Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

ROZVOJ ANALYTICKÉ FUNKCE V „TAYLOROVU" ŘADU S PROMĚNNÝM STŘEDEM

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha.

(Došlo dne 14. ledna 1955.) DT 517.531:517.513

V této práci je uvažován „Taylorův" rozvoj analytické funkce s proměnným středem závislým na jistém parametru t. Pro spec. hodnoty t dostáváme tak různé rozvoje; mezi nimi pak Taylorův rozvoj a rozvoj konvergující v t. zv. polygonu konvergence (srov. podobný pojem v knize ÉMILA BORELA: Leçon sur les séries divergentes, Paris 1901, IV. a V. kap.). Spojitou změnou parametru lze konvergenční obor tohoto rozvoje spojitě měnit, zvětšovat nebo zmenšovat. Tyto rozvoje tvoří v jistém smyslu spojitý přechod mezi elementem-mocninnou řadou dané funkce a funkcí samou.

Budiž dána analytická funkce $f(z)$ svým elementem

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k . \tag{1}$$

Analytickým pokračováním tohoto elementu obdržíme množinu M singulárních bodů funkce $f(z)$, která může býti isolovaná (jako na př. u funkcí meromorfních) nebo neisolovaná (na př. singulární body vyplní oblouk nějaké křivky).

Sestrojme v z-rovině oblast H (tak zv. hvězdu) násl. způsobem: Spojme všechny singulární body funkce $f(z)$ s bodem z_0. Na každé z těchto přímek zvolme pak tu polopřímku s počátkem v singulárním bodě, jež neobsahuje bod z_0. Dostaneme tak jednoduše souvislou oblast H, která obsahuje vnitřek konvergenčního kruhu mocninné řady (1). Analytickým pokračováním řady (1) v této hvězdě dostaneme podle věty o monodromii jednoznačnou větev funkce $f(z)$. Znakem $f(z)$ budeme dále označovati pouze tuto větev. Sestrojíme nyní t. zv. polygon konvergence funkce $f(z)$ tím způsobem, že v každém singulárním bodě α vztyčíme kolmici na „paprsek" hvězdy. Každá kolmice rozdělí z-rovinu na dvě poloroviny. Průnik všech otevřených polorovin obsahujících bod z_0 jest oblastí, jež má tyto vlastnosti: jest konvexní; vnitřek konvergence kruhu řady (1) je její částí; funkce $f(z)$ je v ní regulární. Tuto oblast označíme zkráceně PK.

Poznámka. Je-li $f(z)$ meromorfní, pak hranicí PK je polygon. Vyplňují-li sing. body nějaký oblouk, pak tento oblouk je úpatnicí „příslušného" oblouku hranice PK pro střed z_0. Na př.: Když singulární body vyplňují přímku, pak hranicí PK je parabola, jež má onu přímku za vrcholovou tečnu a bod z_0 za ohnisko. Obecněji je hranice PK složena z oblouků křivek, které jsou obálkami kolmic vztyčených v singulárních bodech na „paprsky" hvězdy.

Věta 1. *Pro funkci $f(z)$ platí v jejím PK rozvoj*

$$f(z) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta) \cdot (z - \zeta)^n , \tag{2}$$

kde $\zeta = z_0 + \frac{1}{2}(z - z_0)$.

Důkaz. Bod ζ je střed úsečky $z_0 z$. Je-li $z = z_1$ pevný bod, pak řada (2) je mocninná řada konvergující uvnitř kružnice $|z - \zeta| < |\alpha - \zeta|$, kde α je singulární bod nejbližší bodu ζ. Je-li nyní koncový bod z této úsečky proměnný, řada (2) konverguje pro všechna z splňující nerovnost

$$|z - z_0 - \tfrac{1}{2}(z - z_0)| < |\alpha - z_0 - \tfrac{1}{2}(z - z_0)| ,$$

t. j.

$$(\bar{\alpha} - \bar{z}_0)\, z + (\alpha - z_0)\, \bar{z} + \alpha \bar{z}_0 + \bar{\alpha} z_0 - 2\alpha\bar{\alpha} < 0 , \tag{3}$$

což je otevřená polorovina s bodem z_0, jejíž hranicí je kolmice v bodě α na spojnici jeho s bodem z_0. Průnik takovýchto polorovin pro všechny sing. body α jest právě PK funkce $f(z)$.

Poznámka. Proměnný střed řady (2) v případě, že hranicí PK je nějaká křivka, leží tedy v oblasti s bodem z_0, ohraničené křivkou homothetickou s hranicí PK pro střed v bodě z_0 a poměr 1 : 2.

