Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

BAIREOVA A BORELOVA MÍRA

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo dne 25. listopadu 1955.) DT:519.53

Hlavním výsledkem této práce je věta z odst. 22, která říká zejména, že každou konečnou Baireovu míru na Hausdorffově parakompaktním prostoru lze rozšířit na Borelovu.

1. Buď P libovolná množina; buď $\mathfrak{T}$ nějaký neprázdný systém částí množiny P. Jestliže $\mathfrak{T}$ obsahuje s každými svými dvěma prvky také jejich sjednocení a rozdíl, řekneme, že $\mathfrak{T}$ je *(množinové) těleso*; je-li kromě toho $P \in \mathfrak{T}$, řekneme, že $\mathfrak{T}$ je *algebra* (na množině P). Obsahuje-li těleso $\mathfrak{T}$ sjednocení (resp. průnik) každé posloupnosti svých prvků, nazveme $\mathfrak{T}$ *σ-tělesem* (resp. *δ-tělesem*).

Buď $\mathfrak{T}$ δ-těleso; nechť $T, T_1, T_2, \ldots \in \mathfrak{T}$, $T_n \subset T$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ze vztahu $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = T - \bigcap_{n=1}^{\infty} (T - T_n)$ plyne, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \in \mathfrak{T}$.

Buď naopak $\mathfrak{T}$ těleso, které má tuto vlastnost: Jestliže $T, T_1, T_2, \ldots \in \mathfrak{T}$, $T_n \subset T$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $T_p \cap T_q = \emptyset$ pro $p \neq q$, pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \in \mathfrak{T}$. Nechť $T, U_1, U_2, \ldots \in \mathfrak{T}$, $U_n \subset T$ $(n = 1, 2, \ldots)$; pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n - \bigcup_{k<n} U_k)$, takže $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \in \mathfrak{T}$. Jestliže $V_n \in \mathfrak{T}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, pak z rovnosti $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = V_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_1 - V_n)$ plyne, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \in \mathfrak{T}$. Vidíme, že $\mathfrak{T}$ je δ-těleso; zároveň jsme dokázali, že každé σ-těleso je δ-tělesem.

Jestliže σ-těleso $\mathfrak{T}$ je algebrou, řekneme, že $\mathfrak{T}$ je *σ-algebra*. Je-li δ-těleso $\mathfrak{T}$ algebrou, je také σ-algebrou, jak snadno plyne z provedených úvah.

Systém všech částí množiny P je zřejmě σ-algebrou. Snadno se zjistí, že průnik libovolného systému σ-algeber je opět σ-algebra. Je-li nyní $\mathfrak{M}$ nějaký systém částí množiny P, existuje nejmenší σ-algebra, která obsahuje $\mathfrak{M}$; je to totiž průnik všech σ-algeber, obsahujících $\mathfrak{M}$. (Podobně se zjistí, že existuje též nejmenší algebra (těleso, δ-těleso, σ-těleso), obsahující $\mathfrak{M}$.)

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots$ množiny, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ (resp. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots,$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$), píšeme $A_n \nearrow A$ (resp. $A_n \searrow A$).

Jestliže μ je nezáporná funkce[1]) na tělese $\mathfrak{T}$ a jestliže platí implikace

$A_n \in \mathfrak{T}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $A_p \cap A_q = \emptyset$ pro $p \neq q$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{T} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$, řekneme, že μ je *míra* (na $\mathfrak{T}$).

Je-li μ míra na tělese $\mathfrak{T}$ a je-li $A_n \nearrow A$, $A_n \in \mathfrak{T}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $A \in \mathfrak{T}$, platí $\mu(A_n) \to \mu(A)$, jak se snadno zjistí.

2*). *Buď P libovolná množina; buďte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ systémy částí množiny P a nechť $\emptyset \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$. Buď α (resp. β) konečná nezáporná funkce na systému $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{N}$). Nechť jsou splněny tyto předpoklady:*

1) $M \in \mathfrak{M}, N \in \mathfrak{N} \Rightarrow M - N \in \mathfrak{M}, N - M \in \mathfrak{N}$;

2) $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}, M_1 \cap M_2 = \emptyset \Rightarrow M_1 \cup M_2 \in \mathfrak{M}, \alpha(M_1) + \alpha(M_2) = \alpha(M_1 \cup M_2)$;

3) $M \in \mathfrak{M}, N \in \mathfrak{N}, M \subset N \Rightarrow \beta(N - M) = \beta(N) - \alpha(M)$;

4) $N \in \mathfrak{N} \Rightarrow \beta(N) \leqq \sup \alpha(M)$, *kde* $M \subset N$, $M \in \mathfrak{M}$;

5) $N_n \in \mathfrak{N}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta(N_n) < \infty \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathfrak{N}$, $\beta(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \beta(N_n)$.

Pro každé $A \subset P$ položme

$$\underline{\gamma}(A) = \sup \alpha(M)\,, \quad kde \quad M \in \mathfrak{M}, M \subset A,$$
$$\overline{\gamma}(A) = \inf \beta(N), \quad kde \quad N \in \mathfrak{N}, N \supset A.\text{[2]})$$

Buď $\mathfrak{T}$ systém všech množin $T \subset P$, pro něž je $\underline{\gamma}(T) = \overline{\gamma}(T) < \infty$; buď $\mathfrak{A}$ systém všech množin $A \subset P$, jejichž průnik s každým prvkem ze systému $\mathfrak{T}$ patří opět do $\mathfrak{T}$.

Potom je $\mathfrak{T}$ δ-těleso, $\mathfrak{A}$ je σ-algebra a funkce $\overline{\gamma}$ je míra na $\mathfrak{A}$. Dále je $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{T} \subset \mathfrak{A}$ a pro každé $N \in \mathfrak{N}$ platí $\underline{\gamma}(N) = \overline{\gamma}(N) = \beta(N)$.

Důkaz. Nechť $A_n \subset P$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dokážeme, že

$$\overline{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\gamma}(A_n)\,. \tag{1}$$

Nechť tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\gamma}(A_n) < \overline{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Snadno se zjistí, že existují $N_n \in \mathfrak{N}$ tak, že $N_n \supset A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta(N_n) < \overline{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Podle 5) je $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathfrak{N}$, $\beta(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n) \leqq$

[1]) Nemusí být konečná.

*) Před studiem tohoto odstavce by si měl čtenář prohlédnout důkazy vět 5 a 9, aby věděl, co si má pod systémy $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ a funkcemi α, β představit.

[2]) Jestliže neexistuje $N \in \mathfrak{N}$, $N \supset A$, je $\overline{\gamma}(A) = \inf \emptyset = \infty$.

$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \beta(N_n)$; zřejmě však $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, takže $\beta(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n) \geqq \bar{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) > \sum_{n=1}^{\infty} \beta(N_n)$. Tímto sporem je dokázána nerovnost (1).

Jestliže $A_1, A_2 \subset P$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, je

$$\underline{\gamma}(A_1) + \underline{\gamma}(A_2) \leqq \underline{\gamma}(A_1 \cup A_2)\,, \tag{2}$$

jak snadno plyne z 2).

Jestliže v 2) položíme $M_1 = M_2 = \emptyset$, dostaneme $2\alpha(\emptyset) = \alpha(\emptyset)$, tedy $\alpha(\emptyset) = 0$; podle 4) platí $\beta(\emptyset) = 0$, takže je též $\bar{\gamma}(\emptyset) = 0$. Jestliže tedy $A_1, A_2 \subset P$, plyne z (1) vztah

$$\bar{\gamma}(A_1 \cup A_2) \leqq \bar{\gamma}(A_1) + \bar{\gamma}(A_2)\,. \tag{3}$$

Nechť nyní $M \in \mathfrak{M}$, $N \in \mathfrak{N}$, $A \subset P$, $M \subset A \subset N$. Podle 3) je $\beta(N) - \alpha(M) = \beta(N - M) \geqq 0$; máme tedy

$$\underline{\gamma}(A) \leqq \bar{\gamma}(A) \tag{4}$$

pro každé $A \subset P$.

Pro $N \in \mathfrak{N}$ je zřejmě $\bar{\gamma}(N) \leqq \beta(N)$; podle 4) je však $\beta(N) \leqq \underline{\gamma}(N)$, takže

$$\underline{\gamma}(N) = \bar{\gamma}(N) = \beta(N) \tag{5}$$

pro každé $N \in \mathfrak{N}$.

Jestliže $A_1, A_2 \in \mathfrak{T}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, je podle (2), (4), (3)

$$\underline{\gamma}(A_1) + \underline{\gamma}(A_2) \leqq \underline{\gamma}(A_1 \cup A_2) \leqq \bar{\gamma}(A_1 \cup A_2) \leqq \bar{\gamma}(A_1) + \bar{\gamma}(A_2)\,,$$

tedy

$$A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{T}\,, \quad \bar{\gamma}(A_1 \cup A_2) = \bar{\gamma}(A_1) + \bar{\gamma}(A_2)\,. \tag{6}$$

Buďte nyní A_1, A_2 libovolné prvky systému $\mathfrak{T}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existují $M_i \in \mathfrak{M}$, $N_i \in \mathfrak{N}$ tak, že

$$M_i \subset A_i \subset N_i\,, \quad \beta(N_i - M_i) = \beta(N_i) - \alpha(M_i) < \varepsilon \quad (i = 1, 2).$$

Potom platí

$$M_1 - N_2 \subset A_1 - A_2 \subset N_1 - M_2\,,$$

při čemž $M_1 - N_2 \in \mathfrak{M}$, $N_1 - M_2 \in \mathfrak{N}$, $\beta(N_1 - M_2) - \alpha(M_1 - N_2) = \beta((N_1 - M_2) - (M_1 - N_2)) = \bar{\gamma}((N_1 - M_2) - (M_1 - N_2)) \leqq \bar{\gamma}((N_1 - M_1) \cup (N_2 - M_2)) \leqq \bar{\gamma}(N_1 - M_1) + \bar{\gamma}(N_2 - M_2) = \beta(N_1 - M_1) + \beta(N_2 - M_2) < 2\varepsilon$. Odtud plyne ihned $A_1 - A_2 \in \mathfrak{T}$. Protože $A_1 \cup A_2 = (A_1 - A_2) \cup A_2$, kde $(A_1 - A_2) \cap A_2 = \emptyset$, je [viz (6)] též $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{T}$. Podle (5) je $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{T}$, takže systém $\mathfrak{T}$ není prázdný. Tím je dokázáno, že $\mathfrak{T}$ je těleso.

