Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

REFERÁTY

ZNÁHODNĚNÁ ANALYSA

(Referát o přednášce dr ANTONÍNA ŠPAČKA konané v matematické obci pražské dne 16. ledna 1956.)

Přednášející promluvil o možnosti „znáhodnění" některých pojmů matematické analysy.

Nechť X a Y jsou neprázdné množiny a nechť F je množina všech zobrazení X do Y. Budiž dána transformace V systému podmnožin množiny X do systému podmnožin množiny F. Je-li $f \in V(A)$, říkáme, že zobrazení f má vlastnost (V) na množině A.

Uvedeme příklad. Za X i Y zvolíme množinu reálných čísel. Je zřejmé, že příkladem transformace V je zobrazení, při němž obrazem množiny $A \subset X$ je množina všech reálných funkcí spojitých na množině A.

Ve funkcionální analyse nás zajímají velmi často zobrazení, která mají vlastnost (V) na celé množině X (na př. aditivita a spojitost u lineárních funkcionálů). Většina vlastností, kterými se zabýváme, splňuje tyto dvě podmínky: 1. vlastnost (V) je dědičná, t. j. je-li $A \subset B \subset X$, je $V(B) \subset V(A)$; 2. vlastnost (V) je rozšiřitelná vzhledem k vhodně zvolenému systému $\mathfrak{D}$ podmnožin množiny X na celý prostor X. Tak na př. je-li D libovolná spočetná množina na přímce a je-li $f \in F$ funkce stejnoměrně spojitá na D, pak existuje $g \in F$ taková, že $g(x) = f(x)$ pro všechna $x \in D$ a g je stejnoměrně spojitá na X.

Je jistě účelné uvažovat o znáhodnění pojmů funkcionální analysy. Snadno zavedeme náhodné transformace T jako zobrazení kartézského součinu $\Omega \times X$ do množiny Y. Předpokládejme, že je dána σ-algebra $\mathfrak{B}$ podmnožin množiny Y. Budiž $\mathfrak{S}$ minimální σ-algebra podmnožin množiny Ω, vzhledem k níž je transformace $T(\cdot, x)$ měřitelná pro každé pevné $x \in X$. Budiž dále na σ-algebře $\mathfrak{S}$ dána pravděpodobnostní míra μ. Poznamenejme ještě, že za σ-algebru $\mathfrak{B}$ se volívá σ-algebra borelovských množin na Y, je-li Y alespoň topologický prostor.

V poslední době se theorie pravděpodobnosti velmi často zabývá otázkami tohoto druhu: Lze stochastický proces určitého typu realisovat v prostoru funkcí s danou vlastností? Je proto přirozené položit si také v našich úvahách otázku, za jakých předpokladů lze náhodnou transformaci T (což není ostatně nic jiného než určité zobecnění pojmu stochastického procesu) realisovat v prostoru zobrazení $T(\omega, .)$ s vlastností (V). Jak dokázal DOOB ve známé větě (viz [1]), lze to provést tehdy a jen tehdy, je-li

$$\bar{\mu}\{\omega : T(\omega, .) \in V(X)\} = 1 ,$$

kde $\bar{\mu}$ značí vnější míru indukovanou mírou μ. Ovšem ověření této podmínky bývá někdy velmi obtížné. Přednášející dokázal v práci [2] větu, která to v mnoha případech usnadňuje, když náhodná transformace T je V-regulární. Vysvětlíme nejprve, co nazýváme V-regulární náhodnou transformací.

Budiž $\mathfrak{D}$ neprázdný systém podmnožin množiny X, který splňuje tyto dvě podmínky: $\bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D = X$; je-li $D_i \in \mathfrak{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, existuje $D_0 \in \mathfrak{D}$ tak, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subset D_0$.

Řekneme, že náhodná transformace T je V-regulární, splňuje-li tyto podmínky: je-li $A \subset B \subset X$, je

$$\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(B)\} \subset \{\omega\colon T(\omega, .) \in V(A)\}\,; \tag{1}$$

je-li $D \in \mathfrak{D}$, je

$$\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(D)\} \in \mathfrak{S}\,; \tag{2}$$

je-li $D \in \mathfrak{D}$, $\omega_0 \in \{\omega\colon T(\omega, .) \in V(D)\}$, je

$$\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(X)\} \cap \bigcap_{x \in D} \{\omega\colon T(\omega, x) = T(\omega_0, x)\} \neq 0\,. \tag{3}$$

(1) je zřejmě obdobou dědičnosti vlastnosti (V) a (3) obdobou její rozšiřitelnosti vzhledem k systému $\mathfrak{D}$.

