tehdy a jen tehdy, je-li

$$c_1 \not\equiv c_2 \pmod n.$$

Nesmí totiž být $c_1 + s + t \equiv c_2 + s + t \pmod n$. Prvním místem je však určeno číslo s, třetím místem číslo t.

Ke shodě na 1., 4., 5. místě dojde tehdy a jen tehdy, platí-li

$$s_1 = s_2, \; b_1 + t_1 \equiv b_2 + t_2 \pmod n, \quad c_1 + s_1 + t_1 \equiv c_2 + s_2 + t_2 \pmod n \tag{2}$$

(s_i, t_i značí čísla s a t při charakteristikách $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$). Odtud vyplývá, že podmínka

$$b_1 - c_1 \equiv b_2 - c_2 \pmod n$$

je nutná k tomu, aby nastala shoda na 1., 4., 5. místě. Tato podmínka je také postačující. Je-li dáno 1., 4., 5. místo slova vytvořeného pomocí charakteristik a_1, b_1, c_1, jsou určena čísla s_1 a t_1. Zvolíme-li nyní

$$s_2 = s_1, \; t_2 \equiv b_1 - b_2 + t_1 \pmod n, \quad 0 \leqq t_2 \leqq n - 1,$$

jsou splněny podmínky (2) a tedy nastane shoda na 1., 4., 5. místě.

Případ shody na 2., 3., 5. místě je obdobný předchozímu. Nutnou a postačující podmínkou shody dvou slov na těchto místech je platnost vztahů

$$a_1 + s_1 \equiv a_2 + s_2 \pmod n,$$
$$t_1 = t_2, \; c_1 + s_1 + t_1 \equiv c_2 + s_2 + t_2 \pmod n.$$

Stejně jako při shodě na 1., 4., 5. místě odvodíme nutnou a postačující podmínku

$$a_1 - c_1 \not\equiv a_2 - c_2 \pmod n$$

pro to, aby nemohla nastat uvažovaná shoda.

Zbývá shoda na 2., 4., 5. místě. Aby nastala, je nutné a stačí, aby platilo

$$a_1 + s_1 \equiv a_2 + s_2 \pmod n\,, \quad b_1 + t_1 \equiv b_2 + t_2 \pmod n\,, \qquad (3)$$
$$c_1 + s_1 + t_1 \equiv c_2 + s_2 + t_2 \pmod n\,.$$

Sečtením prvních dvou kongruencí a odečtením třetí dostaneme nutnou podmínku

$$a_1 + b_1 - c_1 \equiv a_2 + b_2 - c_2 \pmod n$$

pro to, aby nastala taková shoda. Tato podmínka je také postačující. Je-li totiž dáno 2., 4., 5. místo slova utvořeného při charakteristikách a_1, b_1, c_1, jsou tím určena čísla s_1 a t_1. Zvolíme-li nyní

$$s_2 \equiv a_1 - a_2 + s_1 \pmod n\,,$$
$$t_2 \equiv b_1 - b_2 + t_1 \pmod n$$

a platí-li

$$a_1 + b_1 - c_1 \equiv a_2 + b_2 - c_2 \pmod n\,,$$

je tím dosaženo splnění podmínek (3). Tím je důkaz věty 2 zakončen.

Z věty 2 plyne, že pomocí k trojic a, b, c, z nichž každé dvě vyhovují podmínkám (1), lze utvořit právě $k\,.\,n^2$ slov s třímístným rozlišením.

Pro další úvahy si zavedeme ještě toto označení:

Jsou-li p, q libovolná celá čísla, označíme (p, q) jejich největšího kladného společného dělitele. Speciálně $(p, q) = 1$ bude značit, že p, q jsou nesoudělná.

Pomocná věta. *Jsou-li p, q, r libovolná celá čísla, pak alespoň jedno z čísel $p, q, r, p - r, q - r, p + q - r$*

a) je dělitelno dvěma,

b) je dělitelno třemi.

Důkaz. a) Jsou-li všechna tři čísla p, q, r lichá, jsou čísla $p - r$ i $q - r$ sudá.

b) Nechť $(p, 3) = (q, 3) = (r, 3) = (p - r, 3) = (q - r, 3) = 1$. Dokážeme, že potom $(p + q - r, 3) = 3$. Čísla p, q, r určují jednoznačně čísla $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ taková, že $\bar{p} \equiv p \pmod 3$, $\bar{q} \equiv q \pmod 3$, $\bar{r} \equiv r \pmod 3$ a že každé z čísel $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ je rovno jedné nebo dvěma. Aby bylo $(p - r, 3) = (q - r, 3) = 1$, musí být $\bar{p} = \bar{q} + \bar{r}$. Potom však je

$$p + q - r \equiv \bar{p} + \bar{q} - \bar{r} \equiv 0 \pmod 3\,.$$

Věta 3. *Nechť $(n, 2) = (n, 3) = 1$. Potom existuje n trojic a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, z nichž každé dvě vyhovují podmínkám věty 2; je tedy pro taková n výše popsaný způsob vybírání slov optimální.*

Důkaz. Zvolme přirozená čísla d_1, d_2, d_3 taková, že

$$(d_i, n) = 1\,, \quad 1 \leqq d_i \leqq n - 1\,, \quad i = 1, 2, 3$$

a že

$$(d_1 - d_3, n) = (d_2 - d_3, n) = (d_1 + d_2 - d_3, n) = 1\,.$$

(Taková d_i, $i = 1, 2, 3$, skutečně existují; stačí volit na př. $d_1 = d_2 = 2$, $d_3 = 1$.) Buďtež a_1, b_1, c_1 libovolná čísla ležící mezi čísly $0, 1, \ldots, n - 1$. Definujme

$$a_k \equiv a_1 + (k - 1)\, d_1 \pmod{n}\,, \quad b_k \equiv b_1 + (k - 1)\, d_2 \pmod{n}\,,$$
$$c_k \equiv c_1 + (k - 1)\, d_3 \pmod{n}$$

tak, aby bylo

$$0 \leqq a_k \leqq n - 1,\ 0 \leqq b_k \leqq n - 1,\ 0 \leqq c_k \leqq n - 1,\ k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Potom

$$a_k - c_k \equiv a_1 - c_1 + (k - 1)(d_1 - d_3) \pmod{n}\,,$$
$$b_k - c_k \equiv b_1 - c_1 + (k - 1)(d_2 - d_3) \pmod{n}\,,$$
$$a_k + b_k - c_k \equiv a_1 + b_1 - c_1 + (k - 1)(d_1 + d_2 - d_3) \pmod{n}\,.$$

Pro libovolné celé číslo r označme r^* takové číslo, pro něž platí $r^* \equiv r \pmod{n}$, $0 \leqq r^* \leqq n - 1$. Potom n-členné posloupnosti $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{c_k\}$, $\{(a_k - c_k)^*\}$, $\{(b_k - c_k)^*\}$, $\{(a_k + b_k - c_k)^*\}$ probíhají všechna celá čísla $0, 1, \ldots, n - 1$.

Dokážeme toto tvrzení v obecném tvaru: Budiž dáno přirozené číslo d takové, že $(d, n) = 1$, $1 \leqq d \leqq n - 1$. Definujme $m_k = m_1 + (k - 1)\, d$, $k = 1, 2, \ldots, n$, kde m_1 je libovolné celé číslo, splňující nerovnost $0 \leqq m_1 \leqq n - 1$. Pak se v konečné posloupnosti $m_1, m_2^*, \ldots, m_n^*$ vyskytuje každé z čísel $0, 1, \ldots, n - 1$ právě jednou.

Předpokládejme, že by tomu tak nebylo. Pak existují indexy k, l, $1 \leqq k < l \leqq n$ tak, že $m_k^* = m_l^*$, tedy $m_1 + (k - 1)\, d \equiv m_1 + (l - 1)\, d \pmod{n}$; jelikož $(d, n) = 1$, dostáváme odtud po snadné úpravě

$$l \equiv k \pmod{n}\,,$$

což je ve sporu s předpokladem.

Je-li n dělitelno třemi, věta 3 neplatí; zvolíme-li na př. $n = 3$, pak podle pomocné věty před větou 3 snadno zjistíme, že k žádné trojici charakteristik a, b, c nemůžeme přidat další trojici, splňující podmínky (1). Vede tedy v tomto případě popsaný způsob k vybrání devíti slov; bylo však pokusnou cestou zjištěno, že takových slov lze vybrat alespoň osmnáct. Pro $n = 2$ je uvedený způsob optimální, zůstává však otevřenou otázkou, je-li optimální i při jiných sudých hodnotách čísla n. Způsobem popsaným v důkazu věty 3 nelze dosáhnout n^3 slov, je-li n sudé nebo dělitelno třemi. To vyplývá bezprostředně z pomocné věty.

Ukážeme ještě, že v případě, kdy $n = 2k$, kde k je liché číslo, nelze nalézt n trojic a_i, b_i, c_i, splňujících podmínky (1). Předpokládejme, že takové trojice existují. Pak mezi čísly a_i je právě k čísel lichých a k čísel sudých. Totéž platí i o číslech c_i. Jelikož n je sudé, jsou všechna čísla spolu kongruentní mod n současně lichá nebo současně sudá. Aby mohly být splněny podmínky (1), musí mezi čísly $a_i - c_i$ být k čísel sudých a k čísel lichých. Číslo $a_i - c_i$ je zřejmě liché tehdy a jen tehdy, je-li právě jedno z čísel a_i, c_i liché. Předpokládejme, že v m trojicích a_i, b_i, c_i je a_i liché a c_i sudé. Pak musí být v $k - m$ trojicích a_i sudé a c_i sudé, v $k - m$ trojicích a_i liché i c_i liché a v m trojicích a_i sudé a c_i liché; je tedy právě ve $2m$ případech $a_i - c_i$ liché. Musí proto být $k = 2m$, což je ve sporu s předpokladem, že k je liché.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ИЗ ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ

ЯРОМИР АБРГАМ, МИЛОСЛАВ ДРИМЛ (Jaromír Abrham, Miloslav Driml), Прага.

(Поступило в редакцию 15/II 1955 г.)

Даны конечные упорядоченные множества $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_5$ с одинаковым числом элементов, равным n. Эти множества мы будем называть *алфавитами*, их элементы *буквами*, а элементы декартова произведения этих множеств — *словами*. В работе разбирается вопрос о том, сколько можно подобрать таких слов, которые отличаются друг от друга по крайней мере на трех местах (такие слова мы назовем словами с трехместным различием).

В § 2 доказывается (теорема 1), *что можно подобрать не более n^3 таких слов*, причем эта граница не всегда достижима, и что достижимое число слов зависит от способа их подбора. Способ, позволяющий подобрать наибольшее достижимое количество таких слов, мы называем поэтому оптимальным.

В § 3 описывается метод подбора слов. Мы исходим из системы пяти расположенных друг около друга упорядоченных алфавитов $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \ldots, \mathfrak{M}_5$. Буквы каждого из алфавитов занумеруем числами $0, 1, \ldots, n - 1$. Обозначим через $\mathfrak{M}_i^{(r)}$ такую циклическую перестановку алфавита $\mathfrak{M}_i$, в которой на нулевом месте стоит r-я буква ($r = 0, 1, \ldots, n - 1$) первоначальнаго расположения букв алфавита. Если даны целые числа a, b, c — назовем их характеристиками — такие, что $0 \leqq a, b, c \leqq n - 1$, и если s, t пробегают независимо друг от друга числа $0, 1, \ldots, n - 1$, то мы образуем слова следующим образом:

На первое место слова поставим s-ю букву алфавита $\mathfrak{M}_1^{(0)}$, на второе место s-ю букву алфавита $\mathfrak{M}_2^{(a)}$, на третье место t-ю букву алфавита $\mathfrak{M}_3^{(0)}$, на четвертое место t-ю букву алфавита $\mathfrak{M}_4^{(b)}$, на пятое место q-ю букву алфавита $\mathfrak{M}_5^{(c)}$, где $q \equiv s + t \pmod n$, $0 \leqq q \leqq n - 1$. (Символ $\equiv$ обозначает здесь сравнение по указанному модулю.) Таким образом мы образуем при фиксированных значениях характеристик a, b, c n^2 слов с трехместным различием.

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы при двух различных тройках характеристик $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$ не могла существовать пара слов с тремя совпадающими местами, является справедливость соотношений*

$$
\begin{gathered}
a_1 \not\equiv a_2 \pmod{n}, \quad b_1 \not\equiv b_2 \pmod{n}, \quad c_1 \not\equiv c_2 \pmod{n}, \\
a_1 - c_1 \not\equiv a_2 - c_2 \pmod{n}, \quad b_1 - c_1 \not\equiv b_2 - c_2 \pmod{n}, \\
a_1 + b_1 - c_1 \not\equiv a_2 + b_2 - c_2 \pmod{n}.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Обозначим теперь для любых целых чисел p, q символом (p, q) их общий положительный наибольший делитель.

Далее имеет место

Теорема 3. *Пусть $(n, 2) = (n, 3) = 1$. Тогда существует n троек a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, из которых любые две удовлетеоряют условиям* (1); *следовательно, для таких n троек описанный выше способ подбора слов является оптимальным.*

На примере далее показано, что для n, делимого на три, теорема 3 несправедлива.

В заключение § 3 доказано, что если $n = 2k$, где k нечетно, то никоим образом нельзя найти n троек a_i, b_i, c_i, удовлетворяющих условиям (1).

Zusammenfassung

ÜBER EIN PROBLEM DER KODENTHEORIE

JAROMÍR ABRHAM, MILOSLAV DRIML, Praha.

(Eingelangt 15. 2. 1955.)

Es sind endliche geordnete Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_5$ mit derselben Anzahl von Elementen gleich n gegeben. Die Mengen werden wir weiter *Alphabete*, ihre Elemente *Buchstaben* und die Elemente aus ihrem kartesischen Produkt *Wörter* bezeichnen. In der Arbeit wird die Frage studiert, wieviel solche Wörter ausgewählt werden können, die sich wenigstens auf drei Stellen unterscheiden würden. Diese Wörter werden als „Wörter mit dreistelligem Unterschied" bezeichnet.

In § 2 wird bewiesen (Satz 1), *dass es möglich ist, höchstens n^3 solcher Wörter auszuwählen*, wobei aber diese Grenze nicht immer erreichbar ist und die maximal erreichbare Anzahl solcher Wörter von der Methode ihrer Auswahl abhängig ist. Die Methode, die zur höchsten erreichbaren Anzahl solcher Wörter führt, wird daher als die optimale bezeichnet.

In § 3 wird die Methode der Auswahl von Wörtern beschrieben. Wir werden

von einem System von fünf nebeneinander liegenden geordneten Alphabete $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_5$ ausgehen. Die Buchstaben jedes Alphabets werden mit den Nummern $0, 1, \ldots, n-1$ nummeriert. Wir werden eine solche zyklische Permutation des Alphabets $\mathfrak{M}_i$, in der an der nullten Stelle der r-te Buchstabe der ursprünglichen Anordnung steht, als $\mathfrak{M}_i^{(r)}$ bezeichnen. Wenn die ganzen Zahlen a, b, c (Charakteristiken genannt) gegeben sind, wobei $0 \leqq a, b, c \leqq n-1$ gilt und wenn s, t unabhängig voneinander die Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ durchlaufen, bilden wir die Wörter mit Hilfe der folgenden Methode:

An die erste Stelle des Wortes stellen wir den s-ten Buchstaben des Alphabets $\mathfrak{M}_1^{(0)}$, an die zweite Stelle den s-ten Buchstaben des Alphabets $\mathfrak{M}_2^{(a)}$, an die dritte Stelle den t-ten Buchstaben des Alphabets $\mathfrak{M}_3^{(0)}$, an die vierte Stelle den t-ten Buchstaben des Alphabets $\mathfrak{M}_4^{(b)}$, an die fünfte Stelle den q-ten Buchstaben des Alphabets $\mathfrak{M}_5^{(c)}$, wobei $q \equiv s + t \pmod n$ und $0 \leqq q \leqq n-1$ ist. (Der Symbol $\equiv$ bezeichnet hier die Kongruenz nach dem angegebenen Modul.) Derart werden n^2 Wörter mit dreistelligem Unterschied gebildet.

Weiter wird in § 3 der folgende Satz bewiesen:

Satz 2. *Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass bei zwei verschiedenen Zahlentripeln der Charakteristiken $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$ nicht ein Paar Wörter existieren möchte, die an drei Stellen einen gemeinsamen Buchstaben hätten, ist die Gültigkeit der Beziehungen*

$$\begin{gathered} a_1 \not\equiv a_2 \pmod n\,, \quad b_1 \not\equiv b_2 \pmod n\,, \quad c_1 \not\equiv c_2 \pmod n\,, \\ a_1 - c_1 \not\equiv a_2 - c_2 \pmod n\,, \quad b_1 - c_1 \not\equiv b_2 - c_2 \pmod n\,, \\ a_1 + b_1 - c_1 \not\equiv a_2 + b_2 - c_2 \pmod n\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Wir werden nun für beliebige ganze Zahlen p, q ihren grössten positiven gemeinsamen Teiler mit dem Symbol (p, q) bezeichnen.

Weiter gilt

Satz 3. *Lassen wir $(n, 2) = (n, 3) = 1$ gelten. Dann existieren n Zahlentripel a_k, b_k, c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, wobei immer zwei davon die Bedingungen (1) erfüllen. Die oben beschriebene Methode der Auswahl der Wörter ist also für diese Werte von n optimal.*

Auf einem Beispiel wird weiter gezeigt, dass für n, das durch drei teilbar ist, der Satz 3 nicht gilt.

Am Ende des § 3 wird bewiesen, dass es für den Fall $n = 2k$ (k eine ungerade Zahl) nicht möglich ist n Zahlentripel a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ zu bilden, die die Bedingungen (1) erfüllen.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

POZNÁMKA K ČLÁNKU „O JISTÝCH POSLOUPNOSTECH SKUPIN BODŮ NA KRUŽNICI“

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Došlo dne 21. září 1955.)

DT: 513.21
517.1

L. Kosmák v práci, zmíněné v nadpise[1]), dokazuje ve větě 2 tvrzení, které lze zformulovat takto: *Je-li posloupnost n-tic reálných čísel* $[a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)}]$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *tvořena pomocí rekurentního vztahu*

$$a_k^{(\nu+1)} = (1 - b)\, a_k^{(\nu)} + b a_{k+1}^{(\nu)}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1}$$

kde

$$0 < b < 1$$

a

$$a_{n+1}^{(\nu)} = a_1^{(\nu)}\,,$$

pak

$$\lim_{\nu \to \infty} a_k^{(\nu)} = \bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2}$$

Dokažme toto tvrzení pomocí několika jednoduchých nerovností. Zřejmě stačí najít konstantu λ, $0 < \lambda < 1$, takovou, že

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu+1)} - \bar{a})^2 \leqq \lambda \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2\,, \qquad \nu = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Označme symbolem $\sum\limits_0$ cyklický součet a napišme následující dvě identity, z nichž první je důsledkem rovnic (1) a druhá je evidentní:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu+1)} - \bar{a})^2 = ((1 - b)^2 + b^2) \sum_{i=1}^{n} (a^{(\nu)} - \bar{a})^2 + \\ + 2(1 - b)\, b \sum_0 (a_i^{(\nu)} - \bar{a})\,(a_{i+1}^{(\nu)} - \bar{a})\,, \tag{4}$$

$$\sum_0 (a_i^{(\nu)} - a_{i+1}^{(\nu)})^2 = 2\Big[\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2 - \sum_0 (a_i^{(\nu)} - \bar{a})\,(a_{i+1}^{(\nu)} - \bar{a})\Big]\,. \tag{5}$$

Dále, pro každé $\nu = 1, 2, \ldots$ platí $\bar{a} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{(\nu)}$ a tedy

$$(a_k^{(\nu)} - \bar{a})^2 \leqq \big(\sum_0 |a^{(\nu)} - a_{i+1}^{(\nu)}|\big)^2 \leqq n \sum_0 (a_i^{(\nu)} - a_{i+1}^{(\nu)})^2\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

[1]) Viz Časopis pro pěstování matematiky, *80* (1955), 299—309.

takže

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2 \leqq n^2 \sum_{0} (a_i^{(\nu)} - a_{i+1}^{(\nu)})^2 . \tag{6}$$

Nerovnost (6) ve spojení s identitou (5) dává

$$\sum_{0} (a_i^{(\nu)} - \bar{a}) (a_{i+1}^{(\nu)} - \bar{a}) \leqq \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2 ,$$

odkud v souhlase s (4) dostáváme potřebnou nerovnost (3) ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu+1)} - \bar{a})^2 \leqq \left[1 - \frac{b(1-b)}{n^2}\right] \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2 , \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Ještě bych chtěl upozornit na možnost teoreticko-pravděpodobnostní formulace problému: *Považujeme-li čísla* $[a_1^{(\nu)}, \ldots a_n^{(\nu)}]$ *za pravděpodobnosti stavů* $1, 2, \ldots, n$ *v časových okamžicích* $\nu = 1, 2, \ldots,$ *pak rekurentními vztahy* (1) *je definován Markovův řetězec s maticí přechodu*

$$\begin{Vmatrix} 1-b & b & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1-b & b \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1-b \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b & & 0 \ \ 0 \ldots 1-b \end{Vmatrix} . \tag{7}$$

a rovnice (2) *vyplývá ze známé ergodické věty a z cykličnosti matice.*

Lze tedy k jejímu důkazu použít kterékoliv z metod užívaných v teorii Markovových řetězců. Metoda užitá L. Kosmákem je totožná s metodou založenou na přímém výpočtu pomocí Perronovy formule[2]). Vskutku, čísla $1 - b + b\omega^m$ užitá ve vzorci (7) práce L. Kosmáka, nejsou ničím jiným než charakteristickými čísly matice (7).

---

[2]) Teorii Markovových řetězů viz na př. v knize *T. A. Sarymsakov* „Osnovy těorii processov Markova“ 1954. Perronova formule je uvedena na str. 46 a příslušná ergodická věta na str. 49.

REFERÁTY

PLOŠNÝ INTEGRÁL

(Vlastní referát o přednášce, proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 3. října 1955.)

Buď A omezená měřitelná část E_m (m přirozené); buď v vektorová funkce o složkách $v_1, \ldots, v_m$, kde v_i jsou polynomy (v m proměnných). Potom je zřejmě

$$\int_A \operatorname{div} v(z)\, dz = \sum_{i=1}^{m} \int_A \frac{\partial v_i(z)}{\partial z_i}\, dz;$$

dále můžeme psát (je-li $m > 1$) podle Fubiniovy věty na př.

$$\int_A \frac{\partial v_m(z)}{\partial z_m}\, dz = \int_{E_{m-1}} \left(\int_{A_x^m} \frac{\partial v_m(x, y)}{\partial z_m}\, dy \right) dx\,,$$

kde A_x^m je množina všech $y \in E_1$, pro něž $[x, y] \in A$. Předpokládejme dále, že množina A má tuto vlastnost:

(V_m) *Pro skoro všechna $x \in E_{m-1}$ existuje celé nezáporné číslo r a čísla $a_1 < b_1 < \ldots < a_r < b_r$ tak, že míra množiny $(A_x^m - G) \cup (G - A_x^m)$, kde $G = \bigcup_{j=1}^{r} (a_j, b_j)$, je rovna nule a že platí $\int_{E_{m-1}} \varphi_m(x)\, dx < \infty$, kde $\varphi_m(x) = r$.*

Nyní je zřejmě

$$\int_A \frac{\partial v_m(z)}{\partial z_m}\, dz = \int_{E_{m-1}} \left[\sum_{j=1}^{r} (v_m(x, b_j) - v_m(x, a_j)) \right] dx.$$

Dá se však očekávat, že poslední výraz bude mít smysl i v jiných případech, než když v_m je polynom. Především si všimněme, že body $[x, a_j]$, $[x, b_j]$ leží na hranici H množiny A. Buď tedy f omezená borelovská funkce na množině H. (Borelovské funkce jsou — zhruba řečeno — ty funkce, k nimž dospějeme postupnými limitními přechody, vycházejíce od spojitých funkcí.) Je-li $|f(x)| \leqq C$ ($x \in H$), je $\left| \sum_{j=1}^{r} (f(x, b_j) - f(x, a_j)) \right| \leqq 2Cr = 2C\varphi_m(x)$ pro skoro všechna $x \in E_{m-1}$. Lze dokázat, že funkce

$$\sum_{j=1}^{r} (f(x, b_j) - f(x, a_j)) = g(x) \tag{1}$$

je měřitelná; protože $\int_{E_{m-1}} \varphi_m(x)\, dx < \infty$, konverguje též $\int_{E_{m-1}} g(x)\, dx$. Vidíme tedy:

Jestliže omezená měřitelná množina $A \subset E_m$ $(m > 1)$ má vlastnost (V_m), můžeme na systému všech omezených borelovských funkcí f na hranici množiny A definovat funkcionál P_m předpisem

$$P_m(A, f) = P_m(f) = \int_{E_{m-1}} g(x) \, dx ,$$

kde funkce g je určena vztahem (1).

Index m můžeme zřejmě (po provedení příslušných změn) nahradit kterýmkoli z indexů $1, \ldots, m - 1$. Nechť nyní má omezená měřitelná množina A všechny vlastnosti $(V_1), \ldots, (V_m)$. Potom můžeme na systému všech omezených borelovských vektorů (t. j. vektorových funkcí $v = [v_1, \ldots, v_m]$, kde $v_1, \ldots, v_m$ jsou omezené borelovské funkce) na hranici H množiny A utvořit funkcionál

$$P(v) = \sum_{i=1}^{m} P_i(v_i) .$$

Dále se dá ukázat, že existuje konečná míra p na systému všech borelovských množin $B \subset H$ a jednotkový borelovský vektor ν na množině H tak, že pro každý omezený borelovský vektor v na H platí

$$P(v) = \int_H v \, . \, \nu \, dp$$

($v \, . \, \nu$ je ovšem skalární součin). Vidíme, že funkcionál P můžeme skutečně nazvat plošným integrálem (podle plošné míry p ve směru vnější normály ν).

Ze způsobu, jakým jsme došli k funkcionálu P, je ihned vidět:

Jestliže funkce $v_1, \ldots, v_m$ mají spojité derivace 1. řádu v okolí množiny $\bar{A}$, pak pro vektorovou funkci $v = [v_1, \ldots, v_m]$ platí

$$\int_A \operatorname{div} v(z) \, dz = \int_H v \, . \, \nu \, dp . \tag{2}$$

Buď nyní $\mathfrak{A}$ systém všech množin $A \subset E_m$, které jsou omezené měřitelné a které mají vlastnosti $V_1, \ldots, V_m$. Vidíme, že ke každému $A \in \mathfrak{A}$ existuje konečná míra p a jednotkový vektor ν tak, že platí (2). Systém $\mathfrak{A}$ byl však sestrojen dosti uměle; přirozenější by bylo vyšetřovat na př. systém $\mathfrak{A}'$ takto definovaný:

Množina A patří do $\mathfrak{A}'$, je-li omezená měřitelná v E_m a existuje-li na hranici H množiny A borelovská míra p a jednotkový borelovský vektor ν tak, že platí (2) pro všechny vektory v, jejichž složky jsou polynomy. Dá se ukázat, že je tím míra p určena jednoznačně a vektor ν „skoro jednoznačně" (vzhledem k p). Snadno se pak zjistí, že míra p je nutně konečná a že (2) platí pro každý vektor v, jehož složky mají spojité derivace 1. řádu v okolí množiny $\bar{A}$. Můžeme však jít ještě dále.

