Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

O EXISTENČNÝCH ALGEBRÁCH

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Došlo dne 29. ledna 1955.) DT: 512.9

Odsek 1 (doplnený na návrh recenzenta) má úvodný charakter. Jeho cieľom je oboznámiť čitateľa s pojmami ďalej užívanými (z ktorých nový je len pojem existenčnej algebry) a stručne informovať o význame doplňkovitosti relácií kongruentnosti. V odseku 2 sa dokazuje, že každá trieda existenčných algebier obsahuje algebru, ktorej relácie kongruentnosti sú nie doplňkové. V 3. odseku je dokázaná nesprávnosť istého tvrdenia G. Birkhoffa o algebrách s jednoprvkovými operáciami.

1

V abstraktnej algebre sa vyšetrujú množiny, na ktorých sú definované určité operácie. Za podstatne dôležité pritom nepovažujeme vlastnosti prvkov týchto množín, ale vlastnosti operácií. Zovšeobecnením známych pojmov grupy, okruhu, telesa a pod. dochádzame k obecnému pojmu algebry (viď [1], [2]):

Nech je daná množina A a množina operácií $F = \{f_\alpha\}$, pre ktoré platí: ku každej operácii $f_\alpha \in F$ existuje prirodzené číslo $n = n(\alpha)$ tak, že operácia f_α priradzuje každej postupnosti $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ($x_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$) určitý prvok $x = f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ z množiny A. Množina A s danou množinou operácií sa nazýva algebra.

Operácie $f_\alpha \in F$ nazývame základnými operáciami; bez ujmy všeobecnosti môžeme predpokladať, že v množine operácií F sa nachádza tiež operácia f_{α_1}, pre ktorú $n(\alpha_1) = 1$ a pre každé $x \in A$ platí $f_{\alpha_1}(x) = x$. Základné operácie nazývame tiež polynomami 1. stupňa. Indukciou definujeme polynomy n-tého stupňa ako výrazy tvaru $f_\alpha(u_1, \ldots, u_n)$, kde $f_\alpha \in F$ a $u_1, \ldots, u_n$ sú polynomy najviac $n - 1$ stupňa. Význam výrazu „funkčná hodnota polynomu" a „polynom o n premenných" je zrejmý. Ak g, h sú polynomy o n premenných, a ak pre každú postupnosť $\{x_1, \ldots, x_n\}$ prvkov z A platí $g(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n)$, hovoríne, že polynomy g, h sú si identicky rovné a píšeme $g \equiv h$.

Primitívnou triedou algebier nazývame triedu všetkých algebier, pre ktoré platí: 1. množina operácií $F = \{f_i\}$ je pre každú algebru tejto triedy tá istá, 2. je daná *množina dvojíc polynomov G tak, že pre každú dvojicu polynomov* $(g_i^1, g_i^2) \in G$ *a pre každú algebru tejto triedy platí* $g_i^1 \equiv g_i^2$.

Mnohé vety, ktoré boli pôvodné známe pre niektoré špeciálne triedy algebier (napr. pre grupy), sa dajú zovšeobecniť na obecné algebry. Pri zovšeobecnení vynikne podstata vety, ukáže sa logický dosah potrebných predpokladov a „odfiltrujú" sa vlastnosti špeciálneho typu algebry, ktoré na platnosť vety nemajú vplyv. Typickým príkladom takéhoto postupu sú vety Jordan-Hölderova a Schreierova (viď napr. [3]), dokázané pôvodne pre grupy, z ktorých temer bezprostredne vyplýva komplex ďalších dôležitých viet. Rad závažných prác bol venovaný postupnému zovšeobecňovaniu Jordan-Hölderovej vety (výčet týchto prác je uvedený v knihe [1], str. 89 (angl. vydanie); na príslušnom mieste ruského prekladu pripomína prekladateľ, že v poslednom čase vyšlo viac nových prác o zovšeobecnení vety Jordana-Höldera a uvádza tri najdôležitejšie z nich).[1])