Věta 1 v práci [2] zní pak takto:

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby $\bar{\mu}\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(X)\} = 1$ *pro V-regulární náhodnou transformaci T, je, aby pro každé* $D \in \mathfrak{D}$ *bylo* $\mu\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(D)\} = 1$.

V práci [2] je tato věta aplikována na případ stejnoměrně spojitých funkcí, funkcí splňujících Lipschitzovu podmínku a aditivních funkcí na Booleových σ-algebrách.

Ukazuje se však, že ani ověření podmínek námi uvedené věty není mnohdy nikterak snadné. Kromě toho se vyskytuje i řada jiných otázek týkajících se náhodných transformací, jako otázka měřitelnosti množiny $\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(X)\}$ a jiné. Bylo dosaženo celé řady výsledků, které jsou obsaženy v pracích [3] až [9]. V přednášce jsme slyšeli jen o některých z nich. Zmíníme se o těch, které nebyly dosud uveřejněny.

Práce [5] řeší otázku, kdy je náhodné zobrazení separabilního prostoru typu G do sebe realisovatelné v prostoru lineárních zobrazení a otázku inverse náhodné lineární transformace.

Práce [6] zavádí pojem náhodné množinové funkce, zabývá se otázkou jejich realisovatelnosti v prostoru množinových funkcí absolutně spojitých vzhledem k dané množinové funkci a obsahuje „znáhodněnou" Radon-Nikodymovu větu.

V práci [7] byl zaveden pojem náhodné Schwartzovy distribuce a dokázána nutná a postačující podmínka její existence.

Konečně práce [8] a [9] obsahují některé tvary silného zákona velkých čísel pro zobecněné náhodné proměnné (měřitelná zobrazení Ω do Banachova prostoru Y); je jich využito ke studiu zobecněných stochastických aproximací.

Na řešení otázek tohoto druhu se i dále pracuje. V seznamu literatury jsou pod čísly [10] až [15] uvedeny práce, které spadají sice do téže oblasti problémů, ale vznikly později.

Literatura

[1] *J. L. Doob*: Probability in function space. Bull. Amer. Math. Soc., vol. *53* (1947), str. 15—30.

[2] *A. Špaček*: Regularity properties of random transforms. Czechoslovak Math. J. *5* (1955), str. 143—151.

[3] *A. Špaček*: Zufällige Gleichungen. Czechoslovak Math. J. *5* (1955), str. 462—466.

[4] *A. Špaček*: Note on K. Menger's probabilistic geometry. Czechoslovak Math. J. 6 (1956), str. 72—74.

[5] *A. Špaček*: Sur l'inversion des transformations aléatoires presque sûrement linéaires. Vyjde v Acta Math.

[6] *A. Špaček*: Zufällige Mengenfunktionen. Vyjde v Math. Nachrichten.

[7] *K. Winkelbauer*: К теории обобщенных случайных процессов. Vyjde v Czechoslovak Math. J.

[8] *O. Hanš*: The strong law of large numbers for generalized random variables. Bull. Acad. Polonaise Sci. Vol. IV, str. 15—17.

[9] *O. Hanš*: Zobecněné náhodné veličiny a náhodné transformace. Kandidátská disertační práce.

[10] *A. Špaček*: Prolongement des transformations aléatoires. Připraveno k publikaci.

[11] *O. Hanš*: Reduzierende zufällige Transformationen. Vyjde v Czechoslovak Math. J.

[12] *O. Hanš*: Inverse and adjoint transforms of random linear transforms. Připraveno k publikaci.

[13] *O. Hanš*: O vlastnostech náhodných transformací. Písemná práce pro kandidátské zkoušky.

[14] *M. Ullrich*: Theorie náhodných distribucí. Připravovaná kandidátská disertační práce.

[15] *M. Driml*: Distribuční a charakteristické funkcionály pro zobecněné náhodné proměnné. Připravovaná kandidátská disertační práce.

Miloslav Driml, Praha.

LINEÁRNÍ ALGEBRA A PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

(Referát Miloslava Jůzy přednesený v matematické obci pražské dne 12. března 1956.)

Obsahem referátu byla 5. a 6. kapitola knihy Hodge-Pedoe: *Methods of Algebraic Geometry*, pojednávající o vztahu algebraické a synthetické definice projektivního prostoru.