Všimněme si této věci: Je-li $A \in \mathfrak{A}'$, jsou-li složky vektoru v polynomy a splňuje-li vektor v vztah $\|v(z)\| \leqq 1$ pro každé $z \in A$, platí zřejmě též $\|v(z)\| \leqq 1$ pro každé $z \in H$ a tedy

$$\left|\int_A \operatorname{div} v(z) \, dz\right| = \left|\int_H v \, . \, \nu \, dp\right| \leqq \int_H \|v\| \, . \, \|\nu\| \, dp \leqq p(H) .$$

Přiřadíme-li nyní každé omezené měřitelné množině $A \subset E_m$ hodnotu

$$\|A\| = \sup \int_A \operatorname{div} v(z) \, dz$$

(kde v probíhá všechny vektory, jejichž složky jsou polynomy, a kde $\|v(z)\| \leqq 1$ pro každé $z \in A$), vidíme, že pro každé $A \in \mathfrak{A}'$ je $\|A\| \leqq p(H) < \infty$. Utvoříme-li tedy systém $\mathfrak{A}''$ všech omezených měřitelných množin A, pro něž $\|A\| < \infty$, máme vztah

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}'' .$$

Dá se však ukázat, že všude platí rovnost, t. j. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}''$. Při důkaze vztahu $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'$

hrají důležitou roli některé věty z funkcionální analysy. Míra p, příslušná k množině $A \in \mathfrak{A}''$, splňuje vztah $p(H) = \|A\|$. Můžeme tedy říci, že $\|A\|$ udává pro každou omezenou měřitelnou množinu A plošnou velikost jejího povrchu. Zároveň je vidět, že nelze definovat „rozumný" plošný integrál přes hranici žádné omezené měřitelné množiny A, která nepatří do $\mathfrak{A}''(= \mathfrak{A})$. Systém $\mathfrak{A}$ je silně „invariantní"; je-li totiž φ regulární zobrazení nějakého okolí množiny $\bar{A}$ ($A \in \mathfrak{A}$), je též $\varphi(A) \in \mathfrak{A}$. Je-li mimo to zobrazení φ prosté, platí „transformační vzorec"

$$P(A, v) = P(\varphi(A), w) ,$$

kde $w(y) = |D(x)|^{-1} . M(x) . v(x)$; M je funkční matice zobrazení φ, D je její determinant, $M(x) . v(x)$ je maticový součin (vektor $v(x)$ pokládáme za sloupec), $y = \varphi(x)$.

K platnosti vztahu (2) jsme předpokládali, že složky vektoru v mají spojité derivace v okolí množiny $\bar{A}$. Tento předpoklad můžeme zeslabit na př. tímto způsobem:

Buď f funkce, definovaná v okolí G množiny $\bar{A}$ ($A \in \mathfrak{A}$). Buď v spojitý vektor na množině G. Nechť pro každou krychli[1] *$K \subset G$ platí*

$$\int_K f(x) \, dx = P(K, v) . \tag{3}$$

Potom platí též

$$\int_A f(x) \, dx = P(A, v) . \tag{4}$$

Má-li omezená množina A tu vlastnost, že funkce proměnné ε

$$\frac{\text{míra } \Omega(H, \varepsilon)}{\varepsilon}$$

(kde $\Omega(H, \varepsilon)$ je ε-ové okolí hranice H množiny A) je omezená pro $0 < \varepsilon < 1$, platí $A \in \mathfrak{A}$ a vztah (4) je správný, jestliže vektor v je spojitý na množině $\bar{A}$, jestliže platí (3) pro každou krychli K, ležící u v n i t ř A, a jestliže integrál $\int_A f(x) \, dx$ existuje (ve smyslu Lebesgueově).

V konkretních případech je nezbytné umět vyjádřit plošný integrál $P(A, v)$ „klasickým způsobem", t. j. v parametrickém tvaru. K tomu zavedeme tuto definici:

Řekneme, že φ je A-přípustné zobrazení množiny G, je-li $A \subset E_m$, G otevřená v E_{m-1}, má-li zobrazení φ na množině G spojité derivace 1. řádu a je-li splněna tato podmínka: Buď w^φ vnější součin vektorů $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_{m-1}}$. Pak ke každému bodu $t_0 \in G$ existuje okolí U bodu t_0 a kladné číslo ε tak, že pro každé $t \in U$ a každé $\delta \in (0, \varepsilon)$ platí

$$\varphi(t) + \delta w^\varphi(t) \text{ non} \in A ,$$
$$\varphi(t) - \delta w^\varphi(t) \in A .$$

Platí nyní tato věta:

Nechť $A \in \mathfrak{A}$. Buď φ_n A-přípustné zobrazení množiny G_n ($n = 1, 2, \ldots$). Nechť $\varphi_n(G_n) \cap \cap \varphi_q(G_q) = \emptyset$ pro $n \neq q$; nechť $p(H - \bigcup_n \varphi_n(G_n)) = 0$.[2] *Potom pro každou omezenou borelovskou funkci f na množině H platí*

$$\int_H f \, dp = \sum_n \int_{G_n} f(\varphi_n(t)) \, \|w^{\varphi_n}(t)\| \, dt ;$$

[1]) Krychlí rozumíme kartézský součin m uzavřených omezených nezvrhlých intervalů stejné délky.

[2]) H je hranice množiny A, p a v jsou příslušná míra a jednotkový vektor.

pro skoro všechna $t \in G_n$ *platí*

$$\nu(\varphi_n(t)) = \frac{w^{\varphi_n}(t)}{\|w^{\varphi_n}(t)\|} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

(Vztah $p\ (B) = 0$ je splněn na př. tehdy, jestliže B je borelovská část H a jestliže všech m průmětů množiny B má $m - 1$ — rozměrnou míru 0).

Nakonec se přednášející zmínil o tom, že tato theorie dává některé netriviální výsledky i pro $m = 2$.

Jan Mařík, Praha.

RECENSE

Историко-математические исследования. (Matematicko-historická bádání.) Svazek I—VIII, 1948—1955; redaktoři: *G. F. Rybkin* a *A. P. Juškevič*, Moskva, Gostechizdat, cena jednotlivých svazků 15 r. až 20 r.

V tomto vkusně vypraveném sborníku, tištěném na dobrém papíře, s hojnými ilustracemi, v celoplátěné modré vazbě a vydaném ve 3000 až 4000 výtiscích najde čtenář zajímavé poučení o různých otázkách matematicko-historických, zvláště o dějinách matematiky v zemích SSSR. Každý svazek je uveden kratičkou předmluvou redakce, charakterisující stručně obsah svazku. Další stati jsou seskupeny v cykly, obírající se buď jednotlivými matematiky nebo určitým obdobím a pod. Poslední cyklus v každém svazku nadepsaný „Z dějin matematiky" shrnuje práce o různých předmětech matematicko-historického bádání. Bohužel první svazek není, pokud vím, u nás dostupný. Svazky další se vyskytují v různých knihovnách.

Svazek II, 508 stran: První cyklus je věnován geniálnímu N. I. Lobačevskému a to rozboru jeho negeometrických prací a rozšíření a dalšímu vývoji jeho myšlenek. Jsou to pojednání G. L. Lunce, A. P. Juškeviče a I. G. Bašmakové, B. V. Gnedenka, N. I. Idelsona a E. K. Chilkoviče. Druhý cyklus tvoří pojednání I. G. Bašmakové o „Založení nauky dělitelnosti" v pracích E. I. Zolotareva. Poslední cyklus obsahuje pojednání K. A. Rybnikova o prvých etapách vývoje variačního počtu a články V. N. Molodšije a L. E. Majstrova, vyvracející názor M. Ja. Vygodského, že Eukleides byl stoupencem názorů Platonových.

Svazek III, 508 str.: První cyklus je opět věnován Lobačevskému. Pojednání G. F. Rybkina je nadepsáno „Materialismus — základní rys světového názoru N. I. Lobačevského". Tímto světovým názorem se zabývá i pojednání S. A. Janovské. Pedagogická činnost Lobačevského je obsahem prací V. M. Nagajeva a I. N. Bronštejna. Druhý cyklús tvoří pojednání I. A. Marona o M. V. Ostrogradském jakožto organisátoru matematických přednášek ve vojenských učebních ústavech. Třetí cyklus obsahuje dvě pojednání, K. A. Rybnikova a A. M. Lukomské, o ruském historiku matematiky V. V. Bobyninovi. V posledním cyklu píše A. I. Markuševič o příspěvcích Ju. V. Sochockého k obecné nauce analytických funkcí, V. P. Zubov o nedělitelných veličinách a o nekonečnu ve staroruské památce z XV. století, V. N. Molodšij o nauce přirozených čísel v XVIII. století, I. Ja. Depman o zapomenutém vydání Eukleidových „Základů" v ruském jazyce a F. D. Kramar o otázce založení analysy v pracích Wallisových a Newtonových.

Svazek IV, 512 str.: První cyklus je věnován Michajlu Vasileviči Ostrogradskému a rozboru jak jeho činnosti matematické tak pedagogické. Jsou tu pojednání E. Ja. Remeze, B. V. Gnedenka, I. A. Marona a I. Ja. Depmana. Druhý cyklus je ještě věnován Lobačevskému a to jak jeho světovému názoru, tak jeho geometrii a algebře (S. A. Janovskaja, B. L. Laptěv a V. V. Mozorov). Třetí cyklus tvoří velké pojednání A. K. Suškeviče: „Materiály k dějinám algebry v Rusku v XIX. a na počátku XX. století." V posledním cyklu píše A. P. Juškevič o matematice národů střední Asie v IX.-XV. století a B. A. Rozenfeld o matematických pracích Nâsîr eddîna al-Tûsî.

Svazek V, 472 str.: První cyklus je věnován učiteli Ostrogradského Timoteji Fedorovići Osipovskému. Nalézáme tu vedle dvou prací Osipovského pojednání E. JA. BACHMUTSKÉ a V. E. PRUDNIKOVA, zabývající se životem a činností Osipovského. V třetím cyklu obírá se R. JA. ŠOSTAK Alexejem Vasilevičem Letnikovem. V posledním cyklu pojednává G. M. FICHTENGOLC o transformaci proměnných ve vícenásobných integrálech, I. G. SPASSKIJ o vzniku ruských ščotů a V. V. GUSSOV o pracích ruských vědců o gammafunkci.

Svazek VI, 672 str.: První cyklus se obírá matematickými traktáty Omara al-Chajjâmî. Jsou tu překlady B. A. ROZENFELDA tří Omarových traktátů a komentáře k nim od B. A. Rozenfelda a A. P. JUŠKEVIČE. Druhý cyklus je věnován Kiriku Novgorodskému. Je tu fotokopie rukopisu s jeho převodem do novoruštiny a komentář V. P. ZUBOVA. Třetí cyklus s nadpisem „Materiály o P. L. ČEBYŠEVOVI" obsahuje práci ČEBYŠEVOVU, pojednání B. V. GNEDENKA a S. A. DACHIJE. Čtvrtý cyklus nadepsaný „Z dějin matematiky na státních universitách a ve vědeckých organisacích" obsahuje pojednání S. E. BELOZEROVA o matematice na universitě v Rostovu. Poslední cyklus obsahuje práce V. V. GUSSOVA o rozvoji nauky válcových funkcí v Rusku a SSSR, V. F. ROGAČENKA o objevu N. I. Lobačevského o přibližném řešení číselných algebraických rovnic, F. P. OSTRADNYCHA o episodě ze života akademika A. A. Markova, I. Ja. Depmana o V. E. Steklovu na universitě v Petrohradě, E. Ja. BACHMUŠSKÉ o pedagogické činnosti V. A. Steklova v Charkovském technologickém ústavě, A. E. RAIKA o uralském matematikovi Ivanu Michejevičovi Peruškinovi, I. JA. DEPMANA o vynikajících slovanských počtářích G. Vegovi a J. F. Kulikovi (Kulik se narodil v Polsku a byl profesorem na universitě v Praze), I. G. BAŠMAKOVÉ o diferenciálních metodách Archimedových a T. G. TMANANA o Eukleidových „Základech" ve staroarménském prameni.

Svazek VII, 720 str.: Cyklus první obsahuje matematické traktáty Džemšida Gias eddîna al-Kâšî v překladu B. A. ROZENFELDA s komentářem B. A. Rozenfelda a A. P. JUŠKEVIČE. Cyklus druhý je věnován Leonardu Eulerovi. O jeho životě a práci tu píší I. G. BAŠMAKOVÁ, A. P. JUŠKEVIČ, N. I. SIMONOV, F. I. FRANL a K. I. KOSTRJUKOV. V posledním cyklu jsou práce K. A. RYBNIKOVA o t. zv. tvůrčích a kritických obdobích v dějinách matematické analysy, P. JA. POLUBARINOVÉ-KOČINÉ a I. JA. DEPMANA o S. V. Kovalevské a V. E. PRUDNIKOVA o 4 dopisech Ostrogradskému.

Svazek VIII, 636 str. je věnován dvoustoletému výročí založení moskevské university. O matematice a mechanice na ní píší P. S. ALEXANDROV, V. V. GOLUBEV, I. N. LICHOLETOV a S. A. JANOVSKAJA, L. E. MAJSTROV a I. A. TJULINÁ. V práci Licholetova a Janovské je pojednáno také o Mik. Dimitrijeviči Brašmanovi, moravském rodáku. V druhém a posledním cyklu jsou práce Juškevičova o výsledcích práce čínských matematiků, I. G. ALIMOVA o Eukleidovi, I. JA. DEPMANA o ruské knize „Praktická geometrie" a téhož autora o prvním ruském doktoru matematických věd na Pařížské universitě.

Quido Vetter, Praha.

Б. В. Гнеденко: **Михаил Василевич Остроградский.** Moskva, 1952, Gostechizdat, 332 stran, 3 obrázkové přílohy, cena váz. 8 r. 40 kop.

Kniha Gnedenkova je vzornou monografií, věnovanou zakladateli ruské matematické školy M. V. OSTROGRADSKÉMU (24/9 1801 - 1/1 1862). Význam Ostrogradského, kterého carská vláda postavila pod policejní dozor, byl dříve nedoceněn. V mnohých matematických myšlenkách předstihl svou dobu. Některé z nich se později znovu objevily u zahraničních matematiků a vešly nejen do dějin, nýbrž i do učebnic buď s jinými jmény nebo beze jmen. Tuto historickou křivdu se snaží prof. Gnedenko svou knihou napravit. A to je velká zásluha. Autor podložil svůj spis obsáhlým studiem jak dosavadní literatury — její seznam na konci knihy vykazuje 50 položek — tak rukopisného a archivního materiálu. V tom mu zvláště byli nápomocni redaktor knihy G. F. RYBKIN, A. P. JUŠKEVIČ, E. JA. REMEZ, I. A. MARON a F. P. OSTRADNYCH.

Kniha je rozdělena na tři části: I. Nástin životopisný. II. Nástin matematické tvorby Ostrogradského. III. Nástin pedagogické činnosti Ostrogradského. K tomu přistupuje obšírný dodatek, obsahující tři pojednání Ostrogradského, seznam jeho prací, který však, jak praví autor knihy, vyžaduje ještě doplnění, přehled rukopisného fondu Ostrogradského, odstavec o poměru carské vlády k památce Ostrogradského a dokumenty o policejním dozoru nad Ostrogradským. Předností knihy je to, že líčí dobu a stav vědy za života Ostrogradského a osoby, které na něho působily i vliv, jejž vyvíjel na ruskou matematiku. Obrazové přílohy přinášejí podobizny Ostrogradského a jeho učitelů PAVLOVSKÉHO a OSIPOVSKÉHO. V textu jsou vyobrazena místa jeho působení a smrti. Kniha je psána tak, aby jí mohl porozumět i matematický neodborník. Našim čtenářům ji můžeme vřele doporučiti.

Quido Vetter, Praha.

И. Я. Депман: **Рассказы о математике.** (Vyprávění o matematice.) Doplněné a opravené vydání. Školní knihovna, 1954, Leningrad, Gosdetizdat, 144 stran, cena 3 r. 05 kop.

Účelem knihy J. Ja. DEPMANA, která vyšla v nákladu 200 000 výtisků, je podle autorových úvodních slov ukázat, jak z pracovní činnosti člověka vznikly hlavní pojmy a základní oddíly matematiky a jak se rozvíjely a zdokonalovaly, až dosáhly dnešní úrovně. Přitom se autor omezuje jen na látku 5. až 7. třídy střední školy a na výklad velmi stručný, jak v tak malé knížce ani jinak nelze. Rozsah látky vysvitne z nadpisů jednotlivých oddílů: Vznik matematiky, str. 5—19. (Matematika u starých národů. Egypt. Babylon. Indie. Řecká matematika.) Matematika u národů naší domoviny, str. 20—73. (Matematika u Arménů. Matematika u národů střední Asie. Matematika u ruského národa. Ruské sčoty. Geometrické vývody ve starých ruských památkách. L. F. Magnickij a jeho „Aritmetika". Jak cenili matematiku naši předkové. Z obsahu starých matematických rukovětí. Matematické zábavy M. Ju. Lermontova.) Z dějin vývoje elementární matematiky, str. 74—136. (Aritmetika. Počítání zpaměti. Dvojková číselná soustava. Písemné počítání. O některých aritmetických termínech. Aritmetika celých čísel. O počtu aritmetických výkonů. Způsob násobení ruských sedláků. Některé vlastnosti celých čísel. P. L. Čebyšev. Eulerova, Goldbachova a Vinogradského poučky o prvočíslech. Zlomky. Algebra. N. I. Lobačevskij. S. V. Kovalevskaja. Vynikající ruští matematičtí pedagogové.) Doslov, str. 137—138. Seznam literatury, str. 138—141.

Kniha je vyzdobena sedmdesáti obrázky. Nás jistě potěší obrázek na str. 41, který přináší ukázku starého počítání „na linách". Není to reprodukce, jak tomu obyčejně bývá, z nějakého německého „Rechenbuchu", ale z české aritmetiky ze XVI. století. Českého čtenáře zajisté upoutají výklady o matematice arménské a národů střední Asie, kde najde mnoho mu neznámého. Také velmi četné zprávy o ruské matematice budou našemu čtenáři vítaným poučením zvláště proto, že jsou provázeny obrazy moderních ruských matematiků a matematiček u nás neznámými. V seznamu použité literatury se uvádí 59 ruských prací matematicko-historických a to i literatury nejnovější do r. 1953.

Quido Vetter, Praha.

J. B. Dynkin - V. A. Uspenskij: **Matematické besedy.** Přeložil akademik *E. Čech*, vydalo SNTL r. 1955, stran 226, obr. 161, cena 20,50 Kčs, 1700 výtisků.

Žákům jedenáctiletek a posluchačům vysokých škol je určena pěkná knížka, kterou napsali dva pracovníci žákovského matematického kroužku při Lomonosově státní universitě v Moskvě; shrnuli tu látku ze dvou studijních let. Kniha je tak psána, že jí porozumí čtenář se středoškolským vzděláním. Podle několika poznámek v knize (str. 64, str. 105) je vidět, že autoři byli ve styku s pracovníky školních matematických olympiad. Látku vykládají ve formě cyklů navzájem souvisících úloh, jejichž řešení je připojeno na konci knížky (celkem 213 úloh). Autoři nechtějí čtenáře seznámit jen s výsledky příslušné partie, nýbrž se způsobem myšlení a methodami práce. Spis má tři oddíly.

I. oddíl je věnován klasickému *problému čtyř barev*. Jsou charakterisovány mapy, které lze pravidelně zbarvit dvěma barvami (pravidelné zbarvení znamená, že každé dvojici sousedních území odpovídá dvojice různých barev), problém tří barev je řešen pro určitou třídu map a konečně je dokázáno, že každou mapu, která má nejvýše 11 území, lze pravidelně zbarvit čtyřmi barvami.

II. oddíl je věnován *theorii čísel*. Zavádí se t. zv. m-aritmetika (t. j. počítání v okruhu zbytkových tříd podle modulu m) a v ní se řeší lineární a kvadratické rovnice. Několik úloh je věnováno Fibonacciově posloupnosti (s ohledem na m-aritmetiku) a v závěru je řešena neurčitá rovnice $x^2 - 5y^2 = 1$. V celku je možno říci, že se tu autoři snaží o jakousi propedeutiku abstraktní algebry (okruh, těleso, grupa).

V III. oddílu jsou úlohy z *theorie pravděpodobnosti*. Ačkoliv se na počátku „propedeuticky" definuje pravděpodobnost tradičně školským způsobem, ukazují autoři dále, že v této theorii nevystačíme jen s pouhým „čítáním příznivých případů". Pojem Markovova řetězu je vysvětlen na jednoduchých příkladech.

Kniha populárně psaná se ovšem neobejde bez nepřesností, ale ty nejsou na překážku při zřejmě propedeutickém charakteru díla. Český překlad je dobrý, jen na str. 76 v úloze 138 má být místo „vychází z každého bodu" správně „směřují do každého bodu".

Mimo tiskové chyby uveřejněné v „Seznamu oprav" (na zvláštním listě) nalezl jsem ještě tyto chyby, které pro úplnost připojuji:

Str. 53, řádek 8 až 14 shora posunout o jedno místo doleva.

Str. 82 řádek 1 shora: místo C_{--k} čti C^k_{n-1-k} (jen v některých exemplářích).

Str. 82 řádek 12 shora: místo $P^{\frac{-1}{2}}_{p-1} q^{\frac{p-1}{2}}$ čti $P^{\frac{p-1}{2}}_{p-1} q^{\frac{p-1}{2}}$ (jen v některých exemplářích).

Str. 97 řádek 10 shora: místo $\frac{}{10}$ čti $\frac{8}{10}$.

Str. 117 řádek 2 zdola: místo $\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}} : \sqrt{n}$ čti $\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}} . \sqrt{n}$.

Str. 159 řádek 18 shora: místo „je rovna 3" čti „je rovna aspoň 3".

Str. 205 řádek 1 shora: místo 167 čti 166 (též v originále).

Str. 213 obr. 156: chybí označení bodu a.

Jiří Sedláček, Praha.

V. Votruba - Č. Muzikář: **Theorie elektromagnetického pole.** Vydalo nakladatelství ČSAV, Praha 1955, 355 stran, 15 obrázků. Cena váz. Kčs. 45,80.

Tato učebnice je úvodním dílem ke studiu makroskopické theorie elektromagnetického pole v látkových prostředích v klidu. Celá theorie je tu vybudována induktivním způsobem, t. j. z matematické formulace jednoduchých fysikálních jevů jsou odvozovány zákony obecnější. Tento způsob konstrukce byl volen z toho důvodu, že autorům zdá se být pedagogicky pro úvodní studium nejpříhodnější.

Nároky na matematické znalosti čtenáře jsou minimální — základy diferenciálního a integrálního počtu a vektorové analysy.

Autoři podávají probíranou látku zcela přístupným způsobem a snažili se na mnohých místech o přesnou matematickou formulaci fysikálních fakt, pokud byla tato přesnost pro věc samu únosná.

Dílo je rozvrženo do šesti kapitol. **První kapitola** je věnována elektrostatickému poli, t. j. poli časově neproměnnému. Nejprve jsou sledovány případy polí bodových nábojů a multipólů, poté pak případy, kdy náboje jsou spojitě rozloženy na plochách a v prostoru. Dále je vyšetřován vliv dielektrika a odvozeny vztahy, platné pro energii pole.

Kapitola **druhá** se zabývá magnetostatickým polem. Úvodem je ukázáno na analogie a rozdíly s polem elektrostatickým. Poté jsou charakterisovány magnetické vlastnosti skutečných látek a je formulován problém řešení pole daných magnetů v hmotném prostředí.

V kapitole **třetí** je sledován případ stacionárního elektrického proudu a elektromagnetického pole jím vytvořeného. Zejména je tu zaveden vektorový potenciál a odvozen Biot-Savartův zákon.

V kapitole **čtvrté** je přikročeno k vyšetřování obecného elektromagnetického pole. Nejprve jsou odvozeny Maxwellovy rovnice a je proveden jejich rozbor. Současně je poukázáno na to, kterak tyto rovnice vyplývají ze základních rovnic Lorentzovy elektronové theorie. Pak jsou sledovány otázky energie, hybnosti elektromagnetického pole a elektrodynamiky stacionárních a kvasistacionárních proudů.

Kapitola **pátá** je věnována otázkám elektromagnetických vln. Jsou zde odvozeny rovnice pro charakteristické veličiny vlny v homogenním isotropním dielektriku a vodiči a je zaveden Hertzův vektor. Dále je provedeno řešení těchto rovnic pro různé speciální případy, jako rovinné vlny, vlny buzené Hertzovým dipólem a lineárními antenami.

Poslední kapitola, **šestá**, ukazuje aplikace theorie pole. Jsou zde řešeny tyto otázky: šíření vln podél rozhraní vodiče a dielektrika, princip přibližných okrajových podmínek, vedení vlnovody obdélníkového a kruhového průřezu, vedení vln kruhovým vodičem a konečně vedení Lecherovými dráty.

Závěrem je kniha opatřena dodatkem o soustavách jednotek.

Pro náležité ujasnění a procvičení probírané látky je každá stať doplněna příklady ke cvičení, jejichž provedená řešení jsou uvedena na konci knihy.

Z důvodů přístupnosti a dobrého zpracování možno dílo doporučit k úvodnímu studiu.

Václav Doležal, Praha.

Z. Schmidt - B. Dobrovolný: **Technická příručka.** Nakladatelství Práce, Praha 1954, 1277 stran, přes 1000 obrázků, cena 48,05 Kčs.

Vedle rozsáhlé matematické části jsou v této objemné knize také statě z thermiky, pevnosti a pružnosti, mechaniky, z konstrukcí částí strojových, z nauky o materiálu a ze strojnického kreslení. Na recensování všech těchto disciplin nestačí matematik a také na to není v matematickém časopise místo. Nebudu tedy zde recensovati příručku celou, nýbrž všimnu si jen části matematické, která zaujímá prvních 404 stran knihy. Z toho na prvních 284 stranách jsou různé matematické tabulky a nejrůznější vzorce, hlavně z elementární geometrie a trigonometrie. Jsou podány téměř bez jakéhokoli textu. Spolehlivost všech těchto tabulek i správnost velké spousty vzorců jsem nekontroloval.

S hlediska matematického je závažnější další část, zabírající str. 285—404 uvedené Technické příručky. Na těchto stranách je podán „výklad" jednotlivých matematických pojmů a operací, a to od začátků aritmetiky až po diferenciální rovnice včetně. Je tu několik odstavců, z nichž u prvního je jako autor uveden ing. Z. SCHMIDT, autorem druhého je prof. J. ŽDÁREK a u dalších odstavců není autor uveden. Je zajímavé, že jméno Ždárkovo se nevyskytuje na titulním listě.

Nutno konstatovat, že zmíněný matematický text (str. 285—404) se přímo hemží chybami. Jde o věcné omyly, nikoli o chyby tiskové. Není možné, abych zde všechny tyto omyly uváděl, protože by to zabralo příliš mnoho místa; uvedu jen několik málo případů.

Na str. 287 je pojem mnohočlenu objasněn takto: „Spojíme-li dva, tři nebo více jednoduchých výrazů znaménky sčítání (+) nebo odčítání (—), vznikne složený výraz, který nazýváme mnohočlenem." K tomu je ovšem nutné říci, co nazývá autor jednoduchým výrazem. To je skutečně vyloženo na str. 286, odkud je zřejmo, že mezi jednoduché výrazy počítá autor také zlomky a odmocniny; podle toho by tedy čtenář mohl docela dobře na příklad výraz $1 + \sqrt{x}$ pokládat za mnohočlen v x (autor buď se pojmu proměnné nebo neurčité opatrně výhýbá anebo o něm vůbec neví). Při tom je všechno komplikováno tím, že „znaménko — (minus) před zápornými čísly se nesmí vynechat", jak je řečeno na str. 286; autor si tedy na příklad představuje, že v identitě $a - (-b) = a + b$ musí být vždycky čísla a, b kladná. Čtenáři, který si nenajde poučení jinde, bude tedy naprosto nesrozumitelná na příklad nerovnost $a < 0$. Symbol ∞ (nekonečno) pokládá autor všude za reálné číslo a podle toho s ním hospodaří, takže rovnice $\frac{1}{\infty} = 0$ či $\frac{1}{0} = \infty$ se tu vyskytují stále. Dělení nulou se nejen připouští, ale dokonce zavádí na str. 292 (poslední dva řádky odstavce „Dělení jednoduchých výrazů").

Všimněme si ještě stručně oddílu matematické analysy. Zde autor vůbec nerozlišuje úvahy limitní od ostatních, i když se snaží na str. 354 pojem limity objasnit. Tak dochází k tomu, že na str. 364 tvrdí, že funkce $(1 + 2^{\frac{1}{x}})^{-1}$ má pro $x = 0$ dvě hodnoty, buď 0 nebo 1. Ve skutečnosti ovšem v bodě $x = 0$ není uvedená funkce vůbec definována. Na téže stránce zaměňuje pojem funkce spojité s pojmem funkce konstantní. Že se tu dochází i k chybám početním, není ovšem nic divného. Na str. 389 se tvrdí: „Je-li možno v $\int f(x)\,dx$ vyvinouti $f(x)$ v nekonečnou řadu, která konverguje v integračních mezích, vyčíslíme integrál postupnou integrací jednotlivých členů řady". O stejnosměrné konvergenci se autor nezmiňuje vůbec.