Nechť nyní $T_1, T_2, \ldots \in \mathfrak{T}$, $T_p \cap T_q = \emptyset$ pro $p \neq q$, $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}(T_n) < \infty$. Podle (1) je $\bar{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}(T_n)$. Podle (2) však pro každé p platí $\sum_{n=1}^{p} \bar{\gamma}(T_n) =$

$= \sum_{n=1}^{p} \gamma(T_n) \leqq \gamma(\bigcup_{n=1}^{p} T_n) \leqq \gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}(T_n) \leqq \gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$. Odtud podle (4) plyne $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \in \mathfrak{T}$, $\bar{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}(T_n)$.

Jestliže $T, T_1, T_2, \ldots \in \mathfrak{T}$, $T_n \subset T$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $T_p \cap T_q = \emptyset$ pro $p \neq q$, je $\sum_{n=1}^{p} \bar{\gamma}(T_n) = \bar{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{p} T_n) \leqq \bar{\gamma}(T)$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}(T_n) < \infty$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \in \mathfrak{T}$, $\bar{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}(T_n)$. Tím je dokázáno, že $\mathfrak{T}$ je δ-těleso a že $\bar{\gamma}$ je míra na $\mathfrak{T}$.

Protože $\mathfrak{T}$ je δ-těleso, je $\mathfrak{A}$ σ-algebra. Nechť $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$, $A_p \cap A_q = \emptyset$ pro $p \neq q$. Podle (1) je $\bar{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}(A_n)$. Je-li tedy $\bar{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$, platí zde rovnost. Je-li však $\bar{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, existuje $N \in \mathfrak{N}$ tak, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset N$; je tedy $A_n = A_n \cap N \in \mathfrak{T}$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a podobně $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{T}$. Protože $\bar{\gamma}$ je míra na $\mathfrak{T}$, je opět $\bar{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}(A_n)$. Tím je vše dokázáno.

3. *Buď $\mathfrak{A}$ σ-algebra na množině P; buď μ míra na $\mathfrak{A}$. Pro libovolné $M \subset P$ položme*

$$\bar{\mu}(M) = \inf \mu(A)\,, \quad \textit{kde} \quad A \in \mathfrak{A}, A \supset M\,,$$

$$\underline{\mu}(M) = \sup \mu(A)\,, \quad \textit{kde} \quad A \in \mathfrak{A}, A \subset M\,.$$

Potom platí

$$\bar{\mu}(M \cup N) \leqq \bar{\mu}(M) + \bar{\mu}(N)\,, \tag{7}$$

$$\underline{\mu}(M \cup N) \leqq \underline{\mu}(M) + \bar{\mu}(N) \tag{8}$$

pro libovolné množiny $M, N \subset P$;

$$\underline{\mu}(M) + \underline{\mu}(N) \leqq \underline{\mu}(M \cup N)\,, \tag{9}$$

$$\underline{\mu}(M) + \bar{\mu}(N) \leqq \bar{\mu}(M \cup N)\,, \tag{10}$$

jestliže $M \cap N = \emptyset$, $M, N \subset P$;

$$\bar{\mu}(M_n) \to \bar{\mu}(M)\,, \tag{11}$$

jestliže $M_n \nearrow M \subset P$.

Důkaz. Ad (7): Zvolíme $A, B \in \mathfrak{A}$, $A \supset M$, $B \supset N$ a použijeme vztahu $\bar{\mu}(M \cup N) \leqq \mu(A \cup B) \leqq \mu(A) + \mu(B)$; obdobně se dokáže (9). Ad (8): Zvolíme $B, C \in \mathfrak{A}$, $B \supset N$, $C \subset M \cup N$ a použijeme vztahu $\mu(C) \leqq \mu(C - B) + \mu(B) \leqq \leqq \underline{\mu}(M) + \mu(B)$; obdobně se dokáže (10). Ad (11): Snadno se zjistí, že existují $A_n \in \mathfrak{A}$ tak, že $A_n \supset M_n$, $\mu(A_n) = \bar{\mu}(M_n)$. Buď $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Potom $B_n \supset M_n$

$(n = 1, 2, \ldots)$, $\mu(B_n) = \bar{\mu}(M_n)$, $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, tedy $\lim_{n\to\infty} \bar{\mu}(M_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) =$
$= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \geqq \bar{\mu}(M)$, $\bar{\mu}(M_n) \to \bar{\mu}(M)$.

Poznámka. Zřejmě je $\bar{\mu}(A) = \underline{\mu}(A) = \mu(A)$ pro každé $A \in \mathfrak{A}$. Jestliže $M \cap N = \emptyset$, $M \cup N \in \mathfrak{A}$, platí

$$\underline{\mu}(M) + \bar{\mu}(N) = \mu(M \cup N)\,, \tag{12}$$

jak plyne ihned z (8) a (10). Ze vztahů (7) a (10) plyne podobně, že

$$\bar{\mu}(M \cup N) = \mu(M) + \bar{\mu}(N)\,, \tag{13}$$

kdykoli $M \cap N = \emptyset$, $M \in \mathfrak{A}$, $N \subset P$.

4. Buď P libovolná množina. Buď $\mathfrak{G}$ systém částí množiny P, který má tyto vlastnosti:

1) $\emptyset \in \mathfrak{G}$, $P \in \mathfrak{G}$;

2) $G_1, G_2 \in \mathfrak{G} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{G}$;

3) $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G} \Rightarrow \bigcup \mathfrak{G}_0 \in \mathfrak{G}$.

Potom řekneme, že systém $\mathfrak{G}$ definuje na množině P topologii a množinu P nazveme *topologickým prostorem*. Prvkům systému $\mathfrak{G}$ budeme říkat *otevřené množiny*. Komplementy otevřených množin nazveme *uzavřenými množinami*; systém všech uzavřených množin budeme značit symbolem $\mathfrak{F}$. Z 2), 3) snadno plyne, že sjednocení konečného počtu uzavřených množin a průnik libovolného systému uzavřených množin je opět uzavřená množina. Je-li $A \subset P$, buď $\bar{A}$ (*uzávěr* množiny A) průnik všech uzavřených množin, které obsahují A (mezi takové množiny patří podle 1) vždy množina P); $\bar{A}$ je tedy nejmenší uzavřená množina, obsahující A. Bod x leží v $\bar{A}$, právě když $G \cap A \neq \emptyset$ pro každou množinu $G \in \mathfrak{G}$, která obsahuje bod x.

Buď f konečná reálná funkce na množině P. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x \in P$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $G \in \mathfrak{G}$ tak, že $x \in G$ a že pro každé $t \in G$ je $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Řekneme, že funkce f je *spojitá* (*na prostoru* P), je-li spojitá v každém bodě $x \in P$. Jsou-li f, g spojité funkce, jsou též funkce $f + g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ spojité; jestliže posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde f_n jsou spojité funkce, konverguje stejnoměrně (na množině P), je funkce $\lim f_n$ rovněž spojitá. (To lze dokázat obvyklým způsobem.)

Buď $\mathfrak{F}^*$ (resp. $\mathfrak{G}^*$) systém všech množin tvaru $E[x; f(x) = 0]$ (resp. $E[x; f(x) \neq 0]$), kde f je spojitá funkce na P. Zřejmě $\mathfrak{F}^* \subset \mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}^* \subset \mathfrak{G}$; $F \in \mathfrak{F}^* \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P - F \in \mathfrak{G}^*$. Nechť $G_n \in \mathfrak{G}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Existují spojité funkce f_n tak, že $E[x; f_n(x) \neq 0] = G_n$. Můžeme předpokládat, že $0 \leqq f_n \leqq 1$ $(n =$ $= 1, 2, \ldots)$; buď $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot f_n$. Potom $E[x; f(x) \neq 0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, tedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \in$ $\in \mathfrak{G}^*$. Dále $G_1 \cap G_2 = E[x; g(x) \neq 0]$, kde $g = \min(f_1, f_2)$; odtud plyne $G_1 \cap$

$\cap G_2 \in \mathfrak{G}^*$. Podobně je $F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}^*$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathfrak{F}^*$, kdykoli $F_n \in \mathfrak{F}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ze vztahu $E[x; f(x) > 0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[x; f(x) \geqq \frac{1}{n}\right]$ snadno plyne, že ke každému $G \in \mathfrak{G}^*$ existují $F_n \in \mathfrak{F}^*$ tak, že $F_n \nearrow G$.

Buď $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{B}^*$) nejmenší σ-algebra (na P), obsahující $\mathfrak{G}$ (resp. $\mathfrak{G}^*$). Prvky systému $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{B}^*$) se nazývají *Borelovy* (resp. *Baireovy*) množiny (prostoru P). Míru, definovanou na $\mathfrak{B}$ (resp. na $\mathfrak{B}^*$), nazveme *Borelovou* (resp. *Baireovou*) *měrou* (na prostoru P). Je ovšem $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$.

Buď μ Baireova míra na prostoru P taková, že $\mu(\emptyset) = 0$. Buď $\mathfrak{P}(\mu) = \mathfrak{P}$ systém všech množin $A \subset P$, k nimž existují $G_n \in \mathfrak{G}^*$ tak, že $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, $\mu(G_n) < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Systém $\mathfrak{P}$ je zřejmě σ-těleso.