Budiž T těleso, ne nutně komutativní. Uspořádanou množinu $n + 1$ prvků $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ tělesa T takovou, že nejsou všechna a_i rovna nule, nazveme aritmetickým bodem n-rozměrného číselného projektivního prostoru nad T. Dva aritmetické body $(a_0, \ldots, a_n)$, $(b_0, \ldots, b_n)$ nazveme ekvivalentní zprava, jestliže existuje $\lambda \in T$ tak, že $a_i = b_i\lambda$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$. Každou třídu sobě ekvivalentních aritmetických bodů nazveme bodem pravostranného n-rozměrného číselného projektivního prostoru nad T, množinu všech takových bodů pravostranným n-rozměrným číselným projektivním prostorem nad T. Podobně definujeme levostranný n-rozměrný číselný projektivní prostor nad T.

Budiž (a_{ij}) regulární matice n-tého stupně nad T. Budiž π zobrazení, které aritmetickému bodu $(x_0, \ldots, x_n)$ přiřazuje aritmetický bod $(y_0, \ldots, y_n)$, při čemž $y_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j$ pro $i = 0, \ldots, n$. Snadno zjistíme, že obrazy bodů ekvivalentních zprava jsou opět body ekvivalentní zprava a že je to prosté zobrazení pravostranného projektivního prostoru na sebe. Zobrazení π nazýváme projektivní transformací tohoto prostoru.

Budiž S množina a mějme dáno prosté zobrazení množiny S na pravostranný n-rozměrný číselný projektivní prostor nad T. Pak množinu S nazveme pravostranným n-rozměrným projektivním prostorem nad T a prvkům množiny S budeme říkat body tohoto prostoru. Jestliže bod $A \in S$ je při tomto zobrazení zobrazen na bod $(a_0, \ldots, a_n)$ číselného projektivního prostoru, nazýváme čísla $a_0, \ldots, a_n$ souřadnicemi bodu A. Budeme v tomto případě psát $A = (a_0, \ldots, a_n)$. Budiž π projektivní transformace n-rozměrného číselného projektivního prostoru nad T. Jestliže každému bodu $X \in S$ místo souřadnic $(x_0, \ldots, x_n)$ přiřadíme souřadnice $\pi(x_0, \ldots, x_n)$, bude množina S opět n-rozměrným projektivním prostorem nad T. Každou takovouto změnu souřadnic budeme nazývat přípustnou transformací souřadnic prostoru S.

Budiž S pravostranný n-rozměrný projektivní prostor nad T, $A = (a_0, \ldots, a_n)$, $A^j = (a_0^j, \ldots, a_n^j)$, $j = 0, \ldots, k$ body tohoto prostoru. Bod A nazveme lineárně závislým na bodech $A^0, \ldots, A^k$, jestliže existují prvky $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ z T tak, že $a_i = \sum_{j=0}^{k} a_i^j \lambda_j$, $i = 0, \ldots, n$. Body $A^0, \ldots, A^k$ nazveme lineárně závislé, jestliže některý z nich je lineárně závislý na ostatních. Vztah lineární závislosti se zřejmě nemění při přípustné transformaci souřadnic ani nezávisí na tom, jak jednotlivé body vyjádříme pomocí aritmetických bodů.

Buďtež $A^0, \ldots, A^k$, $k \geqq 0$, lineárně nezávislé body prostoru S. Množinu bodů, které jsou na bodech $A^0, \ldots, A^k$ lineárně závislé, nazveme k-rozměrným lineárním podprostorem prostoru S určeným body $A^j, \ldots, A^k$. Vyjádřeme pevně body $A^j = (a_0^j, \ldots, a_n^j)$ pomocí aritmetických bodů a nechť bod $A = (a_0, \ldots, a_n)$ leží v k-rozměrném podprostoru určeném body $A^0, \ldots, A^k$. Pak $a_i = \sum_{j=0}^{n} a_i^j \lambda_i$, při čemž všechna λ_i nejsou současně rovna nule. Jestliže všechny souřadnice bodu A násobíme zprava prvkem $\lambda \neq 0$ tělesa T, projeví se to tím, že všechna λ_i se též násobí zprava prvkem λ. Snadno zjistíme, že tu máme prosté zobrazení k-rozměrného lineárního podprostoru pravostranného prostoru S do pravostranného k-rozměrného číselného projektivního prostoru nad T. Každý k-rozměrný lineární podprostor prostoru S tedy můžeme považovat za pravostranný k-rozměrný projektivní prostor nad T. Rovněž snadno zjistíme, že $k + 1$ bodů prostoru S je lineárně závislých tehdy a jen tehdy, jestliže leží v nějakém q-rozměrném lineárním podprostoru, kde $q < k$. 0-rozměrné lineární podprostory jsou body.