Byl by asi nemile překvapen, kdyby si přečetl E. Titschmarche Teorii funkcí (ruský překlad, Moskva-Leningrad 1951), kde na str. 53 je pro výstrahu uveden celý odstavec o tom, kdy nelze člen po členu integrovat nekonečnou řadu ve smyslu výše uvedené věty. Ještě větší překvapení by mu mohla poskytnout funkce definovaná jako součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1 - x^2)^n ,$$

která konverguje pro $|x| < \sqrt{2}$; zde je $\int_{-1}^{1+} x(1 - x^2)^n \, dx = 0$, zatím co integrál součtu této řady v těchže mezích vůbec neexistuje. A podobných příkladů by se dala sestrojit celá řada.

Je přirozené, že čtenář, který je zklamán na str. 284—404, nemůže mít důvěru ani k ostatním partiím v knize vyloženým, i když jsou případně dobré a správné.

Uvedená „Technická příručka" má být platným pomocníkem našim technikům, kteří budou hledat m. j. srozumitelné a především správné poučení o základech matematiky. Tento úkol kniha plnit nemůže, protože matematická část je napsána povrchně a obsahuje mnoho omylů.

Není mi známo, jak došlo k vydání této technické příručky. Ale nechce se mi věřit tomu, že nakladatelství Práce — vydavatelstvo ROH by si nemohlo při vydávání odborné literatury zajistit spolupráci patřičných odborníků. Nehledíme-li k hospodářským ztrátám, jsou literaturou tohoto druhu způsobeny škody i v práci na školách, vysoké školy technické nevyjímaje. Z toho důvodu je třeba, aby o náplni podobných knih byla informována i naše matematická veřejnost, která je zde ostatně v první řadě povolána k tomu, aby na odborné nedostatky aspoň upozornila.

Karel Havlíček, Praha.

Bohumil Dobrovolný - Josef Žďárek: **Přehled technické matematiky.** Nakladatelství Práce, Praha 1954, stran 432, 250 obrázků, cena brož. Kčs 20,55, váz. Kčs 25,25.

Má-li matematik hodnotit tuto knihu, ocítá se v jistých rozpacích. Mnozí lidé, kteří dnes v praxi používají elementů matematické analysy, jsou vychováni asi v takovém duchu, že s touto knihou budou spokojeni a konec konců se při jejím čtení dovědí něco nového a užitečného. Zároveň každý matematik ví nebo aspoň cítí, jak je obtížné vykládat „vyšší" matematiku lidem, kteří mají malé předběžné vzdělání a kteří v matematice zcela jistě nevidí nic jiného než pomocnou vědu. Úkol napsat učebnici matematiky pro takového čtenáře je těžký již proto, že zpravidla — chceme-li dojít k nějakým konkretním výsledkům — není možné vykládat všecko do podrobností; velmi často je třeba věc jen naznačit. Náznak by přitom ovšem měl být tak výstižný, aby dával o věci aspoň správnou představu. Po této stránce však kniha svůj úkol neplní; lze bohužel říci, že představy, které autoři vzbuzují v čtenáři (nematematikovi), jsou velmi často zásadně špatné. Čtenář se sice naučí řešit některé jednoduché příklady, avšak ve složitějších případech by sotva bylo možné nějak použít znalostí, získaných studiem této knihy. Čtenář, který by se po jejím přečtení chtěl dále vzdělávat v matematice, musil by znovu projít vše, co se z ní naučil, musil by pochopit, že mnohé z věcí, které se mu zdály na první pohled jasné, jsou ve skutečnosti tak mlhavé, že se s nimi nedá dále pracovat, a že je tedy vlastně třeba studovat vše znova od základu. To se týká hlavně pojmů reálného čísla, limity, derivace, součtu řady a pod. Mimo to lze však knize vytknout — a tuto výtku může pronést i čtenář velmi málo náročný — že některá místa jsou naprosto nejasná a že je v knize mnoho vysloveně hrubých chyb. Uveďme příklady.

Str. 15, 4. ř. shora: „1. d značí „maličký díl z ..."; dx tedy značí maličký díl z x. Jak maličký? zeptáte se. V tom je právě skryta celá záhada diferenciálního počtu: tak malý, že už menší nemůže být (ale přes to není rovný nule). 2. $\int$ značí „součet ...; $\int$dx tedy značí součet všech maličkých dílů x. Celé x je rozděleno na veliké množství dílků dx; je jasné, že jejich sečtením dostaneme opět x; čili $\int$d$x = x$; značka $\int$ a d se zruší. Vidíte, že na diferenciálu ani integrálu nic není; ..." Str. 20, 8. ř. zdola: „Skutečná čísla se nazývají reálná ..." Str. 21 nahoře: „Odmocniny z čísel racionálných, kde i odmocnitel je číslo racionální, jsou příkladem čísla iracionálního ($\sqrt{5}$; $-\sqrt[3]{2}$). Ta nelze vyjádřit podílem čísel racionálných, píšeme je ve tvaru neukončených čísel desetinných. Čísla získaná měřením jsou nepřesná, iracionálná." Str. 22, 17. ř. shora: „Každé číslo může mít tři velikosti: kladnou hodnotu (kdy je větší než nula), zápornou hodnotu (kdy je menší než nula) a konečně hodnotu *absolutní* (bez zřetele ke znaménku)." O absolutní hodnotě imaginárních čísel se nemluví, je však uveden příklad $|4 + 3i| = 5$. Str. 23, 13 ř. zdola (v odstavci, nadepsaném „Odstraňování závorek za + a —"): „Dvě souhlasná znaménka za sebou značí, že se absolutní hodnota čísla, před nímž stojí, přičítá." Str. 36, 9.—10. ř. shora: „$\sqrt{9} = \pm 3$"; na téže straně 3. ř. zdola: „$\sqrt{16/9} = 4/3$" (ne už $\pm$). Str. 37, 4. ř. shora: „Dvě stejná čísla jsou opět stejná po přidání stejného čísla, pokud při tom nepoužijeme početního obratu s dělením". Str. 58, 5. ř. zdola: „Rovnice je mnohočlen, rovný nule, ..." Str. 59, 11. ř. shora: „Pokud jsou v rovnici obecná čísla $a, b, \ldots$, na př. $x - a + b = 0$, říkáme jí *algebraická*. Rovnice, která má za součinitele čísla zvláštní, je *numerická*, na př. $2x - 3 = 0$". Na str. 97 se mluví o „výjimce konvergence" pro nekonečné řady. V 15. ř. shora je psáno: „Časem bylo nalezeno několik pravidel konvergence (její určení je z nejobtížnějších úloh matematiky)". Táž str., 10. ř. zdola: „Řada $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k + + \ldots$ je konvergentní, když poměr a_{k+1}/a_k je stále menší než 1." (O tři řádky výše je uvedena harmonická řada jako příklad řady divergentní. Nepředpokládá se ani, že čísla a_n jsou nezáporná.) Na str. 198 si autoři pletou záměnnost pořadí derivování u funkce dvou proměnných s podmínkou pro to, aby byl výraz $p\,dx + q\,dy$ totálním diferenciálem!

V 13. ř. zdola je psáno: „Když oba tyto postupy porovnáme, dostáváme důležitý zákon: Nezáleží na pořadí derivací, výsledek je týž.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}\,; \quad f_{xy} = f_{yx}\,; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}\,. \tag{51}$$

Podle tohoto vztahu se pozná totální diferenciál.“ Věc je „vysvětlena“ v příkl. 2 (3. ř. zdola na téže str.). „Je výraz $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ totálním diferenciálem? Parciální derivace $r_x = \frac{x}{r}\,;\ r_y = \frac{y}{r}\,;\ r_{xx} = \frac{y^2}{r^3}\,;\ r_{xy} = r_{yx} = -\frac{xy}{r^3}$, výraz je totálním diferenciálem; $r_{yy} = \frac{x^2}{r^3}$.“

Uspořádání látky je rovněž dosti podivné; Taylorova formule se probírá v integrálním počtu (zbytek v této formuli je součet členů, které ještě scházejí), pravidlo l'Hospitalovo („Neurčité výrazy“) následuje po výkladu o funkcích komplexní proměnné, o konformním zobrazení a pod. Odstavec o „neurčitých výrazech“ (str. 339) začíná slovy: „Tak jako plavce ohrožují nebezpečné víry, musí se počtář vyhýbati nebezpečným neurčitým výrazům, hlavně 0/0.“ Na str. 338 (8. ř. zdola) se mluví o „Laplaceho rovnici“; na str. 179 (6. ř. shora) je psáno: „Aby se lépe počítalo, značíme úhel φ písmenem x.“

Pro matematika plyne z těchto ukázek zcela jasně, že kniha je špatná. Není však úkolem recense přesvědčovat o této věci matematiky; bylo by třeba přesvědčit o tom veřejnost mnohem širší. Takové přesvědčování jistě není lehké; ale snad by recense splnila aspoň částečně svůj úkol, kdyby také nematematikové trochu přemýšleli o citátech, které jsou zde uvedeny.

Pro úplnost uvádíme ještě názvy kapitol: A. Přehled aritmetiky, B. Přehled trigonometrie, C. Přehled algebry, D. Základy vyšších nauk, E. Diferenciální počet, F. Integrální počet, G. Vektorový počet, H. Diferenciální rovnice, J. Variační počet, K. Několik důležitých derivací a integrálů.

Jan Mařík, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

ZPRÁVY

IV. SJEZD ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ

IV. sjezd československých matematiků se konal *od 1. do 8. září 1955 v Praze*. Pořadatelem sjezdu byla matematicko-fysikální sekce ČSAV. Početná byla zahraniční účast; od r. 1949, kdy byl v Praze uspořádán společný sjezd matematiků československých a polských, měl nynější sjezd největší počet zahraničních vědců. Na sjezdu bylo zastoupeno 8 států a celkový počet zahraničních matematiků byl 42. Zvlášť radostně byla přijata čtyřčlenná delegace sovětská, kterou vedl akademik S. L. Sobolev, vynikající pracovník v oboru funkcionální analysy, a jejímiž členy byli profesoři I. N. Vekua, P. S. Novikov a vědecký pracovník K. A. Sitnikov. Byla to první oficiální delegace sovětských matematiků v naší vlasti. Bulharská delegace byla dvoučlenná: akademik L. Čakalov a prof. B. Petkančin ze Sofie. Z Italie přijeli na sjezd dva význámní vědci: akademik G. Sansone z Florencie a prof. M. Villa z Boloně. Maďarsko bylo zastoupeno 12 matematiky. Vedoucí delegace maďarské byl známý matematik a organisátor matematického života v Maďarsku akademik G. Alexits, dalšími členy oficielní delegace byli: akad. G. Hajós, profesoři A. Rényi, B. Sz. Nagy, L. Fuchs, L. Fejes Toth a Á. Czászár. Mimo oficiální delegaci přijeli z Maďarska na sjezd ještě: akademik P. Turán, paní Turánová, paní Rényiová, prof. P. Erdös a doc. J. Surányi. Z Německé demokratické republiky přijelo na sjezd 5 matematiků s vedoucím delegace akademikem E. Kählerem, jehož práce z oboru aritmetické geometrie vzbuzují pozornost matematiků na celém světě; další členové delegace byli: prof. H. Grell, K. Maruhn, N. J. Lehman a R. Reissig. Vedoucím sedmičlenné delegace polské byl matematik světového jména akademik W. Sierpiński, badatel v oboru theorie množin a čísel; dále přijeli prof. S. Turski, rektor varšavské university, J. Łoś, J. Mikusiński, R. Sikorski, A. Pliś, K. Urbanik a M. Stark. Na cestě z Italie do vlasti se zastavil v Praze a účastnil se sjezdu význačný matematik akademik K. Kuratowski, ředitel Matematického ústavu ve Varšavě. Početná byla delegace rumunská vedená akademikem G. Moisilem; dalšími členy byli: akademik M. Nicolescu, G. Vrănceanu, G. Călugăreanu, N. Teodorescu, T. Ganea a M. Benado. Ze Švýcarska přijel mladý matematik W. Graeub.

Domácích účastníků na sjezdu bylo přes 300. *Sjezd byl zahájen* ve čtvrtek *1. září* 1955 v 10 hod. dopoledne v staroslavném Karolinu akademikem E.

ČECHEM, který uvítal zahraniční hosty v řeči ruské, polské, maďarské, německé, francouzské a italské. Za Československou akademii věd pronesl projev první zástupce presidenta ČSAV akademik V. LAUFBERGER, za ministerstvo školství promluvil náměstek ministra prof. dr Ing. J. TRNKA, za Slovenskou akademii věd akademik SAV J. HRONEC a za matematicko-fysikální sekci ČSAV akademik V. JARNÍK. Dále následovaly pozdravné projevy zástupců zahraničních delegací akademiků Soboleva (SSSR), Čakalova (Bulharsko), Sansone (Italie), Alexitse (Maďarsko), prof. Grella (NDR), Sierpińského (Polsko), Nicolescu (Rumunsko).

Plenum sjezdu pak odhlasovalo návrh na *předsednictvo* sjezdu v tomto složení: Předseda: akad. E. ČECH, místopředsedové: akad. V. JARNÍK, akad. J. HRONEC, člen kor. O. BORŮVKA, prof. dr V. PLESKOT; sekretáři sjezdu: akad. J. NOVÁK a dr. J. KURZWEIL.

Vlastní vědecký program sjezdu následoval odpoledne na plenárním zasedání v budově matematicko-fysikální fakulty Karlovy university, kde byly předneseny tři *jednohodinové vědecké referáty*:

prof. *J. Łoś:* O zwiazkąch między logiką i algebrą,

prof. *H. Grell:* Über die algebraische und arithmetische Struktur der Ringe in algebraischen Zahl- und Funktionskörpern,

čl. koresp. *A. Rényi:* Über einige ungarische Resultate in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und über die Richtung der weiteren Untersuchungen.

Sjezdová jednání pak probíhala v plenárních zasedáních, která se konala vždy dopoledne a v sekcích, které současně probíhaly odpoledne. Na dopoledních zasedáních byly předneseny rozsáhlejší vědecké referáty (zpravidla jednohodinové) význačných matematiků našich i zahraničních. Byly to tyto *referáty*:

2. září dopoledne:

prof. *R. Sikorski:* O ostatnich wynikach w dziedzinie topologii mnogościowej w Polsce,

prof. *B. Sz. Nagy:* Contribution en Hongrie à la théorie spectrale des transformations linéaires.

3. září dopoledne:

prof. *M. Villa:* L'applicabilité projective de deux transformations ponctuelles,

akad. *E. Čech:* Diferenciální geometrie kongruencí přímek.

5. září dopoledne:

akad. *G. Hajós:* Bericht über die durch Minkowskische Vermutung über homogene Formen angeregten Untersuchungen,

akad. *E. Kähler:* Arithmetische Geometrie,

dr. *J. Kurzweil:* Stabilita řešení diferenciálních rovnic.

6. září dopoledne:

akad. *S. L. Sobolev:* Primenenie „teorem vloženija" funkcionalnych prostranstv v teoriji uravnenij v častnych proizvodnych,

prof. *J. Mikusiński:* Zagadnienia początkowe i mieszane dla równań cząstkowych w świetle rachunku operatorów,

prof. *I. N. Vekua:* Nekotoryje novyje priznaki žestkosti poverchnostej položitelnoj krivizny.

7. září dopoledne:

akad. *G. Moisil:* Théorie algébrique des mécanismes automatiques,

prof. *N. J. Lehman:* Über einige Probleme beim Einsatz moderner Rechenanlagen,

člen koresp. *N. Teodorescu:* Le développement de la théorie géométrique des équations aux dérivées partielles dans la R. P. R,

prof. *B. Petkančin:* Regelscharen isotroper Geraden im elliptischen Raum.

Ve čtvrtek *8. září* dopoledne byla přednesena *půlhodinová sdělení* podávající přehled o dnešním stavu, rozvoji a perspektivách matematických věd v Československu a v ostatních lidově demokratických státech. Vzhledem k rozsáhlosti sovětské matematiky bylo upuštěno od podobného sdělení sovětského zástupce. Sdělení následovala v tomto pořadí:

akad. *L. Čakalov:* Razvitije i teperešneje sostojanije matematičeskich nauk v Bolgariji,

akad. *V. Jarník*: O stavu, organisaci a perspektivách matematiky v ČSR,

akad. *G. Alexits*: Über die Entwicklung der ungarischen Mathematik in den letzten 10 Jahren,

prof. *H. Grell:* Organisation und einige hauptsächliche Entwicklungstendenzen der Mathematik in Deutschland,

prof. *S. Turski:* O organisaci matematyki w Polsce,

akad. *G. Moisil:* Sur le développement des mathématiques dans la R. P. R.

Odpolední sjezdová jednání se soustředila do *pěti sekcí*. I. algebra, theorie čísel a topologie, II. matematická analysa, III. geometrie, IV. počet pravděpodobnosti a matematická statistika, V. elementární matematika. Na programu těchto sekcí byla krátká sdělení jednotlivých domácích i zahraničních účastníků sjezdu o jejich vědeckých výsledcích.

V sekcích byla přednesena *sdělení* podle tohoto programu:

Pátek *2. září* 1955.

I. sekce.

Akad. *W. Sierpiński:* Sur quelques problèmes arithmétiques de la théorie des nombres ordinaux.

A. Schinzel: Sur un problème concernant la fonction $\varphi(n)$ (přednesl akademik W. Sierpiński).

Doc. dr *L. Rieger:* Suslinovy algebry a jejich representace.
Dr *F. Šik:* K theorii svazově uspořádaných grup.
Dr *J. Jakubík:* Priame rozklady jednotky v modulárnych sväzoch.
Dr *M. Kolibiár:* O ternárnej operácii vo sväzoch.
Dr *V. Vilhelm:* K Birkhoffovým podmínkám ve svazech.

II. sekce.

Prof. dr *J. Mikusiński:* O pojętiu wartości dystrybucji w punkcie.
Mgr *K. Urbanik:* Dystrybucyjne procesy stochastyczne.
Dr *J. Kurzweil:* O aproximaci v reálných Banachových prostorech.
Doc. dr *J. Mařík:* O jedné definici plošného integrálu.
Dr *M. Novotný:* Poznámky o representaci částečně uspořádaných množin.
Dr *Vl. Pták:* Slabá kompaktnost v lineárních prostorech.

III. sekce.

Prof. dr *J. Klapka:* O jedné větě Pantaziho.
Prof. dr *A. Urban:* O styku křivek v projektivním prostoru.
Dr *Z. Nádeník:* Vrstva ploch a nulová korespondence v S_3.
A. Švec: Projektivní diferenciální geometrie korespondencí mezi přímkovými plochami.
L. Koubek: Parabolické přímkové kongruence.
Dr *J. Brejcha:* O přímkových osnovách obsažených v dané kongruenci.

IV. sekce.

Prof. dr *J. Kaucký:* K problému iterací v počtu pravděpodobnosti.
Ing. *F. Fabian:* Poznámka k pojmu „pravděpodobnost“.
Dr *Ant. Špaček:* Elementy znáhodněné funkcionální analysy.
Dr *K. Winkelbauer:* Silné zákony velkých čísel v K-prostorech.
Ing. dr *J. Hájek:* Stacionární procesy s konvexní korelační funkcí.
Mgr. *M. Josífko:* Rozložení chyb při počítání se zaokrouhlenými čísly.
Dr *Z. Koutský:* O regulaci náhodných posloupností.

Pondělí *5. září* 1955.

I. sekce.

Prof. dr *P. S. Novikov:* Nerazrešimosť problemy toždestva slov i problemy soprjažennosti slov v teoriji grupp.
Prof. *P. Erdös:* Über einige Probleme der Primzahlverteilung.
Doc. dr *L. Rieger:* O problému kvantifikace predikátových proměnných matematické logiky.
J. Bečvář: O definičních elementech a jistých třídách rekursivních funkcí.
Dr *J. Kopřiva:* Fareyovy zlomky a Riemannova domněnka.

Doc. dr *A. Hyška:* O použití jedné methody prof. K. Petra při numerickém řešení algebraických rovnic pomocí inversních řad.

Ing. *V. Panc:* Řešení soustav lineárních rovnic relaxační methodou.

Dr *K. Drbohlav:* O minimu jisté lineární formy.

II. sekce.

Akad. *G. Alexits:* Sur la caractérisation des certaines classes des fonctions au sens de la théorie constructive des fonctions.

Člen koresp. *G. Călugăreanu:* Sur les fonctions univalentes.

Člen koresp. *M. Kössler:* O jisté domněnce z theorie prostých řad mocninných.

Dr *J. Štěpánek:* O jistém zobecnění Taylorovy řady.

Doc. dr *J. Korous:* O některých třídách orthogonálních polynomů.

Dr *F. Šalát:* O súčtoch istých konvergentných radov.

Dr *L. Janoš:* Aproximace první vlastní hodnoty homogenní integrální rovnice lineárním funkcionálem.

Dr *J. Široký:* Nová methoda řešení problému tří těles.

III. sekce.

Člen koresp. *G. Vrănceanu:* Sur la métrique des espaces projectives complexes.

Prof. dr *F. Vyčichlo:* Geometrie přímkových útvarů anholonomních.

Doc. dr *K. Havlíček:* Příspěvek k projektivnímu významu derivování.

Doc. dr *F. Nožička:* Frenetovy formule pro nadplochu v afinním prostoru a některé jejich důsledky.

Doc. dr *Z. Vančura:* Pláště kongruence koulí.

J. Šedý: O křivkách s extrémním afinním obloukem.

Dr *V. Bruthans:* Analagmatické kvintiky.

IV. sekce.

Prof. dr. *J. Janko:* Poznámka k rozhodovacímu pravidlu Bayesovu.

V. Dupač: O stochastické modifikaci jednoho problému z geometrie čísel.

Dr *V. Fabian:* Silný zákon velkých čísel pro aproximativní methody.

Ing. *M. Ullrich:* Náhodné procesy vytvořené Poissonovými procesy.

Úterý *6. září* 1955.

V. sekce.

Úvodní proslov ministra školství dr *F. Kahudy.*

Akad. *Vl. Kořínek:* O práci školské komise při I. sekci ČSAV.

Prof. dr *F. Vyčichlo:* Požadavky vysokých škol technických na absolventy jedenáctiletek.

Prof. *R. Zelinka:* O práci oddělení elementární matematiky při Matematickém ústavu ČSAV.

Akad. *J. Novák:* Matematické olympiady v ČSR.

Dr *J. Kabele:* Některé otázky vyučování matematice na národní škole.

Akad. *V. Jarník:* Poznámky k učebnicím aritmetiky a algebry v 6.—8. ročníku střední školy.

Akad. *E. Čech:* Poznámky k metodice aritmetiky na střední škole.

Anton Dubec: Logická kostra riešenia matematickej úlohy.

Dr *F. Krňan:* Výklad pojmu „limita funkce v bodě" na průmyslových školách.

II. sekce.

Dr *R. Reissig:* Über eine nichtlineare Differentialgleichung 2-ter Ordnung.

Člen koresp. *O. Borůvka:* O transformaci integrálů diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu.

Dr *M. Laitoch:* Aplikace theorie dispersí v oboru diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu.

Dr *M. Greguš:* O niektorých okrajových problémoch diferenciálnej rovnice $y''' + 2A(x, \lambda)\, y + [A'(x, \lambda) + b(x, \lambda)]\, y = 0$.

Dr *M. Ráb:* Oscilační a asymptotické vlastnosti integrálů diferenciální lineární rovnice 3. řádu.

Dr *M. Švec:* O jednej vlastnej úlohe dif. rovnice

$$y^{(n)} + Q(x, \lambda)\, y = 0\,.$$

III. sekce.

Dr *M. Fiedler:* O jednom druhu speciálních simplexů v E_n.

Doc. dr *M. Harant:* Zobrazovací methody v priestore E_4.

Dr *J. Srb:* Rozšíření Pascalovy věty na racionální křivku projektivního n-rozměrného prostoru.

Dr *C. Palaj:* Poznámky k theorii polárnych simultánnych invariantov kvadratických forjem.

Dr *K. Svoboda:* Metrická charakterisace Veronesovy plochy.

Středa 7. *září* 1955.

I. sekce.

Prof. dr *J. Łoś:* Direktní součiny abelových grup.

Prof. dr *L. Fuchs:* Ringe und ihre additiven Gruppen.

Prof. dr *T. Ganea:* Symmetrische Potenzen topologischer Räume.

Dr *M. Benado:* Sur la théorie générale des produits réguliers de M. O. N. Golovine.

Akad. *Vl. Kořínek:* Grupy, jejichž všechny podgrupy jsou charakteristické.

Akad. *Št. Schwarz:* O charakteroch na bikompaktných pologrupách.

Dr *K. Drbohlav:* Grupové multigrupy.

J. Ivan: O direktnom súčine jednoduchých pologrup.

II. sekce.

Akad. *G. Sansone:* Solutions périodiques de l'équation

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = 0\,.$$

Prof. dr *K. Maruhn:* Existenzuntersuchungen zu den Differentialgleichungen der Hydrodynamik.

Akad. *L. Čakalov:* Über die Savaljeri-Simpsonsche Formel.

Kand. nauk *St. Pliś:* O problemie jędyności rozwiązania problemu Cauchy'ego dla ukladu równań o pochodnych cząstkowych.

Akad. *J. Hronec:* Nutné a postačujúce podmienky, aby diferenciálny systém nemal body neurčitosti.

Ing. dr *I. Babuška:* O jednom numerickém řešení rovinného biharmonického problému v nekonečném polopásu.

Dr *M. Zlámal:* O diferenciální rovnici $\dot{y} + y = (\ddot{y})^2$.

Dr *J. Kurzweil:* O methodě postupných aproximací v theorii nelineárních kmitů.

Dr *L. Mišík:* O istej modifikácii metódy rozšírenia kladnej funkcionály podle F. Riesza.

III. sekce.

Akad. *B. Bydžovský:* O záměnných kolineacích.

Prof. dr *J. Metelka:* Variety base Cremonových transformací v S_r.

Doc. dr *J. Bílek:* Algebraické korespondence mezi algebraickými varietami.

V. Metelka: Methoda výpočtu rovinných konfigurací $(12_4, 16_3)$.

Dr *L. Vaňatová:* O jednom druhu grup involutorních Cremonových transformací v rovině.

Dr *S. Kubálková:* Některé grupy transformací, které reprodukují trojrozměrný systém rovinných kubik.

IV. sekce.

Dr *A. Pérez:* Transformation suffisante et probabilité d'erreur dans la théorie d'information.

Dr *A. Pérez:* Sur la convergence de suites d'entropies et d'informations relatives à réduits croissantes de σ-algèbras.

Dr *L. Votavová:* Entropie a pravděpodobnost chyby.

Dr *J. Nedoma:* O kapacitě diskrétních kanálů.

Ing. *F. Fabian:* Poznámky k theorii limitních zákonů.

Dr *O. Šefl:* Testování spojitých stacionárních procesů.

O. Hanš: O stochastických aproximacích.

Dr *V. Alda:* O podmíněných pravděpodobnostech.

Čtvrtek *8. září* 1955.

I. sekce.

Akad. *G. Hajós:* Sur la coloration des graphes.

Dr *K. A. Sitnikov:* Kombinatornaja topologija nezamknutych množestv.

Prof. dr *T. Ganea:* Quelques recherches sur l'unicohérence.

Akad. *J. Novák:* Poznámka ke konvergenci v kartézských součinech.

M. Sekanina: Úplné systémy okolí množin v obecných topologických prostorech.

Doc. dr *A. Kotzig:* O istej ekvivalencii medzi uzlami konečného grafu.

Dr *M. Mikulík:* Poznámka ke svazům s metrikou.

II. sekce.

Člen koresp. *N. Teodorescu:* Les fondements d'une théorie générale des grandeurs.

Dr *Á. Császár:* Sur la structure des espaces des probabilités conditionelles.

