RECENSE

Milan Mikan: **Jak se vyvinula matematika a geometrie.** Orbis 1954, str. 137, cena 10,50 Kčs, náklad 5400.

Je jistě velmi záslužné a důležité vysvětlovat populárně co nejširšímu okruhu čtenářů základy nejrůznějších vědních oborů a ukázat, jak se tyto obory vyvíjely z praktické lidské činnosti. Takový výklad, i když se obrací k nejširšímu okruhu čtenářů, nesmí však skreslovat stav vědy a stát se jen více nebo méně zábavným čtením, které neklade na myšlení čtenáře velké nároky, a dále nesmí obsahovat hrubé věcné chyby, i když jsou to chyby, kterých si neodborník ani nevšimne.

Kniha prof. M. MIKANA bohužel těmto požadavkům zcela nevyhovuje. Především je psána velmi povrchně, o čemž svědčí na příklad tyto výroky:

Na str. 19: ...Slovem „al-džebr“ nazývá doplněk, kterým se z rovnice odstraňují záporné členy ...slovo „džebr“ znamená odstranit v rovnici zlomky... Na str. 26 se mluví o jakémsi nekonečném čísle prof. STUDNIČKY (čímž je pravděpodobně míněn nějaký příklad, kterým prof. Studnička ilustroval svůj výklad), o kterém je zmínka i v dalším textu (n. p. na str. 46) a to tak, jako kdyby to byl matematický pojem. Na str. 30 se říká, že pojem logaritmů se t e d y vyvinul souběžně s pořizováním tabulek pro goniometrické funkce, ačkoliv v celé IV. kapitole, v níž je tato zmínka, se o goniometrických funkcích vůbec nemluví. Na téže stránce se říká v poznámce pod čarou: „Logaritmy čísel, která nejsou racionální mocninou základu, jsou čísly iracionálními. Proto je lze vypočítávat na libovolný počet desetinných míst“. Při tom se ovšem vůbec neříká nic o periodických číslech a o iracionálních číslech je v předchozím textu jen zcela stručná zmínka.

Podobných citátů by bylo lze nalézt v recensované knize celou řadu. Kromě toho je na několika místech text značně nesouvislý. Tak na př. na str. 52 v kapitole o statistice se při výčtu ruských a sovětských statistiků říká, že I. M. VINOGRADOV se zabýval theorií čísel, ačkoliv v celé kapitole není o theorii čísel ani slovo. Kromě toho na téže stránce je uveden matematik „Cholmogorov“, což má pravděpodobně být Kolmogorov. V kapitole o kinematické geometrii je bez dalšího vysvětlení zmínka o tom, že se vrtulové plochy, jejichž výtvarný zákon je velmi složitý, zobrazují užitím vrstevnic, při čemž se neříká, jak tato věc souvisí s kinematickou geometrií. Na str. 90 je zcela nesrozumitelná poznámka: „Ale představa dělitelnosti tělesa tu již jednou byla a tento zdánlivý rozpor již nemohl zachránit Platonovo idealistické učení“. Bylo by totiž třeba vysvětlit, v čem je jen zdánlivost zmíněného rozporu geometrické představy limitního přechodu a pojmu nedělitelného atomu.

Také některé obrázky, které jsou převzaty z jiných knih, na př. obr. 26 z knihy F. KADEŘÁVEK-K. HAVLÍČEK „Technická geometrie v lékařství a strojní prothetice“, jsou přeplněny podrobnostmi, které měly původně svůj význam, ale o nichž se v Mikanově knize nemluví, takže čtenáři spíše ztíží pochopení výkladu místo toho, aby mu je usnadnily. To se týká i obrázků 36, 37, na nichž je rovněž popis, o jehož smyslu se v textu nic neříká.

Kromě těchto stylistických chyb a nedopatření jsou v knize i vážné věcné chyby. Na př. na str. 22 je definice imaginárních čísel: „Imaginárními nazýváme čísla, která násobena sama sebou dávají číslo záporné, čili sudé odmocniny ze záporných čísel". Podle této definice není recensent schopen posoudit, zda číslo $\sqrt[4]{-1}$ je imaginární či nikoliv, neboť násobeno samo sebou nedá číslo záporné, ale je to sudá odmocnina ze záporného čísla.

Na str. 107 se zavádí definice metrického prostoru. Domnívám se, že výklad tohoto pojmu je pravděpodobně příliš těžký a že proto asi nepatří do popularisační knížky tohoto druhu. Když jsou však už takové pojmy zařazeny, je třeba, aby definice byly jasné. Na př. definice 4: „M je otevřená množina, jestliže všechny body ε-okolí pro dosti malé (kladné) ε každého jejího bodu jsou obsaženy v M. Takovéto body jmenujeme vnitřními body množiny M". Čtenáři, který nezná tyto věci odjinud, musí být tato definice nesrozumitelná. O několik řádků dále musí si čtenář marně klást otázku, proč pojem hranice je zaveden pouze pro otevřené množiny. Sestrojení Peanovy křivky, které je provedeno v kap. XVII, může rozumět jen čtenář, který zná dosti hluboko reálná čísla a má jistou matematickou erudici. Naproti tomu na mnoha místech se vyskytují naivní úvahy a přirovnání, na př. v kap. III: Obři a trpaslíci v říši čísel na str. 48, v kap. XII: Stereoskopie. Co by viděli obři a trpaslíci.