Budiž opět S pravostranný n-rozměrný projektivní prostor nad T. Lineární k-rozměrné podprostory tohoto prostoru budeme značit S_k, po případě s indexy nahoře. Buďtež S_p, S_q dva lineární podprostory prostoru S. Jestliže každý bod podprostoru S_p leží v podprostoru S_q, řekneme, že S_p je částí S_q (leží v S_q a pod.) a budeme psát $S_p \subset S_q$. Můžeme pak dokázat tyto věty:

I. *Jestliže $S_p \subset S_q$ a $S_q \subset S_p$, pak $S_p = S_q$.*

II. *Jestliže $S_p \subset S_q$ a $S_q \subset S_r$, pak $S_p \subset S_r$.*

III. *Každý S_1 obsahuje aspoň tři různé body.*

IV. *Pro každých $p + 1$ lineárně nezávislých bodů existuje aspoň jeden S_p, který je obsahuje.*

V. *V každém S_p existuje aspoň jedna množina z $p + 1$ lineárně nezávislých bodů.*

VI. *Jestliže $p + 1$ lineárně nezávislých bodů leží v nějakém S_q, pak každé S_p obsahující tyto body je částí tohoto S_q.*

VII. *Nechť S_p a S_q jsou dva lineární podprostory v S. Jestliže $p + 1$ bodů $P^0, \ldots, P^p$ ležících v S_p je lineárně nezávislých, $q + 1$ bodů $Q^0, \ldots, Q^q$ ležících v S_q je lineárně nezávislých, ale $p + q + 2$ bodů $P^0, \ldots, P^p, Q^0, \ldots, Q^q$ je lineárně závislých, pak existuje bod R, ležící současně v S_p i v S_q.*

VIII. *Existuje aspoň jedna množina z $n + 1$ lineárně nezávislých bodů, ale každých m bodů při $m > n + 1$ je lineárně závislých.*

Mějme naopak množinu nějakých objektů, které budeme nazývat lineárními podprostory dimense $0, 1, \ldots, n$ a označovat $S_0, S_0', \ldots, S_1, S_1', \ldots, S_n$. Mezi těmito lineárními podprostory mějme definován jakýsi vztah $S_p \subset S_q$ (S_p je částí S_q, S_q obsahuje S_p). Lineární podprostory dimense 0 budeme nazývat body. $k + 1$ bodů nazveme lineárně závislými, jestliže existuje lineární podprostor dimense $q < k$, který je všechny obsahuje. Nechť jsou splněny vlastnosti I—VIII. Budiž S množina všech bodů $S_0, S_0', \ldots$ Pak v případě $n > 2$ lze sestrojit takové těleso T, že S je pravostranným n-rozměrným projektivním prostorem nad T, při čemž ke každému k-rozměrnému lineárnímu podprostoru tohoto prostoru existuje takové S_k, že tento podprostor je právě množina těch bodů X, pro které $X \subset S_k$. Pro $n = 2$ takové těleso obecně neexistuje, nýbrž existuje právě tehdy, jestliže mezi objekty $S_0, S_0', \ldots, S_1, S_1', \ldots, S_n$ je splněna známá Desarguesova věta.

Miloslav Jůza, Bratislava.

MATEMATICKÁ PROBLEMATIKA THEORIE ELEKTRICKÝCH OBVODŮ

(Referát o přednášce VÁCLAVA DOLEŽALA, přednesené v Matematické obci pražské dne 16. dubna 1956.)

V přednášce jsem se pokusil ilustrovat povahu problémů v theorii lineárních elektrických obvodů se soustředěnými parametry na příkladě synthesy $2n$-pólu.

Pod pojmem $2n$-pól rozumí se v elektrotechnice jistý útvar, kterému je možno jednoznačně přiřaditi charakteristickou matici, která vystihuje jeho fysikální vlastnosti a která je maticí semipositivní. Pod synthesou rozumíme pak sestrojení takového $2n$-pólu, jehož charakteristická matice je rovna předepsané matici.