Akad. *J. Hronec:* Normálne tvary parciálních diferenciálních rovnic 2. rádu o n nezávislých premenných.

Doc. dr *J. Mařík:* Baireova a Borelova míra.

A. Marek: Zobecnění konvexní funkce několika proměnných.

Doc. dr *F. Nožička:* O jednom minimálním problému a jeho významu pro praxi.

Dr *J. Čermák:* Poznámky k theorii diferenčních rovnic.

Prof. *A. Rényi:* Sur l'univalence du potentiel dans l'hydrodynamique.

Akad. *M. Nicolescu:* Sur une remarque de Min-Teh-cheng et sur une propriété caractéristique de la moyenne des fonctions polyharmoniques.

Prof. dr *S. Turski:* Zastosowanie analizatora równań rozniczkowych do pewnego zagadnienia teorii spręszystosti.

Doc. dr *A. Huťa:* Zostrenie Runge-Kutta-Nyströmovej formule pre numerickú integráciu diferenciálních rovníc a diferenciálních systémov 1. rádu.

Dr *K. Rektorys:* Výpočet teploty v přehradě při působení vnitřních zdrojů tepla.

Dr *O. Vejvoda:* Odhad chyby při numerickém řešení soustavy diferenciálních rovnic methodou Runge-Kutta.

Dr *J. Polášek:* Moment tuhosti v kroucení jistých profilů podobných lopatkovým.

Ing. dr *I. Babuška:* Odhad chyby při řešení Dirichletova problému methodou sítí.

III. sekce.

Akad. *G. Moisil:* Une interprétation de groupe de Poincaré.

Prof. dr *P. Erdös:* Über einige kombinatorische Probleme in der Extremaleigenschaften.

Dr *K. Čulík:* Příspěvek k theorii zobecnění konfigurací.

Dr *J. Pavlíček:* O axiomatisaci eliptické geometrie.

Dr *L. Kosmák:* Charakterisace tětivových a tečnových mnohoúhelníků.

Prof. dr *M. Mikan:* Möbiova kulová (neeuklidovská) geometrie jednoparametrových útvarů.

Zahraniční účastníci přednesli v I. sekci 11 referátů, ve II. 14 referátů, ve III. 4 referáty, domácí účastníci v I. sekci 18 referátů, ve II. 30, ve III. 27, ve IV. 19 referátů; to je celkem 29 vědeckých referátů zahraničních a 94 vědeckých referátů domácích účastníků. Kromě toho bylo ještě předneseno v V. sekci 10 referátů domácích účastníků sjezdu.

Sekce *elementární matematiky* měla schůzi v úterý *6. září* odpoledne a účastnilo se jí přes 200 školských a vědeckých pracovníků (i zahraničních). Úvodní projev měl ministr školství dr F. Kahuda. Ve svém projevu zhodnotil nynější stav vyučování matematice na našich všeobecně vzdělávacích školách a na závěr vytýčil úkoly, které v rámci ,,Usnesení ÚVKSČ o zvýšení úrovně a dalším rozvoji všeobecně vzdělávacího školství" bude musit ministerstvo školství řešit. Ve svém projevu vybídl ministr školství vědecké pracovníky, aby pomohli při správné koordinaci učebních osnov.

O práci Československé akademie věd směřující ke zlepšení vyučování matematice promluvili akademik V. Kořínek, akademik V. Jarník a prof. R. Zelinka. O matematických olympiádách referoval akademik J. Novák. Požadavky vysokých škol byly obsaženy ve sdělení prof. dr F. Vyčichla. Práci ústavu pedagogického vylíčil dr J. Kabele. Speciálními methodickými otázkami se zabývali akademik E. Čech, prof. A. Dubec a dr F. Krňan. V referátech byly obsaženy podnětné myšlenky. O těchto otázkách bude dále jednáno na zvláštních schůzích vědeckých a školských pracovníků.

Po osmidenním trvání byl *zakončen* IV. sjezd československých matematiků ve čtvrtek *8. září* projevem předsedy sjezdu akademika E. Čecha, v němž ak. Čech zhodnotil rozvoj styků a spolupráce našich matematiků s matematiky těch zemí, které byly na sjezdu zastoupeny delegacemi. Konstatoval potěšitelný fakt, totiž vědeckou aktivitu naší mladší generace a ocenil výsledky jednání sekce elementární matematiky. V závěru sjezdu pronesli projev kritického ocenění a hodnocení vedoucí sovětské delegace akademik S. L. Sobolev a nestor polských matematiků akademik W. Sierpiński, který také před 6 lety v téže místnosti měl závěrečný projev na společném sjezdu československých a polských matematiků, a člen korespondent O. Borůvka z Brna.

Po vědeckých jednáních byla dána zahraničním hostům možnost seznámit se s kulturním a společenským životem v Praze. V pátek 2. září uspořádal ministr školství dr F. KAHUDA v Herzánském paláci *přátelský večer*, jehož se zúčastnili ministr školství dr F. Kahuda, náměstkové ministra školství prof. dr ing. J. TRNKA a prof. dr Z. PÍRKO, všichni zahraniční hosté, kteří se zúčastnili sjezdových jednání a četní vynikající českoslovenští matematici. Po projevu ministrově se rozpředla přátelská beseda a utužily se přátelské styky. V sobotu večer navštívili všichni zahraniční hosté Národní divadlo a se zájmem i nadšením si poslechli Smetanovu Prodanou nevěstu.

Ve středu večer byla uspořádána v Obecním domě Hlavního města Prahy *společná večeře* pro zahraniční i domácí účastníky sjezdu. V družném rozhovoru vydrželi tu matematici až do půlnoci.

Z mnoha srdečných přípitků zahraničních i našich matematiků budiž tu reprodukován přípitek G. HAJÓSE z Budapešti, v němž zdar sjezdu odůvodnil takto:

„Lemma 1. *Wenn dieser Kongress gelungen ist, so ist das den tschechoslowakischen Matematikern zu danken. Beweis. Man weiss schon aus der Zeit des Griechen, dass man ein Kongress nicht von dem Auslande aus veranstalten kann. Da also der Kongress hier stattfand, so folgt die Behauptung.*

Lemma 2. *Dieser Kongress ist gelungen. Beweis. Nach einem misslungenen Kongress sitzt man traurig. Da wir aber guter Laune sind, muss dieser Kongress gelungen sein.*

Lemma 3. *Die Mathematik wird sich entwickeln. Beweis. Wenn die Behauptung falsch wäre, so könnte auch kein Kongress zur Förderung der Mathematik beitragen. Wenn also ein Kongress nicht zur Förderung der Wissenschaft beiträgt, so ist er misslungen. Wir wissen also laut Lemma 2, dass dieser Kongress gelungen ist, die Behauptung muss also richtig sein.*

Hauptsatz. *Es ist den tschechoslowakischen Kollegen zu danken, dass sie mit der Veranstaltung dieses gelungenen Kongresses die Entwicklung der Mathematik gefördert haben. Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemmata 1, 2 und 3.*

Korrolar. *Wir müssen auf's Wohl der tschechoslowakischen Kollegen trinken, die diesen Kongress veranstaltet haben. Beweis. Klar.*“

Někteří zahraniční hosté použili každé volné chvíle k prohlídce Prahy, jejíž kulturní památky a krásu vysoce oceňují; navštívili obrazárny a koncerty. S krásami naší země a budovatelským úsilím lidu se seznámili po sjezdu na třídenních exkursích. Jedna exkurse byla do Karlových Var, do Mariánských Lázní a do Plzně, druhá pak do Adršpašských skal, do Jeseníků a na Macochu. Obě exkurse byli velmi úspěšné.

V úterý *13. září* se zahraniční delegace rozjely do svých zemí. V dopisech, které nám zahraniční hosté ze svých domovů zaslali, vyjadřují dík za organisaci sjezdu, který navázal nové a utužil staré přátelské styky matematiků. Je bezesporné, že sjezd přispěl velkou měrou ke spolupráci našich a zahraničních vědců a přinesl povzbuzení v jejich práci a svým způsobem přispěl i k utužení míru na celém světě.

Pokud se týká hodnocení výsledků matematického sjezdu, bude zajisté nejvhodnější uvést tu rozhovor*) vedoucího sovětské delegace akademika S. L. SOBOLEVA, který na otázku redaktora Rudého Práva „Jak hodnotíte výsledky IV. sjezdu československých matematiků a jaké jsou Vaše dojmy z Československa" odpověděl takto:

„Když jsme odjížděli na sjezd československých matematiků, znali jsme ovšem mnoho československých soudruhů z jejich vědeckých prací. Na celém světě jsou široce známy práce akademika Čecha, akademika Jarníka a dalších učenců. Očekávali jsme, že uslyšíme mnoho zajímavého o tvůrčí činnosti našich drahých přátel z Československa. Sjezd potvrdil toto očekávání. Bylo zde předneseno mnoho referátů československých vědců a — což je zvláště radostné — mnoho referátů vědeckého dorostu.

Na sjezdu byly shrnuty výsledky velké práce, která byla vykonána, byly naznačeny cesty dalšího rozvoje a ujasněny nejbližší cíle. Zejména — podle mého názoru — diskuse poukázala na nutnost zesílit práci v oblasti aplikované matematiky, numerických metod a matematických strojů.

Avšak snad ještě důležitější bylo to, že všichni vědci, kteří se sešli na sjezdu, navázali mnohem vzájemnější styk. Prostředí na sjezdu, jak se vyslovily mnohé delegace, bylo mimořádně srdečné a přátelské.

Ze srdce děkujeme organisátorům sjezdu, že nám dali možnost navštívit starobylé a neobyčejně krásné město Prahu, seznámit se s jejími památkami, s nimiž jsou spojeny skvělé stránky dějin a života československého lidu.

Již dávno jsme znali tvorbu československých umělců a hudebních skladatelů, avšak poslechnout si přímo v Praze tak hluboké dílo jako je Smetanova „Má vlast", nebo jeho „Prodanou nevěstu", procházet pražskými paláci a galeriemi a prohlížet si obrazy, to vše bylo pro nás nezapomenutelným zážitkem. Byli jsme na zájezdě v Karlových Varech a Mariánských Lázních, seznámili jsme se se západočeským průmyslem a s úspěchy při budování socialismu, o nichž jsme mnoho slyšeli ve své vlasti. To všechno ještě posílilo naše vřelé sympatie k vaší překrásné zemi."

J. Novák, Praha.

VĚDECKÁ SDĚLENÍ ÚČASTNÍKŮ

Pro informaci čtenářů Časopisu pro pěstování matematiky uveřejňujeme zde výtahy vědeckých sdělení přednesených domácími účastníky IV. sjezdu československých matematiků ve dnech 2. až 8. září 1955, které autoři redakci dodali, nebo uvádíme, kde příslušná sdělení vyjdou tiskem.

Proslov ministra školství dr F. KAHUDY přednesený v V. sekci sjezdu najde čtenář v časopise Matematika ve škole, roč. V (1955) č. 9, str. 153, sdělení z V. sekce sjezdu prof. dr F. VYČICHLA, prof. R. ZELINKY, akademika J. NOVÁKA a dr J. KABELE v 10. č. téhož ročníku a referát akademika VL. KOŘÍNKA v 1. č. roč. VI (1956) téhož časopisu. Další sdělení z V. sekce budou v Matematice ve škole uveřejněna později.

Vědecké referáty a sdělení zahraničních účastníků sjezdu budou postupně, jak dojdou, uveřejňovány v časopise Čechoslovackij matematičeskij žurnal.

SDĚLENÍ Z I. SEKCE

JIŘÍ BEČVÁŘ, Liberec: **O definičních schematech a jistých třídách rekursivních funkcí.** Sdělení se týká jednak pokud možno systematického vyšetřování substitučních ope-

*) Uveřejněný v Rudém Právu dne 26. září 1955.

rací, jichž se užívá v theorii rekursivních funkcí, jednak studia některých tříd t. zv. elementárních funkcí; při tom třída elementárních funkcí se zde v podstatě kryje s Grzegorzykovou modifikací původní Kalmárovy třídy elementárních funkcí.

Předmětem studia jsou zde hlavně důkazy definovatelnosti jistých podtříd třídy elementárních funkcí.

*

KAREL DRBOHLAV, Praha: **O minimu jisté lineární formy.**

Dána matice $K = (k_{ij})$ a nezáporná čísla b_i, c_j ($i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots n$) vázaná podmínkou $\Sigma b_i = \Sigma c_j$. Mezi všemi maticemi (a_{ij}), $a_{ij} \geqq 0$ splňujícími $\sum\limits_j a_{ij} = b_i$, $\sum\limits_i a_{ij} = c_j$, je nalézti takovou, aby $\sum\limits_{i,j} k_{ij} a_{ij}$ bylo minimální. Problém je řešen aritmeticky bez theorie polyedrů.

*

KAREL DRBOHLAV, Praha: **Grupové multigrupy.**

Asociativní multigrupoid s pravou skalární jednotkou je systém M s asociativní víceznačnou binární operací a s prvkem j splňujícím $x \in jx$, $x = xj$ pro každé $x \in M$. Jeho zvláštním případem je levá grupová multigrupa, která vznikne, násobíme-li v grupě G třídy gH podle podgrupy H mezi sebou. Práce se zabývá hlavně nutnými a postačujícími podmínkami pro to, aby daný multigrupoid byl, bez ohledu na isomorfismus, levou grupovou multigrupou.

*

ALFONS HYŠKA, Olomouc: **O použití jedné methody prof. K. Petra při numerickém řešení algebraických rovnic pomocí inversních řad.**

Inversní řady jsou pro skutečnou praxi při numerickém řešení algebraických rovnic příliš složité. Jedině pro kvadratickou rovnici, kdy třetí a všechny vyšší derivace základní funkce vymizí, je inversní řada aspoň poněkud jednoduchá. Můžeme ji s určitým přiblížením pokládat za geometrickou řadu o podílu asi

$$|q| \doteq 2 \,.\, \frac{y_1 y_1''}{y_1'^2} \,. \tag{a}$$

Všimněme si nyní jedné methody prof. PETRA, kterou svého času udal. Pišme rovnici 3. stupně ve tvaru

$$x^3 = a_3 x^2 + b_3 x + c_3 \,,$$

násobme ji na obou stranách číslem x a dosaďme za x^3,

$$x^4 = (a_3^2 + b_3)\, x^2 + (a_3 b_3 + c_3)\, x + a_3 c_3 = a_4 x^2 + b_4 x + c_4 \,.$$

Dalším postupným násobením a dosazováním dostaneme nakonec rovnici

$$x^n = a_n x^2 + b_n x + c_n \,.$$

Této methody můžeme použít při numerickém řešení rovnic 3. st. pomocí inversních řad, omezíme-li se na určování kořene blízkého nule.

Předpokládejme, že první přibližná hodnota kořene je sama poměrně malá (blízko nuly) a absolutní hodnota výše uvedeného podílu také dost malá (na př. obě veličiny menší než 0,1). Spokojíme-li se pak při výpočtu kořene přibližnou hodnotou s nepřesností kolem 10^{-4}, postačí při výpočtu několik prvních členů inversní řady a pak stačí uvažovat jen druhou derivaci, neboť třetí, čtvrtá ... až (n-1)-ní derivace funkce (a) je v počátku rovna nule.

Jedná se však ještě o to, aby se uvedenými operacemi, kterými zvyšujeme stupeň rovnice podle methody prof. Petra, nezhoršovala konvergence řady inversní. Konvergence se nezhorší, když na př. je

$$a_3 > 0\,, \quad c_3 > 0\,, \quad \text{ale} \quad b_3 < 0\,.$$

Přitom se však stává, že při určité mocnině je koeficient $a_n < 0$, kdy potom podíl $|q|$ se podstatně zvětší. Ale při nejbližších mocninách se opět zmenší a to pod hodnotu původní.

Dá se proto methody prof. Petra (v praxi vystačíme několika málo kroky) s výhodou použít při numerickém řešení rovnic 3. stupně pomocí inversních řad.

*

JÁN IVAN, Bratislava: **O direktnom súčine jednoduchých pologrúp.**

Viz práci „O rozklade jednoduchých pologrúp na direktný súčin", Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *IV* (1954), 181—202.

*

JÁN JAKUBÍK, Košice: **Priame rozklady jednotky v modulárnych sväzoch.**

Viz práci „Прямые разложения единицы в модулярных стуктурах", Чехосл. мат. ж. *5* (*80*), 1955, 399—411.

*

MILAN KOLIBIAR, Bratislava: **O ternárnej operácii vo sväzoch.**

S. A. KISS zaviedol v distributívnych sväzoch ternárnu operáciu

$$(a, b, c) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)\,, \tag{1}$$

ktorá má rad zaujímavých vlastností. Tieto úvahy možno rozšíriť na ľubovoľné sväzy. Ak b je neutrálny prvok sväzu S, platí

$$(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)\,, \tag{2}$$

pre ľubovoľné a, $b \in S$. Definujeme v tomto prípade ternárnu operáciu vzťahom (1). Ak b je pevne zvolený neutrálny prvok v S, tvorí množina S s operáciou $x \circ y = (x, b, y)$ polosväz. Tento polosväz je sväzom vtedy a len vtedy, keď prvok b má vlastnosť (c): V každom intervale $\langle u, v\rangle$ obsahujúcom prvok b má prvok b komplement. Označíme tento sväz S_b. Množina prvkov s vlastnosťou (c) obsahuje všetky prvky centra a má podobné vlastnosti ako centrum. Pre sväzy S, S_b platí: (D) Existujú sväzy A a B a prosté zobrazenie množiny S na množinu $A \times B$, ktoré je izomorfným zobrazením sväzu S na sväz $A \times B$ a sväzu S_b na sväz $\tilde{A} \times B$.

Ak S, S' sú sväzy s I a O definované na tej istej množine, zavedieme reláciu R: SRS', ak existuje v S prvok b s vlastnosťou (c) a platí $S' = S_b$. Relácia R je reflexívna, symetrická a tranzitívna a je ekvivalentná s vlastnosťou (D) a inými vlastnosťami, ako napríklad:

1. S a S' majú všetky konvexné podsväzy spoločné. 2. V S a S' súčasne platí alebo neplatí (2) a operácia (a, b, c) má v oboch sväzoch tú istú hodnotu.

Pomocou ternárnej operácie možno definovať ľubovoľný sväz, pritom však ternárna operácia nie je vždy definovaná pre všetky trojice (a, b, c).

Dále viz práci „Charakterizácia sväzu pomocou ternárnej operácie". Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *VI*, 1956, 10-14.

*

Jiří Kopřiva, Brno: **Fareyovy zlomky a Riemannova domněnka.**

Viz práci „Poznámka k významu Fareyovy řady v theorii čísel", Spisy vyd. přírodov. fakultou MU, Brno 1955, č. 365 a práci „O několika nových ekvivalencích s Riemannovou domněnkou", Sborník VTA—AZ, Brno.

*

Vladimír Kořínek, Praha: **Grupy, jichž všechny podgrupy jsou charakteristické.**

Autor vyšetřoval grupy, jichž všechny podgrupy jsou charakteristické. Taková grupa musí být nutně Abelova a to nikoli smíšená. Periodická Abelova grupa má uvedenou vlastnost právě tehdy, když každá její primární část je buď cyklická grupa neb Prüferova grupa typu p^∞. Aperiodická grupa (t. j. grupa bez torse), o této vlastnosti je nutně direktně ireducibilní. Autor stanovil všechny takové grupy hodnosti 1 a vyslovil domněnku, že existují takové aperiodické grupy libovolné konečné hodnosti. Důkazy těchto tvrzení jsou snadnými důsledky tří kriterií pro existenci necharakteristických podgrup v Abelově grupě.

*

Anton Kotzig, Bratislava: **O istej ekvivalencii medzi uzlami konečného grafu.**

Viz práci „O istých rozkladoch grafu", Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *V*, 1955, č. 3.

*

Miloslav Mikulík, Brno: **Poznámka ke svazům s metrikou.**

Referát se týkal některých výsledků obsažených v práci „Примечамие к „сходимости" (vyjde ve Spisech vyd. přírodovědeckou fakultou MU, Brno, č. 367) a práce „Poznámka k topologickým svazům" (Práce Brněnské základny československé akademie věd, seš. 7 — spis 322 — roč. XXVII — 1955). Další část referátu se týkala této věty:

Nechť na svazu S je zavedena metrika ϱ, která má tyto vlastnosti: (a) Každá monotonní posloupnost prvků z S omezená vzhledem k metrice ϱ obsahuje částečnou posloupnost, která je v S metricky konvergentní. (b) Jestliže podmnožina $A \subset S$ je nejvýše spočetná a má supremum a infimum, potom vzdálenost tohoto suprema a infima se rovná průměru množiny A. V tomto případě ve svazu s metrikou S jsou metrická konvergence, o-konvergence a $*$-konvergence ekvivalentní.

*

Josef Novák, Praha: **Poznámka ke konvergenci v kartézských součinech.**

Nechť $i = 1, 2$. Nechť jdou dány dva topologické prostory (X_i, u_i) splňující známé axiomy Kuratovského. Nechť jsou v nich definovány konvergentní posloupnosti a pomocí nich uzávěry $w_i A$ množin A. V kartézském součinu $Z = X_1 \times X_2$ jsou pak definovány dvě topologie: $u_1 \times u_2$ definovaná obyčejným způsobem a $w_1 \times w_2$ definovaná pomocí konvergentních posloupností (x_n^1, x_n^2), kde x_n^i konverguje v X^i. Prostor $(Z, u_1 \times u_2)$ nemusí[1]) býti homeomorfní s prostorem $(Z, w_1 \times w_2)$, i když každý prostor (X_i, u_i) je homeomorfní s prostorem (X_i, w_i). Je-li však (X_1, w_1) regulární a $(Z, w_1 \times w_2)$ lokálně kompaktní, pak nutná a postačující podmínka, aby tomu tak bylo, je platnost axiomu o uzavřeném uzávěru v prostoru $(Z, w_1 \times w_2)$.

Podobné tvrzení platí také v kartézských součinech o libovolném počtu složek.

Referát bude uveřejněn v Bulletin de l'Académie Polonaise des sciences.

*

[1]) *J. Novák*, Sur les espaces $(\mathcal{L})$ et sur les produits cartésiens $(\mathcal{L})$. Spisy vyd. přírodovědeckou fakultou MU, Brno 1939.

VLADIMÍR PANC, Praha: **Řešení soustav lineárních algebraických rovnic relaxační methodou — relaxační eliminace.**

Byla vypracována nová úprava relaxační methody s cílem zachovat všechny výhody, které mají methody až dosud uveřejněné, a zkrátit podstatně praktické provedení výpočtů. Nová úprava obsahuje nové tabelární uspořádání relaxačního procesu, které značně zkracuje písařskou i početní činnost, a dvě methody zrychlení konvergence řešení. Těmito methodami jsou „methoda přepínání neznámých veličin" ve dvou alternativách a methoda skupinových operací, která má úpravu poněkud odlišnou od stejně zvané methody publikované R. V. SOUTHWELLEM. Systém skupinových operací s trojúhelníkovou maticí vede pak k relaxační eliminaci.

Považujeme-li tyto dvě uvedené methody zrychlení konvergence relaxačního procesu za nutnou a nedílnou součást relaxační methody, mizí problém konvergence řešení a lze vyslovit větu:

Relaxační methodou je řešitelná každá soustava lineárních algebraických rovnic, pokud její determinant je od nuly různý.

Na konec se vyšetřuje vhodnost užití té které methody pro zrychlení konvergence řešení.

*

LADISLAV RIEGER, Praha: **Suslinovy algebry a jejich representace.**

Viz článek „Об алгебрах Суслина (**S**-алгебрах) и их представлении", Чехосл. мат. ж., *5* (*80*), 1955, 99—142.

*

LADISLAV RIEGER, Praha: **O problému kvantifikace predikátových proměnných matematické logiky.**

Bude uveřejněno později.

*

MILAN SEKANINA, Brno: **Úplné systémy okolí množin v obecných topologických prostorech.**

Je dán obecný topologický prostor (P, u) (topologie u nepodléhá axiomům). $\mathfrak{O}_u(X)$ značí systém všech okolí množiny $X \subset P$ při topologii u. Je studována struktura množiny $\mathfrak{S}$ topologií v takových, že $\mathfrak{O}_u(X)$ jest úplným systémem okolí množiny X při topologii v. Topologie w je sM-topologie, když pro $M_1 \subseteqq M_2 \subseteqq P$ (M_1, M_2 jinak lib.) neplatí $(M_1)^i_w \underset{\neq}{\supset} \underset{\neq}{\supset} (M_2)^i_w$($M^i_w =$ vnitřek množiny M při w). Supremem $\mathfrak{S}$ je topologie u. Jest konstruováno $\inf \mathfrak{S}$. Je nalezena nutná a dostatečná podmínka, aby $\inf \mathfrak{S} \in \mathfrak{S}$, a dokázáno, že $\min \mathfrak{S}$ jest sM-topologie.

V případě, když card P je konečné, jsou ekvivalentní tyto výroky 1. $\mathfrak{S}$ jest svaz, 2. $\inf \mathfrak{S} \in \mathfrak{S}$.

*

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava: **O charakteroch na bikompaktných pologrupách.**

Viz práci „The theory of characters of commutative Hausdorff bicompact semigroups", Чехосл. мат. ж., *6* (*81*), 1956.

*

FRANTIŠEK ŠIK, Brno: **K theorii svazově uspořádaných grup.**

Viz článek „К теории структурно упорядоченных групп", Чехосл. мат. ж., *6* (*81*), 1956.

*

VÁCLAV VILHELM, Praha: **K Birkhoffovým podmínkám ve svazech.**

Viz článek „Двойственное себе ядро условий Биркгофа в структурах с конечными цепяму", Чехосл. мат. ж., *5* (*80*), 1955, 439-450.

*

SDĚLENÍ Z II. SEKCE

IVO BABUŠKA, Praha: **O jednom numerickém řešení rovinného biharmonického problému v nekonečném polopásu.**

Viz stejnojmenný článek v časopise Aplikace matematiky, 1 (1956).

*

IVO BABUŠKA, Praha: **Odhad chyby při řešení Dirichletova problému methodou sítí.**

V referátě ukázal autor jeden způsob odhadu chyby při řešení Dirichletova problému methodou sítí. Odhad chyby je proveden majorisační funkcí. Na rozdíl od známých odhadů nežádá se omezenost vyšších derivací. Způsob je také nezávislý na definiční oblasti. Dále ukázána účinnost na jednom numerickém příkladě.

Methoda odhadu chyby spočívá ve vhodném doplnění síťové funkce tak, aby vznikla funkce spojitá v celé definiční oblasti, která v uzlových bodech nabývá těchže hodnot jako funkce síťová.

*

OTAKAR BORŮVKA, Brno: **O transformaci integrálů diferenciálních rovnic 2. řádu.**

Viz práci „Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre", Annali di Matematica pura ed applicata, T. *41*.

*

JIŘÍ ČERMÁK, Brno: **Poznámky k theorii diferenčních rovnic.**

Je dobře známo, že existuje úzký vztah mezi theorií obyčejných diferenciálních a theorií obyčejných diferenčních rovnic. Tento vztah je na příklad základem různých numerických method řešení a existenčních důkazů v theorii diferenciálních rovnic. Zde se vychází z diferenční rovnice a limitním přechodem se dospěje k řešení odpovídající rovnice diferenciální. Tohoto limitního přechodu se dá také použíti k vyšetřování různých vlastností řešení diferenciálních rovnic, na příklad vlastností asymptotických a oscilačních. Na druhé straně se dá očekávat, že mnohé methody, které byly vypracovány v theorii diferenciálních rovnic, bude možno použít v theorii rovnic diferenčních a že z vlastností řešení diferenciální rovnice bude možno usuzovati na vlastnosti řešení odpovídající rovnice diferenční. Cílem sdělení je poukázati na některé souvislosti tohoto druhu. Zejména ukázáno, že je možno v theorii obyčejných diferenčních rovnic použíti jedné topologické methody, založené na pojmu retraktu (tento pojem náleží BORSUKOVI), kterou vymyslel a použil s úspěchem k vyšetřování vlastností řešení diferenciálních rovnic T. WAŻEWSKI a jeho žáci. Methoda se zejména hodí k vyšetřování asymptotických vlastností řešení obyčejných diferenčních rovnic (okruh problémů okolo Perronovy věty).