Je rovněž poněkud zarážející, že pokud jde o současné československé matematiky, není v celé knížce zmínka ani o jediném, ačkoliv se zde mluví jak o topologii, tak o theorii míry; a právě v těchto partiích dosáhli naši vědci pronikavých úspěchů, zcela rovnocenných úspěchům vědců, kteří v této souvislosti citováni jsou.

V celku lze říci, že recensovaná kniha je špatná, nedá čtenáři ani přehled o současném stavu matematiky a způsobu myšlení, který v ní dnes převládá, ani o jejím historickém vývoji. Domnívám se, že by i popularisačním a snad právě popularisačním knížkám měla být věnována mnohem větší péče jak se strany autora, tak se strany nakladatelství, zvláště jde-li o knihu s nákladem, který u nás málokdy dosáhnou nejlepší vědecké knihy a učebnice.

Ladislav Koubek, Praha.

Béla Kerékjártó: **Les fondements de la géométrie.** Tome premier: La construction élémentaire de la géométrie euclidienne. Budapeste, Akademiai kiadó, 1953. 340 str., 167 obrázků.

Z popudu F. RIESZE vydala maďarská akademie věd ve francouzském jazyce první díl spisu významného maďarského topologa o základech geometrie. Maďarský originál vyšel r. 1947 v Szegedu. Nyní se připravuje francouzské vydání druhého dílu, který B. KERÉKJÁRTÓ vydal maďarsky koncem druhé světové války krátce před svou smrtí (B. Kerékjártó zemřel r. 1946) a který jedná o axiomatickém vybudování geometrie projektivní a obou geometrií neeukleidovských.

První díl je věnován *absolutní geometrii*, pouze kapitola o rovnoběžnosti se zabývá geometrií eukleidovskou. Celý výklad je založen v podstatě na Hilbertově axiomatickém systému; ostatně již i rozvržení spisu do pěti kapitol odpovídá přesně pěti skupinámHilbertových axiomů. Ve svých *Grundlagen der Geometrie* nedokazuje, jak známo, D.HILBERT žádné věty, jenom naznačuje, jak by se nejdůležitější z nich dokázaly. Naproti tomu Kerékjártův spis je věnován pečlivému a detailnímu dokazování všech důležitých vět, při čemž na mnoha místech jsou důkazy vedeny paralelně z více ekvivalentních předpokladů, aby se tím ukázaly hlubší souvislosti. Jednotlivé skupiny axiomů jsou důsledně vždy vysloveny nejdříve pro geometrii v přímce a po odvození jejich důsledků jsou přibrány axiomy další pro geometrii v rovině resp. v prostoru.

Kapitola první je zcela krátká a je věnována důsledkům axiomů incidence.

Kapitola druhá jedná o uspořádání na přímce a rozmístění*) v rovině a prostoru. Zavedení pojmu orientace je odsunuto až do kapitoly další. Hlavní pozornost ve druhé kapitole je věnována kombinatoricko-topologickým vlastnostem roviny a prostoru. Veblenovou metodou je dokázáno, že každý jednoduchý polygon resp. polyedr rozděluje rovinu resp. prostor na dvě části, a dále dokázány věty o rozkladu vnitřku jednoduchého polygonu resp. polyedru na trojúhelníky resp. čtyrstěny. Na základě věty, že součet počtu částí a počtu vrcholů rozkladu vnitřku jednoduchého polygonu na polygony je o jedničku větší než počet stran tohoto rozkladu, je dokázána Eulerova věta pro konvexní polyedry a rozšířena na polyedry jednoduše souvislé. Na základě Eulerovy věty je pak m. j. dokázáno, že existuje právě pět konvexních těles s pravidelnou sítí (t. j. takových, že každá stěna má stejný počet vrcholů a že každý vrchol patří stejnému počtu stěn), čímž je již zde nezávisle na axiomech shodnosti dokázáno jádro věty o existenci právě pěti pravidelných těles.

Třetí kapitola, která je věnována shodnosti, zaujímá v knize nejvíce místa (přes jednu třetinu). Při zavádění shodnosti jak na přímce tak v rovině a také v prostoru hrají dominující úlohu shodné transformace. Ty jsou pro přímku zavedeny pomocí prvých tří Hilbertových axiomů shodnosti. Shodné transformace přímky jsou rozděleny na translace a symetrie a po zavedení orientace přímky také na přímé a nepřímé. Při tom jsou studovány grupové vlastnosti množin transformací jednotlivých typů. Místo zbývajících Hilbertových axiomů shodnosti, kterých nelze bezprostředně užít k zavedení shodných transformací v rovině, jsou uvedeny axiomy Veroneseovy. Pomocí shodných transformací roviny je definována shodnost úhlů a proveden důkaz, že tato shodnost je ekvivalentní se shodností definovanou implicitně Hilbertovými axiomy.