Řekneme, že míra μ *má vlastnost* V_P, jestliže μ je Baireova míra (na prostoru P), jestliže $\mu(\emptyset) = 0$ a jestliže platí $B \in \mathfrak{P}$, kdykoli $\mu(B) < \infty$.

Symboly $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}^*$, $\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{P}$ budou mít v celé práci vždy tento význam.

Poznámka. Každý metrický prostor (viz na př. [5], kap. VI) je zřejmě topologickým prostorem. V metrickém prostoru platí $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ a tedy také $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^*$ a $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*$, jak čtenář snadno zjistí.

5. *Buď P topologický prostor; nechť míra μ má vlastnost V_P. Potom pro každé $B \in \mathfrak{B}^*$, pro něž $\mu(B) < \infty$, platí*

$$\mu(B) = \inf \mu(G)\,, \quad kde \quad G \in \mathfrak{G}^*\,, \quad G \supset B\,, \tag{14}$$

$$\mu(B) = \sup \mu(F)\,, \quad kde \quad F \in \mathfrak{F}^*\,, \quad F \subset B\,. \tag{15}$$

Důkaz. Buď $\mathfrak{M}$ systém všech $F \in \mathfrak{F}^*$, pro něž $\mu(F) < \infty$; buď $\mathfrak{N}$ systém všech $G \in \mathfrak{G}^*$, pro něž $\mu(G) < \infty$. Pro $M \in \mathfrak{M}$, $N \in \mathfrak{N}$ položme $\alpha(M) = \mu(M)$, $\beta(N) = \mu(N)$. Ke každému $G \in \mathfrak{N}$ existují $F_n \in \mathfrak{F}^*$ tak, že $F_n \nearrow G$. Potom $F_n \in \mathfrak{M}$, $\mu(F_n) \to \mu(G)$, takže je splněn předpoklad 4) z odstavce 2.; ostatní předpoklady jsou zřejmě také splněny. Můžeme tedy utvořit příslušné systémy $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}$ a funkce $\underline{\gamma}$, $\bar{\gamma}$. Dokážeme, že $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{G}^*$. Nechť tedy $G \in \mathfrak{G}^*$, $T \in \mathfrak{T}$. Protože $\bar{\gamma}(T) < \infty$, existuje $N \in \mathfrak{N}$ tak, že $T \subset N$; je potom $T \cap G = T \cap (N \cap G)$, kde $N \cap G \in \mathfrak{N}$, takže $T \cap G \in \mathfrak{T}$. Tím je dokázáno, že $G \in \mathfrak{A}$; je tedy opravdu $\mathfrak{G}^* \subset \mathfrak{A}$ a tedy také $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{A}$.

Nechť nyní $B \in \mathfrak{B}^*$, $\mu(B) < \infty$. Protože míra μ má vlastnost V_P, existují $G_n \in \mathfrak{N}$ tak, že $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$; můžeme předpokládat, že $\emptyset = G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ Položme $A_n = B \cap (G_{n+1} - G_n)$. Protože $A_n \in \mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{A}$, $G_n \in \mathfrak{T}$, je $A_n = A_n \cap G_{n+1} \in \mathfrak{T}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Pro každé $A \in \mathfrak{B}^*$ je zřejmě $\underline{\gamma}(A) \leqq \mu(A) \leqq \bar{\gamma}(A)$; je tedy $\bar{\gamma}(A_n) = \mu(A_n)$ pro všechna n. Protože $A_p \cap A_q = \emptyset$ pro $p \neq q$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B$, je

$\bar{\gamma}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(B) < \infty$; existuje tedy $N \in \mathfrak{N}$ tak, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset N$, tedy $B = B \cap N \in \mathfrak{T}$. Pro každé $B \in \mathfrak{B}^*$, kde $\mu(B) < \infty$, platí tedy $\underline{\gamma}(B) = \mu(B) = \bar{\gamma}(B)$; to jsou však právě vztahy (14), (15).

6. *Buď P topologický prostor; nechť míra μ má vlastnost V_P. Potom platí:*

1) *Jestliže $A \subset P$, je $\bar{\mu}(A) = \inf \mu(G)$, kde $G \in \mathfrak{G}^*$, $G \supset A$;*[3]

2) *jestliže $A \in \mathfrak{P}$, je $\underline{\mu}(A) = \sup \mu(F)$, kde $F \in \mathfrak{F}^*$, $F \subset A$, $\mu(F) < \infty$.*

Důkaz. I. Nechť $A \subset P$, $\bar{\mu}(A) < C$. Existuje $B \in \mathfrak{B}^*$ tak, že $A \subset B$, $\mu(B) < C$. Podle odst. 5 existuje $G \in \mathfrak{G}^*$ tak, že $G \supset B$, $\mu(G) < C$. Tím je dokázáno tvrzení 1).

II. Nechť $A \in \mathfrak{P}$, $C < \underline{\mu}(A)$. Existuje $B \in \mathfrak{B}^*$ tak, že $C < \mu(B)$, $B \subset A$. Je-li $\mu(B) < \infty$, plyne tvrzení 2) snadno z 5. Je-li však $\mu(B) = \infty$, existují (protože $B \in \mathfrak{P}$) množiny $B_1, B_2, \ldots \in \mathfrak{B}^*$ tak, že $\mu(B_n) < \infty$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$; můžeme předpokládat, že $B_p \cap B_q = \emptyset$ pro $p \neq q$. Dále existují $F_n \in \mathfrak{F}^*$, pro něž je $F_n \subset B_n$, $\mu(F_n) > \mu(B_n) - 2^{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(B) = \infty$, je též $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \infty$; zvolíme-li tedy dosti velký index p, je $C < \sum_{n=1}^{p} \mu(F_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{p} F_n) < \infty$, při čemž $\bigcup_{n=1}^{p} F_n \subset B \subset A$, $\bigcup_{n=1}^{p} F_n \in \mathfrak{F}^*$. Tvrzení 2) je tedy správné v každém případě.

Poznámka. Buď P prostor všech racionálních čísel (s obvyklou metrikou). Pro libovolné $A \subset P$ položme $\mu(A) =$ počet prvků množiny A (je-li A nekonečná množina, klademe ovšem $\mu(A) = \infty$). Potom je μ Baireova míra, která zřejmě nemá vlastnost V_P.

7. *Buď P topologický prostor; nechť míra μ má vlastnost V_P. Buď $\mathfrak{M}$ systém všech $F \in \mathfrak{F}$, kde $\bar{\mu}(F) < \infty$; buď $\mathfrak{N}$ systém všech $G \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}$, pro něž $\underline{\mu}(G) < \infty$. Předpokládejme, že*

$$G_1, G_2 \in \mathfrak{N} \Rightarrow \underline{\mu}(G_1 \cup G_2) \leqq \underline{\mu}(G_1) + \underline{\mu}(G_2)\,. \tag{16}$$

Potom platí:

1) $F \in \mathfrak{M}, G \in \mathfrak{N}, F \subset G \Rightarrow \underline{\mu}(G - F) = \underline{\mu}(G) - \bar{\mu}(F)$,

2) $F_1, F_2 \in \mathfrak{M}, F_1 \cap F_2 = \emptyset \Rightarrow \bar{\mu}(F_1) + \bar{\mu}(F_2) = \bar{\mu}(F_1 \cup F_2)$.

Důkaz. I. Napřed dokážeme, že

$$F \in \mathfrak{M}, G \in \mathfrak{G}, F \subset G \Rightarrow \bar{\mu}(F) \leqq \underline{\mu}(G)\,. \tag{17}$$

[3]) Funkce $\bar{\mu}$, $\underline{\mu}$ byly definovány v odst. 3.

Nechť tedy platí předpoklady této implikace. Podle 6 existuje $G_0 \in \mathfrak{G}^*$ tak, že $F \subset G_0$, $\mu(G_0) < \infty$. Položme $G_1 = G \cap G_0$, $G_2 = G_0 - F$. Potom je $G_1 \cup \cup G_2 \doteq G_0$, takže podle (12) a podle (16) platí

$$\bar{\mu}(F) + \underline{\mu}(G_2) = \underline{\mu}(G_0) \leqq \underline{\mu}(G_1) + \underline{\mu}(G_2)\,,$$

tedy

$$\bar{\mu}(F) \leqq \underline{\mu}(G_1) \leqq \underline{\mu}(G)\,.$$

II. Nechť nyní $F \in \mathfrak{M}$, $G \in \mathfrak{N}$, $F \subset G$; nechť $D \in \mathfrak{F}^*$, $D \subset G - F$. Podle (13) a (17) je $\bar{\mu}(F) + \mu(D) = \bar{\mu}(F \cup D) \leqq \underline{\mu}(G)$. Protože však podle 6. $\underline{\mu}(G - F) = = \sup \mu(D)$, platí též

$$\bar{\mu}(F) + \underline{\mu}(G - F) \leqq \underline{\mu}(G)\,.$$

Odtud a z (8) plyne 1).

III. Nechť konečně $F_1, F_2 \in \mathfrak{M}$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Protože $\bar{\mu}(F_1 \cup F_2) \leqq \leqq \bar{\mu}(F_1) + \bar{\mu}(F_2) < \infty$, existuje $G \in \mathfrak{G}^*$ tak, že $\mu(G) < \infty$, $G \supset F_1 \cup F_2$. Podle 1) je

$$\begin{aligned}\mu(G) - \bar{\mu}(F_1 \cup F_2) &= \underline{\mu}((G - F_1) - F_2) = \underline{\mu}(G - F_1) - \bar{\mu}(F_2) = \\ &= \mu(G) - \bar{\mu}(F_1) - \bar{\mu}(F_2)\,;\end{aligned}$$

odtud plyne ihned 2).