Pri zovšeobecnení vety Jordana-Höldera naobecné algebry je podstatný predpoklad o doplňkovosti relácií kongruentnosti. Tento pojem je definovaný nasledovne:

Relácia kongruentnosti na algebre A je ekvivalencia[2]) $x\ R\ y$ *taká, že pre každé* $f_\alpha \in F$ *zo vzťahov* $x_i\ R\ y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *vyplýva* $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\ R\ f_\alpha(y_1, \ldots, y_n)$. *(Hovoríme tiež, že relácia R je súhlasná so všetkými operáciami* $f_\alpha \in F$.*) Relácie kongruentnosti (resp. ekvivalencie) R, R' na algebre A sú doplňkové, ak pre každú trojicu* $x, y, z \in A$ *zo vzťahov* $x\ R\ y$, $y\ R'\ z$ *vyplýva existencia prvku u, pre ktorý platí* $x\ R'\ u$, $u\ R\ z$.

Podľa G. Birkhoffa dôležitosť doplňkových relácií kongruentnosti prvýkrát výslovne zdôraznili P. Dubreil a M. Dubreil-Jacotin (viď [4]). Z predpokladu doplňkovosti relácií kongruentnosti vyplývajú okrem spomínaných viet typu Jordana-Höldera aj vety o rozkladoch obecnej algebry na priamy súčin a polopriamy súčin, umožňujúce za určitých predpokladov skúmať štruktúru algebier a spôsob, akým sú tieto algebry zostrojené pomocou algebier s jednoduchšími vlastnosťami. O. Borůvka a O. Ore podrobne vyšetrili vlastnosti doplňkových ekvivalencií; ukázalo sa, že tento pojem patrí medzi základné pojmy v teorii rozkladov množín (viď [5], str. 10—19, [6], str. 590).

Z predošlého vyplýva, že má význam položiť si otázku: Za akých predpokladov sú všetky relácie kongruentnosti na algebrách určitej triedy navzájom doplňkové? V nedávno vyšlej práci [2] A. I. Malcev úplne vyriešil túto otázku pre primitívne triedy algebier. Odvodil nutnú a postačujúcu podmienku, ktorú musí splňovať primitívna trieda, aby každá algebra tejto triedy mala všetky relácie kongruentnosti navzájom doplňkové.

---

[1]) Vo februárovom čísle Mathematical Reviews (1955) sa recenzujú tiež dve práce o zovšeobecnení Jordan-Hölderovej vety.

[2]) Ekvivalencia je binárna relácia R, splňujúca podmienky 1. $x\ R\ x$ pre každé $x \in A$, 2. $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$, 3. $x\ R\ y$, $y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$.

Sú známe mnohé dôležité triedy algebier, ktoré sú nie primitívnymi triedami. Majú totiž okrem vlastností, ktoré možno popísať pomocou identít, aj vlastnosti iného charakteru. Najdôležitejšie vlastnosti iného druhu sú tieto:

1. *Existenčné vlastnosti. Ak $g(z, z_1, \ldots, z_n)$ je pevne zvolený polynom o $n + 1$ premenných v triede $\mathfrak{A}$, môžeme vysloviť nasledovnú vlastnosť, žiadanú od triedy $\mathfrak{A}$: ak S je ľubovolná algebra triedy $\mathfrak{A}$ a ak $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sú ľubovoľné prvky z algebry S, existuje v algebre S jediný prvok x, vyhovujúci rovnici $g(x, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) = x_{n+1}$.* (I)

2. *Relácie. Na algebrách triedy $\mathfrak{A}$ môžu byť definované isté relácie, súvisiace s algebraickými operáciami tejto triedy.*

Bolo by zaujímavé uvážiť, do akej miery a akým spôsobom sa dajú Maľcevove výsledky rozšíriť aj na algebry, majúce vlastnosti všetkých spomenutých druhov. Zdá sa účelným vyšetrovať najprv niektorý zo špeciálnych prípadov, v istom zmysle opačných k pojmu primitívnej triedy: ,,existenčné algebry" (v ktorých nepredpokladáme žiadne identity, len existenčné vlastnosti), alebo ,,algebry s reláciami" (bez existenčných vlastností a bez identít, týkajúcich sa samotných algebraických operácií).