Ze shodných transformací roviny je vedle osové symetrie a rotace kolem bodu zavedena translace indukovaná orientovanou úsečkou (jde ovšem o translaci obecnější a nezávislou na pojmu rovnoběžnosti). Zde opět po zavedení orientace roviny je provedena další klasifikace shodných transformací a jsou studovány grupové vlastnosti množin transformací různých typů.

Pozoruhodnou částí Kerékjártóvých výkladů je zavedení zobecněného svazku přímek (v dalším budeme užívat prostého termínu svazek): Je to taková množina přímek roviny, že 1. každým bodem roviny prochází alespoň jedna přímka množiny a že 2. vztah homologických bodů vzhledem k přímkám svazku je transitivní (dva body ležící na dvou různých přímkách jsou vzhledem k nim homologické, jestliže jejich spojnice s oběma přímkami určuje shodné přilehlé úhly). Po odvození jednoduchých vlastností svazků je definován epicykl, jakožto geometrické místo bodů, jež jsou k danému bodu homologické vzhledem ke všem přímkám svazku. Ukazuje se, že shodné transformace roviny převádějí svazky i jejich epicykly opět ve svazky s příslušnými epicykly. Po vyšetření shodných transformací, jež převádějí svazky v sebe, je dokázáno, že u trojúhelníka patří osy stran resp. osy úhlů resp. výšky vždy témuž svazku a že vrcholy trojúhelníka prochází vždy právě jeden epicykl.

Konečně závěrem je studován pojem kružnice a to na základě pomocného axiomu, který zaručuje existenci alespoň jednoho průsečíku dvou kružnic, z nichž každá obsahuje alespoň jeden bod, ležící uvnitř druhé. Od kružnic přechází pak autor k pravidelným mnohoúhelníkům, pomocí nichž pak dokazuje některé věty o konečných grupách shodných

---

*) Užívám termínu rozmístění pro množinu bodů roviny resp. prostoru v témž smyslu, jaký má uspořádání pro množinu bodů přímky. Nelze užít názvu „uspořádání" v rovině, i když ve francouzštině se užívá i zde termínu „ordre". Němci někdy odlišují tyto významy slovy „Ordnung" a „Anordnung". *K. Vahlen* na př. užívá názvu — lineární uspořádání, planární uspořádání atd. (též cyklické, sférické atd.).

transformací roviny. Zbývající část třetí kapitoly pojednává o shodnosti v prostoru přesně obdobným způsobem, jakým byla probrána shodnost v rovině. Při studiu konečných grup shodných transformací v prostoru je ukázáno, že na základě dosavadních axiomů lze z pravidelných polyedrů konstruovat pouze čtyrstěn, šestistěn a osmistěn.

Čtvrtá kapitola je věnována *rovnoběžnosti* a to výhradně rovnoběžnosti eukleidovské. Nejprve jsou dokázány ekvivalence některých vět s Eukleidovým axiomem o rovnoběžkách, načež jsou probrány důsledky tohoto axiomu pro geometrii trojúhelníka (součet úhlů, vzájemná poloha trojic významných přímek (totiž os úhlů, os stran, výšek a těžnic) a pro geometrii kružnice (úhly středové a obvodové). V dalším je studována úměrnost úseček (ovšem bez axiomů shodnosti), která je zavedena jak způsobem Hilbertovým tak Hessenbergovým. Na základě vět o podobnosti a úměrnosti je jednak zaveden součin úseček (s odvozením věty Pythagorovy, Cevovy a Menelaovy), jednak jsou definovány vektory v rovině, pomocí nichž jsou pak zavedeny souřadnice v rovině jakožto složky vektorů; při tom je ukázáno, že body přímky vyhovují svými souřadnicemi lineární rovnici.

Po rozšíření všech těchto výsledků na geometrii prostoru je pozornost věnována *eukleidovským pohybům* v rovině a v prostoru. Výklad ve čtvrté kapitole končí odvozením konstrukce rovnostranného trojúhelníka (bez užití pomocného axiomu o protínání kružnic), odvozením konstrukce pravidelného pětiúhelníka (tentokráte užitím axiomu o protínání kružnic) a v prostoru odvozením konstrukce pravidelného dvanáctistěnu a tím i pravidelného dvacetistěnu.