8. Buď P topologický prostor. Řekneme, že míra μ *má vlastnost* W_P, jestliže μ je Baireova míra (na P) a jestliže existuje Borelova míra ν, která má tyto vlastnosti:

1) $B \in \mathfrak{B}^* \Rightarrow \nu(B) = \mu(B)$;

2) $G \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P} \Rightarrow \nu(G) = \underline{\mu}(G)$;

3) $B \in \mathfrak{B} - \mathfrak{P} \Rightarrow \nu(B) = \infty$;

4) $B \in \mathfrak{B} \Rightarrow \nu(B) = \inf \nu(G)$, kde $G \in \mathfrak{G}$, $G \supset B$.

9. *Buď P topologický prostor; nechť míra μ má vlastnost V_P. Dále předpokládejme, že platí:*

1) $G_1, G_2 \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P} \Rightarrow \underline{\mu}(G_1 \cup G_2) \leqq \underline{\mu}(G_1) + \underline{\mu}(G_2)$,

2) $G_n \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}$, $G_n \nearrow G \Rightarrow \underline{\mu}(G_n) \to \underline{\mu}(G)$.

Potom má míra μ vlastnost W_P.

Důkaz. Buď $\mathfrak{M}$ systém všech $F \in \mathfrak{F}$, kde $\bar{\mu}(F) < \infty$; buď $\mathfrak{N}$ systém všech $G \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}$, pro něž $\underline{\mu}(G) < \infty$. Pro $M \in \mathfrak{M}$, $N \in \mathfrak{N}$ položme

$$\alpha(M) = \bar{\mu}(M)\,, \quad \beta(N) = \underline{\mu}(N)\,.$$

Z věty 7 plyne, že jsou splněny předpoklady 2) a 3) z odst. 2; z 6 plyne, že platí 4); ještě je třeba dokázat, že je splněn vztah 5). Nechť tedy $N_n \in \mathfrak{N}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta(N_n) < \infty$. Buď $Q_n = N_1 \cup \ldots \cup N_n$. Podle 1) platí

$\underline{\mu}(Q_n) \leqq \underline{\mu}(N_1) + \ldots + \underline{\mu}(N_n)$ $(n = 1,2,\ldots)$; zřejmě $Q_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, takže podle 2)

$$\underline{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{\mu}(Q_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\mu}(N_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta(N_n) < \infty .$$

Vidíme, že platí také předpoklad 5) z odst. 2. Můžeme tedy utvořit příslušné systémy $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}$ a funkce $\underline{\gamma}$, $\bar{\gamma}$. Snadno se zjistí (viz podobnou úvahu v odst. 5.), že $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{A}$ a tedy i $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$. Píšeme-li $\nu(B) = \bar{\gamma}(B)$ pro $B \in \mathfrak{B}$, je ν míra na $\mathfrak{B}$. Je-li $B \in \mathfrak{B}^*$, $\mu(B) < \infty$, je $\mu(B) = \inf \mu(G)$, kde $G \in \mathfrak{G}^*$, $G \supset B$; je tedy také $\mu(B) = \bar{\gamma}(B) = \inf \underline{\mu}(G)$, kde $G \in \mathfrak{N}$, $G \supset B$, neboli $\mu(B) = \nu(B)$. Je-li však $\mu(B) = \infty$, je zřejmě též $\nu(B) = \bar{\gamma}(B) = \infty$. Tím je dokázán vztah 1) z odst. 8. Vztah 2) (odst. 8) je jistě správný, jestliže $G \in \mathfrak{N}$. Jinak je $\underline{\mu}(G) = \infty$, tedy $\bar{\gamma}(G) = \infty$, $\nu(G) = \infty$, takže platí opět $\nu(G) = \underline{\mu}(G)$. Vztahy 3), 4) jsou zřejmé.

Poznámka. Je-li $\mu(P) < \infty$, stačí místo 2) (odst. 9) požadovat $G_n \in \mathfrak{G}$, $G_n \nearrow P \Rightarrow \underline{\mu}(G_n) \to \mu(P)$; je-li pak totiž $H_n \in \mathfrak{G}$, $H_n \nearrow H$, $F \in \mathfrak{F}^*$, $F \subset H$, $L = P - F$, $L_n = H_n \cup L$, je $L_n \in \mathfrak{G}$, $L_n \nearrow P$, tedy $\underline{\mu}(H_n) + \underline{\mu}(L) \geqq \underline{\mu}(L_n) \to \mu(P) = \mu(L) + \mu(F)$, tedy $\lim_{n\to\infty} \underline{\mu}(H_n) \geqq \mu(F)$, $\lim_{n\to\infty} \underline{\mu}(H_n) \geqq \sup \mu(F) = \mu(H)$, $\underline{\mu}(H_n) \to \underline{\mu}(H)$.

10. Buď P topologický prostor, $A \subset P$. Každou otevřenou množinu, obsahující A, nazveme *okolím* množiny A. (Okolím bodu rozumíme ovšem okolí příslušné jednobodové množiny.) Řekneme, že P je *Hausdorffův prostor* — krátce H. prostor —, jestliže každé dva různé body prostoru P mají disjunktní okolí. Snadno se zjistí, že v H. prostoru jsou jednobodové množiny uzavřené. Dále řekneme, že P je *regulární* prostor, jestliže P je H. prostor a jestliže každé dvě disjunktní množiny F_1, F_2, kde F_1 je jednobodová a F_2 je uzavřená, mají disjunktní okolí. Jestliže dokonce libovolné dvě disjunktní uzavřené množiny H. prostoru P mají disjunktní okolí, řekneme, že prostor P je *normální*.

Konečně řekneme, že Hausdorffův prostor P je *úplně regulární*, jestliže má tuto vlastnost: Je-li $F \in \mathfrak{F}$, $x \in P - F$, existuje spojitá funkce f (na prostoru P) tak, že $f(x) = 0$ a že $f(t) = 1$ pro každé $t \in F$. Každý úplně regulární prostor je zřejmě regulární.

11. *Buď P normální prostor; nechť A, $B \in \mathfrak{F}$, $A \cap B = \emptyset$. Potom existuje spojitá funkce f taková, že $f(x) = 0$ pro $x \in A$, $f(x) = 1$ pro $x \in B$.*

Důkaz. Protože prostor P je normální, existuje ke každé dvojici F, G, kde $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{G}$, $F \subset G$, množina $H \in \mathfrak{G}$ tak, že $F \subset H$, $\bar{H} \subset G$.

Utvořme nyní množiny $M_n = \left\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \frac{2^n}{2^n} = 1\right\}$; nechť $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$. Každému $\alpha \in M$ přiřaďme množinu G_α tímto předpisem: Množina

M_0 má jediný prvek 1; položíme $G_1 = P - B$. Je-li $n \geqq 0$ a máme-li již definovány množiny G_α pro všechna $\alpha \in M_n$ tak, že

$$\gamma, \delta \in M_n\,, \quad \gamma < \delta \Rightarrow A \subset G_\gamma\,, \quad \bar{G}_\gamma \subset G_\delta\,,$$

definujeme množiny G_α pro $\alpha \in M_{n+1} - M_n$ takto: Je $\alpha = \dfrac{2k+1}{2^{n+1}}$ (k celé); položíme $\beta = \dfrac{k}{2^n}$, $\gamma = \dfrac{k+1}{2^n}$ a sestrojíme množinu G_α tak, aby platilo $\bar{G}_\beta \subset G_\alpha$, $\bar{G}_\alpha \subset G_\gamma$ (je-li $k = 0$, vezmeme A místo G_β). Pro takto sestrojené množiny G_α pak platí implikace $\beta, \gamma \in M$, $\beta < \gamma \Rightarrow A \subset G_\beta$, $\bar{G}_\beta \subset G_\gamma$.

Definujme nyní na množině P funkci f tímto způsobem: Pro $x \in B$ buď $f(x) = 1$. Každému $x \in P - B$ ($= G_1$) přiřaďme množinu $C(x)$ všech $\alpha \in M$, pro něž $x \in G_\alpha$, a položme $f(x) = \inf C(x)$. Je-li $x \in G_\alpha$, je $\alpha \in C(x)$ a tedy $f(x) \leqq \alpha$; jestliže $x \in G_1 - G_\alpha$, je každý prvek množiny $C(x)$ větší než α a je tedy $f(x) \geqq \alpha$. Je-li tudíž $f(x) < \alpha \in M$, je $x \in G_\alpha$; je-li $f(x) > \alpha \in M$, můžeme volit $\beta \in (\alpha, f(x)) \cap M$ a platí $x \in P - G_\beta \subset P - \bar{G}_\alpha$. — Zřejmě je $0 \leqq f(x) \leqq$ $\leqq 1$ pro každé $x \in P$.

Zvolme libovolný bod $x \in P$ a číslo $\varepsilon > 0$. Utvořme množiny U, V tímto předpisem: Je-li $f(x) = 1$, buď $V = P$; je-li $f(x) < 1$, zvolme $\alpha \in (f(x), f(x) + \varepsilon) \cap$ $\cap\, M$ a položme $V = G_\alpha$. Je-li $f(x) = 0$, buď $U = P$; je-li $f(x) > 0$, zvolme $\alpha \in (f(x) - \varepsilon, f(x)) \cap M$ a položme $U = P - \bar{G}_\alpha$. Z provedených úvah snadno plyne, že $U \cap V$ je okolím bodu x a že $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ pro každé $t \in U \cap V$. Funkce f je tedy spojitá; ostatní je zřejmé.

Poznámka. Každý normální prostor je tedy úplně regulární.

12. *Buď P normální prostor; nechť míra μ má vlastnost V_P. Nechť $G_1, G_2 \in$ $\in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}$. Potom $\underline{\mu}(G_1 \cup G_2) \leqq \underline{\mu}(G_1) + \underline{\mu}(G_2)$.*

Důkaz. Napřed dokážeme, že

$$F \in \mathfrak{F}\,, \quad G \in \mathfrak{G}\,, \quad F \subset G \Rightarrow \bar{\mu}(F) \leqq \underline{\mu}(G)\,. \tag{18}$$

Nechť jsou tedy splněny předpoklady této implikace. Podle 11 existuje spojitá funkce f tak, že $f(x) = 0$ pro $x \in F$, $f(x) = 1$ pro $x \in P - G$. Buď $H =$ $= E[x; f(x) < \frac{1}{2}]$. Potom $H \in \mathfrak{G}^*$, $F \subset H \subset G$, tedy $\bar{\mu}(F) \leqq \mu(H) \leqq \underline{\mu}(G)$.