Označme Γ množinu všech komplexních čísel λ, pro něž Re $\lambda > 0$, $\bar{\Gamma}$ pak její uzávěr.

Semipositivní matici zavedeme definicí:

Řekneme, že čtvercová matice $\|w_{st}\|$ n-tého řádu je semipositivní maticí, jestliže:

1. její prvky jsou racionálními funkcemi proměnné λ, které jsou reálné pro λ reálné,

2. $w_{st} = w_{ts}$ pro všechna $s, t \leq n$,

3. pro každý systém reálných čísel $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a pro každé $\lambda \in \Gamma$, které není pólem žádné w_{st}, je splněna nerovnost

$$\text{Re} \sum_{s,t} w_{st} x_s x_t \geq 0 \, .$$

Je-li nadto splněna nerovnost $\|\text{Re}\, w_{st}(i\omega)\| \equiv 0$ (ω reálné), nazveme $\|w_{st}\|$ reaktanční maticí. Pak platí tyto věty:

Věta 1. *Buď $\|w_{st}\|$ semipositivní matice n-tého řádu; nechť žádná z funkcí w_{st} nemá na množině $\bar{\Gamma} - \Gamma$ póly jinde než v bodech $0, \infty, i\omega_r, -i\omega_r$ ($\omega_r > 0$; $r = 1, 2, \ldots, m$). Potom je*

$$\|w_{st}\| = \frac{1}{\lambda} H^{(0)} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_r^2} H^{(r)} + \lambda H^{(\infty)} + \|z_{st}\| \, ,$$

kde $H^{(0)}, H^{(r)}, H^{(\infty)}$ jsou číselné matice positivně semidefinitních kvadratických forem, při čemž $\|z_{st}\|$ je semipositivní matice, jejíž prvky nemají pólů v $\bar{\Gamma}$.

Věta 2. *Buď $\|w_{st}\|$ semipositivní matice n-tého řádu, jejíž žádný prvek nemá pólů na imaginární ose a v ∞, a pro niž matice $\|\text{Re}\, w_{st}(i\omega)\|$ má hodnost 1.*

Pak existuje reaktanční matice $\|u_{st}\|$ *řádu* $n+1$ *tak, že platí*

$$w_{st} = u_{st} - \frac{u_{s,n+1}\, u_{t,n+1}}{1 + u_{n+1,n+1}}, \quad s, t = 1, 2, \ldots, n.$$

Věta 3. Buď $\|w_{st}\|$ *semipositivní matice n-tého řádu té vlastnosti, že žádné* w_{st} *nemá pólů na imaginární ose a v* ∞. *Pak existují semipositivní matice* $\|w_{st}^{(p)}\|$, $p = 1, 2, \ldots, k \leq n$ *tak, že* $\|\mathrm{Re}\, w_{st}^{(p)}(i\omega)\|$ *má hodnost* 1 *a* $\|w_{st}\| = \sum_{p=1}^{k} \|w_{st}^{(p)}\|$.

Závěrem přednášky jsem naznačil, kterak je možno pomocí vět 1, 2, 3 uskutečnit Oonovu synthesu $2n$-pólu na základě pojmů paralelního spojení konečného počtu $2n$-pólů a redukce $2(n+1)$-pólu na $2n$-pól.

Václav Doležal, Praha.

GREENOVA VĚTA

(Referát o přednášce doc. dr Jana Maříka, proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 26. března 1956.)

Přednášející vyložil hlavní výsledky článku o Greenově větě, který připravují do tisku J. Král a J. Mařík. Úkolem onoho článku je ukázat souvislost křivkového integrálu s dvojným integrálem, která se obvykle (za určitých předpokladů o funkcích P, Q a o křivce K) vyjadřuje formulí

$$\int_K P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,;$$

K bývá zpravidla Jordanova křivka a G její vnitřek.

Budiž f až do konce pevně daná komplexní spojitá funkce s konečnou variací v intervalu $\langle a, b\rangle$. (Tím je míněno, že $f = f_1 + if_2$, kde f_1, f_2 jsou reálné funkce s konečnou variací v $\langle a, b\rangle$.) Buď E_2 množina všech (konečných) komplexních čísel; položme $K = f(\langle a, b\rangle)$.[1])

Je-li g komplexní spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, klademe

$$\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}f(t) = \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}f_1(t) + i \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}f_2(t)\,.$$

Dá se ukázat, že pro všechna $z \in E_2 - K$ jest

$$\exp\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}f(t)}{f(t) - z}\right) = \frac{f(b) - z}{f(a) - z}.^{2)} \tag{1}$$

[1]) Tedy naše „křivka" K má sice konečnou délku, ale jinak se může mnohonásobně protínat, může být mnohonásobně probíhanou úsečkou nebo bodem. Nelze proto mluvit o nějakém jejím vnitřku, nýbrž jenom o komponentách množiny $E_2 - K$.