Pátá kapitola pojednává o *topologických vlastnostech,* jež je zvykem v elementární geometrii označovat jako vlastnosti spojitosti. Zde jsou tyto vlastnosti vyloženy pro přímku a pro rovinu a to dvěma paralelními způsoby. Pojem spojitosti lze totiž zavést buď přes uspořádání (nezávisle na shodnosti) nebo přes shodnost. Při prvém způsobu nutno požadovat, aby množina bodů na přímce byla 1. souvislá a 2. separabilní, neboť z axiomů uspořádání plyne, že systém všech otevřených úseček přímky tvoří systém okolí, jenž vyhovuje Hausdorffovým axiomům. Požadavek souvislosti množiny bodů přímky je možno nahradit ovšem Dedekindovým axiomem o řezech, který je ekvivalentní. Následují důkazy některých vět, jako na př. Bolzano-Weierstrassovy věty o hromadných bodech, věty o nespočetnosti bodů přímky, věty, že prosté zobrazení přímky na sebe je spojité tehdy a jen tehdy, když je podobné a j. Při druhém způsobu, kdy máme k disposici axiomy shodnosti, stačí požadovat platnost Dedekindova axiomu, který je v tomto případě velmi silný, neboť z něho plyne i Archimedův axiom. Kerékjártó ukazuje, že Dedekindovu axiomu lze dát tuto oslabenou formu: Jestliže pro libovolný řez bodů na přímce existuje úsečka s koncovými body v různých skupinách řezu, jež je shodná s libovolnou předem danou úsečkou, pak existuje vytvořující bod tohoto řezu. Tento oslabený axiom a axiom Archimedův jsou navzájem nezávislé, při čemž platnost obou je ekvivalentní s platností axiomu Dedekindova (platnost předpokladu v oslabeném axiomu je při tom ekvivalentní s Archimedovým axiomem). Je ukázáno, že na základě Archimedova axiomu lze zavést číselné souřadnice bodů přímky a že v důsledku Dedekindova axiomu (stačí jeho oslabená forma) splyne množina všech těchto souřadnic s množinou reálných čísel. Odtud je jen krok k důkazu, že analytická Descartesova geometrie je aritmetickým modelem zvoleného axiomatického systému. Paragraf, v kterém je ukázána nezávislost tohoto systému, uzavírá první díl Kerékjártova spisu.

Kerékjártóva kniha, jak je vidět z předcházejícího, vniká hluboko do otázek, týkajících se axiomatického budování geometrie a shrnuje výsledky moderních badatelů v tomto oboru, jako byli na př. Baker, Forder, Baldus, Hessenberg a Hjelmslev. Každý, kdo se o otázky základů geometrie zajímá, bude při studiu Kerékjártóva spisu nalézat nové a nové krásy jeho výkladu. Tím spíše bude proto očekávat vydání druhého dílu jeho spisu. Na závěr ještě poznamenejme, že pochvalu zasluhuje také stylistická stránka francouzského překladu knihy.

Jan Pavlíček, Praha.

K. Borsuk-W. Szmielew: **Podstawy geometrii**. Biblioteka matematyczna, tom 10, Państwowe wydawnictwo naukowe. Warszawa 1955, 363 stran, 318 obrázků.

Autoři měli původně v úmyslu napsat učebnici vyšší geometrie, avšak při sespisování rozšířili text tak, aby kniha byla monografií, v níž by bez mezer byly zpracovány axiomatické základy geometrie eukleidovské, geometrie Lobačevského a geometrie projektivní, a to jen tak daleko, aby pomocí aritmetických modelů mohla být dokázána kategoričnost těchto geometrií. Na celé knize je patrný vliv polské matematické školy. Topologickým vlastnostem je tu věnováno více pozornosti, než je to v knihách o základech geometrie obvyklé, a po formální stránce je výklad zcela moderní; bohatě se užívá prostředků matematické logiky a theorie množin, což se projevuje také v propracované symbolice, jež je však natolik střízlivá, že přesnost výkladu neujímá nic na jeho srozumitelné „čitelnosti".

Před započetím vlastního výkladu jsou v úvodu po krátkém nástinu historického vývoje geometrie stručně vyloženy zásady axiomatické theorie a zopakovány tyto pojmy: množina, relace a zobrazení, prostor topologický (podle Hausdorffa) a metrický, aritmetický prostor eukleidovský (kartézský) a projektivní.

První čtyři kapitoly pojednávají *o geometrii absolutní* a to v podstatě na základě axiomů Hilbertových. Po odvození vlastností incidence a rozmístění*) je v 1. kapitole pomocí systému všech otevřených úseček resp. systému vnitřků všech trojúhelníků jakožto systému okolí zavedena topologie do přímky resp. do roviny a je dokázána na př. věta, že průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníka je spojitou funkcí jeho vrcholů. Kapitola o shodnosti (kapitola 2) se omezuje vcelku jen na zavedení operací s volnými úsečkami (třídami navzájem shodných úseček) a s volnými úhly. Zato kapitola 3, věnovaná důsledkům axiomu spojitosti (ve formě axiomu Dedekindova), je bohatá. Především je definována a konstruována míra úseček a úhlů, potom je pomocí míry úseček zavedena do prostoru metrika (jako míra úsečky určená dvojicí bodů), načež je ukázáno, že topologie indukovaná touto metrikou v rovině splývá s topologií indukovanou systémem vnitřků trojúhelníků jakožto systémem okolí. Pomocí metriky (a ortogonality) jsou posléze zavedeny absolutní i pravoúhlé souřadnice. Je ukázáno, že v absolutní geometrii je přímka isometrická s (aritmetickým) eukleidovským prostorem E_1, zatím co rovina resp. prostor je obecně pouze homeomorfní a ne isomorfní s E_2 resp. E_3. V této kapitole je ještě dokázána věta Saccheri-Legendreova o součtu úhlů trojúhelníka a několik vět ekvivalentních s předpokladem, že tento součet je roven π, konečně je zde zaveden vztah souběžnosti přímek a ukázány jeho základní vlastnosti. Čtvrtá kapitola jedná o nezávislosti axiomu spojitosti a o bezespornosti a nekategoričnosti systému axiomů absolutní geometrie. Dvěma způsoby lze učinit tento systém kategorickým: Buď přidáme ještě Eukleidův axiom o rovnoběžkách, nebo jeho negaci. K úvahám této kapitoly se užívá aritmetického modelu kartézského a Beltrami-Kleinova (jako výsledek zavedení metriky do projektivního prostoru). Pro názornou orientaci v geometrii Lobačevského je podrobně probrán ještě model Poincarého.