*

MICHAL GREGUŠ, Bratislava: **O niektorých okrajových problémoch diferenciálnej rovnice** $y''' + 2A(x, \lambda)\, y' + [A'(x, \lambda) + b(x, \lambda)]\, y = 0$. (a)

Pomocou centrálnych disperzií zavedených O. Borůvkom a pomocou niektorých výsledkov G. Sansoneho, dá sa dokázať nasledujúca veta:

Veta: Nech $A(x, \lambda) > 0$, $\frac{\partial}{\partial x} A(x, \lambda)$, $b(x, \lambda) \geqq 0$ sú spojité funkcie $x \epsilon (-\infty, \infty)$ a $\lambda \epsilon (\Lambda_1, \Lambda_2)$. Nech $A(x, \lambda)$ je rastúcou funkciou $\lambda \epsilon (\Lambda_1, \Lambda_2)$ a nech $\lim\limits_{\lambda \to \Lambda_2} A(x, \lambda) = +\infty$ pre každé $x \epsilon (-\infty, \infty)$. Nech $b(x, \lambda)$ nie je rovné nule v žiadnom čiastočnom intervale pre $x \epsilon (-\infty, \infty)$. Nech $a < b < c \epsilon (-\infty, \infty)$.

Potom existuje nekonečne mnoho hodnôt parametra $\lambda \epsilon (\Lambda_1, \Lambda_2)$: $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots \lambda_{n+p}, \dots$, ku ktorým patrí postupnosť funkcií: $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+p}, \dots$ takých, že $y_{n+p} = y(x, \lambda_{n+p})$ je integrálom diferenciálnej rovnice (a), ktorý spĺňa jednu z okrajových podmienok:

$$\begin{aligned}
&1.\ y(a, \lambda_{n+p}) = y'(a, \lambda_{n+p}) = y(b, \lambda_{n+p}) = 0\,,\\
&2.\ y(a, \lambda_{n+p}) = y\,(b, \lambda_{n+p}) = y(c, \lambda_{n+p}) = 0\,,\\
&3.\ y(a, \lambda_{n+p}) = y'(a, \lambda_{n+p}) = y'(b, \lambda_{n+p}) = 0\,,\\
&4.\ y(a, \lambda_{n+p}) = y'(b, \lambda_{n+p}) = y'(c, \lambda_{n+p}) = 0\,;
\end{aligned}$$

pritom $y(x, \lambda_{n+p})$ má 1. v (a, b), 2. v (b, c), 3. v (a, b), 4. v (b, c) práve $n + p$ nulových bodov.

*

Jur Hronec, Bratislava: **Nutné a postačujúce podmienky, aby diferenciálny systém nemal body neurčitosti.**

Riešenie dif. systému $\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} = \sum\limits_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}$, $k = 1, \dots, n$, nemá body neurčitosti, ak sú $a_{ik} = \frac{G_{ik}(x)}{[\varphi(x)]^{s_{ik}}}$, kde $\varphi(x) = (x - a_1) \dots (x - a_\sigma)$, $s_{ik} = 1$ pri $i = k$ a pri $i \neq k$ sú s_{ik} ľubovoľné konečné celé čísla. $G_{ik}(x)$ sú racionálne funkcie celistvé najviac stupňa $p_{ik} = (G + 1)\, s_{ik} - 2$. Pri $i = k$ sú $p_{kk} = \sigma - 1$. Nutne vyplýva to z $a_{\lambda k} = -\frac{D_{\lambda k}}{D}$, kde D je fund. deter. a $D_{\lambda k}$ je tiež určitý determinant a z toho, že ani bod v nekonečnosti nie je bodom neurčitosti.

Keď tieto podmienky sa splnia, dif. systém

$$(x - a_\mu)\, P_{0k} \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda P_{\lambda k}\,, \qquad (k = 1, 2, \dots n)\,,$$

je normálneho tvaru, kde sú

$$P_{0k} = \frac{[\varphi(x)]^{m_k}}{x - a_\mu} = \sum_{s_k=0}^{q_k} b_{0s_k}^{(k)} (x - a_\mu)^{s_k}\,, \quad P_{\lambda k} = [\varphi(x)]^{m_k - s_{\lambda k}}\, G_{\lambda k}(x)\,.$$

$$P_{\lambda k}(x) = \sum_{\mu_k=0}^{q_{\lambda k}} b_{\lambda \mu_k}^{(k)} (x - a_\mu)^{\mu_k}\,, \quad P_{kk} = \sum_{s_k=0}^{q_k} b_{ks_k}^{(k)} (x - a_\mu)^{s_k}\,, \quad q_k = \sigma m_k - 1\,,$$

$$q_{\lambda k} = (G + 1)\, s_{\lambda k} - 2\,,$$

potom vieme určiť

$$y_{ik} = (x - a_\mu)^{r_{ik}} \sum_{\nu_k=0}^{\infty} c_{ik}^{(\nu_k)} (x - a_\mu)^{\nu_k}\,.$$

r_{in} vieme určiť determinujúcimi rovnicami:

$$\prod_{k=1}^{n} (r_k b_{00}^{(k)} - b_{k0}^{(k)}) - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{n} b_{\lambda 0}^{(k)} = 0\,, \quad r_\lambda - r_k + 1 = s_{\lambda k}\,, \quad \lambda \neq k\,, \quad k = 1, \dots, n\,.$$

Pre $c_{ik}^{(\nu_k)}$ jestvujú rekurentné vzorce, a to tak v prípade rozličných koreňov ako aj v prípade, keď sú viacnásobné alebo v celých číslach sa líšiace korene. Pre korene, patriace ku všetkým sing. bodom, platia relácie

$$\sum_{\mu=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} r_{ik}^{(\mu)} = -(\sigma - 1) \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} (s_{\lambda k} - 1) .$$

Dokáže sa, že takto nekonečnými radmi určené riešenia vždy majú určitý obor konvergencie, ktorý nie je jeden bod. Medzi koreňami deter. rov. a medzi koeficientmi dif. systému jestvuje $n^2(\sigma + 1) - 1$ relácií. Dif. systém môže mať najviac

$$n\sigma + n(\sigma + 1) \sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k} - n(n - 1)$$

konštantných koeficientov. Ak je

$$n^2(\sigma + 2) - n(\sigma + 1) (1 + \sum_{\lambda=1}^{n} s_{\lambda k}) - 1 = 0 , \quad \lambda \neq k ,$$

z údajov sing. bodov a koreňov det. rovnic môžeme určiť aj dif. systém. Tento problém dá sa riešiť jednoznačne, ak je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R(x)}{\varphi(x)} ;$$

kde $R(x)$ je rac. funkcia celistvá $(\sigma - 1)$ — stupňa.

*

JUR HRONEC, Bratislava: **Normálne tvary parciálnych diferenciálnych rovníc druhého rádu o *n* nezávislých premenných.**

Parc. dif. rovnica

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} A_{ir} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_r} = 0 \tag{A}$$

pri $\dfrac{\partial}{\partial x_i} = z_i$, $\dfrac{\partial}{\partial x_k} = z_k$ prejde do tvaru $f = 0$, kde

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} z_i z_k$$

je kvadratická forma o n nezávislých premenných.

Použijeme substitúciu

$$\begin{aligned}
z_1 &= b_{11}\zeta_1 + D_{21}^{(n-1)} \zeta_2 + \dots + D_{n-1,1}^{(2)} \zeta_{n-1} + D_{n1}^{(1)} \zeta_n \\
z_2 &= \qquad\;\; D_{22}^{(n-1)} \zeta_2 + \dots + D_{n-1,2}^{(2)} \zeta_{n-1} + D_{n2}^{(1)} \zeta_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
z_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad D_{nn}^{(1)} \zeta_n ,
\end{aligned}$$

kde je

$$D_{n-s,\, n-s}^{(s)} = D^{(s)} = \begin{vmatrix} A_{11} \dots A_{1,n-s} \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{n-1,1} \dots A_{n-s,\, n-s} \end{vmatrix}$$

a $D_{n-s,\lambda}^{(s+1)}$, $\lambda \leqq n - s$ sú subdeterminanty deter. $D^{(s)}$, patriace k prvkom $A_{n-s,\lambda}$, $\lambda = 1, \dots, n - s$ a ďalej je $\zeta_i = \dfrac{\partial}{\partial \xi_i}$.

A_{ik} sú vzaté v ľubovoľnom bode oboru, potom sú

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= b_{11}x_1\,,\\
\xi_2 &= D_{21}^{(n-1)}x_1 + D_{22}^{(n-1)}x_2\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\xi_n &= D_{n1}^{(1)}x_1 + D_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + D_{n,n-1}^{(1)}x_{n-1} + D_{nn}^{(1)}x_n\,,
\end{aligned}$$

kde b_{11} je ľubovoľná konštanta. V takomto prípade dif. rovnica (A) transformuje sa do

$$b_{11}^2\,.\,D^{(n-1)}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1^2} + D^{(n-1)}\,.\,D^{(n-2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_2^2} + \dots + D^{(2)}\,.\,D^{(1)}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_{n-1}^2} + D^{(1)}\,.\,D\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_n^2} = 0$$

v ľubovoľnom bode oboru. Keď niektoré determinanty z postupnosti $D, D^{(1)}, \dots, D^{(n-1)}$ sú nula, normálny tvar obsahuje menej premenných. (Parabolický príklad.) Ak znamienka postupnosti $b_{11}^2, D^{(n-1)}, D^{(n-2)}, \dots, D^{(1)}, D$ sú kladné alebo pravidelne sa striedajú, kvadratická forma je definitná a máme eliptický typ.

Pri indefinitnej forme použijeme substitúciu

$$\xi_\lambda = \sum_{i=1}^n a_{\lambda i}x_i\,, \qquad \lambda = 1, 2, \dots, n$$

a rovnica (A) prejde do

$$\sum_{\lambda=1}^n \sum_{\nu=1}^n \Big[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik}a_{\lambda i}a_{\nu k}\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_\lambda\,\partial\xi_\nu} = 0\,.$$

Výraz v hranatej zátvorke pri $\lambda = \nu$ je indefinitnou kvadratickou formou a vtedy z rovníc

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^n A_{ik}a_{\lambda i}a_{\lambda k} = 0\,, \qquad \lambda = 1, 2, \dots, n$$

určíme $a_{\lambda i}, a_{\lambda k}$ a to tak, že $n - 1$ veličín môžeme ľubovoľne voliť.

V tomto prípade rovnica (A) prejde do

$$\sum_{\lambda=1}^n \sum_{\nu=1}^n \Big[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik}a_{\lambda i}a_{\nu k}\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_\lambda\,\partial\xi_\nu} = 0\,,$$

$\lambda \neq \nu\,, \quad A_{ik} = A_{ik}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ (hyperbolický typ).

*

ANTON HUŤA, Bratislava: **Zostrenie Runge-Kutta-Nyströmovej formuly pre numerickú integráciu diferenciálnych rovníc a diferenciálnych systémov 1. rádu.**

Ak dif. rovnica $y' = f(x, y)$ má za partikulárny integrál $y = F(x)$, pre ktorý nech platí $y_0 = F(x_0)$, potom $y_0 + k = F(x_0 + h)$, kde h a k sú prírastky premennej x resp. y. Ako je známe, prírastok k je daný radom

$$k = h\,.\,f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}h^2 f'(x_0, y_0) + \frac{1}{3!}h^3 f''(x_0, y_0) + \dots \tag{1}$$

Obsah tohto referátu zahrnoval zostrojenie vzorcov 6. rádu, ktoré mali nasledujúci tvar:

$k_0 = f(x_0, y_0)\,.\,h$

$k_1 = f(x_0 + \frac{1}{9}h, y_0 + \frac{1}{9}k_0)\,.\,h$

$$k_2 = f\left(x_0 + \tfrac{1}{6}h,\ \ y_0 + \frac{k_0 + 3k_1}{24}\right).h$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \tfrac{2}{6}h,\ \ y_0 + \frac{k_0 - 3k_1 + 4k_2}{6}\right).h$$

$$k_4 = f\left(x_0 + \tfrac{3}{6}h,\ \ y_0 + \frac{278k_0 - 945k_1 + 840k_2 + 99k_3}{544}\right).h$$

$$k_5 = f\left(x_0 + \tfrac{4}{6}h,\ \ y_0 + \frac{-106k_0 + 273k_1 - 104k_2 - 107k_3 + 48k_4}{6}\right).h$$

$$k_6 = f\left(x_0 + \tfrac{5}{6}h,\ \ y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{110974k_0 - 236799k_1 + 68376k_2 + 103803k_3 - 10240k_4 + 1926k_5}{45648}\right).h$$

$$k_7 = f\left(x_0 + h,\ \ y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{-101195k_0 + 222534k_1 - 71988k_2 - 26109k_3 - 20000k_4 - 72k_5 + 22824k_6}{25994}\right).h$$

$$k = \frac{41k_0 + 216k_2 + 27k_3 + 272k_4 + 27k_5 + 216k_6 + 41k_7}{840}.$$

Hodnoty integrálov vypočítaných touto metódou sa shodujú s (1) až do člena s h^6 včítane.

V uvedenom referáte bolo poukázané aj na to, že v prípade sústavy n dif. rovníc 1. rádu $y'_i = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ dá sa horeuvedená metóda 6. rádu rozšíriť aj na riešenie tejto sústavy diferenciálnych rovníc.

V praxi je uvedená metóda výhodná menovite tam, kde funkcia f je daná nie analyticky, ale napr. empiricky tabuľkou.

*

Ludvík Jánoš, Praha: **Aproximace první vlastní hodnoty homogenní integrační rovnice lineárním funkcionálem.**

Viz stejnojmenný článek v Časopise pro pěst. mat. *81* (1956).

*

Miloš Kössler, Praha: **O jisté domněnce z theorie prostých řad mocninných.**

Nechť řada $f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_n z^n$ zobrazuje kruh $|z| < 1$ prostě na jistou oblast v rovině w. Jest dokázáno, že $|a_2| \leq 2$, $|a_3| \leq 3$ a Bieberbach vyslovil domněnku dosud nedokázanou, že $|a_n| \leq n$. Obsah tohoto sdělení tvoří jiná také dosud obecně nedokázaná domněnka, která zní následovně:

Je-li řada $f(z)$ prostá, pak také řada $F(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{z}\, dz$ jest prostá a zobrazuje nějakou speciální jednodušší oblast v rovině ω.

Tato věta jest dokázána v případě, že $f(z)$ zobrazuje t. zv. hvězdovitou oblast. Pak $F(z)$ zobrazuje oblast konvexní. Dovedu dokázati, že vyslovená domněnka jest správná, jestliže $f(z)$ má vesměs reálné koeficienty. V tomto případě jest $F(z)$ prostá řada pásová. To znamená, že k ní příslušná oblast v rovině ω má tu vlastnost, že každá rovnoběžka k ose imaginární protíná hranici té oblasti v jediném bodě nad reálnou osou a jediném bodě pod reálnou osou. Nepodařilo se mi dokázat vyslovenou hypothesu, jestliže koeficienty řady $f(z)$ jsou čísla komplexní. Nepodařilo se mi však také dokázat nějakým speciálním příkladem, že domněnka ta jest nesprávná.

Druhá moje domněnka jest následující:

Je-li $f(z)$ prostá řada, pak také řada $f_1(z) = z + \sum_2^\infty |a_n| z^n$ jest prostá.

*

JOSEF KOROUS, Praha: **O některých třídách orthogonálních polynomů.**

Vyjde tiskem později.

*

JAROSLAV KURZWEIL, Praha: **O methodě postupných aproximací v theorii nelineárních kmitů.**

Viz článek К теории колебаний автономной квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнеиий'', Чехосл. мат. ж., *5 (80)*, 1955.

*

JAROSRAV KURZWEIL, Praha: **O aproximacích v reálných Banachových prostorech.**

V práci „On approximation in real Banach spaces", Studia mathematica, t. *XIV* (1954), zabýval jsem se otázkou, zda ke každé spojité funkci $F(x)$ definované na daném separabilním Banachově prostoru B a k číslu $\varepsilon > 0$ lze najít analytickou funkci $H(x)$ definovanou na B tak, že platí

$$\|F(x) - H(x)\| < \varepsilon \qquad \text{pro } x \in B .$$

Dokázal jsem, že taková aproximace je možná, jestliže prostor B splňuje tuto podmínku:

(A) Existuje reálný polynom $q(x)$ definovaný na prostoru B takový, že je

$$q(\Theta) = 0 , \qquad \inf_{x \in B, \|x\| = 1} q(x) > 0$$

(Θ je nulový prvek prostoru B).

Uvedený výsledek nyní prohlubuji:

Nechť prostor B je separabilní a stejnoměrně konvexní. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby bylo možné každou spojitou funkci $F(x)$ aproximovat analytickou funkcí $H(x)$ s libovolnou přesností, je: prostor B splňuje podmínku (A).

*

MIROSLAV LAITOCH, Olomouc: **Aplikace dispersí v oboru diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu.**

Mějme diferenciální rovnici 2. řádu

$$y'' = Q(x)\, y , \tag{a}$$

při čemž koeficient $Q(x)$ je spojitá funkce v otevřeném intervalu I.

1. Floquetovou methodou lze určit tvar fund. systému řešení dif. rovnice (a) v případě, že koeficient $Q(x)$ je periodická funkce. Použijeme-li theorie centrálních dispersí 1. druhu

(O. Borůvka, Čechoslov. mat. žurnal, T. *3* (*78*), 1953, str. 201), lze Floquetovu methodu rozšířit tak, že lze určiť tvar fund. systému řešení dif. rovnice (a), aniž se předpokládá periodičnost koeficientu $Q(x)$.

Viz článek „Расширение метода флоке для определения вида фундаментальной системы решений диф. уравнения второго порядка $y'' = Q(x) \cdot y$, Чехосл. мат. ж., *5* (*80*), 1955, 164—174.

2. Použitím theorie centrálních dispersí 1. a 2. druhu lze řešit tento problém:

Určit třídu spojitých a záporných funkcí $Q(x)$ té vlastnosti, že integrály dif. rovnice (a) oscilují v int. I a že v množině řešení této dif. rovnice existuje ke každému integrálu $y(x)$ jednak integrál, jehož derivace má tytéž nulové body jako integrál $y(x)$ a jednak integrál, který má tytéž nulové body jako derivace integrálu $y(x)$. Je-li základní centrální disperse 1. druhu lineární funkce, pak je to nutná a postačující podmínka, aby integrály dif. rovnice (a) měly zmíněnou vlastnost.

*

Alois Marek, Praha: **Zobecněně konvexní funkce několika proměnných.**

V práci je zaveden pojem MB konvexní funkce. Je to jednoznačná reálná funkce $f(X)$ definovaná na konvexní podmnožině z E_k, jejíž hodnota pro každou dvojici argumentů X, Y je v bodě $\frac{X+Y}{2}$ menší nebo rovna hodnotě funkce, která je v závislosti na f a na dvojici X, Y vybrána z jakéhosi systému měrných funkcí. Požaduje se, aby tento systém vyhovoval třem axiomům: definičního oboru funkcí v E_k, jednoznačného určení funkce dvěma body z E_{k+1}, rozložení obrazů funkcí v prostoru E_{k+1}.

Zvláštními případy MB konvexních funkcí jsou na př. funkce konvexní ve smyslu Jensenově a (až na definiční obor měrných funkcí) ve smyslu Beckenbach-Bingově.

Hlavní výsledky práce jsou: zobecnění věty o relativní spojitosti na racionálních bodech a věty Bernstein-Doetsch-Mohrovy pro MB konvexní funkce, a věta o indukování relativní spojitosti MB konvexních funkcí z q lineárně nezávislých úseček na lineární podprostory dimense q, určené libovolným bodem definičního oboru a q směry oněch úseček, z níž plyne spojitost měřitelné MB konvexní funkce.

*

Jan Mařík, Praha: **O jedné definici plošného integrálu.**

Viz článek „Surface integral", Чехосл. мат. ж., *6* (*81*), 1956.

*

Jan Mařík, Praha: **Baireova a Borelova míra.**

Buď P topologický prostor. Buď $\mathfrak{B}$ nejmenší σ-algebra, obsahující všechny uzavřené množiny prostoru P; buď $\mathfrak{B}^*$ nejmenší σ-algebra, obsahující všechny množiny tvaru $E[x; f(x) = 0]$, kde f je spojitá funkce na P. Zřejmě $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$; prvky systému $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{B}^*$) se nazývají Borelovy (resp. Baireovy) množiny. Je-li μ míra, definovaná na systému $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{B}^*$), řekneme, že μ je Borelova (resp. Baireova) míra. Hlavním obsahem sdělení byly tyto dvě věty:

1. Buď μ konečná Baireova míra na úplně regulárním prostoru P. Nechť existuje kompaktní množina $K \subset P$, která má tuto vlastnost: Je-li $B \in \mathfrak{B}^*$, $B \cap K = \emptyset$, pak $\mu(B) = 0$. Potom lze míru μ rozšířit na Borelovu míru.*)

*) To znamená: Existuje míra ν na systému B tak, že pro každé $B \in \mathfrak{B}^*$ je $\nu(B) = \mu(B)$.

2. Buď μ konečná Baierova míra na parakompaktním prostoru P. Potom lze míru μ rozšířit na Borelovu míru.

*

Ladislav Mišík, Bratislava: **O istej modifikácii metódy rozšírenia kladnej funkcionály podľa F. Riesza.**

Nech X je základný priestor, nech F je množina všetkých reálnych funkcií definovaných na X. Nech $\mathfrak{L}$ je systém množín C funkcií $f \in F$, že 1. $1 \in C$, 2. $f, g \in C$, α a β sú reálne čísla $\Rightarrow \alpha f + \beta g \in C$, 3. $f \in C \Rightarrow |f| \in C$. Pod kladnou funkcionálou A pri základnom priestore X rozumieme každú reálnu funkciu, ktorej obor definície $C(A)$ je z $\mathfrak{L}$ a ktorá je: i. pre nezáporné funkcie nezáporná, ii. aditívna, iii. homogenná, iv. pre každú nerastúcu postupnosť $\{f_n\}$ funkcií z $C(A)$ konvergujúcu na X k 0 je $\lim\limits_{n\to\infty} A(f_n) = 0$. Nech $\mathbf{A}(A)$ pre kladnú funkcionálu A je množina všetkých kladných funkcionál B, ktoré sú rozšíreniami kladnej funkcionály A pri základnom priestore X.

Nech $Z \subset X$ a $\{f_n\}$ je postupnosť funkcií z F. Potom nech $\mathrm{Lim}\,(f_n, Z)$ je množina všetkých tých funkcií $f \in F$ s vlastnosťou: ak pre $x \in X\text{-}Z$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, potom platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Ak Z je prázdna množina, kladieme $\mathrm{Lim}\,(f_n, Z) = \mathrm{Lim}\, f_n$.

Nech pre kladnú funkcionálu A je $\mathfrak{N}$ systém takých množín $N \subset X$, že pre každú z nich existuje neklesajúca postupnosť $\{f_n\}$ funkcií z oboru definície A, pričom $\{A(f_n)\}$ je ohraničená a $\{f_n\}$ diverguje v každom bode z N. Množiny N z $\mathfrak{N}$ sú v Rieszovej metóde rozširovania kladnej funkcionály A množinami miery 0. Klaďme ešte

$$\mathrm{Lim}^*\, f_n = \bigcup_{N \in \mathfrak{N}} \mathrm{Lim}\,(f_n, N).$$

Platí **veta:** *Pre každú kladnú funckcionálu A pri základnom priestore X s oborom definície $C(A)$ existuje jediná množina funkcií $m(A)$, resp. $m^*(A)$, že* 1. $m(A) \in \mathfrak{L}$, resp. 1*. $m^*(A) \in \mathfrak{L}$; 2. $C(A) \subset m(A)$, resp. 2*. $C(A) \subset m^*(A)$; 3., *resp.* 3*. *pre každú neklesajúcu postupnosť $\{f_n\}$ funkcií z $m(A)$, resp. $m^*(A)$, u ktorej $\{B(f_n)\}$ je ohraničená pre každú takú funkcionálu $B \in \mathbf{A}(A)$, ktorej obor definície $C(B)$ obsahuje $m(A)$, resp. $m^*(A)$, je* $\mathrm{Lim}\, f_n \subset m(A)$, *resp.* $Lim^*\, f_n \subset m^*(A)$; 4. *resp.* 4*. *pre každú množinu M, resp. M^*, majúcu vlastnosti* 1.—3., *resp.* 1*.—3*., *platí $m(A) \subset M$, resp. $m^*(A) \subset M^*$.*

F. Riesz v knihe Riesz-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionelle*, II. vyd., str. 132—134 udáva istú metódu rozšírenia kladnej funkcionály A, pričom používa operáciu $\mathrm{Lim}^*\, f_n$ a teda aj množín miery 0. Touto metódou prevedie sa rozšírenie vždy na $m^*(A)$ z prv citovanej vety. Keď v tej Rieszovej myšlienke rozšírenia kladnej funkcionály A miesto operácie $\mathrm{Lim}^*\, f_n$ použijeme operáciu $\mathrm{Lim}\, f_n$, rozšíri sa kladná funkcionála A z $C(A)$, pričom $C(A)$ je obor definície A, na množinu $m(A)$. Pre každú kladnú funkcionálu A platí ale $m(A) = m^*(A)$. Z toho vyplýva, že Rieszova myšlienka rozšírenia kladnej funkcionály modifikovaná tým spôsobom, že miesto operácie $\mathrm{Lim}^*\, f_n$ používame $\mathrm{Lim}\, f_n$, dáva ten istý výsledok. A teda táto modifikácia umožňuje rozšíriť Rieszovou myšlienkou kladnú funkcionálu bez použitia množín miery nula.

*

Miroslav Novotný, Brno: **Poznámky o representaci částečně uspořádaných množin.**

Viz článek „Bemerkung über die Darstellung teilweise geordneter Mengen", Spisy vyd. přírodovědeckou fakultou MU, Brno, č. 368, 1955/8.

*

František Nožička, Praha: **O jednom minimálním problému a jeho významu pro praxi.**

Viz referát „Užití polyedrů v ekonomii", Časopis pro pěst. mat., *3* (*79*), 1954, 280—281.

*

Jan Polášek, Praha: **Moment tuhosti v kroucení jistých profilů podobných lopatkovým.**

Viz práce: „Moment tuhosti v kroucení lopatkových profilů" — Polášek-Špaček: „Středisko smyku symetrických lopatkových profilů" — Polášek-Špaček: „Středisko smyku jistých nesymetrických profilů" — Rozpravy ČSAV, 1956.

*

Vlastimil Pták, Praha: **Slabá kompaktnost v lineárních prostorech.**

Viz články „Weak compactness in convex topological linear spaces", Чехосл. мат. ж., *4* (*79*), 1954, 175—186, „On a theorem of Eberlein", Studia mathematica *14* (1954), 276—284 a zejména „Two remarks on weak compactness", Чехосл. мат. ж., *5* (*80*), 1955.

*

Miloš Ráb, Brno: **Oscilační a asymptotické vlastnosti integrálů diferenciální lineární rovnice 3. řádu.**

Viz článek „Oscilační vlastnosti integrálů diferenciální lineární rovnice 3. řádu", Práce brněnské základny ČSAV, *XXVII* - 1955, seš. 7 a článek „Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichung 3. Ordnung", Spisy vyd. přírodov. fakultou MU, Brno 1956.

*

Karel Rektorys, Praha: **Výpočet teploty v přehradě při působení vnitřních zdrojů tepla.**

Viz Rozpravy ČSAV, 1956.

*

Tibor Šalát, Bratislava: **O súčtoch istých konvergentných radov.**

Viz stejnojmenný článek v Matematicko-fyzikálnom časopise, *IV*, 1954, 203—211.

*

Josef Široký, Olomouc: **Nová methoda řešení problému tří těles.**

Řešit problém tří těles znamená řešit v podstatě systém tří diferenciálních rovnic druhého řádu a prvního stupně. Nová methoda řešení tohoto problému byla zpracována zavedením modifikovaných souřadnic polárních místo obvyklých pravoúhlých, čímž nabyl původní systém diferenciálních rovnic zcela jiný tvar. Samo řešení problému je pak provedeno Picardovou methodou postupných aproximací. Tak se nahradí obvyklé rozvoje jistých funkcí, vyskytujících se v problému tří těles, novými aproximativními rozvoji, které vedou rychleji k cíli než rozvoje dříve používané. Velkou předností nové methody je, že se dá velmi dobře upravit pro numerické výpočty a že se dá upravit pro různé speciální případy, jaké právě se mohou vyskytnout při řešení problému tří těles. Možno také udat, jak lze tuto methodu zobecnit pro případ čtyř po př. n-těles.

