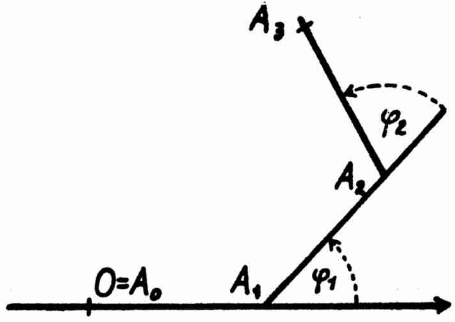
POZNÁMKA O EXISTENCI MNOHOÚHELNÍKA

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 30. června 1955.) DT:513.342

Článek se zabývá zjištěním nutných a postačujících podmínek, aby daná čísla bylo možno pokládat za velikosti úhlů rovinného mnohoúhelníka. Problém souvisí s článkem ALFREDA RÉNYIHO, Poznámka o úhlech mnohoúhelníka (Časopis pro pěstování matematiky, *78* (1953), str. 305—306).

Nejprve zavedeme několik pojmů: Je-li $A_0, A_1, \ldots, A_n$ konečná posloupnost bodů eukleidovské roviny, při čemž dva po sobě jdoucí body jsou vždy od sebe různé, pak posloupnost úseček $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ nazveme *lomenou čarou*; i-tým *úhlem* této lomené čáry budeme rozumět kladně orientovaný úhel vektorů $A_{i-1}A_i, A_iA_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$. Lomenou čáru prohlásíme za *mnohoúhelník*, platí-li $A_0 = A_n$. Viz obr. 1.



Obr. 1.

Nyní sformulujeme *problém*, jehož řešením se budeme zabývat: *Za jakých podmínek lze daná čísla $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ pokládat za velikosti prvního, druhého, ..., $(n - 1)$-tého úhlu některého mnohoúhelníka m $(n \geq 4)$?*

Než přistoupíme k řešení problému, provedeme několik předběžných úvah.

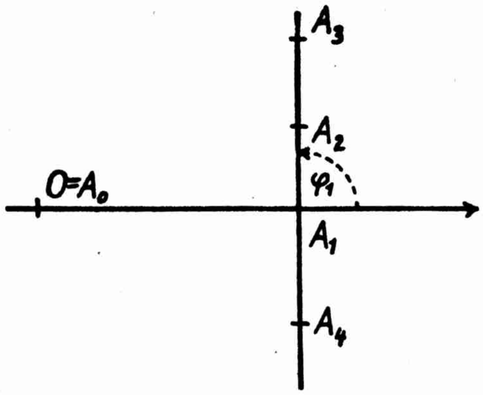
Předpokládejme, že v dané rovině jsou zavedeny kartézské souřadnice. Je-li $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ lomená čára, pak označme v_i, w_i obě souřadnice bodu A_i a předpokládejme, že platí $v_0 = w_0 = w_1 = 0 < v_1$; dále označme d_i délku úsečky A_iA_{i+1} a φ_i velikost i-tého úhlu dané lomené čáry. Pak pro $i = 2, 3, \ldots, n$ platí rovnice

$$v_i = d_0 + d_1 \cos \varphi_1 + d_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \ldots + d_{i-1} \cos (\varphi_1 + \ldots + \varphi_{i-1}) ,$$
$$w_i = d_1 \sin \varphi_1 + d_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + \ldots + d_{i-1} \sin (\varphi_1 + \ldots + \varphi_{i-1}) .$$

(Bod A_i lze totiž sestrojit jako koncový bod vektoru o počátečním bodu A_{i-1}, délce d_{i-1} a směrovém úhlu velikosti $\varphi_1 + \ldots + \varphi_{i-1}$. Tedy platí

$$v_i = v_{i-1} + d_{i-1} \cos (\varphi_1 + \ldots + \varphi_{i-1}) ,$$
$$w_i = w_{i-1} + d_{i-1} \sin (\varphi_1 + \ldots + \varphi_{i-1}) .$$

Z toho a z rovnic $v_1 = d_0$, $w_1 = 0$ plynou již obě rovnice hledané.)



Obr. 2.