Pátá kapitola je věnována *geometrii eukleidovské*. Je velice stručná; na základě podobnosti je dokázána Pythagorova věta potřebná k metrické charakterisaci eukleidovského prostoru, jež poslouží k důkazu kategoričnosti geometrie eukleidovské. Zato rozsáhlá je kapitola šestá, jednající o geometrii Lobačevského. Jejím cílem je v podstatě opět jen

*) Viz poznámku na str. 483.

důkaz kategoričnosti této geometrie. K zavedení Beltramiho souřadnic, jichž je k tomuto důkazu třeba, je nutné zavést nejprve trigonometrii Lobačevského roviny. Výklad této choulostivé partie, jenž se nikdy neobejde bez infinitesimálních úvah, byl už různě zpracován řadou autorů. Zde zvolený a originálně pojatý výklad se přimyká v podstatě ke klasické Liebmannově obměně způsobu Lobačevského. Protože to k úloze kapitoly úplně stačí, je trigonometrie odvozena jen v latentní formě, t. j. argumenty trigonometrických funkcí jsou úhly souběžnosti stran pravoúhlého trojúhelníka a ne přímo jeho úhly. První odstavce šesté kapitoly jednají ovšem o potřebných základních faktech Lobačevského geometrie: o přímkách souběžných a rozběžných, o úhlu souběžnosti, o defektu trojúhelníka, mnohoúhelníka i obecného rovinného útvaru, o horocyklu a jeho vlastnostech, zejména pak o délce jeho oblouku.

Obsahem posledních dvou kapitol, jež zaujímají asi čtvrtinu celé knihy, jsou *základy projektivní geometrie*. Kapitola sedmá probírá důsledky axiomů incidence a rozmístění. Za axiomy incidence jsou zvoleny Hilbertovy axiomy incidence pro geometrii absolutní, uvedené v kapitole první s připojeným axiomem o tom, že dvě přímky v rovině se vždy protínají. Z vlastností projektivního prostoru je odvozena platnost přímé Desarguesovy věty v rovině (z existence osy perspektivity plyne existence středu), a dále je dokázáno, že z platnosti přímé Desarguesovy věty v rovině plyne již platnost obrácené Desarguesovy věty (z existence středu perspektivity plyne existence osy), při čemž zde není zapotřebí využívat incidenčních vlastností prostoru, nýbrž jen roviny. Axiomy rozmístění jsou vysloveny pomocí vztahu oddělování kolineárních dvojic bodů. Po zavedení úseček a trojúhelníků je pomocí těchto útvarů (jejich vnitřků) jakožto okolí zavedena topologie do přímky a do roviny. Zbytek kapitoly je věnován harmonickým čtveřinám bodů, definovaným pomocí úplného čtyrrohu, a sítím harmonických bodů na přímce, pomocí nichž jsou pak v kapitole osmé po přibrání Dedekindova axiomu o spojitosti zavedeny projektivní souřadnice v prostoru, čímž je prokázána jeho isomorfie s aritmetickým projektivním prostorem P_3 a tím prokázána bezespornost projektivní geometrie i kategoričnost projektivní geometrie prostorové. Pokud jde o projektivní geometrii rovinnou, je zde pomocí Hilbertova modelu ukázáno, že axiomatický systém projektivní geometrie rovinné, jenž vznikne příslušnou modifikací axiomatického systému projektivní geometrie prostorové, není kategorický, leč by se přímá Desarguesova věta vyslovila jako nový axiom.

Jan Pavlíček, Praha.

М. А. Наймарк: **Линейные дифференциальные операторы.** Vydalo Государственное издательство технико-теоретической литературы, Moskva, 1954, nákladem 6000 výtisků, 352 stran, 19 obrázků. Cena Kčs 15,60.

Theorie diferenciálních operátorů je důležitým nástrojem theoretické fysiky. Vyvíjela se v neustálém styku s různými fysikálními problémy; k nejstarším z nich patří otázky, týkající se pohybu kmitající struny, z novějších a nejdůležitějších je třeba uvést problémy kvantové mechaniky. Při své bezprostřední aplikabilitě je tato theorie svými methodami úzce spjata s tak abstraktním odvětvím matematiky, jako je funkcionální analysa. Tento zjev není ostatně ojedinělý; v moderní fysice a technice se nejednou ukázaly jako velmi užitečné i takové matematické theorie, které do té doby byly pro svou abstraktnost považovány za nepoužitelné.