Nechť nyní $G_1, G_2 \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}$. Buď $F \in \mathfrak{F}^*$, $F \subset G_1 \cup G_2$. Je $F - G_2 \subset G_1$, $F - G_2 \in \mathfrak{F}$, tedy $\bar{\mu}(F - G_2) \leqq \underline{\mu}(G_1)$, $\mu(F) = \bar{\mu}(F - G_2) + \mu(F \cap G_2) \leqq$ $\leqq \underline{\mu}(G_1) + \underline{\mu}(G_2)$. Protože $G_1 \cup G_2 \in \mathfrak{P}$, je podle 6 $\underline{\mu}(G_1 \cup G_2) = \sup \mu(F)$; odtud naše tvrzení ihned plyne.

13. Je-li Γ nějaká množina indexů, je-li $G_\gamma \in \mathfrak{G}$ pro každé $\gamma \in \Gamma$ a je-li $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma = P$, nazveme systém $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ *otevřeným pokrytím* prostoru P. Jistě je zřejmé, co rozumíme slovy ,,konečné otevřené pokrytí" a pod.

Řekneme, že topologický prostor P je *kompaktní* (resp. *spočetně kompaktní*), jestliže z každého otevřeného pokrytí (resp. z každého spočetného otevřeného pokrytí) lze vybrat pokrytí konečné.

Je-li f spojitá funkce na spočetně kompaktním prostoru P, tvoří množiny $G_n = E[x; |f(x)| < n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ spočetné otevřené pokrytí prostoru P. Existuje tedy p tak, že $P = G_p$; vidíme, že každá spojitá funkce na spočetně kompaktním prostoru je omezená. — Je-li P topologický prostor a je-li $Q \subset P$, můžeme na množině Q definovat topologii pomocí systému všech množin $Q \cap G$, kde $G \in \mathfrak{G}$; každá část topologického prostoru je tedy opět topologický prostor. Nyní je jasné, co míníme na př. slovy „kompaktní část topologického prostoru P" a pod. Čtenář snadno ověří tato tvrzení:

1) Je-li K kompaktní část Hausdorffova prostoru P, je množina K uzavřená v P.

2) Uzavřená část kompaktního (spočetně kompaktního, normálního) prostoru je opět kompaktní (spočetně kompaktní, normální).

3) Každá část úplně regulárního prostoru je úplně regulární.

4) Hausdorffův kompaktní prostor je normální (viz též obecnější větu 19).

14. *Buď P úplně regulární topologický prostor; nechť míra μ má vlastnost V_P. Nechť ke každému $F \in \mathfrak{F}^*$, kde $\mu(F) < \infty$, existují kompaktní množiny $K_1, K_2, \ldots$ $(K_n \subset P)$ tak, že $\underline{\mu}(F - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = 0$. Potom má míra μ vlastnost W_P.*

Důkaz. Napřed dokážeme, že pro každé $G \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}$ platí

$$\underline{\mu}(G) = \sup \bar{\mu}(K)\,, \quad \text{kde } K \text{ je kompaktní, } K \subset G\,. \tag{19}$$

Buď tedy $G \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}$, $c < \underline{\mu}(G)$. Podle 6 existuje $F \in \mathfrak{F}^*$ tak, že $F \subset G$, $c < \mu(F) < \infty$; dále existují kompaktní množiny $K_1, K_2, \ldots$ tak, že $\underline{\mu}(F - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = 0$. Protože sjednocení konečného počtu kompaktních množin je opět kompaktní, můžeme předpokládat, že $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ Je $\mu(F) = \bar{\mu}(F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) + \underline{\mu}(F - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = \bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap K_n))$. Množiny $F \cap K_n$ jsou opět kompaktní; podle (11) je $\bar{\mu}(F \cap K_n) \to \mu(F)$, takže pro dosti velká n je $\bar{\mu}(F \cap K_n) > c$.

Je-li naopak K kompaktní, $G \in \mathfrak{G}$, $K \subset G$, plyne snadno z úplné regularity, že existuje spojitá funkce f tak, že $f(x) > 0$ pro $x \in K$, $f(x) = 0$ pro $x \in P - G$. Pro množinu $H = E[x; f(x) > 0]$ pak platí $K \subset H \subset G$, $H \in \mathfrak{G}^*$, takže $\bar{\mu}(K) \leqq \mu(H) \leqq \underline{\mu}(G)$. Tím je vztah (19) dokázán.

Nechť nyní $G_1, G_2 \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}$. Buď K kompaktní, $K \subset G_1 \cup G_2$. Položme $F_1 = K - G_2$, $F_2 = K - G_1$. Množiny F_1, F_2 jsou kompaktní a disjunktní; snadno se zjistí, že existují otevřené množiny H_1, H_2 tak, že $H_i \supset F_i$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Utvořme kompaktní množiny $K_1 = K - H_2$, $K_2 = K - H_1$. Potom je $K_1 \subset K - F_2 = K - (K - G_1) = K \cap G_1 \subset G_1$, podobně $K_2 \subset G_2$, a dále $K_1 \cup K_2 = (K - H_2) \cup (K - H_1) = K - (H_1 \cap H_2) = K$. Podle (19) je $\bar{\mu}(K_i) \leqq \underline{\mu}(G_i)$ $(i = 1, 2)$; dále máme

$$\bar{\mu}(K) \leqq \bar{\mu}(K_1) + \bar{\mu}(K_2) \leqq \underline{\mu}(G_1) + \underline{\mu}(G_2)\,.$$

Protože však $\underline{\mu}(G_1 \cup G_2) = \sup \bar{\mu}(K)$, platí též $\underline{\mu}(G_1 \cup G_2) \leqq \underline{\mu}(G_1) + \underline{\mu}(G_2)$. Vidíme, že platí vztah 1) z odst. 9.

Nechť dále $G_n \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $G_n \nearrow G$; zvolme kompaktní množinu $K \subset G$. Existuje p tak, že $K \subset G_p$; odtud plyne

$$\bar{\mu}(K) \leqq \underline{\mu}(G_p) \leqq \lim_{n \to \infty} \underline{\mu}(G_n) , \quad \underline{\mu}(G) = \sup \bar{\mu}(K) \leqq \lim_{n \to \infty} \underline{\mu}(G_n) ,$$

tedy $\underline{\mu}(G_n) \to \underline{\mu}(G)$.

Platí tedy také vztah 2) z odst. 9; odtud naše věta ihned plyne.

15. Řekneme, že topologický prostor P je *pseudokompaktní*, jestliže každá spojitá funkce na prostoru P je omezená. Viděli jsme, že každý spočetně kompaktní prostor je pseudokompaktní. Mějme nyní normální prostor P, který není spočetně kompaktní. Potom existují $G_n \in \mathfrak{G}$ tak, že $G_n \nearrow P$, ale že pro každé n je $G_n \neq P$. Můžeme předpokládat $G_1 \neq G_2 \neq G_3 \neq \ldots$ Zvolme $x_n \in G_n - G_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$; buď S množina všech x_n. Je-li $x \in P$, existuje index N tak, že $x \in G_N$; množina G_N je okolím bodu x a obsahuje jen konečný počet prvků množiny S. Odtud plyne, že množina S je uzavřená a že funkce f, definovaná předpisem $f(x_n) = n$, je spojitá na S. Protože prostor P je normální, lze funkci f spojitě rozšířit na celý prostor P. (Viz [5], věta 175, str. 335; důkaz je sice proveden pro metrický prostor, stejně lze však větu dokázat i pro normální prostor, vyjde-li se od naší věty 11.) Vidíme, že P není pseudokompaktní. Dokázali jsme tedy, že *normální pseudokompaktní prostor je spočetně kompaktní.*

16. *Buď P normální prostor; nechť míra μ má vlastnost V_P. Nechť ke každému $F \in \mathfrak{F}^*$, kde $\mu(F) < \infty$, existují pseudokompaktní množiny $A_1, A_2, \ldots$ tak, že $\underline{\mu}(F - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$. Potom má míra μ vlastnost W_P.*

Důkaz. Z odst. 12 plyne, že je splněn předpoklad 1) věty 9. Nechť nyní $G_n \nearrow G$, $G_n \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}$. Nechť $c < \underline{\mu}(G)$. Protože $G \in \mathfrak{P}$, existuje $F \in \mathfrak{F}^*$ tak, že $c < \mu(F) < \infty$, $F \subset G$. Podle předpokladu existují pseudokompaktní množiny $A_1, A_2, \ldots$ tak, že $\underline{\mu}(F - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$. Uzávěr pseudokompaktní množiny je pseudokompaktní; sjednocení konečného počtu pseudokompaktních množin je také pseudokompaktní. Můžeme tedy předpokládat, že množiny $A_1, A_2, \ldots$ jsou uzavřené a že $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ Uzavřená část normálního prostoru je však normální; z odst. 15. nyní plyne, že množiny A_n a tedy i množiny $A_n \cap F$ jsou dokonce spočetně kompaktní. Snadno se zjistí (viz podobnou úvahu v důkaze věty 14.), že $\bar{\mu}(A_n \cap F) \to \mu(F)$; je-li tedy p dosti velké, je $c < \bar{\mu}(A_p \cap F)$. Protože $A_p \cap F$ je spočetně kompaktní a protože $A_p \cap F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, existuje q tak, že $A_p \cap F \subset G_q$. Podle (18) je $\bar{\mu}(A_p \cap F) \leqq \underline{\mu}(G_q)$, takže $c < \lim_{n \to \infty} \underline{\mu}(G_n)$. Odtud plyne $\underline{\mu}(G_n) \to \underline{\mu}(G)$. Naše tvrzení plyne nyní z věty 9.

