Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

THEORIE REÁLNÝCH ČÍSEL V BOLZANOVĚ RUKOPISNÉ POZŮSTALOSTI[1])

KAREL RYCHLÍK, Praha.

(Došlo dne 28. května 1956.) DT.511.2

V dosud vydaných Bolzanových spisech je uvedena celá řada vět o reálných číslech. Týká se to jeho prvních prací z analysy „Der binomische Lehrsatz... (1816)" a „Rein analytischer Beweis... (1817)" a ještě více „Functionenlehre", uveřejněné r. 1930 dlouho po Bolzanově smrti. Ve Functionenlehre jsou odkazy na různá místa z rukopisů dosud neuveřejněných. V rukopise „Unendliche Zahlen- (Grössen)-begriffe (Zahlenlehre II)" je systematicky zpracována theorie reálných čísel. V tomto článku autor o ní referuje. Tím se objasňují mnohé pojmy ve Functionenlehre používané a vyjasňuje se původ některých vět uvedených tam bez důkazu.

1. Podle Bolzana nazveme *nekonečným číselným výrazem* výraz, v němž je nekonečně mnoho základních číselných operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení) provedených na celých číslech. Bolzano to osvětluje příklady:

$$1 + 2 + 3 + \ldots \text{in inf.}\,, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots \text{in inf.}\,,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{8}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\ldots \text{in inf.}$$

2. Mezi těmito nekonečnými číselnými výrazy jsou takové, S, že lze k celému číslu kladnému q určit číslo celé p tak, že platí

$$S = \frac{p}{q} + P_1 \quad \text{a} \quad S = \frac{p+1}{q} - P_2\,, \tag{1}$$

[1]) Je obsažena v odstavci „Unendliche Zahlen- (Grössen)begriffe", což je částí obsáhlé Bolzanovy „Grössenlehre". Bolzanův rukopis je uložen v Národní knihovně ve Vídni. V archivu Čs. akademie jsou fotokopie, které obstaral *M. Jašek*.

Rukopis byl napsán asi v letech 1830—1835. *Edvard Winter* určuje tak z dopisů, které psal Bolzano svým žákům *Fesslovi* a *Příhonskému*. Viz *E. Winter*: Bernard Bolzano und sein Kreis, Lipsko 1933, kap. V (český překlad od dr *Zdeňka Kalisty*: B. Bolzano a jeho kruh, Praha 1935) a od téhož autora: Leben und geistige Entwicklung des Sozialethikers und Mathematikers Bernard Bolzano (1781—1848), Halle 1949.

Byl jsem pověřen první sekcí Čsl. akademie věd, abych opatřil opisy dosud neuveřejněných Bolzanových rukopisů.

kde P_1 je číselný výraz nezáporný a P_2 číselný výraz kladný (§ 5). Bolzano říká (§ 6), že lze S *určit přibližně* nebo *měřit* až na $\frac{1}{q}$. Zlomek $\frac{p}{q}$ nazývá měrným zlomkem pro S. Vyskytuje se však také případ, že je pro S možné vyjádření (1), ať je q jakékoli celé číslo kladné. Ukazuje to na příkladu

$$S = a + \frac{b}{1 + 1 + 1 + \ldots + \text{in inf.}}.$$

Pak říká Bolzano, že je možno S *určit s libovolnou přesností* nebo *měřit* (§ 6) a nazývá výraz S *měřitelným* (§ 6).

3. Mezi nekonečnými číselnými výrazy jsou takové, že při měření má měrný zlomek vždy čitatele rovného nule (§ 18). Příklad:

$$S = \frac{1}{1 + 1 + 1 + \ldots \text{in inf.}}.$$

Je-li v (1) (z odst. 2)

$$S = P_1 = \frac{1}{q} - P_2 \text{ pro každé } q\,,$$

nazývá Bolzano S *nekonečně malým číslem kladným*, a $-S$ pak nazývá *nekonečně malým číslem záporným* (§ 19).

Konečně jsou nekonečné číselné výrazy této vlastnosti:

Při provádění měření se může stát, že lze k danému q určit p tak, že je splněna jen jedna z rovnic (1) (§ 23). Tyto číselné výrazy nazývá Bolzano *nekonečně velkými*.

Příklad: $$1 + 2 + 3 + \ldots \text{in inf.}$$

Je to *nekonečně velký výraz kladný* (*záporný*), je-li splněna první (po příp. druhá) z rovnic (1).

4. Řekneme, že A, B jsou *měřitelná čísla s týmiž měrnými zlomky*, patří-li ke každému celému kladnému číslu q totéž celé číslo p, takže jsou splněny tyto čtyři rovnice:

$$A = \frac{p}{q} + P_1 = \frac{p+1}{q} - P_2\,, \quad B = \frac{p}{q} + P_3 = \frac{p+1}{q} - P_4\,,$$

kde P_1, P_3 jsou nezáporné a P_2, P_4 kladné výrazy.