Vzhledem k svému praktickému významu je nejvíce propracována theorie lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu, jíž jsou věnovány obě monografie z tohoto oboru, které kromě Najmarkovy knihy ve světové literatuře najdeme, t. j. Titchmarshova kniha „Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations" (1946) a Levitanova monografie „Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка" (1950).

Najmark podává ve své knize výklad theorie diferenciálních operátorů libovolného řádu. Kniha je rozdělena na dvě části.

První část, zabírající necelou její třetinu, obsahuje tři z celkových osmi kapitol a je věnována theorii diferenciálních operátorů na omezeném intervalu, jakožto operátorů v prostoru všech funkcí majících v tomto intervalu derivace do n-tého řádu včetně. V první kapitole se definují základní pojmy a pojednává se o vlastních hodnotách, vlastních funkcích a Greenově funkci diferenciálního operátoru; druhá kapitola obsahuje důkaz asymptotických vzorců pro vlastní hodnoty a vlastní funkce diferenciálního operátoru a věty o rozložitelnosti funkce z definičního oboru diferenciálního operátoru v řadu vlastních funkcí tohoto operátoru. Ve třetí kapitole se tyto otázky studují pro operátory v prostoru vektorových funkcí.

Druhá část pojednává o zobecněných diferenciálních operátorech jako operátorech v Hilbertově prostoru L^2. Ve čtvrté kapitole je shrnut potřebný materiál z obecné theorie lineárních operátorů v Hilbertově prostoru. Pátá kapitola pojednává podrobně o symetrických diferenciálních operátorech, šestá je věnována spektrální analyse diferenciálních operátorů. V nejrozsáhlejší sedmé kapitole se studuje defekt a spektrum diferenciálních operátorů v závislosti na jejich koeficientech; na konci kapitoly jsou uvedeny příklady z kvantové mechaniky. Poslední kapitola obsahuje řešení t. zv. obrácené Sturm-Liouvilleovy úlohy. V dodatku je dokázána Stieltjesova inversní formule. V seznamu literatury na konci knihy je uvedeno 173 prací 79 autorů. Kniha je opatřena věcným rejstříkem a přehledným obsahem.

V autorově pojetí je theorie diferenciálních operátorů opřena o obecné pojmy a methody funkcionální analysy; toto jednotící hledisko umožňuje hlubší pohled do myšlenkové struktury theorie. Výklad je jasný a přesný; důkazy jsou provedeny zpravidla podrobně a ke studiu stačí základní vědomosti z theorie diferenciálních rovnic, theorie funkcí komplexní proměnné a funkcionální analysy, z níž potřebné partie jsou v knize vyloženy. Kniha obsahuje mnoho nových výsledků, dostupných jinak jen v původních pracích, zejména sovětských autorů, kteří mají významný podíl na vybudování theorie diferenciálních operátorů. Neobyčejně cenné jsou poznámky, umístěné na konci mnoha paragrafů, kde autor upozorňuje na různé modifikace a zobecnění studovaných pojmů a problémů s přesnými a objektivními literárními odkazy. Čtenář se tak nejen dozví i o výsledcích, které nebyly do knihy pojaty, ale získá také přehled o stavu theorie v době, kdy byla kniha psána. Po stránce grafické a vnější úpravy je kniha velmi pěkně vypravena.

Vynikající Najmarkovu knihu lze stejně doporučit zájemci, který z ní theorii diferenciálních operátorů hodlá studovat, jako vědeckému pracovníkovi, který sám v tomto oboru pracuje.

Ladislav Kosmák, Praha.

Georg Aumann: **Reelle Funktionen.** Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band LXVIII, Springer-Verlag 1954, 424 stran, 22 obrazů.

Aumannova kniha o reálných funkcích se důstojně řadí do známých matematických knih ze sbírky *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*; je to, myslím, zatím její jediná kniha věnovaná tomuto předmětu. Kniha přes velmi obecné hledisko, stručný výklad a značný objem nepodává obraz o celém stavu theorie; autor v předmluvě upozorňuje, že chybí výklad theorie derivování množinových funkcí, Denjoyových integrálů, plošných integrálů a jiných disciplin.

Kniha je určena všem, kdo mají zájem o theorii reálných funkcí a mají základní znalosti theorie reálných čísel a infinitesimálního počtu. Po předběžné poznámce o reálných číslech a přehledu obsahu knihy následuje objasnění užitých symbolů ($\triangleright$ pro implikaci a j.). Vlastní theorie je pak rozdělena do devíti kapitol; v kapitolách se pro odstavce důsledně užívá „zobecněného" desetinného třídění (na př. 7.5.10.3), takže kniha je vzorně přehledná.

