Теорема 1. *Всякий класс э. алгебр обладает свойствами* (**N**) и (**A'**).

Теорема 2. *Всякую частичную алгебру класса э. алгебр* $\mathfrak{A}$ *можно погрузить в алгебру класса* $\mathfrak{A}$.

Следствие: для любого кардинального числа α существует в классе $\mathfrak{A}$ алгебра S, кардинальное число которой $\geqq \alpha$.

Набросок доказательства теоремы 1. В классе э. алгебр $\mathfrak{A}$ выберем алгебру S, в которой находятся по крайней мере три элемента. Пусть S' — множество всех функций $h(n)$, которые орпеделены на множестве $N = \{0, 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots\}$ и функциональные значения которых принадлежат S. На S' определим операции $f_i \in A$ уравнением

$$f_i(h_1, \ldots, h_m)(n) = f_i(h_1(n+1), \ldots, h_m(n+1)) .$$

Тогда S' есть алгебра класса $\mathfrak{A}$. Пусть $h_1 \in S'$. Возьмем произвольное число $n_0 \in N$ и найдем h_2, $h_3 \in S'$ так, чтобы 1. элементы $h_i(n_0)$, $i = 1, 2, 3$ были взаимно различными, 2. для $n < n_0$ $h_1(n) = h_2(n) = h_3(n)$. Для h, $h' \in S'$ положим $h\ R_1\ h'$ ($h\ R_2\ h'$) тогда и только тогда, если 1. для $n < n_0$ будет $h(n) = h'(n)$, 2. элементы $h(n_0)$, $h'(n_0)$ либо равны между собой, либо один из них равен $h_1(n_0)$ ($h_2(n_0)$), а второй — $h_3(n_0)$. Очевидно, R_1, R_2 являются отношениями конгруэнтности на S', и выполняется условие, высказанное в свойстве (**N**). Для доказательства того, что имеет место свойство (**A**), достаточно рассмотреть отношение конгруэнтности R_3, в котором $h\ R_3\ h'$ тогда и только тогда, если для $n < n_0$ $h(n) = h'(n)$, и сравнить его с отношением конгруэнтности R_1.

Теорема 1. является обобщением результата Г. Тревисана [7], который решил частично проблему Биркгоффа ([1], проблема 31). Построение, примененное в доказательстве теоремы 1 основательно проще и короче построения Тревисана. Что касается тоеремы 2, то ход доказательства здесь совпадает с ходом доказательства теоремы 1 в работе [9].

Наконец, на простых примерах показана несправедливость одного утверждения Г. Биркгоффа об отношениях конгруэнтности на алгебрах с одинарными операциями ([1], стр. 131, упражнение 3).

Summary

ON THE EXISTENCE ALGEBRAS

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Received January 29, 1955.)

The concepts algebra, congruence relation on an algebra, primitive class of algebras, operation, and polynomial are used in the sense of [1] and [2].

Let $\mathfrak{A}$ be the class of all algebras with the following properties:

1. in each algebra S of the class $\mathfrak{A}$ the fundamental operations $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $f_i \in A$ are defined; for different i the numbers n need not be equal, $n = n(i)$, the set of all $n(i)$ is bounded and there exists $f_{i_0} \in A$ such that $n(i_0) \geqq 2$.

2. there is given a set of polynomials $g_j(z, z_1, \ldots, z_n)$, $g_j \in B$ constructed by means of the fundamental operations $f_i \in A$ such that for $g \in B$ each algebra S of the class $\mathfrak{A}$ and every finite sequences $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$ there exists a uniquely determined element $x \in S$ which satisfies the equation $g(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$. We say that $\mathfrak{A}$ is a class of existence algebras.

Let $\mathfrak{A}$ be a class of existence algebras. If on the set S for some (not necessarily all) finite sequences $x_1, \ldots, x_n \in S$ the operations $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $f_i \in A$ are defined such that the equation $g_j(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ has (for fixed $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$) not more than one solution $x \in S$, S is a partial algebra of the class $\mathfrak{A}$.

A class of algebras $\mathfrak{A}$ has the property (**N**) (strong non-permutability) if there exists an algebra S in $\mathfrak{A}$ such that for each $x \in S$ there exist congruence relations R, R' on S and an infinity of pairs of elements $y, z \in S$ for which $x\, R\, y\, R'\, z$ and there does not exist $u \in S$ with the property $x\, R'\, u\, R\, y$.

A class of algebras $\mathfrak{A}$ has the property (**A**), if congruence relations R on each algebra S of the class $\mathfrak{A}$ are uniquely determined by each class of S/R. A class $\mathfrak{A}$ has the property (**A'**), if it has not the property (**A**).

Theorem 1. *Every class of existence algebras has the properties* (**N**) *and* (**A'**).

Theorem 2. *Each partial algebra of the class $\mathfrak{A}$ of existence algebras can be imbedded in an algebra of the class $\mathfrak{A}$.*

Corollary: if α is a cardinal number and $\mathfrak{A}$ a class of existence algebras, there exists in $\mathfrak{A}$ an algebra S the cardial number of which is $\geqq \alpha$.

Sketch of proof of theorem 1. Let $\mathfrak{A}$ be a class of existence algebras. Let S be an algebra with more than two elements which is contained in $\mathfrak{A}$. Let S' be the set of all functions $h(n)$, where $n = 0, 1, 2, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$ and $h(n) \in S$. For $f_i \in A$, $h_j \in S'$ we define $f_i(h_1, \ldots, h_m)(n) = f_i(h_1(n+1), \ldots, h_m(n+1))$. Then, S' is an algebra of the class $\mathfrak{A}$. Let h_1 be a fixed (but arbitrary) element of S', n_0 a fixed (but arbitrary) integer. We find $h_2, h_3 \in S'$ such that 1. no two of the elements $h_1(n_0), h_2(n_0), h_3(n_0)$ are equal, 2. $n < n_0 \Rightarrow h_1(n_0) = h_2(n_0) = h_3(n_0)$. For $h, h' \in S'$ we put $h\, R_1\, h'$ ($h\, R_2\, h'$) if 1. the elements $h(n_0)$, $h'(n_0)$ are equal or one of them is equal to $h_1(n_0)$ ($h_2(n_0)$) and the second is equal to $h_3(n_0)$ 2. $n < n_0 \Rightarrow h(n) = h'(n)$. Clearly, R_1, R_2 are congruence relations on S' and R_1, R_2 are not permutable. This proves the property (**N**). To prove the property (**A'**) it is sufficient to consider the congruence relation R_3 on S' in which $h\, R_3\, h'$ if and only if $n < n_0 \Rightarrow h(n) = h'(n)$ and to relate it with the congruence relation R_1.

Theorem 1 is a generalization of a theorem of G. TREVISIAN ([7]) solving a problem of G. BIRKHOFF ([1], problem 31), his construction being rather complicated. The proof of theorem 2 does not differ from the method used in [9].

Finally, it is proved by simple examples that a statement contained in [1] (p. 87, exercise 3) on algebras with unary operations is not true.