Werk

Label: Article

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0081|log120

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

O JISTÝCH ŘEŠENÍCH FUNKČNÍ ROVNICE $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$

MIROSLAV LAITOCH, Olomouc.

(Došlo dne 19. listopadu 1955.) DT:517.948

Řešením funkční rovnice

$$F[\varphi(x)] - F(x) = 1 \tag{a}$$

při dané funkci φ se zabýval ABEL.[1]) Ukázal, že je-li ψ řešením diferenční rovnice

$$\psi(y + 1) = \varphi[\psi(y)]\,, \tag{b}$$

pak obecné řešení funkční rovnice (a) je tvaru $F(x) = \psi_{-1}(x) + \chi[\psi_{-1}(x)]$, při čemž χ je periodická funkce o periodě 1 a ψ_{-1} je inversní funkce k ψ.

Funkční rovnice (a) přichází na příklad v theorii spojitých grup transformací jedné nezávisle proměnné,[2]) při rozšíření Floquetovy metody k určení charakteru fundamentálního systému řešení lineární homogenní diferenciální rovnice 2. řádu[3]) a j.

V tomto pojednání ukážeme pomocí theorie dispersí, v jaké souvislosti jsou jistá řešení funkční rovnice (a) s oscilujícími integrály homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu.

1. Uvažujme lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$y'' = q(x) \,.\, y\,. \tag{1}$$

Předpokládáme, že funkce q je spojitá v otevřeném int. (a, b) a že integrály dif. rovnice (1) v tomto intervalu oscilují. Oscilací integrálů v otevřeném intervalu (a, b) rozumíme toto:

Ať je $x \in (a, b)$ libovolné číslo, pak každý integrál dif. rovnice (1) má v int. (a, b) nekonečně mnoho nulových bodů menších než x a nekonečně mnoho nulových bodů větších než x.

Buďte u, v dva lineárně nezávislé integrály dif. rovnice (1) definované v int. (a, b). Pro $x \in (a, b)$ položíme $\varrho(x) = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}$.

Funkce ϱ se nazývá první amplituda uspořádané dvojice řešení u, v.

[1]) *N. H. Abel*, Sebrané spisy, sv. 2, Christiania 1881, str. 36.

[2]) *G. Kowalewski*, Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Leipzig 1931, str. 10.

[3]) *M. Laitoch*, Расширение метода Флоке..., Чехосл. мат. ж., *5* (*80*), 1955, str. 170.

Nechť $a_0 \in (a, b)$ je libovolný kořen integrálu v; označme ν-tý následující kořen za a_0 (předcházející před a_0) integrálu v symbolem a_ν ($a_{-\nu}$), $\nu = 1, 2, \ldots$. Funkce $\frac{u(x)}{v(x)}$ roste pak v každém intervalu $(a_\nu, a_{\nu+1})$ od $-\infty$ do $+\infty$, jestliže wronskián $w = u(x)\, v'(x) - u'(x)\, v(x)$ je záporný a klesá od $+\infty$ do $-\infty$, je-li $w > 0$. V obou případech tedy existuje pro každé $x \in (a_\nu, a_{\nu+1})$ právě jedno číslo $\operatorname{arctg} \frac{u(x)}{v(x)} \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

Nechť α značí první fázi uspořádané dvojice nezávislých integrálů u, v, která je definována vzorci

$$\alpha(x) = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2} - \nu\pi\right) . \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad x = a_\nu\,, \\ \operatorname{arctg} \frac{u(x)}{v(x)} - \nu\pi \,.\, \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad x \in (a_\nu, a_{\nu+1})\,. \end{cases} \tag{3}$$

O funkci α se snadno ukáže,[4]) že má v int. (a, b) tyto vlastnosti:

1° Uspořádanou dvojicí nezávislých řešení u, v je jednoznačně určena až na aditivní celočíselné násobky π,

2° je spojitá a má spojité derivace do 3. řádu včetně,

3° první derivace je dána vzorcem $\alpha'(x) = -\frac{w}{\varrho^2(x)}$, takže z definice funkce α plyne, že tato roste od $-\infty$ do $+\infty$ v případě, že $w < 0$ a klesá od $+\infty$ do $-\infty$ v případě $w > 0$.