První kapitola je věnována obecné theorii množin. Stanovisko je neaxiomatické. Následuje druhá kapitola pojednávající o pojmu uspořádání a jeho různých modifikacích (polouspořádané, uspořádané, dobře uspořádané množiny; ordinální čísla, kardinální čísla); zde je také zpracována obecná theorie limit (pojem rastru, později filtru atd.).

Třetí kapitola zpracovává základy theorie svazů; důraz je kladen na prostudování distributivních relativně komplementárních svazů (autor tento útvar nazývá *Somenring*, jeho prvky *Somen*). Každý takový svaz dá se rozšířit na svaz s největším prvkem; takto rozšířený svaz je pak Booleovou algebrou. Je dokázána Stoneova věta o isomorfii těchto objektů a množinových těles. Poslední odstavec jedná o σ-Booleových algebrách a jejich konkretní representaci (Loomisova věta).

Ve čtvrté kapitole je velmi podrobně zpracována theorie metrických (a zčásti topologických) prostorů se zřetelem na pozdější aplikace; na př. pojem souvislosti a lokální souvislosti se nevyskytuje. Velmi zajímavý je odstavec o konvergenčních prostorech (zobecnění $\mathfrak{L}$-prostorů). Uniformní prostory se neprobírají.

Po těchto přípravných kapitolách se přechází k vlastnímu předmětu. Pátá kapitola pojednává o funkcích, ponejvíce na abstraktních prostorech. Po vyšetření základních vlastností spojitých funkcí se přechází k otázce o existenci nekonstantních spojitých funkcí na topologických prostorech a metrisaci. Dále se pojednává o polospojitých funkcích a o nespojitostech; zvláště se vyšetřují funkce „minimálně nespojité", t. j. takové, u kterých není možno množinu bodů spojitosti zvětšit změnou hodnot v bodech nespojitosti. Po odstavci o Baireových funkcích přichází Stoneovo zobecnění Weierstrassovy věty; vyšetřují se podmínky pro to, aby množina funkcí byla hustá v prostoru funkcí na nějakém prostoru. Dále je pojednáno o principu kontraktních zobrazení („*Fixpunktsatz*" ve speciálním tvaru), zaveden pojem diferencovatelného zobrazení v metrických lineárních prostorech a ukázány aplikace. V posledním odstavci se dokazuje topologickými methodami zobecnění známé věty o tom, že funkce spojitá na intervalu nabývá každé hodnoty mezi dvěma svými hodnotami.

Následuje velmi zajímavá šestá kapitola o funkcích na kartézských součinech prostorů. Především se vyšetřují metriky odvozené z metrik faktorů; dále se pojednává o souvislosti spojitosti a spojitosti podle jednotlivých proměnných (*faktorielle Stetigkeit*); speciálně jsou charakterisovány množiny bodů nespojitosti faktorielně spojitých funkcí v euklidových prostorech. Poslední odstavec pojednává o stejnoměrné konvergenci zobrazení; je udána nutná a postačující podmínka pro platnost vzorce

$$\lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y) = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y) .$$

Zatím se probírala obecná zobrazení a funkce; sedmá kapitola pojednává o reálných funkcích jedné reálné proměnné. Jejím obsahem je jemná theorie derivací a souvislost s theorií integrálu; vzhledem k poslednímu je tato kapitola jakýmsi úvodem k obecné theorii míry a integrálu, která je obsahem kapitol osmé a deváté. V 7.1 se zavádějí derivovaná čísla a nacházejí se některé vztahy mezi nimi. Na tomto základě se udávají obsáhlé postačující podmínky pro monotonii funkce. Zde se již ukazují základy theorie míry v E_1. Dále se dokazuje (Rieszovou methodou) věta o derivabilitě funkcí s omezenou variací. Další odstavce jsou věnovány theorii integrálu. Dokazuje se, že ke každé pravidelné funkci f (*Regelfunktion*; t. j. taková funkce, že $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ existují a jsou konečné v každém bodě x_0) existuje zobecněná primitivní funkce F ($F'(x) = f(x)$ platí s výjimkou spočetné množiny a funkce F je spojitá); dalším zobecněním autor přechází k Perronovu integrálu. Další odstavec je věnován obecnému problému rozšíření integrálu; množina všech funkcí se vhodně metrisuje a integrál se „maximálním" způsobem rozšíří. Vyjde-li se ze schodovitých funkcí, dostáváme na př. Riemannův nebo Lebesgueův integrál; část výsledků platí i pro integrály Stieltjesova typu. Tento postup se později zobecňuje v deváté kapitole. Na konci kapitoly se studují absolutně spojité funkce a srovnávají se co do obsažnosti různé třídy funkcí (spojité, schodovité, pravidelné, perronovsky integrovatelné atd.).

Osmá kapitola je věnována obecné theorii míry. Obvykle se vyšetřují množinové funkce na nějaké σ-algebře množin; autor v souhlase s celkovou koncepcí uvažuje funkce na distributivních relativně komplementárních svazech (Somenringen). Vzhledem ke Stoneově větě se ovšem velké zobecnění nezíská. V úvodu kapitoly se formuluje známý Lebesgueův „problém míry" a ukazuje se jeho neřešitelnost. Dokonce ani „snazší" problém objemu není obecně řešitelný.