Rozvoj pro funkci $f(z)$ v jejím PK se získá tedy velice „lacino": Jest to formálně Taylorova řada o proměnném středu ζ. Ve většině případů konverguje však tato řada v daleko větší oblasti než je konvergenční kruh mocninné řady (1) a její konvergence uvnitř PK je také stejnoměrná. Mohli bychom provádět analytické pokračování pomocí těchto „elementů". Řada (2) odstraňuje tedy tu „nepříjemnost", že konvergenční kruh se nedá rozšířit i když na jeho obvodě leží jediný singulární bod.

Pro $z_0 = 0$ dostaneme analogon k řadě Maclaurinově

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{z}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^n .$$

V dalším sestrojíme rozvoje pro funkci $f(z)$, jež tvoří jakýsi spojitý přechod mezi jejím Taylorovým rozvojem a funkcí samou, t. j. rozvoje, jejichž konvergenční obory se dají neomezeně zvětšovat. Přitom řada (2) bude v nich zahrnuta jako speciální případ. Nahradíme totiž kolmice na paprsky hvězdy v singulárních bodech kruhovými oblouky.

Věta 2. *Budiž $\zeta = z_0 + t(z - z_0)$, kde t je reálný parametr a $\alpha \neq z_0$ nechť je libovolný singulární bod funkce (z). Pak rozvoj*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta)(z - \zeta)^n \tag{4}$$

konverguje pro $t > \frac{1}{2}$ resp. $t < \frac{1}{2}$ vně resp. uvnitř každé kružnice incidentní se singulárním bodem α, se středem na přímce $z_0\alpha$, pro jejíž poloměr r v případě, že $t > \frac{1}{2}$ platí $\lim_{t \to 1} r = 0$. Při tom konvergenční obor obsahuje vždy jisté okolí bodu z_0.

Důkaz. Jako v předchozím případě řada (4) konverguje pro z splňující nerovnost

$$|z - z_0 - t(z - z_0)| < |\alpha - z_0 - t(z - z_0)|\,,$$

kde α je nejbližší singulární bod k bodu ζ, t. j. pro

$$(1 - 2t)\, z\bar{z} + [t\bar{\alpha} - (1 - t)\,\bar{z}_0]\, z + [t\alpha - (1 - t)\, z_0]\, \bar{z} + (1 - t)\,.$$
$$.\,(\bar{\alpha} z_0 + \alpha \bar{z}_0) - \alpha\bar{\alpha} < 0\,.$$

Pro $\frac{1}{2} < t$ resp. $t < \frac{1}{2}$ dostáváme tak vnějšek resp. vnitřek kružnice incidentní se singulárním bodem α, o středu v bodě $z^* = \dfrac{t-1}{2t-1} z_0 + \dfrac{t}{2t-1}\alpha$ a poloměru $r = \left|\dfrac{t-1}{2t-1}\right| |z_0 - \alpha|$. Řada (4) konverguje tedy v prvním případě vně všech takovýchto kružnic, ve druhém případě uvnitř. Jest $\lim_{t \to 1} r = 0$. Konvergenční obor vždy existuje a obsahuje nějaké okolí bodu z_0. Nechť totiž β je střed úsečky $z_0\alpha$. Roste-li parametr t od $-\infty$ do $+\infty$, pohybuje se střed z^* po přímce $z_0\alpha$ od bodu β přes z_0 do ∞ a odtud zase přes bod α k β. Pro $t < 0$ je uvnitř úsečky $z_0\beta$ (pro $t = 0$ je $z^* = z_0$), pro $0 < t < \frac{1}{2}$ je na polopřímce s počátečním bodem z_0, jež neobsahuje α (pro $t = \frac{1}{2}$ je $z^* = \infty$), pro $\frac{1}{2} < t < 1$ je na paprsku hvězdy (pro $t = 1$ v bodě α), pro $1 < t$ uvnitř úsečky $\alpha\beta$ (pro $t = \infty$ zase v bodě β).

Poznámka. Jako spec. případy dostaneme z rozvoje (4) Taylorovu řadu (1) (pro $t = 0$), řadu o jednom členu, totiž $f(z)$ (pro $t = 1$) a řadu (2) (pro $t = \frac{1}{2}$). Pro $\frac{1}{2} \leqq t < 1$ obsahuje příslušný konvergenční obor polygon konvergence, pro $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ konvergenční kruh řady (1).

Ukážeme, že polygon konvergence funkce $f(z)$ lze ještě jistým způsobem deformovat. Omezíme se pro jednoduchost na případ $z_0 = 0$.