Jako důsledek dostaneme ekvivalence

$$A_0 = A_n \Leftrightarrow v_n = w_n = 0 \Leftrightarrow d_0 + d_1 \cos \varphi_1 + d_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \ldots + d_{n-1} \cos (\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1}) = 0 = d_1 \sin \varphi_1 + d_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + \ldots + d_{n-1} \sin (\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1}) .$$

Vraťme se nyní k předloženému problému a označme $a_i = \cos (\varphi_1 + \ldots + \varphi_i)$, $b_i = \sin (\varphi_1 + \ldots + \varphi_i)$. *Podle předchozího důsledku existuje mnohoúhelník m právě tehdy, když rovnice*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} = -1 , \quad \text{(A)}$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_{n-1}x_{n-1} = 0 \quad \text{(B)}$$

mají společné řešení pouze s kladnými kořeny. (Volba $d_0 = 1$ zřejmě není na úkor obecnosti.) Označme toto tvrzení jako *pomocné tvrzení.*

Budeme rozlišovat celkem čtyři případy:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0 , \quad (1)$$

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0 , \quad (2)$$

$$a_1 = \lambda b_1,\ a_2 = \lambda b_2,\ \ldots,\ a_{n-1} = \lambda b_{n-1} \text{ pro jisté } \lambda \neq 0 , \quad (3)$$

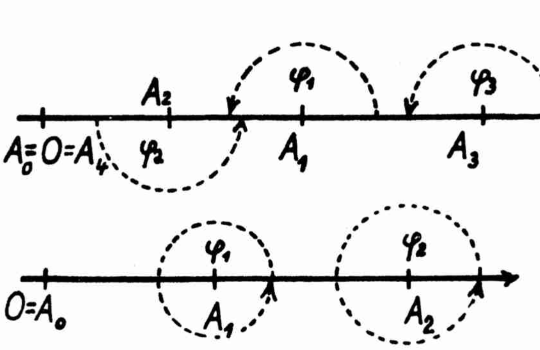
$$a_{i_1}b_{i_2} - a_{i_2}b_{i_1} = d_{i_1,i_2} \neq 0 \text{ pro jisté indexy } i_1, i_2 . \quad (4)$$

Zřejmě případ (1) nastává právě tehdy, když čísla $\varphi_1 + \ldots + \varphi_i$ ($i = 1, \ldots, n-1$) jsou současně lichými násobky čísla $\frac{\pi}{2}$, a tedy též právě tehdy, když číslo φ_1 je lichým násobkem čísla $\frac{\pi}{2}$ a čísla $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}$ jsou celistvé násobky čísla π. *V případě* (1) *nelze ovšem rovnici* (A) *splnit, takže mnohoúhelník m neexistuje.* Viz obr. 2.

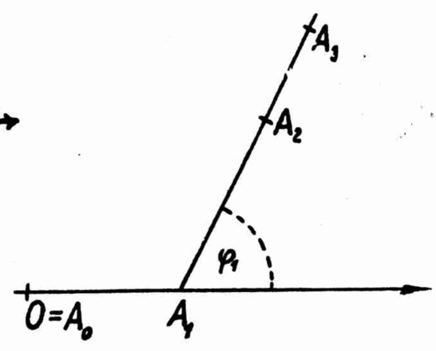
Případ (2) nastává právě tehdy, když čísla $\varphi_1 + \ldots + \varphi_i$ ($i = 1, \ldots, n-1$) jsou současně celistvými násobky čísla π, a tedy též právě tehdy, když čísla $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ jsou současně celistvými násobky čísla π. Platí-li (2), pak rovnice

(B) je splněna identicky a dále platí $|a_1| = |a_2| = \ldots = |a_{n-1}| = 1$. Mnohoúhelník m pak existuje, právě když existují kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ řešící rovnici (A). Tedy: *V případě* (2) *existuje mnohoúhelník* m *právě tehdy, když alespoň jedno z čísel* φ_i *je lichým násobkem čísla* π. Viz obr. 3.

V případě (3) *rovnice* (A), (B) *zřejmě nemají společné řešení, a tedy neexistuje ani mnohoúhelník* m. Viz obr. 4.



Obr. 3.



Obr. 4.

Nechť nyní platí (4). Označme M množinu všech uspořádaných párů (i_1, i_2), pro něž $d_{i_1,i_2} \neq 0$. Řešením rovnic

$$a_{i_1}x_{i_1} + a_{i_2}x_{i_2} = -1\,, \qquad (A_{i_1,i_2})$$

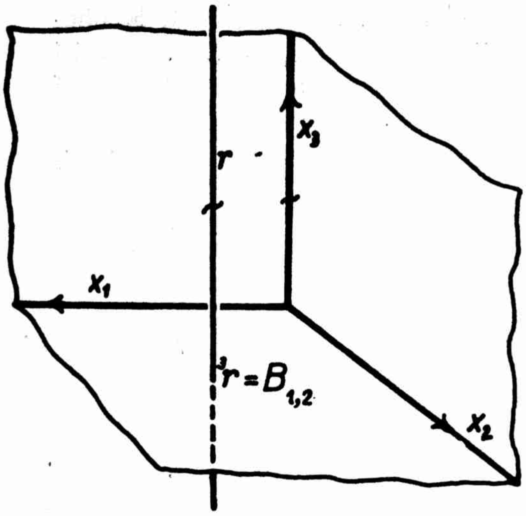
$$b_{i_1}x_{i_1} + b_{i_2}x_{i_2} = 0 \qquad (B_{i_1,i_2})$$