V tejto poznámke sa vyšetruje doplňkovosť relácií kongruentnosti pre triedy existenčných algebier. Dokážeme, že výsledky sú v určitom zmysle negatívne: existenčné vlastnosti samy o sebe (bez ich kombinácie s vlastnosťami iného druhu) nemajú žiadny vplyv na doplňkovosť relácií kongruentnosti. Zdá se zaujímavým, že v súhre s vlastnosťami, definovanými pomocou identít, takýto vplyv môžu mať; nech $\mathfrak{A}$ je trieda primitívnych algebier, z ktorých nie všetky majú relácie kongruentnosti doplňkové. Nech $\mathfrak{A}_1$ je trieda všetkých algebier, ktoré patria do triedy $\mathfrak{A}$ a ktoré okrem toho splňujú určité existenčné vlastnosti. Môže sa stať, že všetky algebry triedy $\mathfrak{A}_1$ majú relácie kongruentnosti doplňkové (viď príklad v poznámkach za definíciou 2).

Ak každá algebra S triedy $\mathfrak{A}$ má jediný prvok, potom vyšetrovanie doplňkovosti relácií kongruentnosti na algebrách triedy $\mathfrak{A}$ je triviálne. V ďalšom budeme predpokladať, že aspoň jedna algebra uvažovanej triedy algebier má viac ako jeden prvok. (Z nižšie uvedenej vety 2 vyplýva, že pre triedy existenčných algebier takýto predpoklad nemusíme vyslovovať: pre ľubovoľnú triedu existenčných algebier $\mathfrak{A}$ a ľubovoľné kardinálne číslo α existuje taká algebra S patriaca do triedy $\mathfrak{A}$, že kardinálne číslo množiny S je väčšie ako α.)

Pripomeňme nakoniec definíciu priameho súčinu dvoch algebier a faktorovej algebry vzhľadom k určitej relácii kongruentnosti:

Nech A, B sú algebry triedy $\mathfrak{A}$ s množinou operácií F. Nech C je množina všetkých dvojíc (a, b), $a \in A$, $b \in B$. Pre $f \in F$ definujeme

$$f((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = (f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) .$$

Tým je na množine C definovaná určitá algebra s množinou operácií F; označujeme ju $A \times B$ a nazývame priamym súčinom algebier A, B.

Nech R je relácia kongruentnosti na algebre A s množinou operácií F. Ak $x \in A$, označme $\bar{x}$ množinu všetkých prvkov $x' \in A$, pre ktoré platí $x' R x$. Systém všetkých množín $\bar{x}$ označme $\bar{A}$. Pre $f \in F$ definujeme $f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{y}$. Množinu $\bar{A}$ s takto definovanými operáciami $f \in F$ nazývame faktorovou algebrou na A vytvorenou reláciou kongruentnosti R a označujeme A/R.

2

Definícia 1. *Nech $\mathfrak{A}$ je (neprázdna) trieda všetkých algebier, ktoré majú nasledujúce vlastnosti: 1. v každej algebre triedy $\mathfrak{A}$ sú definované základné operácie $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $f_i \in A$; pre rôzne operácie f_i môžu byť príslušné čísla n rôzne, $n = n(i)$, množina $\{n(i)\}$ je ohraničená a existuje aspoň jedna operácia $f_{i_0} \in A$, pre ktorú $n(i_0) \geq 2$; 2. je daná množina polynomov $g_j(z, z_1, \ldots, z_n)$, $g_j \in B$, zostrojených pomocou základných operácií $f_i \in A$ tak, že platí: ak $g \in B$ a ak S je ľubovoľná algebra triedy $\mathfrak{A}$, potom ku každej konečnej postupnosti o $n + 1$ prvkoch $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$ existuje jediný prvok $x \in S$, vyhovujúci rovnici $g(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$. Hovoríme, že $\mathfrak{A}$ je trieda existenčných algebier.*