*

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha: **O jistém zobecnění Taylorovy věty.**

Viz článek „Rozvoj analytické funkce v Taylorovu řadu s proměnným středem", Časopis pro pěst. mat., *81*, 1956.

*

MARKO ŠVEC, Bratislava: **O jednej vlastnej úlohe diferenciálnej rovnice** $y^{(n)} + Q(x, \lambda)y = 0$.

Viz článek „Über eine Eigenwertaufgabe der Differentialgleichung $y^{(n)} + Q(x, \lambda)\, y = 0$," Чехосл. мат. ж., *6* (*81*), 1956.

*

OTTO VEJVODA, Praha: **Odhad chyby při numerickém řešení soustavy diferenciálních rovnic methodou Runge-Kutta.**

*

MILOŠ ZLÁMAL, Brno: **O diferenciální rovnici** $\dot{y} + y = (\ddot{y})^2$.

Bylo odpověděno kladně na Bellmanovu otázku položenou v Bull. Amer. Math. Soc., vol. *61*, 1955, str. 192, zda uvedená rovnice má řešení, které je asymptoticky rovno e^{-t} při $t \to \infty$, jestliže $y(0)$ je v absolutní hodnotě dosti malé a $\dot{y}(0)$ vhodným způsobem zvoleno.

*

SDĚLENÍ Z III. SEKCE

JAN BÍLEK, Praha: **Algebraické korespondence mezi alg. varietami**

Jako těleso koeficientů $\mathfrak{k}$ uvažujeme těleso charakteristiky 0. Irreducibilní algebraická korespondence C nad tělesem $\mathfrak{k}$ je definována obecným bodem (ξ, η). Potom $C = V[\mathfrak{k}; (\xi, \eta)]$ je irreducibilní varieta nad $\mathfrak{k}$ v dvojnásob projektivním prostoru $S_{m,n}$,

$$M = V[\mathfrak{k}, \xi] \quad \text{je varieta vzorů v} \quad S_m\,,$$
$$N = V[\mathfrak{k}, \eta] \quad \text{je varieta obrazů v} \quad S_n\,.$$

Nechť

$$\mathfrak{k}(\bar{\xi}) = \mathfrak{k}(1, \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_m), \qquad \mathfrak{k}(\bar{\eta}) = \mathfrak{k}(1, \bar{\eta}_1 \ldots, \bar{\eta}_n), \qquad \mathfrak{k}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \mathfrak{k}(1, \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_m, 1,; \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$$

jsou tělesa racionálních funkcí na varietách M, N, C. Nějaké netriviální ohodnocení v tělesa $\mathfrak{k}(\bar{\xi}, \bar{\eta})/\mathfrak{k}$, které indukuje netriviální ohodnocení v_1 tělesa $\mathfrak{k}(\bar{\xi})/\mathfrak{k}$ a netriviální ohodnocení v_2 tělesa $\mathfrak{k}(\bar{\eta})/\mathfrak{k}$, definuje centrum V_1 ohodnocení v_1 na varietě M a centrum V_2 ohodnocení v_2 na varietě N.

Definice. Nechť V je irreducibilní podvarieta M, W je irreducibilní podvarieta N. Variety V a W si odpovídají v korespondenci T když existuje nějaké ohodnocení v tělesa $\mathfrak{k}(\bar{\xi}, \bar{\eta})/\mathfrak{k}$ takové, že centrum ohodnocení v na M je V a centrum ohodnocení v na N je W.

*

JOSEF BREJCHA, Brno: **O kongruencích, na jejichž ohniskových plochách čarám Darbouxovým odpovídají čáry Segreovy.**

V tomto sdělení se uvažuje o kongruencích **DS**, t. j. takových kongruencích s nikoli přímkovými ohniskovými plochami, které nejsou obsaženy v lineárním komplexu, na nichž Darbouxovým čarám prvé ohniskové plochy odpovídají Segreovy čáry druhé ohniskové plochy (což má za následek, že i Darbouxovým čarám druhé ohniskové plochy korespondují čáry Segreovy na prvé ohniskové ploše a kongruence je **W**).

Korespondence mezi oběma ohniskovými plochami realisuje asymptotickou transformaci 2. druhu, kde $r + s = 0$. K odvození je užito Fubiniovy teorie (*Fubini-Čech*, Geometria proiettiva differenziale I, kap. V). Odvozena rovnice mezi totálními projektivními křivostmi K a $\overline{K}$ ohniskových ploch v korespondujících bodech, Smith-Mehmkeovým invariantem r a mezi $\beta\gamma$.

Jako užití určen invariant r pro kongruence **DS**, splňující relaci

$$K + r^2\overline{K} = 0 .$$

Nakonec odvozen vztah mezi invariantem N a r kongruence **DS**.

*

VLADIMÍR BRUTHANS, Liberec: **Analagmatické kvintiky.**

Viz stejnojmenný článek v Časopise pro pěst. mat., *80* (1955), 274—283.

*

BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, Praha: **O záměnných kolineacích.**

Známá elementární věta o tom, že harmonická poloha dvou dvojic v přímce je vzájemná, v tom smyslu totiž, že je-li jedna z obou dvojic harmonicky sdružena s druhou, je tomu tak také navzájem, může býti zevšeobecněna pro libovolný projektivní lineární prostor, když uvážíme, že dvojice dvou různých bodů je simplex v přímce a že každá z dvou dvojic harmonicky sdružených je dvojicí bodů sobě odpovídajících v involutorní projektivnosti, jejíž samodružné body jsou body dvojice druhé. Tyto dvě projektivnosti jsou, jak je známo, záměnné. Zevšeobecnění zní takto: *Jsou-li dány dva simplexy v n-rozměrném prostoru takové, že skupina vrcholů jednoho z nich tvoří cyklus v cyklické kolineaci o periodě* $(n + 1)$, *jejíž jsou vrcholy druhého simplexu samodružné body, je tomu tak také navzájem. Obě cyklické kolineace jsou záměnné.* Aby se osvětlil význam této záměnnosti, je třeba odvoditi některé výsledky o záměnných kolineacích vůbec, což má býti předmětem jiné práce.

*

KAREL ČULÍK, Brno: **Příspěvek k theorii zobecněných konfigurací.**

Nechť na kartézském součinu neprázdných, disjunktních a konečných množin $\mathfrak{M}^{(1)}$, $\mathfrak{M}^{(2)}$ je definována symetrická funkce f, která nabývá hodnot 0, 1. Pak množiny $\mathfrak{M}^{(i)}$, $i = 1, 2$, s funkcí f nazýváme (zobecněnou) *konfigurací* na dvou (konečných) množinách a označujeme ji $K = \{f, \mathfrak{M}^{(i)}\}_{i=1}^2$. Konfiguraci $\{f, \mathfrak{M}^{(i)}\}_{i=1}^2$ nazýváme *homomorfním obrazem* konfigurace $\{g, \mathfrak{N}^{(i)}\}_{i=1}^2$, jestliže existuje takové zobrazení φ (*homomorfismus*) množiny $\mathfrak{N}^{(1)} \cup \mathfrak{N}^{(2)}$ na $\mathfrak{M}^{(1)} \cup \mathfrak{M}^{(2)}$, že platí $\varphi(\mathfrak{N}^{(i)}) = \mathfrak{M}^{(1)}$ $(i = 1, 2)$ a $g[x^{(1)}, x^{(2)}] = f[\varphi(x^{(1)}), \varphi(x^{(2)})]$ pro každý $x^{(1)} \in \mathfrak{N}^{(1)}$, $x^{(2)} \in \mathfrak{N}^{(2)}$. Množina všech automorfismů konfigurace $K = \{f, \mathfrak{M}^{(i)}\}_{i=1}^2$ tvoří permutační grupu (*konfigurační grupu* konfigurace K). Homomorfismem φ, který zobrazuje $K = \{f, \mathfrak{M}^{(i)}\}_{i=1}^2$ na $L = \{g, \mathfrak{N}^{(i)}\}_{i=1}^2$ je na množině $\mathfrak{M}^{(i)}$ vynucen rozklad $\overline{\mathfrak{M}}^{(i)}$, $i = 1, 2$, a na něm lze definovat tak zvanou *faktorovou konfiguraci* $\overline{K} = \{\overline{f}, \overline{\mathfrak{M}}^{(i)}\}_{i=1}^2$ konfigurace K vztahem $\overline{f}[X^{(1)}, X^{(2)}] = f[x^{(1)}, x^{(2)}]$ pro $x^{(i)} \in X^{(i)}$, když $X^{(i)} \in \overline{\mathfrak{M}}^{(i)}$, $i = 1, 2$. Pak $\overline{K}$, L jsou isomorfní. Konfiguraci, na níž lze vytvořit jedinou faktorovou konfiguraci, nazýváme *jednoduchou*. Na každé konfiguraci $\{f, \mathfrak{M}^{(i)}\}_{i=1}^2$ lze vytvořit právě jednu faktorovou konfiguraci $\{\overline{f}, \overline{\mathfrak{M}}^{(i)}\}_{i=1}^2$, která je jednoduchá. Faktorová konfigurace $\{\overline{f}, \overline{\mathfrak{M}}^{(i)}\}_{i=1}^2$ je jednoduchá tehdy a jen tehdy, když rozklad $\overline{\mathfrak{M}}^{(i)}$ je nejmenším zákrytem systémů rozkladů $\overline{\mathfrak{M}}^{(i)}$ všech faktorových konfigurací konfigurace $\{f, \overline{\mathfrak{M}}^{(i)}\}_{i=1}^2$.

Dále platí: *Nechť* $\{\overline{f}, \overline{\mathfrak{M}}^{(i)}\}_{i=1}^2$ *je faktorová konfigurace, která je jednoduchá a* $\overline{G}$ *její* *konfigurační grupa. Nechť dále G je konfigurační grupa konfigurace* $\{f, \mathfrak{M}^{(i)}\}_{i=1}^{2}$. *Pak* $\overline{G}$ *je (grupovým) homomorfním obrazem grupy* G, *když platí:* $X_\iota^{(i)}, X_\kappa^{(i)} \in \mathfrak{M}^{(i)}$ jsou prvky téhož systému transitivity grupy $\overline{G} \Rightarrow$ kard $X_\iota^{(i)} =$ kard $X_\kappa^{(i)}$, $i = 1, 2$.

*

MIROSLAV FIEDLER, Praha: **O jednom druhu speciálních simplexů v E_n.** Viz článek „Geometrie simplexu v E_n, III", Časopis pro pěst. mat. *81* (1956).

*

MICHAL HARANT, Bratislava: **Kotovano-axonometrická zobrazovacia metóda v E_4.**

Autor po ocenení známych zobrazovacích metód vo štvorrozmernom euklidovskom priestore ukazuje výhody novej kotovano-axonometrickej metódy v E_4 a jej súvis so známymi zobrazovacími metódami. Rieši základné úlohy polohy a metrické.

Výsledky aplikuje na riešenie úloh o niektorých trojdimenzionálnych nadkvadrikách, najmä na rezy nadkvadrík s priestorom, rovinou, priesečíky priamky s nadkvadrikou, normálu a tangenciálny priestor v danom bode nadkvadriky. Pri reze hypersféry priestorom ukázal konštrukciu združených priemerov rezovej gule, ktorá má za priemet rotačný elipsoid. Poukázal na analógiu medzi rezmi roviny a valca v E_3 a rezmi nadroviny a nadkvadriky guľovo-valcovej nadkvadriky v E_4. Rezy guľovo-kužeľovej nadkvadriky priestorom môžu byť kvadriky typu elipsoidu, paraboloidu alebo hyperboloidu a to vlastné alebo rozpadové a poukázal, za akých podmienok ktorý rez nastáva.

Autor previedol náčrt aplikácií tejto zobrazovacej metódy na riešenie úloh o plochách guľových v E_3, použitím cyklografického zobrazovania v E_4, pre prevedenie ktorého zobrazovania kotovano-axonometrická metóda je veľmi vhodná. Základné konštrukcie boli uvedené v riešených úlohách.

*

KAREL HAVLÍČEK, Praha: **Příspěvek k projektivnímu významu derivování.**

Homogenní projektivní souřadnice bodu v n-dimensionálním projektivním prostoru S_n označme x_i ($i = 0, 1, \ldots, n$). Derivovanou křivkou křivky (ϱ, f_i jsou funkce parametru t)

$$x_i = \varrho(t)\, f_i(t)\,, \quad \varrho \neq 0\,, \tag{1}$$

nazveme křivku $x_i = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varrho f_i)$. Každému ϱ přísluší jedna derivovaná křivka křivky (1). Triviální jsou tyto věty: Všechny derivované křivky dané křivky (1) vytvoří plochu tečen křivky (1) [pouze povrchové přímky této plochy tečen nelze pokládat za derivované křivky dané křivky (1)]. Leží-li křivka (1) na nadkvadrice Q^2 a leží-li na Q^2 aspoň jedna její derivovaná křivka, pak všechny její derivované křivky leží na Q^2. Aplikace těchto výsledků na přímkovou geometrii, jež tvoří hlavní část tohoto sdělení, budou uveřejněny v Časopise pro pěst. mat. v autorově článku „Poznámka k přímkové geometrii rozvinutelných ploch", *81* (1956).

*

JIŘÍ KLAPKA, Brno: **O jedné větě Al. Pantazziho.**

V práci AL. PANTAZZIHO „Sur certaines congruences spéciales", Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences, tome *35*, 1933, se vyšetřuje metodou Cartanova pohyblivého reperu „kongruence **C**" v S_3, t. j. kongruence rozložitelná v jednoparametrickou soustavu nerozvinutelných ploch, z nichž každá se dotýká ohniskových ploch (x), (x') kongruence podél svých čar fleknodálních $[x]$, $[x']$. Jestliže nad to čáry $[x]$, $[x']$ jsou

Darbouxovými čarami ploch (x), (x'), jedná se o „kongruenci **CD**", o níž se dokazuje **věta:**

„*Není-li kongruence* **CD** *současně* **W**, *pak dvojpoměr 1. obou asymptotických tečen plochy (x) v bodě x a 2. obou tečen v x k čarám na (x), korespondujícím asymptotikám v bodě x' plochy (x'), je podél čáry $[x]$ konstantní.*"

Snadno lze ukázati, že přímý důkaz věty je podstatně jednodušší, zvláště použijeme-li E. ČECHEM zavedeného pojmu rovinových souřadnic *korespondujících* bodovým souřadnicím na ploše. To platí i o jiných větách.

*

LADISLAV KOSMÁK, Praha: **Charakterisace tětivových a tečnových mnohoúhelníků.**

Viz stejnojmenný článek v Časopise pro pěst. mat. *80* (1955), 454—461.

*

LADISLAV KOUBEK, Praha: **Parabolické přímkové kongruence.**

*

SVATAVA KUBÁLKOVÁ, Praha: **Některé grupy rovinných transformací, které reprodukují trojrozměrný systém rovinných kubik.**

Autorka referovala o výsledcích své práce uveřejněné pod názvem „Souvislost hlavních elementů rovinné symetrické involuce 5. stupně s přímkami kubické plochy" v Časopise pro pěst. mat., *80* (1955), 172—190. Uvedla ještě, že grupa $\mathfrak{G}_{648}$, o níž se v práci jedná, se nedá rozšířit, t. j. že existuje právě 648 rovinných transformací, které reprodukují příslušný trojrozměrný lineární systém rovinných kubik.

*

JOSEF METELKA, Olomouc: **Variety base Cremonových transformací v S_r.**

Variety base jsou vyšetřovány algebraickou cestou v podstatě rozborem funkcionálních matic. U jednoduchých variet base jsou pak definovány jisté invarianty (počet tečných podmínek, rozměr upoutání, rozměr homologický), které dovolují k dané varietě base nalézt ve druhém prostoru útvar odpovídající v t. zv. prvním přiblížení (pojem je přesně definován). Dále jsou ukázány metody druhého a dalších přiblížení a určeny případy, kdy je jich třeba použít.

*

VÁCLAV METELKA, Liberec: **Methoda výpočtu rovinných konfigurací $(12_4, 16_3)$.**

Akademik BOH. BYDŽOVSKÝ ve svém článku o rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$ (Časopis pro pěst. mat., *79*, 1954, 219—228) ukázal, že lze objevit nové konfigurace zcela náhodným postupem a naznačil, že vzhledem k soustavnému studiu tohoto problému je nutno nalézt pořádací princip, jak objevit systematicky všechny tyto konfigurace.

Ve sdělení je nejprve provedeno třídění konfigurací podle typu jejich bodů a naznačen pořádací princip pro konstrukci všech konfigurací, které obsahují aspoň jeden D-bod. Zároveň je ukázáno, jak se dá tohoto pořádacího principu s jistou obměnou použít pro systematický výpočet všech rovinných konfigurací $(12_4, 16_3)$. Další část sdělení se týká otázky, jak bezpečně oddělit od počtu všech možných schemat schemata ekvivalentní. Jsou zde ukázky další možnosti jemnějšího třídění konfigurací, které již je vhodné pro jejich úplnou klasifikaci.

Poslední část sdělení konečně ukazuje, že uvedená methoda je nejen vhodná, ale že i poměrně rychle vede k cíli.

*

MILAN MIKAN, Praha: **Möbiova kulová (a neeukleidovská) geometrie jednoparametrových útvarů.**

Pentasférické souřadnice x_j (reálné) v Möbiově prostoru M jsou zároveň interpretovány jakožto souřadnice x_j bodů $\bar{x}$ ve čtyřrozměrném neeukleidovském prostoru ${}_4P$ o absolutní kvadrice K. Body $\bar{x}$ v ${}_4P$ jsou obrazy kulových ploch x v M. Budiž v ${}_4P$ hladký oblouk $(\bar{x})$ v intervalu $\langle t_0, t_1\rangle$ reálného parametru t, nikde neprotínající K, obrazem množiny (x) kulových ploch x v M.

Existuje-li příslušný Wronskian hodnosti 5, existuje v ${}_4P$ hladký oblouk $(\bar{y})$ jakožto množina $(\bar{y})$ pólů $\bar{y}$ (vůči K) oskulačních nadrovin bodů $\bar{x}$ oblouku $(\bar{x})$. $(\bar{y})$ je obrazem množiny (y) kulových ploch y. V případě, že oblouky $(\bar{x})$, $(\bar{y})$ jsou vně K, jsou obálky kulových ploch x, y obě reálné. Vyšetřují se vlastnosti jejich průnikové křivky a sestrojují ty množiny (x), které připouštějí infinitesimální transformaci, vytvářející jednočlennou podgrupu Möbiovy grupy.

*

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha: **Vrstva ploch a nulová korespondence v S_3.**

Každému bodu P vrstvy ploch v trojrozměrném projektivním prostoru S_3 přiřaďme repery $A_0A_1A_2A_3$ takové, že bod A_0 je geom. identický s bodem P a rovina $\alpha_3 = [A_0A_1A_2]$ je tečná rovina v bodě P té plochy vrstvy, která jím prochází. Pak $dA_i = \sum_{j=0}^{3} \omega_{ij}A_j$, $i = 0, 1, 2, 3$. K nulové korespondenci $\mathbf{N}A_0 = \alpha_3$ neexistuje — ve smyslu definovaném E. ČECHEM — tečná polarita. Avšak při volbě $\omega_{13} = \omega_{02}$, $\omega_{23} = \omega_{01}$, která je vždy možná, je analytická příbuznost $\mathbf{P}$ určená relacemi $\mathbf{P}A_0 = \alpha_3$, $\mathbf{P}A_1 = -\alpha_2$, $\mathbf{P}A_2 = -\alpha_1$, $\mathbf{P}A_3 = -\alpha_0$ tečná ke korespondenci $\mathbf{N}$ (α_0, α_1, α_2 mají známý význam). Jí lze přiřadit každému bodu A_0 vrstvy jistou projektivitu a jistý svazek kvadrik. Pro druhý řád platí

$$\mathbf{P}d^2A_0 = d^2\alpha_3 + 2(\omega_{00} + \omega_{33})\, d\alpha_3 - (\Omega_0\alpha_0 + \Omega_1\alpha_1 + \Omega_2\alpha_2) + (\cdot)\,\alpha_3\,,$$

kde $\Omega_0 = 4\omega_{01}\omega_{02}$ a Ω_1, Ω_2 jsou jisté kvadratické formy v ω_{01}, ω_{02}, ω_{03}. Přímka $[A_0, \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2 + \omega_{03}A_3]$, pro niž $\Omega_0 : \Omega_1 : \Omega_2 = \omega_{03} : \omega_{02} : \omega_{01}$, je charakteristická. Poslední relace je možno interpretovat jako rovnice rovinných kubik a podle jejich vzájemné polohy vrstvy klasifikovat.

*

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha: **Frenetovy formule pro nadplochu v afinním prostoru a některé jejich důsledky.**

V n-rozměrném rovném afinním prostoru A_n je dána $(n-1)$ — rozměrná regulární varieta s parametrickým popisem

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a)\,; \quad \alpha = 1, \ldots, n\,; \quad a = 1, \ldots, n-1\,,$$

kde ξ^α jsou souřadnice bodů v A_n. Existuje vhodná afinní normalisace tečného vektoru dané nadplochy té vlastnosti, že

1. tak zvaná indukovaná konexe nadplochy A^c_{ab} je nezávislá na volbě faktoru tečného vektoru.

2. Afinormální vektor nadplochy N^ν je (za určitých předpokladů) jednoznačným řešením rovnic

$$N^\nu \partial_a T_\nu = 0\,, \qquad N^\nu T_\nu = 1\,, \tag{1}$$

kde T_ν je uvažovaný tečný vektor. Afinormální vektor N^ν je nezávislý na volbě faktoru tečného vektoru.

3. Frenetovy formule mají za těchto okolností velmi jednoduchý tvar, a to:

$$\partial_a B^\alpha_b = \Lambda^c_{ab} B^\alpha_c - H_{ab} N^\alpha ,$$
$$\partial_a N^\alpha = B^\alpha_c L^c_a , \tag{2}$$

kde B^α_c jsou vektory nadplochy ve směru parametrických čar, H_{ab} a L^c_a jsou dvě významné tensorové nadplochy, nezávislé na volbě tečného vektoru.

Formule (1) a (2) svědčí o velmi těsné analogii s relacemi známými z geometrie metrické.

Další studium nadploch v A_n se velmi prohloubí studiem tensoru H_{ab} a L^c_a. Pomocí těchto tensorů lze dospět k význačným křivkám na ploše (s hlediska afinní geometrie) právě tak jako k základní klasifikaci nadploch v A_n. Výsledky jsou pak ilustrovány na plochách v E_3, speciálně na kvadrikách.

*

Cyril Palaj, Zvolen: **Poznámky k teórii polárnych simultánnych invariantov kvadratických foriem.**

Viz práci „L'invariant Q_{n+1} comme un invariant simultané fondamental d'une jusqu' à $n + 1$ hyperquadriques dans l'espace à n dimensions", Чехосл. мат. ж. *5 (80)*, 1955, 345—354.

*

Jan Pavlíček, Praha: **O axiomatisaci eliptické geometrie.**

Je dobře známo, že při axiomatickém budování eukleidovské a hyperbolické geometrie můžeme vyjít ze společného základu, totiž z absolutní geometrie. Je však jasné, že z této geometrie nemůžeme již odvodit eliptickou geometrii, protože ta se od absolutní geometrie neliší pouze vlastnostmi rovnoběžnosti, ale také vlastnostmi incidence a uspořádání. Bylo by však jistě žádoucí odvodit všechny tři geometrie ze společného základu. To by bylo možné učinit tak, že bychom vybudovali nejdříve geometrii omezeného prostoru, čehož v podstatě užil M. Pasch ve svých „Vorlesungen über neuere Geometrie" (1882) k zavedení projektivního prostoru. Touto možností se dosud nikdo, pokud je mi známo, nezabýval.

Ve svém sdělení jsem uvedl axiomatický systém geometrie omezeného prostoru (nejobtížnější je stanovení axiomů shodnosti) a zabýval jsem se otázkou, jaké zvolit závěrečné axiomy, jimiž by geometrie omezeného prostoru vyústila postupně do geometrie eukleidovské, hyperbolické a eliptické.

*

Jan Srb, Bratislava: **Rozšíření Pascalovy věty na racionální křivku projektivního *n*-rozměrného prostoru.**

*

Karel Svoboda, Brno: **Metrická charakterisace Veronesovy plochy.**

Viz práci „Sur une caractérisation métrique de la surface de Veronèse", Spisy vyd. přírodov. fakultou MU, Brno, č. 368, 1955.

*

Jaromír Šedý, Liberec: **O křivkách s extrémním afinním obloukem.**

Obsahem sdělení je vyhledání křivek s extrémním afinním obloukem v euklidovských afinních prostorech $E_2, E_3, \dots$

Budiž dána v n-rozměrném euklidovském afinním prostoru E_n parametricky regulární křivka p-té třídy ($1 \leq p \leq n$) rovnicemi $x^\alpha = x^\alpha(t)$, kde $\alpha = 1, 2, 3, \dots p$, $t \in (t_1, t_2)$.

Vektory $u_1^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{dt}$, $u_i^\alpha = \dfrac{d}{dt} u_{i-1}^\alpha$, $i = 2, 3, \ldots, p$, jsou lineárně nezávislé, vektor $u_{p+1}^\alpha = \dfrac{d}{dt} u_p^\alpha$ je lineární kombinací ostatních, t. j. $u_{p+1}^\alpha = \sum_{i=1}^{p} l_{p-i}^{(p)} u_i^\alpha$, kde $l_{p-i}^{(p)}$ jsou skaláry v (t_1, t_2). Afinní oblouk $s(t)$ $(t \in (t_1, t_2))$ je dán vzorcem

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\overline{\frac{2}{p(p+1)}}} \int_{t_0}^{t} l_0^{(p)}\, dt\,, \quad t_0 \in (t_1, t_2)\,, \quad t \in (t_1, t_2)\,.$$

Položíme-li $p = n$, je možné uvésti oblouk v E_n do tvaru

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} [u_1^\alpha u_2^\alpha \ldots u_n^\alpha]^{\overline{\frac{2}{n(n+1)}}}\, dt\,,$$

kde symbol $[u_1^\alpha u_2^\alpha \ldots u_n^\alpha]$ značí determinant, jehož α-tý řádek je vypsán.

Omezíme-li se na $E_2(p = 2)$, mají zmíněné křivky s extrémním afinním obloukem tvar

$$C^2x^2 - 2Cxy + y^2 + 2Mx + 2Ny + L = 0\,,$$

při čemž C, M, N, L jsou libovolné konstanty. Jsou to tedy paraboly.

Řešíme-li obdobný problém extremál pro $E_3(p = 3)$, obdržíme příslušné křivky ve tvaru

$$x^\alpha = A^\alpha s^3 + B^\alpha s^2 + C^\alpha s + D^\alpha\,, \quad (\alpha = 1, 2, 3)\,,$$

kde jako parametr byl zvolen afinní oblouk s. Obdobným způsobem možno pokračovat v prostorech $E_4, E_5, \ldots$ Příslušné extremály jsou t. zv. normální křivky.

*

Alois Švec, Praha: **Projektivní diferenciální geometrie korespondencí mezi přímkovými plochami.**

Viz články: „Déformation projective de certaines surfaces avec un réseau conjugué", Чехосл. мат. ж. *5 (80)*, 1955, „Déformations projectives des surfaces à réseau conjugué dans S_5'' a „Problèmes d'existence de la déformation projective des surfaces de S_5 possédant un réseau conjugué" Чехосл. мат. ж. *6 (81)*, 1956.