17. Buďte Γ, Δ libovolné množiny indexů; pro $\gamma \in \Gamma$, $\delta \in \Delta$ buďte dány množiny A_γ, B_δ. Řekneme, že systém $\{A_\gamma\}_\Gamma$ je *zjemněním* systému $\{B_\delta\}_{\delta\in\Delta}$,[4]) jestliže ke každému $\gamma \in \Gamma$ existuje $\delta \in \Delta$ tak, že $A_\gamma \subset B_\delta$. Buď nyní P topologický prostor. Řekneme, že systém množin $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ($A_\gamma \subset P$) je *lokálně konečný*, jestliže ke každému bodu $x \in P$ existuje okolí U bodu x tak, že $U \cap A_\gamma \neq \emptyset$ nejvýš pro konečný počet indexů γ. Dále řekneme, že prostor P je *parakompaktní* (resp. *spočetně parakompaktní*), jestliže ke každému otevřenému (resp. spočetnému otevřenému) pokrytí prostoru P existuje jemnější lokálně konečné otevřené pokrytí.

18. *Buď P topologický prostor; nechť $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je lokálně konečný systém, $F_\gamma \in \mathfrak{F}$. Buď $F = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$. Potom je $F \in \mathfrak{F}$.*

Důkaz. Nechť x non $\in F$. Existuje okolí U bodu x tak, že množina K těch γ, pro něž $U \cap F_\gamma \neq \emptyset$, je konečná. Množina $V = U - \bigcup_{\gamma\in K} F_\gamma$ je pak okolím bodu x a platí $V = U - \bigcup_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma \subset P - F$; množina $P - F$ je tedy otevřená.

19. *Buď P Hausdorffův parakompaktní prostor. Potom P je normální.*

Důkaz. Nechť $F \in \mathfrak{F}$, $A \subset P$; nechť ke každému $x \in F$ existuje okolí U_x bodu x tak, že $\overline{U}_x \cap A = \emptyset$. Utvořme příslušné zjemnění k pokrytí, skládajícímu se z množin U_x a z množiny $P - F$. Buď $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ systém všech prvků zjemnění, které leží v některém U_x. Protože systém $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je lokálně konečný, je též systém $\{\overline{G}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ lokálně konečný a množina $B = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{G}_\gamma$ je podle 18 uzavřená. Zřejmě $F \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, $B \cap A = \emptyset$. Volíme-li napřed za A jednobodovou množinu $\{y\}$, kde y non $\in F$, vidíme, že existuje okolí U bodu y (totiž $U = P - B$) tak, že $\overline{U} \cap F = \emptyset$. Můžeme tedy popsaného postupu použít též na případ, kdy $A = F_1 \in \mathfrak{F}$, $F_1 \cap F = \emptyset$.

20. *Buď P normální prostor; buď $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ otevřené pokrytí prostoru P. Nechť ke každému $x \in P$ existuje jen konečný počet indexů γ, pro něž $x \in G_\gamma$. Potom existuje otevřené pokrytí $\{H_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ tak, že*

$$\overline{H}_\gamma \subset G_\gamma \quad \textit{pro každé } \gamma \in \Gamma.$$

Důkaz. Můžeme předpokládat (viz na př. [11]), že množina Γ je dobře uspořádaná. Buď $\alpha \in \Gamma$ a předpokládejme, že pro každé $\gamma < \alpha$ máme již sestrojenu množinu $H_\gamma \in \mathfrak{G}$ tak, že $\overline{H}_\gamma \subset G_\gamma$ a že systém

$$H_0, H_1, \ldots, H_\gamma, G_{\gamma+1}, \ldots, G_\alpha, \ldots \tag{20}$$

je pokrytím prostoru P.

Utvořme nyní systém

$$H_0, H_1, \ldots, H_\gamma, H_{\gamma+1}, H_{\gamma+2}, \ldots, G_\alpha, \ldots \tag{21}$$

[4]) Nebo: „... je jemnější než systém ..." a pod.; slovem „jemnější" nevylučujeme rovnost. Každá část daného systému je zřejmě jeho zjemněním.

Ukážeme především, že tyto množiny opět tvoří pokrytí prostoru P. Je-li totiž $x \in P$, existuje jen konečný počet indexů $\gamma < \alpha$ tak, že $x \in G_\gamma$; buď γ_x největší takový index. (Neexistuje-li takový index $\gamma < \alpha$, že $x \in G_\gamma$, pak bod x leží v některém G_γ pro $\gamma \geqq \alpha$, tedy leží v sjednocení množin (21).) Bod x leží podle předpokladu ve sjednocení množin (20) pro $\gamma = \gamma_x$; protože však x neleží v žádné množině G_β, kde $\gamma_x < \beta < \alpha$, leží též v sjednocení systému (21). Buď nyní M rovno sjednocení všech množin H_γ pro $\gamma < \alpha$ a všech množin G_β pro $\beta > \alpha$. Je pak $M \cup G_\alpha = P$; protože prostor P je normální a $P - M \subset G_\alpha$, existuje H_α tak, že $H_\alpha \in \mathfrak{G}$, $\overline{H}_\alpha \subset G_\alpha$, $M \cup H_\alpha = P$. Systém

$$H_0, H_1, \ldots, H_\alpha, G_{\alpha+1}, \ldots \tag{22}$$

je tedy opět pokrytím prostoru P. Tím jsou definovány množiny H_α pro všechna $\alpha \in \Gamma$. Systém (22) je pak pokrytím prostoru P pro každé α; množiny

$$H_0, H_1, \ldots, H_\gamma, \ldots \ (\gamma \in \Gamma) \tag{23}$$

tvoří tedy rovněž pokrytí prostoru P (můžeme totiž předpokládat, že Γ má největší prvek γ^*, a (23) je totožné s (22), píšeme-li $\alpha = \gamma^*$).

21. *Buď P normální prostor. Potom jsou ekvivalentní tyto tři vlastnosti:*

1) *Jestliže $G_n \in \mathfrak{G}$, $G_n \nearrow P$, existují $F_n \in \mathfrak{F}$ tak, že $F_n \subset G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $F_n \nearrow P$.*

2) *Jestliže $F_n \in \mathfrak{F}$, $F_n \searrow 0$, existují $G_n \in \mathfrak{G}$ tak, že $F_n \subset G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $G_n \searrow \emptyset$.*

3) *Prostor P je spočetně parakompaktní.*

Důkaz. Ekvivalence vlastností 1) a 2) je zřejmá. Nechť tedy prostor P má některou z těchto vlastností a nechť množiny $G_1, G_2, \ldots$ tvoří (spočetné) otevřené pokrytí. Položme $H_n = G_1 \cup \ldots \cup G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Potom $H_n \in \mathfrak{G}$, $H_n \nearrow P$; existují tedy $F_n \in \mathfrak{F}$ tak, že $F_n \subset H_n$, $F_n \nearrow P$. Protože P je normální, existují $L_n \in \mathfrak{G}$ tak, že $F_n \subset L_n$, $\overline{L}_n \subset H_n$; položme $H_0 = D_0 = \emptyset$, $D_n = \overline{L}_1 \cup \ldots \cup \overline{L}_n$, $M_n = H_n - D_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Protože $D_{n-1} \subset H_{n-1}$, je $H_n - H_{n-1} \subset M_n$, tedy $H_n = \bigcup_{k=1}^{n} M_k$, $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Buď konečně $N_{ik} = M_i \cap G_k$ $(i = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, i)$. Je $\bigcup_{k=1}^{i} N_{ik} = M_i \cap \bigcup_{k=1}^{i} G_k = M_i \cap H_i = M_i$; množiny N_{ik} tvoří tedy spočetné otevřené pokrytí. Zvolme nyní $x \in P$. Existuje n tak, že $x \in F_n$. Je-li $i > n$, $1 \leqq k \leqq i$, je $L_n \cap N_{ik} \subset D_{i-1} \cap M_i = \emptyset$. Množina L_n je okolím bodu x a má nejvýš pro konečný počet dvojic $[i, k]$ neprázdný průnik s množinou N_{ik}. Systém všech množin N_{ik} tvoří tedy lokálně konečné otevřené pokrytí a je zřejmě zjemněním systému množin G_n.

Budiž naopak prostor P spočetně parakompaktní; nechť $G_n \in \mathfrak{G}$, $G_n \nearrow P$. Existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{H_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, které je zjemněním pokrytí $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podle odst. 20 existují otevřené množiny L_γ $(\gamma \in \Gamma)$ tak, že $\overline{L}_\gamma \subset H_\gamma$,

$\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma = P$. Buď F_n sjednocení všech $\bar{L}_\gamma$, kde $\overline{L_\gamma} \subset G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Protože systém $\{\bar{L}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je lokálně konečný, jsou podle odst. 18. množiny F_n uzavřené. Buď nyní $x \in P$. Protože $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma = P$, existuje β tak, že $x \in L_\beta$. Protože pokrytí $\{H_\gamma\}$ je zjemněním pokrytí $\{G_n\}$, existuje n tak, že $H_\beta \subset G_n$; odtud plyne $\bar{L}_\beta \subset \subset H_\beta \subset G_n$, $x \in \bar{L}_\beta \subset F_n$, takže opravdu $F_n \nearrow P$ (a zřejmě $F_n \subset G_n$).