Poznámky. 1. Predpoklad o existenci aspoň jednej základnej operácie f_{i_0}, ktorá má najmenej dve premenné, je potrebný k tomu, aby bolo možné zostrojiť aspoň jeden polynom g_j, ktorý by mal viac ako jednu premennú. Niekoľko poznámok o algebrách, v ktorých každá základná operácia (a tedy tiež každý polynom) má len jednu premennú, tvorí obsah nasledujúceho odseku 3.

2. Nech S je algebra, patricaca do triedy existenčných algebier $\mathfrak{A}$. Používajme (všade ďalej) označenia z definície 1. Nech R je relácia kongruentnosti na S. Príslušná faktorová algebra nemusí patriť do triedy $\mathfrak{A}$; od relácie R nežiadame, aby zachovávala „existenčné vlastnosti". Ak $G \in B$ a $\bar{x}$ označuje triedu vzhľadom k relácii R, obsahujúcu prvok x, rovnica $g(\bar{x}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{x}_{n+1}$ má zrejme aspoň jedno riešenie, môže mať však aj viac riešení.

Definícia 2. *a) Nech $\mathfrak{A}$ je nejaká trieda algebier. Budeme hovoriť, že $\mathfrak{A}$ má vlastnosť doplňkovosti, ak pre ľubovoľnú algebru S z triedy $\mathfrak{A}$, ľubovoľné prvky $x, y, z \in S$ a ľubovoľné relácie kongruentnosti R_1, R_2 na S zo vzťahu $x R_1 y R_2 z$ vyplýva existencia prvku u, vyhovujúceho vzťahu $x R_2 u R_1 z$.*

b) Budeme hovoriť, že trieda algebier $\mathfrak{A}$ má vlastnosť silnej nedoplňkovosti, ak obsahuje algebru S, pre ktorú platí: K ľubovoľnému prvku $x \in S$ existujú relácie kongruentnosti R_1, R_2 na S a nekonečne mnoho dvojíc $y, z \in S$, tak, že platí $x R_1 y R_2 z$, a v S neexistuje prvok u, ktorý by vyhovoval vzťahu $x R_2 u R_1 z$.

c) Budeme hovoriť, že trieda algebier $\mathfrak{A}$ má vlastnosť (**A**), *ak pre ľubovoľnú algebru S, patriacu do $\mathfrak{A}$, platí: každý vytvorujúci rozklad R na S je jednoznačne určený ľubovoľnou zo svojich tried; ak $\mathfrak{A}$ nemá vlastnosť* (**A**), *hovoríme, že má vlastnosť* (**A'**).

Poznámky. 1. Ak trieda $\mathfrak{A}$ má vlastnosť silnej nedoplňkovosti, zrejme nemá vlastnosť doplňkovosti; ak nemá vlastnosť doplňkovosti, nemusí ešte mať vlastnosť silnej nedoplňkovosti.