[2]) Tedy i pro naši „křivku" K lze zachránit známou formuli $\int_K \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \equiv \mathrm{Log}\,(\zeta(b) - z) - \mathrm{Log}\,(\zeta(a) - z) \pmod{2\pi i}$.

Dále buď

$$\operatorname{ind}_f z = \operatorname{ind} z = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\mathrm{d}f(t)}{f(t) - z} \quad (z \in E_2 - K)\,. \tag{2}$$

Funkce ind z (je to komplexní funkce proměnné z v oboru $E_2 - K$) má důležitý význam v případě, že $f(b) = f(a)$. Potom plyne snadno z (1), že funkce ind z nabývá jen celočíselných hodnot; mimo to je konstantní na každé komponentě množiny $E_2 - K$. Číslo ind z udává, kolikrát a v jakém smyslu „oběhne" bod $f(t)$ kolem bodu z, když t roste od a do b.

V dalším se stále předpokládá, že platí $f(b) = f(a)$.

Je účelné zavésti ještě toto označení: Buď φ reálná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $t \in (a, b)$. Jestliže funkce φ roste (resp. klesá) v bodě t, položme $\eta_\varphi(t) = 1$ (resp. $\eta_\varphi(t) = -1$); v ostatních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ budiž $\eta_\varphi(t) = 0$. Potom platí:

Nechť $x_1, x_2, y \in E_1$,[3] $x_1 < x_2$; nechť $\mathfrak{z}_j = x_j + iy$, $\mathfrak{z}_j \in E_2 - K$ pro $j = 1, 2$. Buď J úsečka $\overline{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2}$. Nechť $\eta_{f_2}(t) \neq 0$ pro všechna $t \in f^{-1}(J)$. Potom je množina $f^{-1}(J)$ konečná a platí

$$\operatorname{ind} \mathfrak{z}_1 = \operatorname{ind} \mathfrak{z}_2 + \sum_{f(t) \in J} \eta_{f_2}(t)\,. \tag{3}$$

Význam součtu Σ je tento: Je-li $t_0 \in f^{-1}(J)$, pak při $\eta_{f_2}(t_0) > 0$ resp. < 0 projde bod $f(t)$ skrz úsečku J v místě $f(t_0)$ mezi body $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$, které na K neleží, zdola nahoru resp. shora dolů, když t vzrůstá od a k b. Projde-li tedy při tom bod $f(t)$ celkem m-kráte zdola nahoru a n-kráte ($m, n \geq 0$) shora dolů skrz J, je onen součet roven číslu $m - n$.

Připomeňme ještě tuto (Banachovu) větu o variaci spojité funkce:

Buď φ reálná spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro $y \in E_1$ buď $p(y)$ počet prvků množiny $\varphi^{-1}(y)$ (je-li $\varphi^{-1}(y)$ nekonečná množina, buď $p(y) = +\infty$). Potom je $p(y)$ měřitelná funkce a integrál $\int_{E_1} p(y)\,\mathrm{d}y$ je roven variaci funkce φ v $\langle a, b\rangle$.

Banachova věta umožňuje odvození následující věty o substituci:

Buďte g, φ reálné spojité funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť φ má konečnou variaci. Potom pro skoro všechna $y \in E_1$ je množina $\varphi^{-1}(y)$ konečná a platí

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{\varphi(t)=y} \eta_\varphi(t)\, g(t)\Big)\, \mathrm{d}y = \int_a^b g\, \mathrm{d}\varphi\,. \tag{4}$$