22. *Buď P normální spočetně parakompaktní prostor. Nechť míra μ má vlastnost V_P. Potom má míra μ též vlastnost W_P.*

Důkaz. Podle věty 12 je splněn předpoklad 1) z odst. 9. Nechť nyní $G_n \in \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{P}$, $G_n \nearrow G$. Zvolme $F \in \mathfrak{F}^*$, $F \subset G$, a položme

$$H_n = G_n \cup (P - F) \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Protože $H_n \in \mathfrak{G}$, $H_n \nearrow P$, existují podle odst. 21 množiny $F_n \in \mathfrak{F}$ tak, že $F_n \subset H_n$, $F_n \nearrow P$. Potom $F \cap F_n \nearrow F$, $\bar{\mu}(F \cap F_n) \to \mu(F)$. Ježto $G_n \supset F \cap \cap H_n \supset F \cap F_n$, je (podle (18))

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\mu}(G_n) \geqq \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}(F \cap F_n) = \mu(F)\,.$$

Protože $G \in \mathfrak{P}$, je $\underline{\mu}(G) = \sup \mu(F)$; je tedy $\underline{\mu}(G_n) \to \underline{\mu}(G)$. Naše tvrzení plyne nyní ihned z odst. 9.

Poznámka 1. Použijeme-li ještě odst. 19, zjistíme, že platí tato věta:

Buď P Hausdorffův parakompaktní prostor; nechť míra μ má vlastnost V_P. Potom má míra μ také vlastnost W_P.

Poznámka 2. Řekneme, že P je *Lindeloefův* prostor, jestliže z každého otevřeného pokrytí prostoru P lze vybrat pokrytí spočetné. Dá se ukázat, že každý regulární Lindeloefův prostor je normální. (Důkaz není obtížný a může být přenechán čtenáři za cvičení.) Buď nyní P regulární prostor, který je sjednocením spočetně mnoha kompaktních podmnožin. Potom je P zřejmě Lindeloefův prostor, takže je také normální. Z věty 21 snadno plyne, že P je spočetně parakompaktní; protože je P Lindeloefův prostor, je dokonce parakompaktní.

Jiným způsobem lze však dokázat (viz [10]) obecnější větu, že totiž každý regulární Lindeloefův prostor je parakompaktní.

V [12] je dokázáno, že také každý metrický prostor je parakompaktní.

Normálními spočetně parakompaktními prostory se v posledních letech zabývali různí autoři; viz na př. [1] a [7]. Není dosud znám příklad normálního prostoru, který není spočetně parakompaktní.

Poznámka 3. Nezáporný funkcionál na lineárním prostoru, jehož prvky jsou spojité funkce na topologickém prostoru P, dá se v mnoha důležitých případech vyjádřit ve tvaru integrálu $\int\limits_P f \mathrm{d}\mu$,[5]) kde μ je Baireova míra. (Viz

[5]) O abstraktním integrálu může se čtenář poučit na př. v [2], kap. V. Integrál je pomocí míry definován též v [8], cvič. 14, str. 191.

na př. [9], str. 479-484.) Použijeme-li dále vět o rozšíření Baireovy míry na Borelovu, odvozených v této práci (jsou to zejména věty 14 a 22), můžeme dokázat různá tvrzení o vyjádření funkcionálu integrálem $\int\limits_P f \mathrm{d}\nu$, kde ν je Borelova míra.

Poznámka 4. Nechť P je topologický prostor a nechť míra μ má vlastnost V_P. Buď Z systém všech spojitých funkcí f na prostoru P, pro něž konverguje integrál $J(f) = \int\limits_P f \,\mathrm{d}\mu$. Pro $A \subset P$ nechť c_A značí charakteristickou funkci množiny A (vzhledem k P). Je-li $G \in \mathfrak{G}$, položme

$$\delta(G) = \sup J(f)\,, \quad \text{kde} \quad f \in Z\,, \quad f \leqq c_G\,.$$

Jestliže $f \in Z$, $f \leqq c_G$, pak $J(f) \leqq \int\limits_H f \,\mathrm{d}\mu$, kde $H = E[x; f(x) > 0]$, tedy (protože $H \subset G$) $J(f) \leqq \mu(H) \leqq \underline{\mu}(G)$; odtud plyne

$$\delta(G) \leqq \underline{\mu}(G)\,.$$

Dále předpokládejme pro jednoduchost, že míra μ je konečná. Nechť nyní existuje Borelova míra ν tak, že pro každé $f \in Z$ platí

$$J(f) = \int\limits_P f \,\mathrm{d}\nu\,. \tag{24}$$

Ke každé množině $G \in \mathfrak{G}^*$ existuje spojitá funkce $f \geqq 0$ tak, že $G = E[x; f(x) > 0]$. Položíme-li $f_n = \min\,(n\,.\,f, 1)$, je $f_n \nearrow c_G$; odtud plyne $\mu(G) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P f_n \,\mathrm{d}\nu = \nu(G)$. Je tedy $\mu(G) = \nu(G)$ pro každé $G \in \mathfrak{G}^*$ a tedy podle 5. pro každé $B \in \mathfrak{B}^*$; vidíme, že míra ν je rozšířením míry μ. Je proto $\underline{\mu}(B) \leqq \nu(B) \leqq \bar{\mu}(B)$ pro každé $B \in \mathfrak{B}$. Jestliže tedy existuje Borelova míra ν tak, aby platil vztah (24) a aby bylo

$$\delta(G) = \nu(G) \tag{25}$$

pro každé $G \in \mathfrak{G}$, je nutně

$$\delta(G) = \underline{\mu}(G)\,. \tag{26}$$

Je-li prostor P normální, platí skutečně vztah (26) pro každé $G \in \mathfrak{G}$, jak se snadno zjistí.

V Kakutaniho práci [6] je dokázána věta: *Buď P (Hausdorffův) kompaktní prostor; buď J nezáporný funkcionál, definovaný na množině Z všech spojitých funkcí na prostoru P. Potom existuje Borelova míra ν tak, že platí* (24) *pro každé $f \in Z$ a*

$$\nu(G) = \delta(G) = \sup J(f)\,, \quad \textit{kde} \quad f \in Z\,, \quad f \leqq c_G\,,$$

pro každé $G \in \mathfrak{G}$. Odtud plyne ihned věta, která je speciálním případem vět 14, 16, 22: *Buď μ konečná Baireova míra na kompaktním prostoru P. Potom má μ vlastnost W_P.* (Citované věty Kakutaniho můžeme totiž použít na funkcionál $J(f) = \int\limits_P f \,\mathrm{d}\mu$; ν je pak rozšířením míry μ a platí $\delta(G) = \underline{\mu}(G)$, protože P je normální.)

Není-li však prostor P normální, může pro některou otevřenou množinu G platit $\delta(G) < \underline{\mu}(G)$ a potom ovšem není možné rozšířit funkci δ na Borelovu míru tak, aby platil vztah (24). Takový příklad je sestrojen v Hewittově práci [3], str. 169—170 (Remark 1.); lze však ukázat, že příslušná Baireova míra má přes to vlastnost W_P.

V odst. 25 sestrojíme úplně regulární prostor P a konečnou Baireovu míru μ (na prostoru P), která nemá vlastnost W_P. K tomu dokážeme napřed dvě pomocné věty.

23. *Buď P libovolná množina. Buď $\mathfrak{M}$ neprázdný systém částí množiny P, který má tyto vlastnosti:*

a) $\emptyset$ non $\in \mathfrak{M}$,

b) $A \subset P,\ B \in \mathfrak{M},\ A \supset B \Rightarrow A \in \mathfrak{M}$,

c) $B_n \in \mathfrak{M}\ (n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M}$.

Buď dále $\mathfrak{K}$ systém komplementů všech prvků z $\mathfrak{M}$.

Potom jsou systémy $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}$ disjunktní a $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{K}$ je σ-algebra.

Důkaz. Kdyby platilo zároveň $A \in \mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{K}$, bylo by $P - A \in \mathfrak{M}$; podle *c)* by pak platilo $\emptyset = (P - A) \cap A \cap \ldots \in \mathfrak{M}$ proti *a)*.

Systém $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{K}$ zřejmě obsahuje s každým svým prvkem také jeho komplement. Nechť nyní $A_n \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{K}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Je-li $A_N \in \mathfrak{M}$ pro některé N, je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A_N \in \mathfrak{M}$, tedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$ podle *b)*. Jestliže však $A_n \in \mathfrak{K}$ pro $n = 1, 2, \ldots$, platí $P - A_n \in \mathfrak{M}$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a tedy $P - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P - A_n) \in \mathfrak{M}$ podle *c)*, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{K}$. Protože $P \in \mathfrak{M}$, je $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{K}$ σ-algebra.

Poznámka. Klademe-li $\mu(A) = 1$ pro $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) = 0$ pro $A \in \mathfrak{K}$, je zřejmě μ míra na $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{K}$.

24. *Prostor S všech spočetných ordinálních čísel* (viz na př. [4]) *je normální a pseudokompaktní.*[6]) *Je-li f spojitá funkce na S, existuje číslo c a bod $\alpha \in S$ tak, že*

$$f(x) = c \quad \textit{pro všechna } x > \alpha .$$

Důkaz: Buďte F_1, F_2 disjunktní uzavřené části prostoru S. Kdyby obě množiny F_1, F_2 byly nespočetné, existovala by posloupnost $x_1 < x_2 < \ldots$ tak, že

$$x_{2k-1} \in F_1\,, \quad x_{2k} \in F_2 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

a limita posloupnosti[7]) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ by ležela v $F_1 \cap F_2$. Je tedy na př. množina F_1 spočetná; existuje pak $\alpha \in S$ tak, že $F_1 \subset K$, kde $K = E[x; x \leqq \alpha]$. Množina

[6]) Je-li M uspořádaná množina, pokládáme za otevřenou každou část množiny M, která je sjednocením množin tvaru $E[x; x < \gamma]$, $E[x; x > \delta]$, $E[x; \gamma < x < \delta]$, kde $\gamma, \delta \in M$ (předpokládáme, že M má aspoň dva body).