2. Nech $\mathfrak{A}$ je primitívna trieda algebier, majúca vlastnosť silnej nedoplňkovosti a vlastnosť (**A**′). Nech $\mathfrak{B}$ je trieda tých algebier, ktoré patria do $\mathfrak{A}$ a ktoré mimo identít, žiadaných v triede $\mathfrak{A}$, splňujú ešte nejakú existenčnú vlastnosť. Môže sa stať, že trieda $\mathfrak{B}$ má vlastnosť doplňkovosti a vlastnosť (**A**). Príklad. Nech $\mathfrak{A}$ je trieda všetkých pologrúp. Ľahko sa zistí, že $\mathfrak{A}$ má vlastnosť silnej nedoplňkovosti a vlastnosť (**A**′). Nech $\mathfrak{B}$ je trieda tých pologrúp S, v ktorých pre $a, b \in S$ rovnice $ax = b$, $ya = b$ majú jediné riešenie. Potom $\mathfrak{B}$ je trieda všetkých grúp; je známe, že trieda $\mathfrak{B}$ má vlastnosť doplňkovosti a vlastnosť (**A**).

3. Typickým príkladom triedy existenčných algebier je trieda všetkých kvazigrúp (ak kvazigrupu definujeme ako algebru s jednou binárnou operáciou — násobením a žiadame existenciu prvkov x, y, pre ktoré je $ax = b$, $ya = b$). V Birkhoffovom probléme 31 (viď [1], str. 130) je položená otázka, či trieda všetkých kvazigrúp $\mathfrak{A}$ má vlastnosť doplňkovosti. G. Trevisan v práci [7] a Van Ši-cian v práci [8] (túto prácu poznám len z referátu v časopise Referativnyj žurnal, *11*, 1954) dokázali, že trieda všetkých kvazigrúp nemá vlastnosť doplňkovosti. Uvedieme jednoduchý dôkaz nasledujúceho silnejšieho tvrdenia:

Veta 1. *Každá trieda existenčných algebier má vlastnosť silnej nedoplňkovosti a vlastnosť* (A′).

Dôkaz. Nech $\mathfrak{A}$ je trieda existenčných algebier. Nech S_0 je algebra triedy $\mathfrak{A}$, obsahujúca aspoň dva prvky. Priamy súčin $S_0 \times S_0 = S$ je zrejme tiež algebra triedy $\mathfrak{A}$; algebra S obsahuje viac ako tri prvky. Nech N je množina všetkých celých čísiel. Uvažujme množinu S' všetkých funkcií $x = f(n)$, ktorých oblasťou definície je N, a ktorých funkčné hodnoty patria do S. Nech $f_i(x_1, \ldots, x_m)$ je operácia, definovaná na algebrách triedy $\mathfrak{A}$. Ak $h_1, \ldots, h_m \in S'$, utvoríme pomocou týchto prvkov novú funkciu $f_i(h_1, \ldots, h_m) \in S'$ tak, že položíme

$$f_i(h_1, \ldots, h_m)(n) = f_i(h_1(n + 1), \ldots, h_m(n + 1))$$

pre každé $n \in N$. Tým sme na S' definovali všetky operácie f_i, ktoré sú definované na algebrách triedy $\mathfrak{A}$. Uvažujme rovnicu

$$g(h, h_1, \ldots, h_n) = h_{n+1} ,$$

kde $h_1, \ldots, h_{n+1}$ sú dané prvky z množiny S'. Ľahko sa dokáže, že táto rovnica má jediné riešenie $h(n)$. Teda S' je algebra triedy $\mathfrak{A}$.

Nech h_1 je ľubovoľný prvok algebry S'. Zvoľme si číslo $n_0 \in N$ a zostrojme funkcie $h_2(n)$, $h_3(n)$ takto:

1. pre $n = n_0$ si zvolíme hodnoty $h_2(n_0)$, $h_3(n_0) \in S$ tak, aby prvky $h_1(n_0)$, $h_2(n_0)$, $h_3(n_0)$ boli navzájom rôzne;

2. pre $n < n_0$ položíme $h_2(n_0) = h_3(n_0) = h_1(n_0)$;

3. pre $n > n_0$ môžu byť $h_2(n)$, $h_3(n)$ ľubovoľné prvky, patriace do S.