Zatím pro měřitelná čísla nebyla definována rovnost. Tu Bolzano definuje takto (§ 50):

Nazve dvě měřitelná čísla A, B *rovnými* (rovnocennými), mají-li A, B tytéž měrné zlomky. Všechna nekonečně malá čísla jsou rovnocenná s nulou a rovná měřitelná čísla se liší jen o číslo nekonečně malé.

Měřitelnými čísly s takto určenou rovností definuje Bolzano čísla reálná. Dokazuje, že tato čísla tvoří těleso obsahující těleso čísel racionálních. Dokazuje pak dále, že je to těleso uspořádané. Při tom definuje vztah $a > b$ tím, že rozdíl $a - b$ je kladný.

5. Založení theorie reálných čísel, jak je podává Bolzano, není možno považovat za správné a také v mnohých dalších podrobnostech se vyskytují omyly. Šlo by o to, nalézt pro Bolzanovu theorii takový výklad, aby bylo možno z ní zachránit co možná nejvíce. Jednu takovou možnost poskytuje Cantorova theorie reálných čísel.[2]) Při tom by si odpovídaly:

V Bolzanově theorii:	Ve výkladu pomocí Cantorovy theorie:
nekonečný číselný výraz	posloupnost racionálních čísel
měřitelná čísla	konvergentní posloupnost racionálních čísel
rovnost (rovnocennost) měřitelných čísel	ekvivalence ($\sim$) konvergentních posloupností

Místo nekonečně malých čísel nutno vzít nulovou posloupnost. Při definici kladných čísel reálných místo kladných číselných výrazů nutno vzít výrazně kladné posloupnosti.

6. Z věty v § 42 plyne, že *reálné číslo A je možno vyjádřit v tvaru*

$$A = \alpha + \frac{\beta}{a} + \frac{\gamma}{ab} + \frac{\delta}{abc} + \frac{\varepsilon}{abcd} + \dots, \tag{2}$$

kdež „základní čísla" $a, b, c, d, \dots$ jsou kladná celá čísla vesměs > 1; α je celé číslo $\left(\begin{smallmatrix}\geq\\=\\<\end{smallmatrix} 0\right)$, $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ jsou celá čísla nezáporná taková, že $\beta < a$, $\gamma < b$, $\delta < c$, $\varepsilon < d$, ... (Jednoznačné vyjádření pro A bychom dostali, kdyby byla splněna podmínka, že v nekonečně mnoha případech platí

$$\beta < a - 1,\ \gamma < b - 1,\ \delta < c - 1,\ \varepsilon < d - 1,\ \dots .$$

To však Bolzano neuvádí.) (2) *je vyjádření reálného čísla tak zvanou řadou Cantorovou.*[3]) Speciálním případem je vyjádření reálného čísla desetinným zlomkem a obecněji zlomkem g-adickým (g celé číslo > 1).

Správnost právě nejzajímavějších vět a jejich důkazů u Bolzana lze vysvětlit tou okolností, že k jejich důkazu užívá Bolzano právě uvedeného vyjádření reálného čísla řadou Cantorovou.

7. V § 69 dokázána věta Archimedova: *Jsou-li A, B konečná kladná reálná čísla a je-li $A < B$, existuje (celý) násobek nA čísla A, který je větší než druhé číslo B.*

---

[2]) Užívám výkladu akad. *E. Čecha* podaného v knize: Čísla a početní výkony, Praha 1945, a terminologie tam zavedené.

[3]) Srov. též *G. Cantor*: Über die einfachen Zahlensysteme, Zeitschr. f. Math. u. Phys. *14*, 1869, 121—128; Gesammelte Abh., 1932, 35—42. *O. Perron*: Irrationalzahlen, 1921, § 33, Die Cantorschen Reihen.

8. V § 74 uvedena věta, *že mezi dvěma různými reálnými čísly A a C ($A < C$) leží další reálné číslo B ($A < B < C$)* a v § 79, že *takových čísel B je nekonečně mnoho.* (Reálná čísla stejně jako čísla racionální tvoří množinu hustě rozloženou (pantachickou).)[4])

9. Věta v § 87 uvedená je základem tak zvané *methody exhaustní*: *Je-li $A + \Omega_1 = B + \Omega_2$, kde A, B jsou neproměnná reálná čísla, kdežto Ω_1, Ω_2 možno učinit libovolně malými, je $A = B$.*[5])

Časté užívání této věty v tvaru právě uvedeném jako principu důkazu je pro Bolzana charakteristické.