jsou kořeny $x_{i_1} = -b_{i_2}d^{-1}_{i_1,i_2}$, $x_{i_2} = b_{i_1}d^{-1}_{i_1,i_2}$. Rozlišujme dvě alternativy:

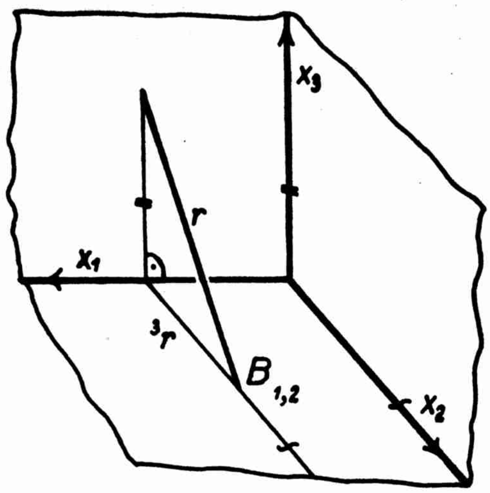
$$x_{l_1} \neq 0 \neq x_{l_2} \text{ pro jistou dvojici } (l_1, l_2) \in M\,, \qquad (4{,}1)$$

$$x_{i_1}x_{i_2} = 0 \text{ pro každou dvojici } (i_1, i_2) \in M\,. \qquad (4{,}2)$$

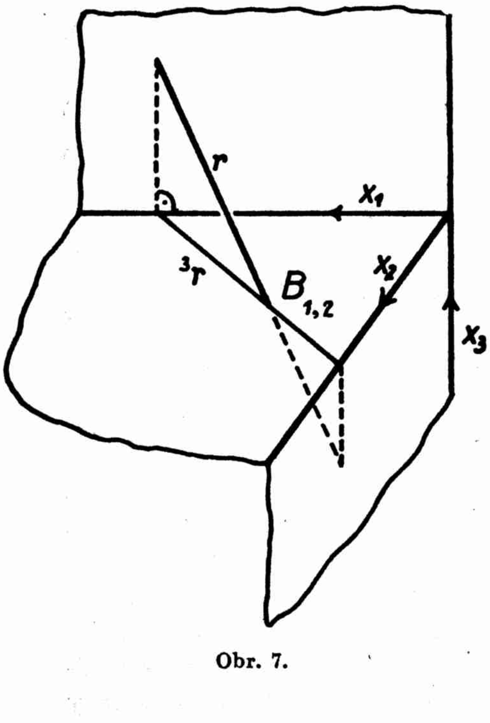
Předpokládejme, že platí kromě (4) ještě (4,1). Rovnice (A), (B) lze pokládat za rovnice jistých nadrovin eukleidovského souřadnicového prostoru E_{n-1}. Průnik γ těchto nadrovin je podprostorem o dimensi $n - 3$. Je-li $(i_1, i_2) \in M$, pak označme B_{i_1,i_2} bod, který má i_1-tou souřadnici x_{i_1}, i_2-tou souřadnici x_{i_2} a který má ostatní souřadnice nulové. Jednobodová množina $\{B_{i_1,i_2}\}$ je průnikem prostoru γ se souřadnicovou rovinou ϱ_{i_1,i_2}, obsahující i_1-tou a i_2-tou souřadnicovou osu. Je-li (j_1, j_2) non $\in M$, pak $\gamma \cap \varrho_{j_1,j_2} = \emptyset$. K tomu, aby prostor γ obsahoval bod se všemi souřadnicemi kladnými, je nutné i stačí, aby alespoň jeden z bodů B_{i_1,i_2} měl dvě souřadnice kladné. Podle naší interpretace je tím dokázáno, že k tomu, aby rovnice (A), (B) měly společné řešení pouze s kladnými kořeny, je nutné i stačí, aby existovala dvojice $(t_1, t_2) \in M$ tak, že kořeny x_{t_1}, x_{t_2} soustavy rovnic (A_{t_1,t_2}), (B_{t_1,t_2}) jsou oba kladné. Avšak zmíněné kořeny jsou kladné právě v tom případě, když $\operatorname{sg} b_{t_1} = -\operatorname{sg} b_{t_2} = \operatorname{sg} d_{t_1,t_2}$ (jak plyne snadno z rovnic $x_{t_1} = -b_{t_2}d^{-1}_{t_1,t_2}$, $x_{t_2} = b_{t_1}d^{-1}_{t_1,t_2}$).