Definujme relácie R_1, R_2 na S' takto: pre $h, h' \in S'$ položíme $h R_1 h'$ ($h R_2 h'$), ak

1. pre $n < n_0$ platí $h(n) = h'(n)$,

2. prvky $h(n_0)$, $h'(n_0)$ sú si alebo rovné, alebo jeden z nich je rovný $h_1(n_0)$ $(h_2)(n_0))$ a druhý $h_3(n_0)$.

Ľahko sa zistí, že R_1, R_2 sú relácie kongruentnosti na S' a že pre ne platí $h_1 R_1 h_3 R_2 h_2$.

Ak by existoval prvok $h_4 \in S'$, vyhovujúci podmienkám

$$h_1 R_2 h_4 \ (1) , \qquad h_4 R_1 h_2 \ (2) ,$$

vyplývalo by zo vzťahu (1) $h_1(n_0) = h_4(n_0)$ a zo vzťahu (2) $h_4(n_0) = h_2(n_0)$, t. j. $h_1(n_0) = h_2(n_0)$, čo je spor s predpokladom. Keďže hodnoty $h_2(n)$, $h_3(n)$ pre $n > n_0$ sú ľubovoľné, existuje takýchto dvojíc h_2, h_3 nekonečne mnoho. Tým je dokané, že trieda $\mathfrak{A}$ má vlastnosť silnej nedoplňkovosti.

Definujme ďalej na algebre S' reláciu R_3 tak, že položíme $h R_3 h'$ vtedy a len vtedy, ak pre $n < n_0$ platí $h(n) = h'(n)$. Ľahko sa zistí, že R_3 je relácia kongruentnosti na S. Nech $\bar{h}$ ($\tilde{h}$) je trieda vytvorujúceho rozkladu $R_1(R_3)$, obsahujúca prvok h. Zrejme platí $\bar{h}_2 = \tilde{h}_3$. Keďže $R_1 \neq R_3$, trieda $\mathfrak{A}$ má vlastnosť (**A'**).

P o z n á m k a. Nech $\mathfrak{A}$ je trieda existenčných algebier, nech S je algebra triedy $\mathfrak{A}$, nech C je množina všetkých relácií kongruentnosti na S, nech C_1 je množina tých relácií kongruentnosti na S, ktoré zachovávajú aj existenčné vlastnosti. (Podrobnejšie: ak $R \in C_1$, $g \in B$ a $\bar{x}$ je trieda vzhľadom k relácii R, obsahujúca prvok x, potom rovnica $g(\bar{x}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{x}_{n+1}$ má jediné riešenie $\bar{x}$.) Ak by sme si všímali len relácie kongruentnosti, patriace do C_1, úvaha by sa redukovala na prípad, vyšetrovaný A. I. Maľcevom. Mohli by sme totiž považovať priradenie $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \to x$ (pričom x je prvok, vyhovujúci rovnici (I)), za novú operáciu F, definovanú na algebrách triedy $\mathfrak{A}$. Relácie množiny C_1 sú súhlasné s operáciou F; medzi operáciami $f \in A$ a novozavedenými operáciami F by mohli platiť nejaké identity. Množina C_1 môže mať vlastnosti, ktoré neplatia pre celú množinu C. V práci [2] Maľcev dokázal tvrdenie: ak S je kvazigrupa, potom ľubovoľné dve relácie kongruentnosti z množiny C_1 sú doplňkové. Z predošlej vety 1 plynie, že trieda všetkých kvazigrúp má vlastnosť silnej nedoplňkovosti.