Nechť dále φ značí základní (z.) centrální (c.) dispersi 1. druhu příslušnou k dif. rovnici (1). Z. c. disperse 1. druhu je v int. (a, b) definována takto:

Buď $x \in (a, b)$ libovolné číslo. Nechť A značí množinu integrálů dif. rovnice (1), jejichž jedním kořenem je x. $\varphi(x)$ je za číslem x bezprostředně následující společný kořen integrálů množiny A.

O funkci φ se dá ukázat[5]), že má v int. (a, b) tyto vlastnosti:

a) je spojitá a má spojité derivace do 3. řádu včetně,

b) roste od a do b, $(\varphi'(x) > 0)$,

c) $\varphi(x) > x$.

2. V tomto odstavci uvedeme nyní dvě nové věty o řešeních funkční rovnice (a).

1. *Nechť φ je z. c. disperse 1. druhu příslušná k dif. rovnici* (1). *Nechť funkce F je dána vzorcem*

$$F(x) = -\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \,.\, \alpha(x)\,,$$

[4]) Srovnej [1], str. 202.

[5]) Srovnej [1], str. 207 a n.

při čemž α značí první fázi uspořádané dvojice nezávislých integrálů u, v dif. rovnice (1) *a w jejich wronskián. Potom o funkci F v int.* (a, b) *platí:*

1° *je řešením funkční rovnice* $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$,

2° *je spojitá a má spojité derivace do 3. řádu včetně,*

3° *roste od* $-\infty$ *do* $+\infty$, $(F'(x) > 0)$,

4° $-\pi^2 F'^2(x) + \frac{3}{4}\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \frac{1}{2}\frac{F'''(x)}{F'(x)} = q(x)$.

Skutečně, vlastnost 1° funkce F pro $x = a_\nu$ plyne bezprostředně ze vzorce (3) a pro $x \in (a_\nu, a_{\nu+1})$ takto. Platí $-\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \cdot \left\{\alpha[\varphi(x)] - \alpha(x)\right\} = -\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \cdot$ $\cdot \left\{\operatorname{arctg} \frac{u[\varphi(x)]}{v[\varphi(x)]} - (\nu + 1)\pi \cdot \operatorname{sgn} w - \operatorname{arctg} \frac{u(x)}{v(x)} + \nu\pi \cdot \operatorname{sgn} w\right\} = 1$, neboť $u[\varphi(x)]\, v(x) - u(x)\, v[\varphi(x)] = 0$[6]) a tudíž pro $x \neq a_\nu$ je $\frac{u[\varphi(x)]}{v[\varphi(x)]} = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Vlastnosti 2°, 3° plynou z definice funkce F a z vlastností funkce α.

O vlastnosti 4° se lze přesvědčit snadným výpočtem.

2. *Nechť funkce φ má v int.* (a, b) *vlastnosti* a), b), c), *uvedené v odstavci 1. Nechť dále v int.* (a, b) *platí:*

1° *funkce F je řešením funkční rovnice* $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$,

2° *funkce F je spojitá a má spojité derivace do 3. řádu včetně,*

3° *funkce F roste od* $-\infty$ *do* $+\infty$, $(F'(x) > 0)$,

4° $q(x) = -\pi^2 F'^2(x) + \frac{3}{4}\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \frac{1}{2}\frac{F'''(x)}{F'(x)}$.

Potom v int. (a, b) *je funkce q spojitá, integrály dif. rovnice*

$$y'' = q(x) \cdot y \tag{4}$$

oscilují a funkce φ je z. c. dispersí 1. druhu příslušnou k dif. rovnici (4).

Skutečně, snadno se nahlédne, že funkce

$$u(x) = [\sin \pi F(x)] : \sqrt{F'(x)}, \quad v(x) = [\cos \pi F(x)] : \sqrt{F'(x)} \tag{5}$$

jsou dvě nezávislá řešení dif. rovnice (4), která vzhledem k 1° a 3° v int. (a, b) oscilují. Podle Sturmovy věty oscilují tedy všechny integrály dif. rovnice (4).

Tvrzení o spojitosti koeficientu q plyne z 2° a 3°.

Tvrzení o funkci φ ukážeme takto. Buď $x_0 \in (a, b)$ libovolné číslo a y integrál dif. rovnice (4) takový, že $y(x_0) = 0$. Integrál y se dá vyjádřit jako lineární kombinace integrálů u, v ve tvaru

$$y(x) = c_1\, u(x) + c_2\, v(x) = [c_1 \sin \pi F(x) + c_2 \cos \pi F(x)] : \sqrt{F'(x)}.$$

[6]) Viz [1], str. 204, 208.