*

Alois Urban, Praha: **O styku křivek v projektivním prostoru.**

Pro styk křivek v n-rozměrném projektivním prostoru $S_n(n \geqq 3)$ platí fundamentální věta:

Věta. *Nechť $s \geqq 1$, $\sigma \geqq 1$ jsou celá čísla. Nechť k_0 je celé číslo, pro které platí $(k_0 - 1)s + 1 \leqq \sigma \leqq k_0 s$. Nechť křivky $C_1 \equiv x_i = x_i(v)$, $C_2 \equiv y_i = y_i(v)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ mají ve společném obyčejném bodě $v = v_0$ analytický styk řádu $s - 1$. Obě křivky mají v něm styk řádu $s + \sigma - 1$ tehdy a jen tehdy, je-li možno najít taková čísla a_ν, b_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, \sigma - 1)$, že platí* $\left(\left[\dfrac{\partial^\nu x_i}{\partial v^\nu}\right]_{v=v_0} = x_\nu^i\right)$

1. pro $k_0 = 1$: $y_{s+\alpha}^i - x_{s+\alpha}^i = \sum_{\nu=0}^{\alpha} \binom{s+\alpha}{\nu} (a_{\alpha-\nu} x_{\nu+1}^2 + b_{\alpha-\nu} x_\nu^i)\,,\ (\alpha = 0, 1, \ldots, \sigma - 1)\,,$

2. pro $k_0 > 1$: a) $y_{s-\alpha}^i - x_{s-\alpha}^i = \sum_{\nu=0}^{\alpha} \binom{s+\alpha}{\nu} (a_{\alpha-\nu} x_{\nu+1}^i + b_{\alpha-\nu} x_\nu^i)\,,\ (\alpha = 0, 1, \ldots, s - 1)\,,$

$$
\text{b) } y^i_{2s+\alpha} - x^i_{2s+\alpha} = \sum_{\nu=0}^{s+\alpha} \binom{2s+\alpha}{\nu} (a_{s+\alpha-\nu} x^i_{\nu+1} + b_{s+\alpha-\nu} x^i_\nu) +
$$

$$
+ \sum_{k=2}^{k'} \sum_{t_1=0}^{t_0} \sum_{t_2=0}^{t_1} \dots \sum_{t_k=0}^{t_{k-1}} \binom{ks+t_0}{(k-1)s+t_1} \prod_{j=0}^{k-2} a_{t_{k-j-1}-t_{k-1}} \binom{(j+1)s+t_{k-j-1}}{js+t_{k-j}} \, .
$$

$$
\cdot \left(a_{t_0-t_1} \frac{x^i_{t_k+k}}{k!} + b_{t_0-t_1} \frac{x^i_{t_k+k-1}}{(k-1)!} \right), \quad (\alpha = 0, \dots, \sigma - s - 1) \, ,
$$

při čemž $t_0 = \alpha - (k-2)s$, $2 \leqq k' \leqq k_0$, $(k'-2)s \leqq \alpha < (k'-1)s$.

Věta zobecňuje známý výsledek ak. E. ČECHA, který je v ní zahrnut pro případ $k_0 = 1$. Užitím této věty bylo možno doplnit některé výsledky, které našel ak. E. Čech při řešení problému zvýšení styku průmětů C_1, C_2 křivky C při promítání ze dvou m-rozměrných ($0 \leqq m \leqq n - 3$) středů Z^1, Z^2 do $(n - m - 1)$-rozměrné průmětny. Za předpokladu $Z^1 \cap Z^2 = E_{m-1}$ byly nalezeny geometrické podmínky pro dosažení zvýšení styku.

*

LADA VAŇATOVÁ, Praha: **O jednom druhu grup involutorních Cremonových transformací v rovině.**

Viz stejnojmenný článek v Časopise pro pěst. mat., *80* (1955), 152—171.

*

ZDENĚK VANČURA, Praha: **Pláště kongruence koulí.**

Viz stejnojmenný článek v Časopise pro pěst. mat., *80* (1955), 317—327.

*

FRANTIŠEK VYČICHLO, Praha: **Geometrie přímkových útvarů anholonomních.**

V referátu byla definována přímková anholonomní varieta v projektivním bodovém prostoru trojrozměrném a bylo ukázáno, jak se sestrojuje její anholonomní slupka a buňka k dané přímce.

Výsledky, které v referátě byly uvedeny, jsou částí práce o anholonomních přímkových varietách, kterou autor připravuje k tisku.

*

SDĚLENÍ ZE IV. SEKCE

VÁCLAV ALDA, Praha: **O podmíněných pravděpodobnostech.**

Viz článek „On conditional expectations", Чехосл. мат. ж. *5* (*80*), 1955, 503—505.

*

VÁCLAV DUPAČ, Praha: **O stochastické modifikaci jednoho problému z geometrie čísel.**

Viz článek „О стохастическом видоизменении одной проблемы из геометрии чисел", Чехосл. мат. ж., *5* (*80*), 1955, 492—502.

*

VÁCLAV DUPAČ a MARCEL JOSÍFKO, Praha: **O jednom odhadu parametru σ v normálním rozložení.**

Viz stejnojmenný článek v časopise Aplikace matematiky, *1* (1956).

*

FRANTIŠEK FABIAN, Praha: **Poznámky k theorii limitních zákonů.**

V prvé poznámce je uvedena jistá podmínka pro splnění silného zákona velkých čísel užitím vhodně vyvozených mezí pro integrál $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^R e^{-x^2}\,dx$, $R \geqq 0$.

Druhá poznámka se zabývá stanovením nejmenšího rozsahu výběru pro odhad pravděpodobnosti v základním souboru, při dané přesnosti a daném risiku, pomocí Bernoulliovy věty.

*

FRANTIŠEK FABIAN, Praha: **Příspěvek k objasnění pojmu „pravděpodobnost".**

Viz článek „Poznámka k axiomatisaci theorie pravděpodobnosti", Filosofický časopis ČSAV, Praha, 1955, č. 4.

*

VÁCLAV FABIAN, Praha: **Silný zákon velkých čísel pro aproximativní methody.**

Obsah sdělení je zobecněním věty 1 z článku „Experience in statistical decision problems" (V. Fabian a A. ŠPAČEK), Чехосл. мат. ж., *6* (*81*), 1956.

*

JAROSLAV HÁJEK, Praha: **Stacionární procesy s konvexní korelační funkcí.**

Viz článek „Линейная оценка средней стационарного случайного процесса с выпуклой кореляционной функцией", Чехосл. мат. ж. *6* (*81*), 1956.

*

OTTO HANŠ, Praha: **O stochastických aproximacích.**

*

JAROSLAV JANKO, Praha: **Poznámka k rozhodovacímu pravidlu Bayesovu.**

Srovnáváme-li různá rozhodovací pravidla na základě jejich silokřivek, můžeme určit rozhodovací pravidlo stejnoměrně silnější. Definujeme pak rozhodovací pravidlo δ jako přípustné, neexistuje-li pravidlo stejnoměrně silnější. Přípustné rozhodovací pravidlo δ, které minimalisuje zvážené vyhlídky na chybné rozhodnutí při určité volbě vah, je pravidlem Bayesovým. Obráceně je dokázáno, že každé Bayesovo pravidlo s nenulovými vahami je přípustné. Pro případ, že některé váhy jsou nuly, je dosud dokázáno, že každé Bayesovo pravidlo je slabě přípustné. V tomto sdělení je podán důkaz, že za určitých podmínek je Bayesovo pravidlo s některými vahami nulovými přípustné, nejen slabě přípustné.

*

JOSEF KAUCKÝ, Brno: **K problému iterací v počtu pravděpodobnosti.**

Viz článek „Le probléme des itérations dans un cas des probabilités dépendantes", Comptes rendus de l'Académie des Sc. de Paris, t. *202*. Důkaz formule viz v článku „K problému iterací v počtu pravděpodobnosti", Sborník VTA AZ, Brno, 1956.

*

ZDENĚK KOUTSKÝ, Praha: **O regulaci náhodných posloupností.**

*

ALBERT PEREZ, Praha: **Vyčerpávající transformace a minimum pravděpodobnosti chyby a posteriori.**

Co se týče vyčerpávající (sufficient) transformace, odvoláváme se na článek: P. R. HALMOS a L. J. SAVAGE, Ann. Math. Stat., vol. *XX*, 1949. — Budiž $\mathcal{M} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ systém pravděpodobnostních měr na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{S})$ a $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_n)$ distribuce a priori (p_i = pravděpodobnost μ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$), $\sum_i p_i = 1$. Budiž $B = (B_1 \ldots, B_n)$ systém disjunktních množin z $\mathcal{S}$, jejichž sjednocení je X, (rozklad prostoru $(X, \mathcal{S})$). Pravděpodobnost chyby a posteriori, které se dopustíme, když rozhodneme, že správná míra je μ_i, když je $x \in B_i$, $i = 1, \ldots, n$, je rovná $f_B(\mathcal{M}, \mathcal{P}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i(B_i)$. Budiž λ míra na S dominující $\mathcal{M}$: $\mathcal{M} \ll \lambda$ a $f_i(x)$ hustota (Radon-Nikodymova) μ_i vzhledem k λ. Budiž $M_{ij} = \{x : p_i f_i(x) = p_j f_j(x)\}$, $L_{ij} = M_{ij}$ pro $i < j$, $L_{ij} = \emptyset$ pro $i \geqq j$, $N_{ij} = \{x : p_i f_i(x) > p_j f_j(x)\}$. Budiž P_B třída rozkladů prostoru $(X, \mathcal{S})$, které dostaneme z B opětovným rozkladem každé množiny tvaru

$$(M_{ij} \cap M_{jk} \cap \ldots \cap M_{pq} \cap M_{qs}) \cap (B_i \cup B_j \cup B_k \cup \ldots \cup B_p \cup B_q \cup B_s),$$

jehož prvky připojíme libovolně k $i, j, k, \ldots, p, q, s$ nebo které jsou identické s předchozími $[\lambda]$. Pak se dokáže, že pro každý rozklad $C \in P_B$ je $f_C(\mathcal{M}, \mathcal{P}) = f_B(\mathcal{M}, \mathcal{P})$. Dokáže se, že třída P_A, odpovídající rozkladu $A = (A_i = \bigcap_{j \neq i} (N_{ij} \cup L_{ij})$, $i = 1, \ldots, n)$ je identická s třídou rozkladů dávající minimum pravděpodobnosti chyby a posteriori pro $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ dané. — Budiž T měřitelná transformace prostoru $(X, \mathcal{S})$ do prostoru $(Y, \mathcal{T})$ a $\mathcal{M}T^{-1} = (\mu_1 T^{-1}, \ldots \ldots, \mu_n T^{-1})$. Buďtež $P_{A(X)}$ resp. $P_{A(Y)}$ třídy P_A, odpovídající $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ resp. $(\mathcal{M}T^{-1}, \mathcal{P})$. Dokáže se, že $f_{A(X)}(\mathcal{M}, \mathcal{P}) \leqq f_{A(Y)}(\mathcal{M}T^{-1}, \mathcal{P})$, kde znaménko rovnosti nastává, ať je $\mathcal{P}$ jakékoliv, tehdy a jen tehdy, když je T vyčerpávající pro $\mathcal{M}$. Bylo učiněno srovnání s theorií informací.

*

ALBERT PEREZ, Praha: **O konvergenci posloupností nejistot, entropií a informací odpovídajících rostoucím posloupnostem σ-algeber.**

Byly podány některé výsledky, získané během studia vlastností pojmu nejistoty, entropie a informace, jak jsme je definovali pro případ abstraktních pravděpodobnostních polí (Konference o počtu pravděpodobnosti a matematické statistice v Praze, 1954).

Budiž $(Z, \mathcal{R})$ měřitelný prostor a $\{\mathcal{R}_n\}$ posloupnost rostoucích pod-σ-algeber σ-algebry $\mathcal{R}$. Buďtež μ a λ pravděpodobnostní míry na $\mathcal{R}$, takové, že $\mu \ll \lambda$. Budiž $f(z)$ hustota (Radon-Nikodymova) μ vzhledem k λ měřitelná vzhledem k $\mathcal{R}$ a $f_n(z)$ hustota měřitelná vzhledem k $\mathcal{R}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ konverguje podle pravděpodobnosti μ k f, pak posloupnost nejistot $\{-\log f_n\}$ konverguje právě tak k $-\log f$, a naopak. Jestliže ještě entropie $H_\lambda(\mu, \mathcal{R}) = -\int \log f \, d\mu$ je konečná, pak $\{\log f_n\}$ konverguje také podle středu a skoro jistě, oboje vzhledem k μ, k $\log f$ a naopak. Zvláště pak (klesající) posloupnost $\{H_\lambda(\mu, \mathcal{R}_n)\}$ konverguje k $H_\lambda(\mu, \mathcal{R}) = \inf_{\mathcal{R}'} H_\lambda(\mu, \mathcal{R}')$, $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$, a existuje vždycky posloupnost $\{P_n\}$ zjemnňujících rozkladů prostoru $(Z, \mathcal{R})$, zajišťující tuto konvergenci. Tato posloupnost může být v určitých případech zvolena nezávisle na μ a λ.

Informace je definována v případě, kdy $(Z, \mathcal{R})$ má tvar $(X \times Y, \mathcal{S} \times T)$ a $\lambda = \mu_X \times \mu_Y$, kde μ_X a μ_Y jsou marginální míry na $\mathcal{S}$ a T, odpovídající μ, a je tedy rovna příslušné entropii s opačným znaménkem. Výše uvedená posloupnost $\{P_n\}$, zajišťující konvergenci (rostoucí) posloupnosti odpovídajících informací k informaci vzhledem k $\mathscr{S} \times T$, může být vždycky ve tvaru součinu: $P_n = P_n^X \times P_n^Y$, kde P_n^X resp. P_n^Y je rozklad $(X, \mathscr{S})$ resp. (Y, T).

Byl nalezen úzký vztah s teorií martingalů.

*

ANTONÍN ŠPAČEK, Praha: **Elementy znáhodněné funkcionální analysy.**

Jde o pravděpodobnostní zobecnění některých vět z funkcionální analysy a o aplikace na náhodné funkcionální rovnice. Některé z výsledků jsou obsaženy v pracích „Zufällige Gleichungen", „Note on K. Menger's probabilistic Geometry" a v práci „Sur l'inversion des transformations aléatoires presque sûrement linéaires", Acta Math. 1956.

*

MILAN ULRICH, Praha: **Náhodné procesy vytvořené Poissonovými procesy.**

*

LIBUŠE VOTAVOVÁ, Praha: **Entropie a pravděpodobnost chyb.**

Pro pravděpodobnosti $p_1, \ldots, p_n$ nechť platí: $p_i \geqq p_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Byla odvozena minimální a maximální hodnota entropie $H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$, když je dána největší pravděpodobnost p_1, tedy $p_1 \geqq \frac{1}{n}$. Obě tyto hodnoty jsou klesající funkce p_1 a minimální hodnota entropie H na n nezávisí. Pro dané H lze tedy určit, v kterém intervalu I může p_1 být. Pro dané H se s rostoucím n interval I rozšiřuje.

Byla odvozena minimální a maximální hodnota střední podmíněné entropie $\overline{H}$, když je dána nejmenší pravděpodobnost chyby a posteriori ψ, resp. minimální hodnota $\overline{H}$, když je dáno $f, p_1, \ldots, p_n$ a $p_n \geqq f$. Tyto hodnoty jsou rostoucí funkce f a minimální hodnota $\overline{H}$ pro dané f na n nezávisí. Byly odvozeny věty, které usnadňují výpočet minimální hodnoty $\overline{H}$ pro $f > p_n$. Tyto výsledky navazují na práce A. PEREZE.

*

KAREL WINKELBAUER, Praha: **Ergodická věta v polouspořádaných prostorech.**

Byla formulována tato věta a naznačena methoda jejího důkazu:

Je-li X daný polouspořádaný prostor splňující jisté podmínky a normovaný pomocí prvků jiného polouspořádaného prostoru Y a je-li T automorfismus na prostoru X zachovávající normu, potom posloupnost

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i(x)$$

konverguje pro každý bod x z prostoru X ve smyslu částečného uspořádání a platí rovnost

$$\left\| \lim \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i(|x|) \right\| = \|x\|.$$

*

JIŘÍ NEDOMA, Praha: **O kapacitě diskretních kanálů.**

*

OTAKAR ŠEFL, Praha: **Testování průměru spojitých stochastických procesů.**

Obsahem sdělení je testování průměru spojitých, stacionárních stochastických procesů na základě pozorování v konečném intervalu. Jsou-li μ_1 a μ_2 testované pravděpodobnostní míry, pak lze najít míru λ tak, že $\mu_1 \ll \lambda$ a $\mu_2 \ll \lambda$. Potom obor přijetí, vyhovující Neyman-Pearsonově podmínce, je množina $\left\{x : p \frac{d\mu_1}{d\lambda} > (1 - p) \frac{d\mu_2}{d\lambda}\right\}$, kde p je pravděpodobnost míry μ_1 a $\frac{d\mu_1}{d\lambda}$, resp. $\frac{d\mu_2}{d\lambda}$, jsou Radon-Nikodymovy derivace. Tyto derivace lze určit jako limity poměru příslušných posloupností jistých válcových množin.

Redakce.

*

ŠEDESÁTINY PROFESORA KAUCKÉHO

Brněnská matematická veřejnost oslavila v minulém roce vzácné jubileum, šedesátiny dr JOSEFA KAUCKÉHO, profesora a vedoucího katedry matematiky Vojenské technické akademie Antonína Zápotockého (VTA AZ).

Profesor Kaucký se narodil 22. května 1895 v Praze. Vyšší reálku navštěvoval v Kladně, kde také maturoval. Po maturitě se věnoval studiu matematiky a fysiky na Karlově universitě v Praze a v prosinci 1917 dosáhl úplné aprobace pro učitelství na středních školách. Během studií dostal Bolzanovo stipendium za práci v semináři prof. K. PETRA. 28. ledna 1919 byl promován na doktora filosofie.

Ještě jako student byl výpomocným asistentem v ústavu meteorologie na Karlově universitě a při tom po státních zkouškách v druhé polovině šk. roku 1917/18 konal bezplatný zkušební rok na klasickém gymnasiu na Král. Vinohradech. V letech 1918—21 byl profesorem na reálném gymnasiu v Chotěboři a od r. 1921 do r. 1931 asistentem ústavu theoretické fysiky brněnské university u profesora dr B. HOSTINSKÉHO. Jako asistent pracoval ve studijním roce 1925/26 u profesora N. E. NÖRLUNDA v Kodani. Po návratu z Kodaně v lednu 1928 se habilitoval z matematiky na přírodovědecké fakultě Masarykovy university v Brně. Zde byl také v r. 1937 jmenován bezplatným mimoř. profesorem. V r. 1938 byl jmenován profesorem Vysoké školy technické Milana Rast. Štefánika v Košicích, která v r. 1939 přešla do Bratislavy jako Slovenská technika. Vedle toho byl bezplatným profesorem na přírodovědecké fakultě Slovenské university. V roce 1946 přešel na bývalou brněnskou techniku a od roku 1951 je na VTA AZ.

V roce 1937 byl jmenován řádným členem Moravsko-slezské akademie věd přírodních, v roce 1938 řádným členem Šafaříkovy učené společnosti v Bratislavě.

Vědecká a odborná činnost profesora Kauckého se vyznačuje bohatou rozmanitostí problémů a themat. Publikoval řadu vědeckých prací v našich i zahraničních časopisech a vydal několik knih. Jeho práce jsou, zhruba řečeno, trojího druhu: z theorie diferenčních rovnic, z projektivní diferenciální geometrie a z počtu pravděpodobnosti. Z první kategorie prací třeba uvést práci (habilitační): „O přechodu diferenční rovnice hypergeometrické v diferenciální rovnici Gaussovu“, Spisy vyd. přírod. fak. MU v Brně, *80*, 1927. Z projektivní diferenciální geometrie vzpomeňme práci „Études des surfaces dont une droite canonique passe par un point fixe“, tamtéž *108*, 1929, která ve výtahu vyšla v Rendiconti della r. Accademia naz. dei Lincei. Práce obsahuje kompletní řešení problému, který ve známé knize FUBINI-ČECHOVĚ „Geometria proiettiva diferenziale“ zůstal nerozřešen. Práce z počtu pravděpodobnosti se týkají závislých pravděpodobností. Je z nich třeba jmenovat „Několik poznámek k teorii Markovových řetězů“, Spisy

131, 1930, která ve výtahu vyšla v Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris. V této práci opravil jistou chybu, jíž se dopustil známý sovětský matematik ROMANOVSKIJ, a jako první poukázal na to, že asymptotické chování řešení systémů diferenčních rovnic, na něž lze převésti jednoduché Markovovy řetězy, záleží na všech kořenech t. zv. charakteristické rovnice, jež leží na jednotkové kružnici. Tato práce je citována na př. FRÉCHETEM a HADAMARDEM a navazují na ni práce některých českých matematiků.

Stejně důležitá jako jeho činnost vědecká je jeho činnost pedagogická a jeho činnost a práce, kterou vykonal pro školy, na nichž působil. Profesor Kaucký většinou působil na školách, které nedávno vznikly a které tedy pomáhal budovat, ať již to byla přírodovědecká fakulta v Brně nebo bratislavská technika a universita anebo nyní VTA AZ.

Zejména je nutno se zmínit o jeho zásluhách o slovenské vysoké školy, kde byl profesorem na technice a vedle toho nad svůj úvazek na universitě, kde učil mnohé dnešní slovenské matematiky mladší generace. Těžiště pedagogické práce profesora Kauckého je však na vysokých školách technického směru, kde dal matematický základ celé řadě inženýrů. Vyučování matematice na technikách je neobyčejně těžký problém. Narážejí zde na sebe dvě překážky, které lze těžko v rozsahu, jaký je věnován hodinám matematiky na technice, zároveň uspokojit. Je to jednak snaha po dostatečně přesném a abstraktním založení matematických vědomostí, jednak snaha po získání pokud možno největšího počtu dílčích výsledků, které by bylo možno bezprostředně uplatnit v praxi i na úkor ztráty celkového přehledu. Pokud jsem mohl sledovat pedagogickou činnost s. profesora Kauckého, domnívám se, že se mu v rámci daných možností podařilo dosáhnout harmonické synthese obou těchto požadavků a vystihnout to, co technik z matematiky potřebuje. O tom svědčí také řady vynikajících inženýrů, které vychoval a kteří na něho stále vděčně vzpomínají.

S. profesor Kaucký může tedy se stejným uspokojením přehlédnouti i výsledky své dlouholeté práce výchovné jako výsledky své práce čistě odborné.

Všichni jeho přátelé, spolupracovníci a žáci mu přejí i v dalších letech hodně pevného zdraví a mnoho úspěchů jak na poli vědecké tak pedagogické práce.

Jiří Čermák, Brno.

ŘEDITEL JOSEF PITHARDT ZEMŘEL

V prvních srpnových dnech loňského roku zemřel dlouholetý ředitel reálky v Karlíně JOSEF PITHARDT. Narodil se 2. března 1874 v Sezemicích u Pardubic. Láska ke knize, k vědění a k dětem převedla ho přes obtížnou životní cestu na pedagogickou dráhu. Studoval reálku v Pardubicích, pak na filosofické fakultě KU v Praze učitelství matematiky a deskriptivní geometrie. Jako profesor matematiky působil v Hradci Králové, Rakovníku a konečně trvale v Praze.

Byl dobrým učitelem, který dovedl vždy vybrat z učební látky to, co mělo zůstat trvalým majetkem pro život. A jak sám ve svých posledních slovech, která zanechal, se zmiňuje, ze svého duševního majetku dal co mohl dětem a hojné řadě svých žáků, a dával to poctivě, aby jim to všem sloužilo k dobrému.

Své didaktické zkušenosti uložil hlavně v učebnicích deskriptivní geometrie a v řadě menších prací a článků pedagogických.

Ředitel Pithardt byl také průkopníkem českého těsnopisu. Svoje nadšení pro těsnopis projevil již jako student. Jako praktik se osvědčil při zapisování v obecním sboru hlavního města Prahy a v zasedání sněmovním jako komorní stenograf. Konečně jako vědecký pracovník byl spolutvůrcem nových těsnopisných českých soustav a byl členem vědecké komise methodicko-pedagogické.

Tuto svoji lásku podržel si do poslední chvíle svého života. Přeložil jako znalec těsnopisných soustav deník z pozůstalosti básníka Jiřího Wolkera a vyučoval prakticky do svého 80. roku s nevšedním úspěchem ve státních kursech těsnopisných.

Nejen svojí spisovatelskou činností, ale svým životem, poctivou prací a svým charakterem postavil si v srdci všech lidí, kteří jej znali, pomník trvalé ceny.

F. Vyčichlo, Praha.

PROF. FRANTIŠEK KADEŘÁVEK, NOSITEL ŘÁDU REPUBLIKY

Začátkem letošního školního roku propůjčil president republiky Antonín Zápotocký na návrh vlády profesoru deskriptivní geometrie na fakultě inž. stavitelství dr Františku Kadeřávkovi Řád republiky. Prof. dr Kadeřávkovi, který zasvětil celý svůj život vytváření deskriptivní geometrie užitečné pro techniky a výtvarníky, který se desítky let obětavě snažil o výstavbu pražských technických škol a jehož zkušeným pedagogickým vedením prošlo tisíce posluchačů, se tak dostalo v době, kdy dovršil sedmdesát let svého plodného života, zaslouženého uznání.

B. Kepr, Praha.

NÁVŠTĚVY HOSTŮ Z CIZINY

Profesor Gheorge Vrănceanu, který se v září zúčastnil v Praze sjezdu čs. matematiků, zůstal po skončení sjezdu v ČSR ještě do 22. října 1955. Rozhodl se totiž strávit svoji dovolenou v Karlových Varech spolu se svou paní, která se tam léčila.

Během svého pobytu u nás pracoval v geometrii neholonomních prostorů a o některých výsledcích přednášel před svým odjezdem na schůzce pražské obce matematické ve čtvrtek dne 13. října 1955 na thema „Sur les propriétés intrinsèques des espaces non-holonomes“; přednáška podnítila živou diskusi. Na pondělní schůzce pražské matematické obce dne 17. října 1955 přednesl G. Vrănceanu po hlavní přednášce prof. Orlicze ještě krátkou poznámku k práci prof. A. Urbana o geometrii systému parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu a slíbil, že k této otázce napíše pro náš časopis článek.

J. Pavlíček, Praha.

V pátek 7. 10. 1955 uvítali jsme v Praze milého hosta prof. Władysława Orlicze z Poznaně. Prof. Orlicz přijel do ČSR na třínedělní pobyt v rámci československo-polské kulturní dohody a ve dnech 18.—23. listopadu navštívil Brno a Bratislavu.

Prof. Orlicz se živě zajímal o práci československých matematiků, o nedávno uspořádaný IV. sjezd československých matematiků a o vyučování matematice na našich vysokých školách. Věnoval mnoho času schůzkám s československými matematiky, během svého pobytu v ČSR setkal se s většinou známých představitelů československé matematiky a se zvlášť velkou pozorností sledoval práce a zájmy mladších pracovníků.

Prof. Orlicz přednášel v Praze, v Brně a v Bratislavě o Saksových prostorech. Saksův prostor je poměrně nový pojem funkcionální analysy, který vznikl a je soustavně studován v Poznani. Výsledky, které prof. Orlicz přednesl, mají rozsáhlé aplikace zvláště na theorii sčitatelnosti, orthogonální řady, vícenásobné integrály a representaci funkcionálů. O těchto přednáškách přineseme podrobnější referát. Na schůzce s československými matematiky v Matematickém ústavu Československé akademie věd podal prof. Orlicz přehled o nových matematických výsledcích, kterých bylo dosaženo v Poznani za posledních 10 let. Skromným způsobem mluvil o rozsáhlé práci ve funkcionální analyse (posloupnosti operací, Saksovy prostory, analytické funkcionály), v theorii sčitatelnosti, v theorii skoroperiodických funkcí, v konstruktivní theorii funkcí i v analytické theorii čísel. Rozsáhlost themat i vědeckých výsledků, kterých dosáhla početně velmi malá skupina poznaňských matematiků za obtížných podmínek, vzbudila zasloužený obdiv všech účastníků schůzky. Rovněž velkou pozornost vyvolalo sdělení prof. Orlicze, že poznaňští matematikové připravují sbírku úloh z matematické analysy, vhodných k podnícení samostatného myšlení pro posluchače vyšších universitních ročníků.