Definícia 3. *Nech $\mathfrak{A}$ je trieda existenčných algebier s operáciami $f_i \in A$ a s existenčnými rovnicami $g_i = x_{n+1}$, $g_i \in B$. Nech S je algebraický systém, v ktorom pre niektoré usporiadané skupiny prvkov sú definované operácie $f(x_1, \ldots, x_n)$, a v ktorých pre $g_i \in B$ rovnica $g_i(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ má najviac jedno riešenie. Potom hovoríme, že S je čiastočná algebra triedy $\mathfrak{A}$. (Množinu S, v ktorej sú nie definované žiadne operácie, považujeme tiež za čiastočnú algebru triedy $\mathfrak{A}$).*

Veta 2. *Každá čiastočná algebra triedy existenčných algebier $\mathfrak{A}$ sa dá vnoriť do vhodnej algebry triedy $\mathfrak{A}$. (Podrobnejšie: ak S_1 je čiastočná algebra triedy $\mathfrak{A}$, existuje algebra S triedy $\mathfrak{A}$, pre ktorú platí 1. $S_1 \subset S$, 2. ak pre $x_1, \ldots, x_n \in S_1$ je v S_1 definovaná operácia $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ ($f_i \in A$), potom jej výsledok v S_1 je rovnaký ako výsledok tejto operácie, provedenej v S.)*

Princip dôkazu je rovnaký ako v dôkaze vety 1 v práci [9]. Náčrt dôkazu: uvažujme všetky polynomy, utvorené pomocou operácií, definovaných na algebrách triedy $\mathfrak{A}$. Ak pre ľubovoľný takýto polynom $F(z_1, \ldots, z_n)$ nie je definovaný výsledok operácie $F(x_1, \ldots, x_n)$ ($x_1, \ldots, x_n \in S_1$), považujeme výraz $F(x_1, \ldots, x_n)$ za nový prvok, ktorý pridáme k množine S_1; po pridaní všetkých takýchto prvkov dostávame množinu S_1'. Ak $g_1 \in B$ a ak pre $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S_1$ rovnica $g_i(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ nemá riešenie v S_1 (a teda ani v S_1'), pridáme k množine S_1' nový prvok x, pre ktorý položíme z definície $g_i(x, x_1, \ldots, x_n)$ rovné x_{n+1}. Po pridaní všetkých takto získaných prvkov x dostávame množinu $S_2 \supset S_1'$. Analogicky zostrojíme k množine S_2 množinu S_3 atď. Ľahko sa zistí, že na množine $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ sú definované všetky operácie $f_i \in A$ a každá rovnica $g_i(x, x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$, $g_i \in B, x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$ má v S jediné riešenie. Teda S vyhovuje podmienkam vety.

Poznámka. Nech na množine S_1 sú nie definované žiadné operácie. Utvorme príslušnú algebru S podľa dôkazu predošlej vety. Je prirodzené nazvať S voľnou algebrou triedy $\mathfrak{A}$, vytvorenou množinou generátorov S_1. Nech α resp. β resp. γ sú kardinálne čísla množiny S_1, resp. A, resp. S. Z predošlej konštrukcie vyplýva platnosť tvrdení:

1. Ak množiny S_1, A sú najviac spočetné, potom množina S je spočetná.

2. Ak aspoň jedno z kardinálnych čísiel α, β je nekonečné, potom $\gamma = \max . (\alpha, \beta)$.

3. K ľubovoľnému nekonečnému kardinálnemu číslu $\delta \geqq \beta$ existuje algebra S triedy $\mathfrak{A}$, ktorá má kardinálne číslo δ.

3

Tento odsek sa týka doplňkových relácií kongruentnosti, nesúvisí však priamo s existenčnými algebrami. Hovoríme, že algebra A s množinou operácií $f_\alpha \in F$ má len jednoprvkové operácie, ak pre všetky operácie $f_\alpha \in F$ platí $n(\alpha) = 1$. V knihe [1] vyslovuje G. Birkhoff nasledujúce tvrdenie (v inej slovnej formulácii):

(B) *Ak algebra A má len jednoprvkové operácie, potom všetky jej relácie kongruentnosti sú dolpňkové vtedy a len vtedy, keď algebra A má najviac tri relácie kongruentnosti:*

Tvrdenie „vtedy“ je zrejmé (ak má algebra najviac tri relácie kongruentnosti,