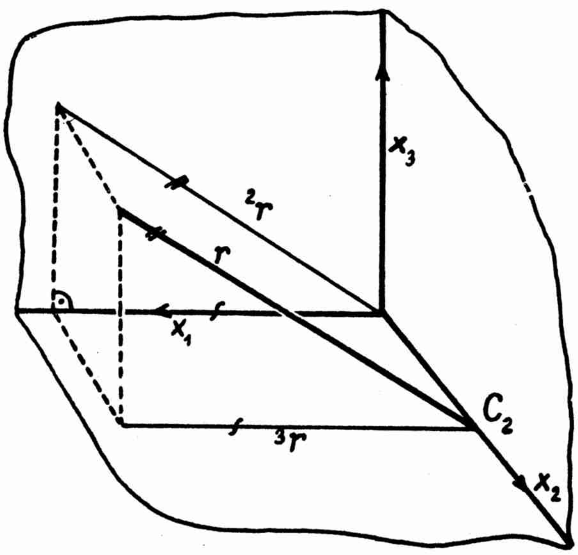
Obr. 5.



Obr. 6.



Obr. 7.



Obr. 8.

Podle pomocného tvrzení můžeme svůj výsledek přeformulovat: *Platí-li* (4), (4,1), *pak mnohoúhelník m existuje v tom a jen v tom případě, když existují indexy* t_1, t_2 *tak, že* $\operatorname{sg} b_{t_1} = - \operatorname{sg} b_{t_2} = \operatorname{sg} d_{t_1,t_2} \neq 0$.

Nechť nyní platí současně obě podmínky (4), (4,2). Označme $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ $(r < n - 1)$ indexy těch koeficientů b_i, které jsou nulové. Podle definice množiny M platí $(i_1, i_2) \in M$ právě tehdy, je-li $d_{i_1,i_2} \neq 0$. Tedy pro každé (k_1, k_2) non $\in M$ platí $d_{k_1,k_2} = 0$, t. j. $a_{k_1}b_{k_2} - a_{k_2}b_{k_1} = 0$. Avšak čísla $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ se vyskytují právě ve dvojicích $(i_1, i_2) \in M$. Tedy pro všecky indexy i různé od $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ platí rovnice $a_i = \lambda b_i$ (λ je jisté nenulové číslo).

Vynásobme rovnici (B) číslem λ a odečtěme ji pak od rovnice (A); dostaneme tak rovnici

$$a_{\tau_1}x_{\tau_1} + a_{\tau_2}x_{\tau_2} + \ldots + a_{\tau_r}x_{\tau_r} = -1 . \tag{A'}$$

Soustava (A), (B) je ekvivalentní se soustavou (A'), (B). Avšak soustavu (A'), (B) lze řešit tak, že rozřešíme obě rovnice (A'), (B) nezávisle na sobě (neobsahují totiž žádnou společnou neznámou). Zřejmě rovnice (A') má řešení pouze s kladnými kořeny právě v tom případě, když alespoň jeden z koeficientů a_{τ_i} je záporný. Obdobně rovnice (B) má řešení pouze s kladnými kořeny právě tehdy, když aspoň jeden z koeficientů b_i je kladný a aspoň jeden záporný.

Podle pomocného tvrzení lze tedy vyslovit výsledek: *Nechť platí* (4), (4,2); *nechť dále z koeficientů b_i jsou nulové právě ty, které mají indexy $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ $(r < n - 1)$. Pak mnohoúhelník m existuje právě tehdy, když mezi koeficienty a_{τ_j} $(j = 1, \ldots, r)$ je aspoň jeden záporný a mezi koeficienty b_i $(i = 1, \ldots, n - 1)$ aspoň jeden kladný a jeden záporný.*

Poznamenejme ještě na závěr, že vzhledem k významu koeficientů a_i, b_i platí za předpokladu $i_1 < i_2$ rovnice $d_{i_1,i_2} = -\sin(\varphi_{i_1} + \ldots + \varphi_{i_2})$.

P o z n á m k a. Na obr. 5—8 je znázorněn případ $n = 4$, kdy přímka γ obsahuje v prvním oktantě buď polopřímku r nebo alespoň úsečku r.