V 8.1 se studují aditivní a σ-aditivní funkce, dále pak míra a vnější míra. V 8.2 se ukazuje vytvoření funkce intervalu z funkce bodové a dokazuje se, že jediná funkce intervalu, která je aditivní a invariantní vzhledem k translacím, je násobek elementárního objemu. Následující čtyři odstavce se zabývají methodami konstrukcí aditivních funkcí z daných „obecných" funkcí. Jsou v zásadě dvě možnosti: 1. neměnit funkční hodnoty, ale zúžit definiční obor, 2. ponechat definiční obor, ale změnit hodnoty.

Odstavec 8.3 je věnován prvnímu způsobu; je to methoda aditivního rozkladu, známá z theorie Carathéodoryho míry. (Řekneme, že $A \in \mathfrak{B}$ aditivně rozkládá funkci f, když pro každé $W \in \mathfrak{B}$ platí $f(W) = f(WA) + f(W + AW)$.)

Další tři odstavce pojednávají o třech provedeních druhé možnosti. V 8.4 je výklad o funkcích s omezenou variací, v 8.6 o konstrukci vnější míry a obsáhlý odstavec 8.5 je věnován zobecnění Burkillova integrálu pod názvem *totalisace* (nezaměňovat s Denjoyovými integrály). Je zde speciálně probrána theorie Stieltjesova integrálu (v zajímavém zobecnění), Rieszova věta o lineárních funkcionálech na prostoru spojitých funkcí a jiné aplikace. 8.7 resp. 8.8 jedná o doplnění objemu resp. míry. V 8.9 je výklad o theorii redukce objemu a míry. (Ztotožňují se prvky, jejichž symetrická diference má míru nula.) Odstavec 8.10 jedná o rozšíření objemu na míru. Konečně poslední odstavec 8.11 obsahuje aplikace předchozích výsledků na eukleidův prostor; navíc je dokázána Vitaliho věta o pokrytí a věta o isomorfismu separabilní normované redukované míry s redukovanou Lebesgueovou měrou na $\langle 0, 1 \rangle$.

Poslední devátá kapitola je věnována obecné theorii integrálu. Vzhledem k předchozí kapitole by se mohlo snadno jít obvyklou cestou (Saks, Halmos); autor však volí cestu funkcionální analysy. Na základě Stoneovy práce *Notes on integration* vezme za výchozí bod lineární prostor funkcí, obsahující s každou funkcí i její absolutní hodnotu a uspořádaný obvyklým způsobem; na něm pak uvažuje nezáporný lineární funkcionál a nazývá ho *elementární integrál*. V prostoru všech funkcí se zavede pomocí integrálu norma; pomocí normy se provede rozšíření integrálu (*Normintegral*). Nyní se brzy dokáže na př. Lebesgueova věta o limitním přechodu v integrálech. Pomocí integrálu se definují měřitelné funkce. V 9.4 je vyšetřována souvislost s kapitolou 8. Pomocí integrálu se definuje míra. Hlavním výsledkem je tato věta:

Je-li $f \equiv 1$ měřitelná, je integrál, vytvořený popsanou methodou, pro konečné funkce ekvivalentní s obvyklým Lebesgueovým integrálem podle definované míry.

Výsledku se používá k vyjádření lineárního funkcionálu na prostoru spojitých funkcí s kompaktním nosičem lokálně kompaktního topologického prostoru integrálem. Dále se vyšetřují prostory L^p a dokazuje se věta o lineárním funkcionálu v L_2. Následující velmi zajímavý odstavec „srovnává" integrály na témž prostoru; výsledků se pak používá k důkazu obecné věty o substituci. Konečně v 9.8 se pojednává o součinu prostorů a dokazuje se Fubiniho věta.

Tento přehled snad ukazuje na velké množství studovaných otázek, modernost a originalitu pojetí. Ke kladům knihy je dále možno připočíst vzorně sestavený rejstřík s odkazy na literaturu, a věcný seznam, který se při studiu často potřebuje. Z drobných nedopatření uveďme tato: V knize není vůbec definován komplementární svaz, ač se o něm mluví (srv. 3.3.2); v 8.6.1.3 se mluví o objemu (*Inhalt*), i když je tento pojem definován až v 8.7. V 9.7.1 se mluví o pologrupách, ač tento pojem není objasněn. Tiskových chyb je velmi málo a jsou okamžitě patrny.

Za netradiční je třeba považovat zvláště užívání rastrů a vůbec polouspořádaných množin; snaha po redukci „spočetnosti" je ostatně patrna i z jiných nových německých knih a článků. I když možná otázky probírané v knize nejsou v centru současných zájmů, přece jen důkladná znalost reálných funkcí je potřebná v mnoha jiných odvětvích matematiky. Aumannova kniha by patrně byla skvělou příruční knihou, která dává zároveň mnoho užitečných podnětů. Snad se jí dočkáme v hojném počtu alespoň v ruském překladu.

Karel Karták, Praha.