K je však kompaktní, jak se snadno zjistí; je tedy též množina F_1 kompaktní. Protože prostor S je regulární (jako každá uspořádaná množina), existuje ke každému $x \in F_1$ takové okolí U_x, že $\overline{U}_x \cap F_2 = \emptyset$. Z kompaktnosti množiny F_1 pak snadno plyne, že existuje otevřená množina $G \supset F_1$ tak, že $\overline{G} \cap F_2 = \emptyset$. Prostor S je tedy normální.

Buď dále g libovolná monotonní funkce na prostoru S; buď na př. g neklesající, t. j. $g(x) \leqq g(y)$ pro $x \leqq y$. (Připouštíme též hodnoty $g(x) = \pm \infty$.) Buď $c = \sup_{x \in S} g(x)$. Nechť $c_n < c$, $\lim_{n \to \infty} c_n = c$. (Případ $c = -\infty$ je triviální.) Potom existují $x_n \in S$ tak, že $g(x_n) > c_n$; existuje $\alpha \in S$ tak, že $\alpha > x_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Pro $x > \alpha$ je pak zřejmě $g(x) = c$.

Buď nyní f (konečná) spojitá funkce na S. Položme $g(x) = \inf_{y > x} f(y)$, $h(x) = \sup_{y > x} f(y)$. Funkce g, h jsou monotonní; existují tedy c, d a prvek $\alpha \in S$ tak, že pro $x \geqq \alpha$ je $g(x) = c$, $h(x) = d$. Připusťme, že $c < d$. Pak existují c_1, d_1 tak, že $c < c_1 < d_1 < d$; dále existují body $x_1 < x_2 < \ldots$, pro něž

$$f(x_{2k-1}) < c_1\,, \quad f(x_{2k}) > d_1 \quad (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{27}$$

Buď x limita posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom je $\lim_{k \to \infty} f(x_{2k-1}) = f(x) = \lim_{k \to \infty} f(x_{2k})$ ve sporu s (27). Je tedy $c = d$, $f(x) = c$ pro $x > \alpha$. Na množině $K = E[x; x \leqq \alpha]$ je funkce f omezená, protože K je kompaktní; funkce f je tedy omezená i na celém prostoru S.

25. Buď Ω nejmenší nespočetné ordinální číslo; buď T prostor všech ordinálních čísel, nejvýš rovných Ω. Prostor T je kompaktní. Buď $P_1 = T \times T$;[8]) odstraňme z prostoru P_1 bod $[\Omega, \Omega]$ a vzniklou množinu označme P. Protože P_1 je kompaktní, je P úplně regulární. Přiřaďme každému $\alpha < \Omega$ množinu $M(\alpha)$ všech $[\xi, \eta] \in P$, kde $\xi \geqq \alpha$, $\eta \geqq \alpha$. Buď dále $\mathfrak{M}$ systém všech $A \subset P$, k nimž existuje α tak, že $M(\alpha) \subset A$. ($\mathfrak{M}$ tedy obsahuje všechna okolí bodu $[\Omega, \Omega]$ v prostoru P_1, z nichž byl tento bod odstraněn.) Systém $\mathfrak{M}$ zřejmě splňuje předpoklady z odst. 23; můžeme tedy utvořit σ-algebru $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{K}$ a definovat na ní míru μ předpisem

$$\mu(A) = 1 \quad \text{pro} \quad A \in \mathfrak{M}\,, \quad \mu(A) = 0 \quad \text{pro} \quad A \in \mathfrak{K}\,.$$

Dokážeme, že $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{K}$ obsahuje všechny Baireovy množiny prostoru P. Zvolme tedy spojitou funkci f na P. Existuje (viz odst. 24.) číslo c a spočetné ordinální číslo α_0 tak, že pro $\alpha \geqq \alpha_0$ ($\alpha < \Omega$) je $f(\alpha, \alpha) = c$.

---

[7]) Jestliže v každém okolí bodu b leží „skoro všechny" prvky posloupnosti $b_1, b_2, \ldots$, řekneme, že b je limitou této posloupnosti a píšeme $b = \lim b_n$ nebo $b_n \to b$. Jestliže $b_1 < b_2 < \ldots$ ($b_n \in S$), pak $b_n \to b$, kde b je nejmenší ordinální číslo, které je větší než všechna b_n.

[8]) Jsou-li A, B topologické prostory, pak v $A \times B$ pokládáme za otevřenou každou množinu, která je sjednocením množin tvaru $G \times H$, kde G (resp. H) je otevřená část prostoru A (resp. B). Jsou-li A, B kompaktní, je též $A \times B$ kompaktní, jak se snadno dokáže. Je-li $A = B$, lze množinu všech $[x, x]$, kde $x \in A$, „ztotožnit" s prostorem A.

Přiřaďme nyní každému $\alpha < \Omega$ množinu $\Delta(\alpha)$ všech $[\xi, \eta]$, kde $\alpha \leqq \xi \leqq \eta < < \Omega$; buď

$$s(\alpha) = \sup f(\xi, \eta) \quad \text{pro} \quad [\xi, \eta] \in \Delta(\alpha) .$$

Funkce s je nerostoucí; existuje tedy $\alpha_1 < \Omega$ a číslo d ($d \leqq \infty$) tak, že pro $\alpha \geqq \alpha_1$ je $s(\alpha) = d$. Je ovšem $d \geqq c$. Připusťme, že je $d > c$ a zvolme $d_1 \in (c, d)$. Protože $s(\alpha_0) \geqq d > d_1$, existuje bod $[\xi_1, \eta_1] \in \Delta(\alpha_0)$ tak, že $f(\xi_1, \eta_1) > d_1$. Je ovšem $\alpha_0 \leqq \xi_1 < \eta_1$. Protože opět $s(\eta_1) \geqq d > d_1$, existuje $[\xi_2, \eta_2] \in \Delta(\eta_1)$ tak, že platí $f(\xi_2, \eta_2) > d_1$; je $\eta_1 \leqq \xi_2 < \eta_2$. Tak sestrojíme posloupnost $\alpha_0 \leqq \xi_1 < < \eta_1 \leqq \xi_2 < \eta_2 \leqq \ldots$ Zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n$; označme tuto limitu ζ. Pak $[\xi_n, \eta_n] \to [\zeta, \zeta]$, ale $f(\xi_n, \eta_n) > d_1 > c = f(\zeta, \zeta)$ ve sporu se spojitostí funkce f. Tím je dokázáno, že platí $d = c$ a tedy $f(\xi, \eta) \leqq c$, pokud $\alpha_1 \leqq \xi \leqq \eta < \Omega$. Protože funkce f je spojitá, platí dokonce $f(\xi, \eta) \leqq c$, jakmile $\alpha_1 \leqq \xi \leqq \eta \leqq \Omega$, $\xi < \Omega$. Podobně bychom zjistili, že existuje β_1 tak, že $f(\xi, \eta) \geqq c$, jakmile $\beta_1 \leqq \xi \leqq \eta \leqq \Omega$, $\xi < \Omega$. Je-li tedy $\gamma = \max(\alpha_1, \beta_1)$, platí $f(\xi, \eta) = c$, kdykoli $\gamma \leqq \xi \leqq \eta \leqq \Omega$, $\xi < \Omega$. Z důvodu symetrie platí tedy $f(\xi, \eta) = c$ pro každý bod $[\xi, \eta]$ z některého $M(\alpha)$. Je-li $c \leqq 0$, pak množina $E[[\xi, \eta]; f(\xi, \eta) > 0]$ neobsahuje žádný bod z $M(\alpha)$, tedy patří do $\mathfrak{K}$. Je-li $c > 0$, obsahuje tato množina množinu $M(\alpha)$, tedy patří do $\mathfrak{M}$. Vidíme, že systém $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{K}$ obsahuje všechny množiny z $\mathfrak{S}^*$ a tedy i všechny Baireovy množiny. Míra μ, sestrojená podle poznámky v odst. 23, je tedy zároveň Baireovou měrou.

Buď nyní F_1 množina všech $[\xi, \Omega]$, kde $\xi < \Omega$; buď F_2 množina všech $[\Omega, \eta]$, kde $\eta < \Omega$. Snadno zjistíme, že množiny F_1, F_2 jsou v P disjunktní a uzavřené a že platí $1 = \inf \mu(G)$, kde $G \in \mathfrak{S}^*$, $G \supset F_i$, tedy $1 = \bar{\mu}(F_i)$ pro $i = 1, 2$. Je vidět, že neexistuje Borelova míra ν tak, aby pro každou uzavřenou množinu $F \subset P$ platilo $\bar{\mu}(F) = \nu(F)$; odtud plyne snadno, že míra μ nemá vlastnost W_P.

Ukážeme však, že míru μ lze přes to rozšířit na Borelovu. Buď opět S prostor všech spočetných ordinálních čísel; buď $\mathfrak{B}_0$ systém všech spočetných částí prostoru S a jejich komplementů. Položme

$$\pi(B) = 0 \ (\text{resp. } \pi(B) = 1), \text{ je-li } B \in \mathfrak{B}_0,\ B \text{ spočetná (resp. nespočetná).} \tag{28}$$

Z odst. 23, 24 plyne, že $\mathfrak{B}_0$ je systém všech Baireových množin prostoru S a že π je míra na $\mathfrak{B}_0$. Prostor S je však normální a pseudokompaktní, takže podle věty 16 můžeme míru π rozšířit na Borelovu; rozšířenou míru označme opět symbolem π. Množinu $F_1 = E[[\xi, \Omega]; \xi < \Omega]$ můžeme ztotožnit s prostorem S. Položíme-li pak pro libovolnou Borelovu množinu $B \subset P$ $\nu(B) = = \pi(B \cap F_1)$, snadno zjistíme, že ν je Borelova míra na P, která je rozšířením míry μ.

Zároveň je vidět, že míru μ lze rozšířit na Borelovu různými způsoby (místo množiny F_1 jsme mohli vzít na př. též množinu $F_2 = E[[\Omega, \xi]; \xi < \Omega]$).