Zusammenfassung

DER SATZ ÜBER DIE SUBSTITUTION IN DENJOY-INTEGRALEN

KAREL KARTÁK, Praha.

(Eingelangt 27. Oktober 1955.)

In diesem Artikel wurde die Gültigkeit der Formel (S) unter verschiedenen Voraussetzungen über das Integral und die Funktionen f, φ bewiesen.

(2,7) *Es sei f eine beschränkte Funktion in $\langle a, b\rangle$. Es soll eine stetige Funktion F so existieren, dass mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen $x \in \langle a, b\rangle$ $F'(x) = f(x)$ ist. φ sei ACG_* in $\langle \alpha, \beta\rangle$, $a \leq \varphi(t) \leq b$ für alle $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Dann gilt die Formel (S).*

Dem Beweis dieses Satzes liegt folgendes Lemma zugrunde:

(2,8) *Es seien folgende Bedingungen erfüllt: $F \in \text{Lip } 1$ in $\langle a, b\rangle$, φ ACG_* auf $\langle \alpha, \beta\rangle$, $a \leq \varphi(t) \leq b$ für alle $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Dann ist die Funktion $F(\varphi)$ ACG_* in $\langle \alpha, \beta\rangle$.*

Es ist nicht schwer, (2,7) für den Fall des Denjoy-Integrals im weiteren Sinne [Satz (3,4)] zu verallgemeinern. Es ist mir nicht bekannt, ob diese Sätze auch für jede beschränkte messbare Funktion f gültig sind.

In diesen Behauptungen war die Funktion „allgemein", nach der substituiert wurde. Die Verallgemeinerungen des bekannten Satzes über die Substitution für Lebesgue-integrable f und monotone φ [Satz (1,3)] sind in den Sätzen (2,11), (3,3) enthalten.

(2,11) *Es sei: f Denjoy-integrabel im engeren Sinne in $\langle a, b\rangle$; φ totalstetig und nicht fallend in $\langle \alpha, \beta\rangle$; $a \leq \varphi(t) \leq b$ für alle $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Dann gilt (S).*

Wenn wir in (2,11) „im weiteren Sinne" anstatt „im engeren Sinne" schreiben, bekommen wir den Satz (3,3), der in [4] von G. P. Tolstov bewiesen wurde.

Wenn wir weiter den bekannten Satz von Hake-Looman-Alexandrov über die Äquivalenz des Perron- und Denjoy-Perron Integrals, und den Satz über die Substitution, der in [3], Seite 292 bewiesen ist, benutzen, können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz. *Es sei f eine Funktion, die in $\langle a, b\rangle$ definiert ist. Es sei φ stetig in $\langle \alpha, \beta\rangle$, $a \leq \varphi(t) \leq b$ für alle $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$; es seien alle Intervalle $\langle \gamma, \delta\rangle \subset (\alpha, \beta)$ in endlich viele solche Intervalle teilbar, dass auf jedem φ monoton und totalstetig ist. Dann gilt (S) (es handelt sich um ein Perron-Integral), immer dann, wenn entweder $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$ oder $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ existiert.*