Naznačíme stručně důkaz této věty. Buď B množina všech bodů z (a, b), v nichž má funkce φ ostrý lokální extrém. Snadno se zjistí, že množina B je spočetná. Dále buď M množina všech y, pro něž je množina $\varphi^{-1}(y)$ nekonečná. Z Banachovy věty plyne, že množina M má míru 0; množina

$$L = M \cup \varphi(B) \cup \{\varphi(a), \varphi(b)\}$$

má tedy také míru 0. Je-li $y \in E_1 - L$, je množina $\varphi^{-1}(y)$ konečná a pro každé $t \in \varphi^{-1}(y)$ je $\eta_\varphi(t) \neq 0$. Je-li nyní $y \in E_1 - L$ a leží-li y mimo interval I o koncových bodech $\varphi(a), \varphi(b)$ (při $\varphi(b) = \varphi(a)$ odpadá tato podmínka), je $\sum_{\varphi(t)=y} \eta_\varphi(t) = 0$; je-li však $y \in (E_1 - L) \cap I$, je $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ a součet $\sum_{\varphi(t)=y} \eta_\varphi(t)$ je roven 1 nebo -1 podle toho, je-li $\varphi(a) < \varphi(b)$ nebo $\varphi(b) < \varphi(a)$. Odtud plyne ihned, že rovnost (4) platí pro funkci g identicky rovnou jedné v $\langle a, b\rangle$. Podobně se zjistí, že (4) platí pro charakteristické funkce intervalů, obsažených

[3]) E_1 je množina všech reálných čísel.

v $\langle a, b\rangle$, a snadno se vztah (4) dokáže také pro lineární kombinace takovýchto funkcí, t. j. pro „schodovité" funkce. Je-li nyní g libovolná spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje posloupnost „schodovitých" funkcí g_n tak, že $g_n \to g$ stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$. Potom je zřejmě $|g_n| < C$ pro všechna n (při vhodném $C > 0$), $\int_a^b g_n \, d\varphi \to \int_a^b g \, d\varphi$ a jde jen o to, zda v integrálu $\int_{E_1} (\sum_{\varphi(t)=y} \eta_\varphi(t) \, g_n(t)) \, dy$ lze provést limitní přechod za integračním znamením. To však zaručuje Banachova věta, neboť je $\int_{E_1} p(y) \, dy < \infty$ a platí $|\sum_{\varphi(t)=y} \eta_\varphi(t) \, g_n(t)| \leqq C \, p(y)$ pro skoro všechna y a všechna n. Tím je důkaz hotov.

Buď nyní $G = E[z; \operatorname{ind} z \neq 0]$ a nechť reálné funkce $Q(x, y)$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ jsou spojité v okolí (kompaktní) množiny $G \cup K$.[4]) Podle (4) je

$$\int_a^b Q(f(t)) \, df_2(t) = \int_{E_1} (\sum_{f_2(t)=y} Q(f(t)) \, \eta_{f_2}(t)) \, dy \, . \tag{5}$$

Sestrojme k funkci f_2 množinu L tak, jako jsme ji sestrojili k funkci φ v důkaze vztahu (4). Buď $y \in E_1 - L$. Zejména tedy nepatří y mezi ostré lokální extrémy funkce f_2. Přímka $\operatorname{Im} z = y$ protíná množinu K v konečně mnoha bodech $z_1, \ldots, z_n$ (stačí vyšetřit případ, že tento průnik není prázdný); můžeme psát $z_k = x_k + iy$, kde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Na každé z množin $M_0 = E[z; z = x + iy, x < x_1]$, $M_j = E[z; z = x + iy, x_j < x < x_{j+1}]$ $(1 \leqq j < n)$, $M_n = E[z; z = x + iy, x_n < x]$ je funkce ind z konstantní. Zvolme $\mathfrak{z}_j \in M_j$, položme $\operatorname{ind} \mathfrak{z}_j = I_j$ $(j \geqq 0)$ a označme symbolem J_j úsečku $\overline{\mathfrak{z}_{j-1}\mathfrak{z}_j}$ $(1 \leqq j \leqq n)$. Je $I_0 = I_n = 0$ a $f_2^{-1}(y) = \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(J_j)$. Protože y není ostrým lokálním extrémem funkce f_2, je $\eta_{f_2}(t) \neq 0$ pro $t \in f^{-1}(J_j)$ a podle (3) je tedy

$$I_{j-1} - I_j = \operatorname{ind} \mathfrak{z}_{j-1} - \operatorname{ind} \mathfrak{z}_j = \sum_{f(t) \in J_j} \eta_{f_2}(t) \, .$$