Položíme-li

$$t = r + is\,, \quad z = x + iy\,, \quad \alpha = a + bi\,,$$

kde r, s, x, y, a, b jsou reálná čísla, dostaneme z nerovnosti (3)

$$(1 - 2r)(x^2 + y^2) + 2(ar + sb)\, x + 2(br - sa)\, y - (a^2 + b^2) < 0\,.$$

Pro $r = \frac{1}{2}$ je to zase otevřená polorovina s počátkem, jejíž hranicí jest přímka incidentní s α. Pro úhel φ, který svírá paprsek hvězdy s touto přímkou, platí

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2s}$. Je tedy tento úhel nezávislý na singulárním bodě α. Pro $s = 0$ dostaneme PK, kdežto pro $s \neq 0$ dostaneme oblast, jež vznikne z PK otočením každé jeho strany kolem bodu α o úhel $\varphi - \frac{1}{2}\pi$. Tento „deformovaný“ PK neobsahuje tedy již konvergenční kruh řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, z^n$. Je-li $r \neq \frac{1}{2}$, $s \neq 0$, dostaneme jako konvergenční obor průnik všech vnějšků resp. vnitřků kružnic majících v bodech α tečny o směrnicích $\frac{ar - sb - a}{-br - sa + b}$. Úhel φ, který svírá paprsek hvězdy s příslušnou tečnou, je zase nezávislý na poloze bodu α, neboť platí $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - r}{s}$.

Nechť nyní $f(z)$ je racionální funkce.

Analogicky s technikou rozvoje funkcí v potenční řady uvedeme zde jiný způsob rozvoje funkce $f(z)$ v řadu (4) pro $t = 1 - \frac{1}{2^m}$, kde m je přirozené číslo.

Rozložme racionální funkci $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (kde polynomy $P(z)$, $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ jsou nesoudělné, při čemž $a_0 \neq 0$ a stupeň $Q(z)$ je větší než stupeň $P(z)$) na částečné zlomky tvaru

$$\frac{A}{(\alpha - z)^k} \quad (\alpha \neq 0)\,.$$

Platí nyní

$$\frac{A}{\alpha^k}\left(1 - \frac{z}{2\alpha} - \frac{z}{2\alpha}\right)^{-k} = \frac{2^k A}{(2\alpha - z)^k}\left(1 - \frac{z}{2\alpha - z}\right)^{-k}.$$

Jestliže $|z| < |2\alpha - z|$, pak

$$\frac{A}{(\alpha - z)^k} = \frac{2^k A}{(2\alpha - z)^k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-k}{n} \left(\frac{z}{2\alpha - z}\right)^n. \tag{5}$$

Množina bodů splňujících předchozí nerovnosti (pro každý singulární bod α) je však PK dané funkce. Sečtením všech řad (5) pro všechna α dostaneme žádaný rozvoj $f(z)$ v PK. Snadno se zjistí, že tento rozvoj lze psáti ve tvaru uvedeném ve větě 1.

Proveďme tento postup ještě jednou, t. j. položme

$$\frac{A}{(\alpha - z)^k} = \frac{2^k A}{(2\alpha - z)^k}\left(1 - \frac{z}{4\alpha - 2z} - \frac{z}{4\alpha - 2z}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{2^k A}{(2\alpha - z)^k}\left(1 - \frac{z}{4\alpha - 2z}\right)^{-k}\left(1 - \frac{z}{4\alpha - 3z}\right)^{-k} = \frac{4^k A}{(4\alpha - 3z)^k}\left(1 - \frac{z}{4\alpha - 3z}\right)^{-k}.$$

Za předpokladu, že

$$|z| < |4\alpha - 3z|\,,$$

je tedy

$$\frac{A}{(\alpha - z)^k} = \frac{2^{2k}A}{[2^2\alpha - (2^2 - 1)\,z]^k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-k}{n} \frac{z^n}{[2^2\alpha - (2^2 - 1)\,z]^n}\,.$$

Tato řada konverguje vně kružnice

$$2z\bar{z} - 3\bar{\alpha}z - 3\alpha\bar{z} + 4\alpha\bar{\alpha} = 0\,.$$

Sečtením všech takových řad pro všechna α dostaneme rozvoj konvergující vně všech těchto kružnic.

Po m takovýchto krocích dostaneme indukcí

$$\frac{A}{(\alpha - z)^k} = \frac{2^{mk}A}{[2^m\alpha - (2^m - 1)\,z]^k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-k}{n} \frac{z^n}{[2^m\alpha - (2^m - 1)\,z]^n}\,.$$

Tato řada konverguje vně kružnice incidentní s bodem α, o poloměru $r = \frac{|\alpha|}{2^m - 2}$ a středu $z = \frac{2^m - 1}{2^m - 2}\,\alpha$.

Snadno zjistíme, že sečtením těchto řad pro všechna α dostaneme řadu (4), kde $z_0 = 0$, $t = 1 - \frac{1}{2^m}$, t. j.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)} \left(\frac{2^m - 1}{2^m}\,z\right) \left(\frac{z}{2^m}\right)^n. \tag{7}$$

Tedy po m krocích, kde

$$m = \left[\frac{\log\left(\frac{M}{\varepsilon} + 2\right)}{\log 2}\right] + 1\,, \quad (M = \mathrm{Max}\,(|\alpha|))\,,$$

dostaneme tak řadu konvergující vně všech kružnic incidentních s body α o poloměrech menších než ε.