Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

# POZNÁMKA K ČLÁNKU „O JISTÝCH POSLOUPNOSTECH SKUPIN BODŮ NA KRUŽNICI"

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Došlo dne 21. září 1955.)

DT: 513.21
517.1

L. Kosmák v práci, zmíněné v nadpise[1]), dokazuje ve větě 2 tvrzení, které lze zformulovat takto: *Je-li posloupnost n-tic reálných čísel* $[a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)}]$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *tvořena pomocí rekurentního vztahu*

$$a_k^{(\nu+1)} = (1-b)\, a_k^{(\nu)} + b a_{k+1}^{(\nu)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

*kde*

$$0 < b < 1$$

*a*

$$a_{n+1}^{(\nu)} = a_1^{(\nu)},$$

*pak*

$$\lim_{\nu\to\infty} a_k^{(\nu)} = \bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Dokažme toto tvrzení pomocí několika jednoduchých nerovností. Zřejmě stačí najít konstantu $\lambda$, $0 < \lambda < 1$, takovou, že

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu+1)} - \bar{a})^2 \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Označme symbolem $\sum\limits_0$ cyklický součet a napišme následující dvě identity, z nichž první je důsledkem rovnic (1) a druhá je evidentní:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu+1)} - \bar{a})^2 = ((1-b)^2 + b^2) \sum_{i=1}^{n} (a^{(\nu)} - \bar{a})^2 + \\ + 2(1-b)\, b \sum_0 (a_i^{(\nu)} - \bar{a})(a_{i+1}^{(\nu)} - \bar{a}), \tag{4}$$

$$\sum_0 (a_i^{(\nu)} - a_{i+1}^{(\nu)})^2 = 2\Big[\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2 - \sum_0 (a_i^{(\nu)} - \bar{a})(a_{i+1}^{(\nu)} - \bar{a})\Big]. \tag{5}$$

Dále, pro každé $\nu = 1, 2, \ldots$ platí $\bar{a} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{(\nu)}$ a tedy

$$(a_k^{(\nu)} - \bar{a})^2 \leq (\sum_0 |a^{(\nu)} - a_{i+1}^{(\nu)}|)^2 \leq n \sum_0 (a_i^{(\nu)} - a_{i+1}^{(\nu)})^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

---

[1]) Viz Časopis pro pěstování matematiky, *80* (1955), 299—309.

takže

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2 \leqq n^2 \sum_0 (a_i^{(\nu)} - a_{i+1}^{(\nu)})^2 \,. \tag{6}$$

Nerovnost (6) ye spojení s identitou (5) dává

$$\sum_0 (a_i^{(\nu)} - \bar{a})\,(a_{i+1}^{(\nu)} - \bar{a}) \leqq \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2 \,,$$

odkud v souhlase s (4) dostáváme potřebnou nerovnost (3) ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu+1)} - \bar{a})^2 \leqq \left[1 - \frac{b(1-b)}{n^2}\right] \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(\nu)} - \bar{a})^2 \,, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Ještě bych chtěl upozornit na možnost teoreticko-pravděpodobnostní formulace problému: *Považujeme-li čísla* $[a_1^{(\nu)}, \ldots a_n^{(\nu)}]$ *za pravděpodobnosti stavů* $1, 2, \ldots, n$ *v časových okamžicích* $\nu = 1, 2, \ldots,$ *pak rekurentními vztahy* (1) *je definován Markovův řetězec s maticí přechodu*

$$\left\| \begin{matrix} 1-b & b & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1-b & b \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1-b \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b & & 0 \;\; 0 \ldots 1-b \end{matrix} \right\| \,. \tag{7}$$

*a rovnice* (2) *vyplývá ze známé ergodické věty a z cykličnosti matice.*

Lze tedy k jejímu důkazu použít kterékoliv z metod užívaných v teorii Markovových řetězců. Metoda užitá L. Kosmákem je totožná s metodou založenou na přímém výpočtu pomocí Perronovy formule[2]). Vskutku, čísla $1 - b + b\omega^m$ užitá ve vzorci (7) práce L. Kosmáka, nejsou ničím jiným než charakteristickými čísly matice (7).

[2]) Teorii Markovových řetězů viz na př. v knize *T. A. Sarymsakov* „Osnovy těorii processov Markova" 1954. Perronova formule je uvedena na str. 46 a příslušná ergodická věta na str. 49.