Dále platí

$$\sum_{f_2(t)=y} Q(f(t)) \, \eta_{f_2}(t) = \sum_{j=1}^n Q(z_j) \sum_{f(t) \in J_j} \eta_{f_2}(t) = \sum_{j=1}^n Q(z_j) \, (I_{j-1} - I_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} I_j(Q(z_{j+1}) - Q(z_j)) = \int_{G_y^1} \operatorname{ind}(x, y) \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \, dx \, ,$$

kde $G_y^1 = E[x; x + iy \in G]$. Celkem tedy podle (5) je

$$\int_a^b Q(f(t)) \, df_2(t) = \int_{E_1} \left(\int_{G_y^1} \operatorname{ind}(x, y) \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \, dx \right) dy \, .$$

Snadno se však zjistí, že $\iint_{E_2} |\operatorname{ind} z| \, dx \, dy < +\infty$; existuje tedy $\iint_G \operatorname{ind} z \dfrac{\partial Q}{\partial x}(z) \, dx \, dy$ a rovná se $\int_a^b Q(f(t)) \, df_2(t)$.

---

[4]) Píšeme ovšem $Q(x, y) = Q(x + iy)$; podobně při $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ a $\operatorname{ind}(x,y)$.

Podobně se odvodí vztah

$$\int_a^b P(f(t))\, \mathrm{d}f_1(t) = -\iint_G \operatorname{ind} z \frac{\partial P}{\partial y}(z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

za předpokladu, že reálné funkce P, $\frac{\partial P}{\partial y}$ jsou spojité v okolí množiny $G \cup K$. Tím je dokázána věta:

Buď f komplexní spojitá funkce s konečnou variací v $\langle a, b\rangle$; nechť $f(b) = f(a)$. Buď $K = f(\langle a, b\rangle)$. Definujme funkci ind z *podle (2). Nechť reálné funkce P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ jsou spojité v okolí množiny $G \cup K$, kde $G = E[z; \operatorname{ind} z \neq 0]$. Potom jest*

$$\int_a^b P(f(t))\, \mathrm{d}f_1(t) + \int_a^b Q(f(t))\, \mathrm{d}f_2(t) = \iint_G \operatorname{ind} z \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(z) - \frac{\partial P}{\partial y}(z)\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Předpoklady o funkcích P, Q by bylo možno poněkud oslabit. V každém případě je však existence integrálů $\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ (každého zvlášť) při uvedeném postupu podstatná.

Závěrem doc. Mařík uvedl, že se mu podařilo jinými methodami dokázat následující větu:

Buď K kladně orientovaná Jordanova křivka konečné délky; buď G vnitřek křivky K. Nechť funkce P, Q jsou spojité na $\overline{G}$. Buď g funkce na množině G a nechť existuje Lebesgueův integrál $\iint_G g\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Nechť pro každý uzavřený dvojrozměrný interval I obsažený v G platí

$$\int_{H(I)} P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y = \iint_I g\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

($H(I)$ značí kladně orientovanou hranici intervalu I). Potom jest

$$\int_K P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y = \iint_G g\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Josef Král a *Miloš Neubauer*, Praha.

EXISTENCE DERIVACÍ V DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRII

(Referát o přednášce akademika Eduarda Čecha, konané 21. května 1956.)

Buď C křivka v trojdimensionálním eukleidovském prostoru, která je opisována bodem $A(t)$ a má tečnu $T(t)$, resp. oskulační rovinu $P(t)$. Souřadnice $A(t)$, resp. $T(t)$, resp. $P(t)$ nabývají maximální diferenciální třídy (při požadavku spojitých derivací) pro parametr $t = s$ (oblouk křivky C) resp. $t = \sigma$ (oblouk indikatrix tečen) resp. $t = \tau$ (oblouk indikatrix binormál). Vyjma případu, kdy je možno t voliti tak, že souřadnice $A(t)$ a současně $T(t)$ a $P(t)$ jsou nekonečněkrát diferencovatelné, existují další čtyři případy; v každém existuje přirozené r tak, že diferenciální třídy A, T a P při parametrech s, σ, τ jsou dány následující tabulkou:

I	A	T	P
s	$r+2$	$r+1$	r
σ	$r+1$ $r+2$	$r+1$	r
τ	r	r	$r+1$

II	A	T	P
s	$r+1$	r	r
σ	r	$r+1$	$r+1$ $r+2$
τ	r	$r+1$	$r+2$

III	A	T	P
s	$r+1$	r	r
σ	r	$r+1$	r
τ	r	r	$r+1$

IV	A	T	P
s	$r+1$	r	$r+1$
σ	r	$r+1$	r
τ	$r+1$	r	$r+1$

Alois Švec, Praha.