10. V § 102 je **věta:**

Je-li u nekonečné posloupnosti reálných čísel $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots, X_{n+r}, \ldots$ číslo $|X_{n+r} - X_n|$ stále menší než libovolně malý zlomek $\frac{1}{N}$, ať zvolíme r jakkoliv velké, jestliže jsme již zvolili n dostatečně velké, pak existuje jedno a jen jedno číslo reálné A (konečné) té vlastnosti, že se mu členy naší posloupnosti libovolně blíží, t. j. že čísla $|A - X_r|$ a $|A - X_{n+r}|$ se stávají libovolně malými, zvolíme-li n a r dostatečně velká.[6])

11. § 104 obsahuje **větu o infimu a supremu.**

Víme-li o vlastnosti $\mathfrak{B}$, že nepřísluší všem hodnotám proměnného čísla X, které jsou větší (menší) než číslo U, přísluší však všem hodnotám X, které jsou menší (po

---

[4]) Mimochodem připomínám: této vlastnosti užívá Bolzano k „očíslování" nových listů, které chce vložit mezi dva listy již očíslovaného rukopisu, aniž by celý rukopis přečísloval. Vloží-li jeden list mezi list n a $n + 1$, označí ho číslem $n + \frac{1}{2}$, při vložení dalšího listu mezi listy n a $n + \frac{1}{2}$ $\left(\text{po příp. } n + \frac{1}{2} \text{ a } n\right)$ označí tyto listy $n + \frac{1}{4}$ $\left(\text{po příp. } n + \frac{3}{4}\right)$. (Podobně kdyby se měly mezi listy n a $n + 1$ vložit tři nové listy, očíslovaly by se hned čísly $n + \frac{1}{4}$, $n + \frac{1}{2}$, $n + \frac{3}{4}$. A tak podobně dále.) K očíslování listů užívá se tu zlomků dyadických. K podobnému účelu by bylo možno užít desetinných zlomků, obecněji zlomků g-adických s libovolným základem g (g celé číslo > 1) a konečně také řad Cantorových s libovolnými čísly základními. Na řadách Cantorových je v podstatě založeno „očíslování" vložených listů pomocí písmen z různých abeced. Tak k označení listů vložených mezi list n a $n + 1$ se užije znaků na, nb, nc, ..., k označení listů vložených na př. mezi list nc a nd se užije znaků $nc\alpha$, $nc\beta$, $nc\gamma$, ... a tak podobně dále. Při „očíslování" provedeném pomocí některého z popsaných způsobů vyskytují se jako pořadová čísla také zlomky. Může se však státi, že při tom „vzniknou mezery", t. j. mezi dvěma zlomky, které jsou skutečně pořadovými čísly listů, leží zlomek z užité soustavy, který není pořadovým číslem žádného listu. Tomu lze zabránit, užíváme-li k očíslování Cantorovy řady s vhodně zvolenými základními čísly.

[5]) Viz *K. Knopp*: Darstellung der reellen Zahlen durch Grenzprozesse, Enzyklop. d. math. Wiss. (nové vydání), I 1, 4, str. 5.

[6]) Tato podmínka pro konvergenci nekonečné posloupnosti se nazývá podmínkou Bolzano-Cauchyovou. Uvedená věta se vyskytuje u Bolzana ve spise Der binomische Lehrsatz..., Praha 1816 a také ve spise Rein analytischer Beweis..., Abh. d. Königl. Böhm. Ges. d. Wis. (*315*, 1817). (Viz též Ostwalds Klassiker, Nr. 153, 1905 s poznámkami od Ph. *E. B. Jourdaina*; český překlad od *F. J. Studničky*, Časop. pro pěst. mat. a fys., *11*, 1881, 1—38.)

příp. větší) než U, můžeme tvrdit, že existuje reálné číslo (konečné) A, které je největší (po případě nejmenší) z těch čísel, o nichž lze říci, že všechna menší (po příp. větší) mají vlastnost $\mathfrak{B}$; nelze tvrdit nic o tom, má-li hodnota $X = A$ sama také vlastnost $\mathfrak{B}$[7]).

Při důkazu vyjadřuje Bolzano A řadou Cantorovou.

12. § 105 obsahuje větu, která připomíná větu Dedekindovu.[8]) Nechť $X < Y$ značí, že pro množiny reálných čísel X, Y z $x \in X$, $y \in Y$ plyne $x < y$. Podobně bude značit $X < a$, je-li a reálné číslo, že pro množinu X z $x \in X$ plyne $x < a$.

Budiž $X < Y$.

I. *Nechť X neobsahuje největší a Y neobsahuje nejmenší číslo. Pak existuje reálné číslo a takové, že $X < a < Y$. Číslo a je určeno jednoznačně právě tehdy, existují-li rozdíly $y - x$ ($x \in X$, $y \in Y$) libovolně malé.*

II. *Nechť obsahuje buď X největší číslo nebo Y nejmenší číslo a nechť existují rozdíly $y - x$ ($x \in X$, $y \in Y$) libovolné blízké nule. Pak neexistuje žádné reálné číslo a takové, že $X < a < Y$.*

---

[7]) Viz Bolzano, Rein analytischer Beweis... (uvedeno v předešlé poznámce pod čarou).

[8]) Na tuto stylisaci mne upozornil při recensi akad. *V. Jarník.*