Prof. Orlicz si prohlédl s nevšedním zájmem mnoho kulturních památek a několikrát navštívil naše přední operní scény. Setkání s vynikajícím polským matematikem přineslo nám mnoho cenných informací i podnětů a nesporně přispěje k zvýšení československo-polské spolupráce v důležité disciplině, ve funkcionální analyse.

J. Kurzweil, Praha.

MEZINÁRODNÍ LETNÍ MATEMATICKÉ CENTRUM V ITALII

Počínajíc rokem 1954 pořádá *Unione Matematica Italiana* desetidenní přednáškové cykly z rozmanitých oborů matematiky, vedené předními italskými a zahraničními odborníky v tom kterém oboru. Zároveň se konají i jednotlivé přednášky a seminární schůzky. Tyto přednáškové cykly, vedené pod názvem *Centro Internazionale Estivo di Matematica* jsou určeny pro vědecké pracovníky v příslušném oboru, jehož znalost se předpokládá, a jsou v nich vykládány nejnovější docílené výsledky a problémy, na které tyto výsledky vedou.

V r. 1954 se konaly celkem tři kursy, a to ve Varenně na Comském jezeře. První kurs, který vedli L. Amerio (Milán), L. Fantappié (Řím), E. R. Lorch (N. York) a F. Pellegrino (Řím), se konal 9.—18. června na thema Analytické funkcionály a normované okruhy. Druhý kurs vedli R. Caccioppoli (Neapol), L. Cesari (Bologna/Lafayette) a Chr. Panc (Remeš) ve dnech 16.—25. srpna na thema Kvadratura ploch a příbuzné problémy. Třetí kurs vedli D. Graffi (Bologna), J. L. Massera (Montevideo), G. Sansone (Florencie) a W. Wasow (Los Angeles) ve dnech 15.—24. září na thema Nelineární diferenciální rovnice.

V r. 1955 bylo uspořádáno pět kursů, z nichž prvé tři se konaly ve Varenně, čtvrtý v Benátkách a pátý v Pavii. První kurs vedli F. Hirzebruch (Münster), F. Severi (Řím) a B. v. d. Waerden (Curych) ve dnech 29. června až 8. července na thema Věta Riemann-Rochova a příbuzné problémy. Druhý kurs vedli H. Davenport (Londýn), E. Hlawka (Vídeň), L. J. Mordell (Cambridge, Anglie) a G. Ricci (Milán) ve dnech 16.—25. srpna na thema Analytická theorie čísel. Třetí kurs vedli K. Kuratowski (Varšava), G. Scorza-Dragoni (Padova) a E. Sperner (Hamburk) ve dnech 26. srpna až 4. září na thema Topologie. Čtvrtý kurs vedli B. Finzi (Milán), A. Signorini (Řím) a F. H. v. d. Dungen (Brusel) ve dnech 20.—29. září na thema Nové výsledky v pružnosti a v theorii křídla. Pátý kurs se konal v Pavii ve dnech 26. září až 5. října bezprostředně předcházejících sjezdu italských matematiků, který se konal v témž městě. Thema bylo Projektivní diferenciální geometrie se zvláštním zřetelem k algebraickým útvarům; toto thema bylo voleno mimo jiné proto, že poslední den sjezdu byl věnován památce velkého italského matematika G. Fubiniho (1879—1943), v jehož vědeckém díle má projektivní diferenciální geometrie velmi význačné postavení. Vedle E. Bompianiho (Řím) a B. Segreho (Řím) vedl jsem tento kurs já. Přednášky Bompianiho se týkaly jednak dotykových diferenciálních elementů křivek v projektivní rovině, jednak vlastností analytických transformací v okolí samodružného bodu. Týmž vlastnostem, arci s jiného hlediska, byla věnována také část přednášek B. Segreho, který mimo to probíral diferenciální invarianty bodových a dualistických transformací, invarianty styku při regulárních analytických transformacích, pojem dvojpoměru v diferenciální geometrii a diferenciální vlastnosti ve velkém týkající se průniku algebraických variet a korespondencí mezi nimi. Moje přednášky byly z theorie transformací přímkových kongruencí a byly rozvrženy takto: Projektivní lineární element neparabolické kongruence v S_3. Rozvinutelné transformace kongruencí; pozoruhodné zvláštní případy (bodové, rovinové a fokální deformace). Obecná existenční věta. Projektivní deformace kongruence a k ní příslušný asymptotický rozklad. Existenční věty o projektivních deformacích. Kongruence W. Parabolické kongruence. Kongruence v nadprostorech. Na přání účastníků jsem podal také přehled své theorie linearisujících transformací. Jednotlivé přednášky pronesli L. GODEAUX (Lutych) a C. LONGO (Řím). Na seminářích byla živá diskuse a byla formulována řada zajímavých problémů.

E. Čech, Praha.

KONGRES ITALSKÝCH MATEMATIKŮ

Ve dnech 6. 10. až 13. 10. 1955 konal se V. kongres členů *Unione Matematica Italiana* (UMI) v universitním městě Pavii, které leží asi 50 km jižně od Milána.

Sjezdu se účastnilo téměř 250 osob, z toho asi 30 osob ze zahraničí. Z lidových demokracií bylo zastoupeno ČSR (akad. ČECH, prof. VYČICHLO), Polsko (prof. MOSTOWSKI a prof. ŚLEBODZIŃSKI), Maďarsko (akad. ALEXITS, akad. HAJÓS) a NDR (prof. HASSEOVÁ).

Dopoledne byla věnována *přednáškám* a delším souborným referátům italských matematiků:

6. 10. *B. Finzi:* O unitární theorii relativity.
7. 10. *L. Brusotti - V. E. Galafassi:* Topologie algebraických reálných útvarů.
F. Tricomi: Speciální funkce.
8. 10. *V. Amato - G. Zappa:* Struktura konečných grup podle Cipolly.
M. Cinguini Cibrario: Systémy rovnic parciálních s reálnými charakteristikami.
11. 10. *G. Supino:* Přibližný výpočet pružných desek.
G. Pompilj: Statistické zpracování experimentálních výsledků.

Odpoledne byla věnována *sdělením* v sedmi sekcích (1. Analysa, 2. Geometrie, 3. Mechanika a matem. fysika, 4. Aktuárské vědy, počet pravděpodobnosti a matem. statistika, 5. Geodesie, astronomie a astrofysika, 6. Aplikovaná matematika a numerické methody, 7. Historie a filosofie matematiky. Didaktika). Referáty byly většinou dvacetiminutové a zřídka byly doprovázeny diskusí. V sekci geometrie předsedal dne 8. 10. prof. Čech, dne 7. 10. v téže sekci referoval prof. Vyčichlo o dvojicích ploch se společnými diferenciálními invarianty 1. řádu. Mimo to jedno dopoledne bylo věnováno jednání o otázkách didaktických a naléhavým problémům učitelů matematiky a fysiky na středních školách. Stalo se tak při krátké oslavě 60letého trvání společnosti *Mathesis*. V úterý dne 11. 10. se konalo valné shromáždění UMI, které stručně hodnotilo dosavadní vědeckou činnost italských matematiků a zabývalo se organisačními otázkami.

Poslední den sjezdu probíhal v Turině. Účastníci byli přítomni sdělení jury (C. EHRESMANN, S. BOCHNER, A. TERRACINI) o udělení *mezinárodní ceny G. Fubiniho* za práce v diferenciální geometrii A. LICHNEROWICZOVI, profesoru na Collège de France v Paříži. Slavnostní přednáška laureáta se konala v aule university v Turině na thema „O prostorech s konformní konexí“ a hned poté předseda sjezdu a UMI akad. G. SANSONE sjezd ukončil.

Sjezdové jednání ukázalo, že v Italii je velká řada matematiků a že je mezi nimi velký počet mladých pracovníků, zaměřených na problémy analysy, které jsou významné pro technika (diferenciální rovnice, integrální rovnice, numerické methody). Školy v Miláně (TRICOMI), ve Florencii, Pise (SANSONE, CINQUINI), Římě a Neapoli (PICONE, MANARA) úspěšně spolu soutěží.

Geometrie italská je soustředěna v Římě (SEGRE, SEVERI) a Turině (TERRACINI) na moderní problémy algebraicko-topologické, kdežto v Bologni se pěstuje diferenciální geometrie korespondencí (VILLA). Je škoda, že tu nejsou žáci prof. E. BORTOLOTTIHO a že není pěstována diferenciální geometrie v jeho intencích. Algebraickou geometrii pěstuje také řada žáků starších učitelů (SEVERI, CHISINI, ENRIQUES).

Sjezd byl pro italské matematiky zároveň událostí společenskou, které použili, aby se sešli se svými známými i jejich rodinami a se zahraničními přáteli a prohovořili jak otázky vědecké tak organisační, aktuální pro další čtyřleté období. Bylo to dobře patrno na obědech a večeřích i na společném autokarovém zájezdu uskutečněném v neděli 9. 10. do paveské Certosy a k jezeru Como.

Sjezdu bezprostředně předcházel seminář o diferenciální geometrii, konaný péčí *Mezinárodní matematické unie*, v němž přednášeli E. BOMPIANI, E. ČECH, B. SEGRE a který vhodně rozšířil a doplnil vědecké přednášky sjezdu.

F. Vyčichlo, Praha.

O STUDIJNÍ CESTĚ DO MAĎARSKA

Za svého studijního pobytu v Maďarsku (19. 9. až 9. 10. 1955) navštívil jsem ústav aplikované matematiky Maďarské akademie věd, matematickofysikální fakultu, technickou universitu v Budapešti a v Miškovci, vysokou školu pedagogickou v Egeru (na zájezdu jsem byl u Blatenského jezera).

Studijní úkoly jsem měl dva: 1. Průzkum organisace a řízení pedagogické práce na vysokých školách technických a 2. průzkum práce v nomografickém oddělení ústavu aplikované matematiky v Maďarské akademii věd.

Organisace i řízení pedagogické práce jsou celkem podobné jako u nás. Za zvláštní zmínku stojí, že rektor GILLEMOT z technické university přesvědčil loňského roku, kdy nastoupil do funkce, ministerstvo školství, že je neúnosné pro vysoké školy vzdělávat studenty, kteří se ke studiu nehodí. Vysoká škola pomáhá sice ze začátku studentům, kteří mají v přípravě nedostatky, ale po dvou letech musí být studenti na výši, jakou potřebuje universita. Student se musí přizpůsobit požadavkům vysoké školy a nikoliv obráceně. Na podkladě tohoto názoru bylo v loňském roce vyloučeno skoro 25 % studentů z technické university. Kategoricky také rektor Gillemot odsoudil pokusy, aby inženýři vyučovali na technických školách matematice. Inženýři nemají k takové výuce potřebnou odbornou průpravu a ostatně jejich prvořadým úkolem je učit studenty vědecky řešit technické problémy. Rektor Gillemot je inženýr, ale sám studoval dva roky matematiku a ve své disciplině matematiku aplikuje (převážně Fourierovy řady). Lze proto jeho názor pokládat za významný.

V ústavě aplikované matematiky Maďarské akademie věd jsem zevrubně prohlédl vybavení nomografického oddělení a seznámil jsem se s metodikou i technikou jeho práce. Nomografické oddělení převážně spolupracuje s výzkumnými ústavy, výrobou, ale i s ministerstvy a technickými časopisy. Zpracovává pro ně nomogramy. Postup práce je schematicky asi tento: Zájemce požádá ústav aplikované matematiky o nomografické řešení určitého problému. Po uvážení vedoucím ústavu, zda je problém vhodný pro práci oddělení, je v příznivém případě předán vedoucímu oddělení. Vedoucí řeší problém „zásadně“, nikoliv do podrobností. V tomto stadiu práce jsou obvykle nesnáze typické pro práci nomografa. Vztahy, které jsou předloženy výzkumníky, jsou sestaveny neúplně. Intervaly proměnných jsou někdy zadány tak, že funkční hodnoty nejsou ve všech bodech intervalů definovány nebo vzrůstají nade všechny meze. V takovém případě je třeba se dorozumívat se zadavatelem a seznámit se detailněji s významem vztahů. Často se stává, že nomografik navrhne zájemci jednodušší vztahy, které problém řeší a které nadto jsou schopné nomografického zobrazení. Návrh schopný zobrazení (po zmíněné diskusi) se navrhne nyní podrobněji, ale stále jen orientačně. Takto zpracovaný návrh se zašle zájemci, zdali mu nákres bude vyhovovat. Vysloví-li zájemce souhlas, začne se s technickým zpracováním nomogramu. Do této chvíle je práce Akademie pro zájemce bezplatná. Numerické výpočty provádějí podle direktiv oddělení studenti (pochopitelně za honorář). Kreslířskou práci provede nomografické oddělení samo. Je k tomu vybaveno dvěma velkými koordinátografy a reprodukční laboratoří. Nákresy se rýsují na skleněnou desku pokrytou emulsí. Měl jsem možnost shlédnout přípravu emulse a její nanesení na desku. Také celý reprodukční postup jsem mohl sledovat ve všech jeho stadiích.

Na závěr svého pobytu jsem přednesl v Ústavě aplikované matematiky přednášku o vývojových etapách v nomografii. Konečně připojuji, že přijetí na všech vědeckých a školských pracovištích maďarskými profesory i vědeckými pracovníky bylo naprosto srdečné, kolegiální a otevřené.

V. Pleskot, Praha.

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

V matematické obci pražské pokračovaly opět od začátku studijního roku 1955/56 pravidelné pondělní přednášky a diskuse (od 17 hod. 15 min.).

Konaly se tyto přednášky a diskuse:

3. 10. 1955: *Jan Mařík*, O plošném integrálu (viz referát na str. 79).
10. 10. 1955: *Wladysław Orlicz*, O Saksových prostorech (I. část).
13. 10. 1955: *Gheorghe Vrănceanu*, Sur les propriétés intrinsèques des espaces non-holonomes.
17. 10. 1955: *Wł. Orlicz*, O Saksových prostorech (II. část).
24. 10. 1955: *J. Korous*, O některých třídách orthogonálních polynomů.
14. 11. 1955: *Vl. Dlab*, O endomorfismech Abelových grup.
21. 11. 1955: *B. König*, Nová methoda výpočtu součtu řad.
5. 12. 1955: *L. Rieger*, Poznámky k operátorovému počtu Mikušińského.
7. 12. 1955: *Fr. Zítek*, Mediánové odhady.
12. 12. 1955: *F. V. Atkinson*, O asymptotických vlastnostech integrálů obyčejných diferenciálních rovnic.

Redakce.

OBHAJOBY DISERTAČNÍCH PRACÍ KANDIDÁTŮ MATEMATICKÝCH VĚD

Při Matematickém ústavu ČSAV úspěšně obhájili dne 19. prosince 1955 disertační práce tito kandidáti matematických věd:

Dr *Václav Alda* práci „Isometrické transformace soustavy nadploch",

dr *Zbyněk Nádeník* práci „Plochy analogické k Bertrandovým křivkám",

dr *Jaroslav Hájek* práci „Příspěvky k theorii statistického odhadu",

dr *Karel Winkelbauer* práci „Momenty pro součty náhodného počtu náhodných sčítanců",

Miroslav Sova práci „O integraci abstraktních funkcí".

Redakce.

ČTVRTÁ ČESKOSLOVENSKÁ MATEMATICKÁ OLYMPIADA

V minulém školním roce se už po čtvrté konala na našich středních školách celostátní matematická soutěž — matematická olympiada. O organisaci soutěže jsme psali v tomto časopise, roč. 79, čís. 3, str. 295 v souvislosti s třetím ročníkem. Čtvrtý ročník probíhal podle stejných zásad jako třetí.

Vyvrcholením soutěže je každoročně *třetí kolo*, které se tentokrát konalo v sobotu 14. května 1955 dopoledne v matematickém ústavě Karlovy university, Praha II, Ke Karlovu 3. Účastnilo se ho osmdesát vybraných řešitelů z celé republiky. Týž den odpoledne byla v matematickém ústavě uspořádána tradiční *beseda* s řešiteli i se všemi zájemci o školskou matematiku. Besedy se účastnil i ministr školství dr FRANTIŠEK KAHUDA a řada našich vynikajících matematiků. Ještě během besedy mohl předseda Ústředního výboru matematické olympiady akademik JOSEF NOVÁK oznámit jména dvou vítězů třetího kola. Tak zasedli za předsednickým stolem žáci J. JAKEŠ z Brna a E. LOSERT z Opavy a byli odměněni zaslouženým potleskem. Večer navštívili řešitelé III. kola společně divadelní představení.

Matematická olympiada vzbuzuje rok od roku větší zájem u stále širšího okruhu našich studentů a přispívá zajisté ke zlepšení vyučovacích výsledků v matematice. Soutěž se stala populární nejen mezi žáky a školskými pracovníky, ale i v širší veřejnosti. Byla předmětem diskuse i na IV. sjezdu československých matematiků v září 1955 v Praze (5. sekce sjezdu, věnovaná školské matematice). Úlohy, které sestavuje Ústřední výbor matematické olympiady, jsou voleny tak, aby navazovaly na učebnice, a od řešitelů se žádá vždy podrobná diskuse úloh. Jsou však zařazovány i problémy, které nevyžadují vlastně žádných školských znalostí, ale kladou jen nároky na logický úsudek. Řešitelé jsou tak vedeni k samostatné práci, a to jistě trvale upoutá jejich zájem o matematiku. Někteří žáci se účastní soutěže už po několikáté a je pochopitelné, že se pak umisťují na předních místech. Tak na př. vítěz IV. ročníku J. Jakeš se umístil už v předcházejícím ročníku (tehdy jako žák X. třídy) ve třetím kole na 14. místě a E. Loserta z Opavy už známe jako vítěze krajského druhého kola (kategorie B) ze školního roku 1953/54.

S úrovní všech řešitelů nemůžeme být ovšem zcela spokojeni. Byly odevzdány i práce s hrubými chybami a zvláště důkazy v geometrii dělají stále potíže.

Připojujeme seznam vítězů loňského ročníku (t. j. prvních dvaceti úspěšných řešitelů III. kola), kteří byli odměněni cenou ministerstva školství. Jsou to žáci XI. tříd jedenáctiletek (pokud není jinak výslovně uvedeno). Adresy znamenají sídlo školy:

1. *Jaromír Jakeš*, Brno-Královo Pole,
2. *Ehrfried Losert*, Opava,
3. *Petr Popov*, Ostrava I,
4. *Tomáš Zemčík*, 3b průmyslové školy chemické, Brno-Husovice,
5. *Tadeáš Kornuta*, polská jedenáctiletka, Český Těšín,
6. *Břetislav Novák*, Chrudim (žák X. třídy),
7. *Zdeněk Bažant*, Praha 6, Bílá 1,
8. *Vladimír Kohout*, Kralupy n. Vlt.,
9. *Bedřich Hejda*, Praha XII, Londýnská 34,
10. *Leo Boček*, Litoměřice,
11. *Bedřich Velický*, Praha 4, Nad Kavalírkou 100,
12. *Aleš Pultr*, Praha 6, Bílá ul. 1 (žák X. třídy),
13. *František Neuman*, Brno-Husovice, Elgartova 3,
14. *Jaromír Janko*, Praha II, Štěpánská 22,
15. *Karel Hruška*, Liberec - Horní Růžodol,
16. *Václav Vaněček*, Praha 14, Křesomyslova 2,

17. *Jiří Soukup*, Praha II, Štěpánská 22,
18. *Josef Křesťan*, Karlovy Vary,
19. *Jan Hrubeš*, Olomouc,
20. *Miloslav Smrž*, Třebíč.

Závěrem žádáme čtenáře, kteří mají vztah ke školské matematice, aby napsali své připomínky k soutěži na adresu Ústředního výboru matematické olympiady, Praha II, Žitná 25.

J. Sedláček, Praha.

NOVÝ ČESKOSLOVENSKÝ MATEMATICKÝ ČASOPIS

Z rozhodnutí presidia Československé akademie věd a její sekce matematicko-fysikální a technické začíná Matematický ústav ČSAV vydávat od roku 1956 časopis *Aplikace matematiky*.

Speciální časopis pro matematické aplikace vydávají dnes všechny průmyslovější státy. Nehledě k velmocem je to na př. v Evropě Polsko, NDR, Švýcarsko, Rakousko a j. Vydávání časopisu Aplikace matematiky odstraní velmi citelný nedostatek v naší dosavadní časopisecké literatuře matematické.

Hlavními úkoly nového časopisu bude přispívat k rozvoji matematických aplikací a matematických disciplin, které jsou základem těchto aplikací, a přispět k tomu, aby mocné prostředky a metody moderní matematiky se staly běžnými metodami při řešení problémů techniky a přírodních věd.

Aplikace matematiky budou vycházet šestkrát ročně po 80 stránkách ve formátu jako Časopis pro pěstování matematiky. Cena jednotlivého čísla je Kčs 7,—, roční předplatné Kčs 42,—. Objednávky zasílejte na Nakladatelství ČSAV, Tiskový odbor, Praha II, Jánská ul.

I. Babuška, Praha.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SLOVENSKEJ AKADÉMIE VIED

V prvom čísle piateho ročníku Matematicko-fyzikálneho časopisu vydávaneho Slovenskou akadémiou vied v Bratislave sú nasledovné články: *Havel V.*, Poznámka o zobecnění direktního součinu částečně uspořádaných množin. — *Šulka R.*, Topologické grupoidy. — *Garaj J.*, Príspevok ku výstavbe vektorovej algebry v Minkowského štvorrozmernom časopriestore. — *Ochabová P.*, Geomagnetická aktivita v Hurbanove za roky 1951—1953.

V druhom čísle piateho ročníka prináša tento časopis tieto matematické a fyzikálne články: *Greguš M.*, O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice homogénnej tretieho rádu. — *Schwarz Š.*, Poznámka k teórii bikompaktných pologrúp. — *Havel V.*, Poznámka o jednoznačnosti direktních rozkladů prvků v modulárních svazech konečné délky. — *Šalát T.*, Poznámky k Riemannovej vete o divergentných radoch. — *Kotzig A.*, Príspevok k teórii eulerovských polyédrov. — *Garaj J.*, O používaní imaginárnych súradníc v geometrii Minkowského štvorrozmerného časopriestoru. — *Krempaský J.*, Tenzor deformácie priestoru a času pohybom. Na konci tohto čísla je zpráva o príprave konferencie československých fyzikov, ktorá sa má konať v dňoch 19. až 22. septembra v Domove vedeckých pracovníkov v Smoleniciach.

L. Mišík, Bratislava.

SDĚLENÍ ČLENŮM JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

Ministerstvo vnitra schválilo konečně dne 30. IX. 1955 nové stanovy Jednoty československých matematiků a fysiků, o nichž členové byli informováni v oběžníku, který jim byl zaslán. Výtisky nových stanov budou všem členům rozeslány v lednu 1956.

Činnost JČMF bude se nyní rozvíjet v duchu těchto stanov. Připravuje se proto valná schůze na únor 1956, která zhodnotí dosavadní činnost a zvolí nové vedení JČMF. Proto byla ustavena návrhová komise, která připravuje osobní návrhy pro volby do nového výboru. Eventuální podněty z řad členů zaslané na adresu JČMF, Praha II, Žitná 25, budou vítány.

V matematické obci pražské budou konány vědecké přednášky společně s Matematickým ústavem ČSAV a jedná se o uskutečnění metodických přednášek v KPS v Praze a Liberci. Fysikální sekce JČMF rovněž plánuje na jaro 1956 několik přednášek vědeckých, methodických a populárně vědeckých.

Brněnská pobočka koná pravidelně své přednášky matematické a fysikální a mimo to pořádá diskuse o pracích brněnských matematiků.

Nově byla zřízena pobočka v Plzni, kde se také plánuje přednášková činnost v metodice matematiky. Ustavující schůze se konala 6. února 1956.

Péčí JČMF budou od r. 1956 vycházet *Rozhledy matematicko-přírodovědecké* v SPN (Státní pedagogické nakladatelství). Redakční práce zajistila JČMF tím, že někteří její členové v čele s doc. dr M. Menšíkem ochotně se ujali tohoto úkolu. Tito členové budou i dále redakční práce provádět. Časopis má zvýšit zájem o matematiku, deskriptivní geometrii, fysiku a astronomii u žáků osmé až jedenácté třídy středních škol.

JČMF bude dále vydávat s podporou ministerstva školství v SPN časopis *Pokroky matematiky, fysiky a astronomie*, který vznikne od r. 1956 z dosavadního časopisu *Sovětská věda — matematika, fysika, astronomie*. Redakce dosavadní Sovětské vědy ochotně se ujímá úkolu převést časopis postupně v tribunu elementární matematiky a oborů, které s ní souvisí, a obdobně tak učinit u fysiky a astronomie. Časopis bude přinášet články referující o dnešním stavu různých odvětví matematiky, fysiky a astronomie u nás a v ostatním světě, zvláště v lidových demokraciích a v SSSR psané tak, aby byly přístupné širší veřejnosti, dále původní práce z elementární matematiky, kratší sdělení, recense, referáty a zprávy z vědeckého života, zejména z činnosti JČMF.

Jedná se o to, aby členská cena tohoto časopisu byla přístupná všem členům JČMF, aby tak časopis mohl být odbírán všemi členy a prospíval všem.

Je škoda, že oba časopisy budou redigovány a vydávány v Praze a že brněnští soudruzi nemohli přijmout úkoly redakce Rozhledů. Organisační práce souvisící s redakcí byly by pak lépe rozděleny.

Administrativní práce v JČMF jsou dosud konány v soukromém bytě, ale je naděje, že už v nejbližší době bude JČMF mít vlastní místnosti pro administrativní práce a pro archiv v bývalém svém domě v Praze II, Žitná 25. Dopisy adresované JČMF v Praze II, Žitná 25 docházejí nyní Matematickému ústavu ČSAV, který ochotně je přebírá a předává předsednictvu JČMF. Upozorňujeme na tuto okolnost členy JČMF, aby zbytečně kancelář JČMF v Praze II, Žitná 25 zatím nehledali.

Na konec žádáme členy, aby urychleně vyplnili a odevzdali evidenční lístky; komu evidenční lístek dosud nedošel, nechť se písemně s udáním své adresy přihlásí. Jedině tak bude možno pozvat členy k valné schůzi, zaslat jim stanovy a případná jiná sdělení výboru JČMF. Potom si také budou moci členové JČMF vypůjčovat knihy z knihovny MÚ ČSAV, která vznikla z knihovny JČMF.

F. Vyčichlo, Praha.

CELOSTÁTNÍ KONFERENCE O APLIKACÍCH MATEMATIKY

MÚČSAV uspořádá ve dnech 15.—18. května 1956 v Domě vědy a techniky Praha I, Jánská 100(SIA) celostátní konferenci o aplikacích matematiky.

Na této konferenci se účastníci seznámí s novějšími výsledky v oboru matematických aplikací na theoreticko-technických pracovištích a s celkovou problematikou v tomto oboru. Na konferenci budou prodiskutovány nejdůležitější směry další práce a formy spolupráce jednotlivých pracovišť.

Prosíme proto ty, kteří se chtějí konference zúčastnit, aby zaslali přihlášky s přesným uvedením své adresy a pracoviště na adresu: Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha II, a to nejpozději do 25. IV. 1956. Na obálku napište poznámku „Konference“.

Chcete-li na konferenci referovat o některém problému svého oboru, domluvte se laskavě přímo s přípravným výborem konference MÚ ČSAV.

Za přípravný výbor konference *Z. Groschaftová*, Praha.

KONKURS

Rektor vysoké školy železniční vypisuje konkurs na místo *profesora nebo docenta z oboru technické fysiky* na elektrotechnické fakultě.

Obecné podmínky a vyžadovaná kvalifikace jsou uveřejněny ve Věstníku ministerstva školství z roku 1955, č. 1, str. 1.

Žádosti podejte rektorátu VŠŽ, Praha X, Sokolovská 83 do 14 dnů ode dne uveřejnění tohoto konkursu. Informace Vám podá elektrotechnická fakulta VŠŽ Praha X, Sokolovská 83.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, **Vodičkova, 40,** telefon **246241-8** — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. **Objednávky přijímá Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II. Vodičkova 40. Účet Státní banky československé č. 438-214-0087, číslo směrovací 0152-1. Snížený poplatek povolen výměrem 313-378-Be-55.** Dohlédací poštovní úřad Praha 022. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — **Vyšlo dne 1. IV. 1956 — A-03262.**