Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

K THEORII VÍCEROZMĚRNÉHO INTEGRÁLU

KAREL KARTÁK, Praha.

(Došlo dne 8. července 1954.) DT: 517.397

Článek vznikl z autorovy diplomové práce, kterou vedl J. Mařík. Hlavním výsledkem je zobecnění na vícerozměrný případ této známé věty z theorie Perronova integrálu: *Má-li f Perronův integrál v $\langle a, t\rangle$ pro každé $t \in \langle a, b)$ a existuje-li konečná limita $\lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)\,dx = A$, pak existuje také $\int_a^b f(x)\,dx$ a rovná se A.*

I. Vícerozměrné nevlastní integrály

1. Základní definice a označení. Budeme se převážně zabývat vícerozměrným Perronovým integrálem, definovaným v článku [1] J. Maříkem. (Tam je definován dokonce Perron-Stieltjesův integrál). Připomeňme si stručně jeho definici.

Intervalem I v m-rozměrném eukleidovském prostoru E_m nazveme kartézský součin m uzavřených nezvrhlých (t. j. obsahujících více než jeden bod) intervalů z E_1. Je-li $I = i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_m$, kde $i_k = \langle a_k, b_k\rangle$, $a_k < b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, budeme psát $I = \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_m, b_m\rangle$. Objemem intervalu I nazveme číslo $|I| = \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$. Řekneme, že posloupnost intervalů $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x \in E_m$, jestliže $x \in I_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a $\lim_{n \to \infty} d(I_n) = 0$; $d(A)$ znamená pro $A \subset E_m$ průměr množiny A. Jako obvykle značí $O(A, \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, ε-okolí množiny A v E_m, $\overline{A}$ její uzávěr a Int A množinu všech jejích vnitřních bodů. Řekneme, že se intervaly I_1, I_2 nepřekrývají, jestliže platí Int $(I_1 \cap I_2) = \emptyset$.

Buď K m-rozměrný interval. Řekneme, že F je funkce intervalu v K, jestliže F je zobrazení množiny všech intervalů $I \subset K$ do množiny reálných čísel. Řekneme, že F je superaditivní v K, jestliže platí $F(I_1 + I_2) \geqq F(I_1) + F(I_2)$, kdykoli se intervaly I_1, I_2 nepřekrývají, $I_1 + I_2$ je interval v K a součet na pravé straně má smysl (t. j. nemá tvar $\infty - \infty$ nebo $-\infty + \infty$). Pro znaménko $\leqq$ resp. $=$ dostáváme definici subaditivní resp. aditivní funkce intervalu.

Buď F funkce intervalu v K. Řekneme, že F je slabě spojitá v bodě $x \in K$, jestliže $F(I_n) \to 0$, kdykoli $I_n \to x$, $I_n \subset K$. Je-li F slabě spojitá v každém bodě $x \in K$, řekneme, že je slabě spojitá v K.

Horní derivací funkce intervalu F v bodě $x \in K$ nazveme supremum množiny všech limit tvaru

$$\lim \frac{F(I_n)}{|I_n|} \quad \text{pro } I_n \to x,\ I_n \subset K\,;$$

označení $\bar{F}(x, K)$ nebo krátce $\bar{F}(x)$. Podobně dolní derivací funkce F v bodě $x \in K$ nazveme číslo

$$\underline{F}(x) = \inf_{\{I_n\}} \left(\lim_{\substack{I_n \to x \\ I_n \subset K}} \frac{F(I_n)}{|I_n|} \right);$$

lehce se zjistí souvislost s jednorozměrným případem.

Buď f bodová funkce v K. Řekneme, že funkce intervalu M je majorantou funkce f v K, jestliže

(1) M je superaditivní v K,

(2) $-\infty \neq \underline{M}(x) \geqq f(x)$ pro každý bod $x \in K$.

Řekneme, že m je minorantou f v K, když $-m$ je majorantou funkce $-f$ v K.

Přejděme k *definici Perronova integrálu*. Buď f bodová funkce v intervalu K. Horním Perronovým integrálem funkce f v intervalu K nazveme infimum množiny $\{M(K)\}$, kde M je majoranta f v K; označení $\bar{\int\limits_K} f(x)\,dx$. Dolním Perronovým integrálem funkce f v K nazveme supremum množiny $\{m(K)\}$, kde m je minoranta f v K; označení $\underline{\int\limits_K} f(x)\,dx$. Z podmínek (1), (2) pro majorantu plyne $\bar{\int\limits_K} f(x)\,dx \geqq \underline{\int\limits_K} f(x)\,dx$ (důkaz viz [1], část II, 43). Jestliže platí $\bar{\int\limits_K} f = \underline{\int\limits_K} f$ a je to konečné číslo, nazveme je Perronovým integrálem funkce f v intervalu K a označíme $\int\limits_K f(x)\,dx$.

V dalším budou také zmínky o *Riemannově* a *Lebesgueově vícerozměrném integrálu*; jejich definice jest dobře známa. Pro krátkost budeme dále místo Perronův integrál psát P-integrál; podobně L-integrál, R-integrál a dále definované integrály.

2. Některé výsledky z theorie P-integrálu.

(2.1) *Má-li f P-integrál v K, má také P-integrál v I, kdykoli je interval $I \subset K$.*

Důkaz: [1], část II, 51.

(2.2) *P-integrál je aditivní funkce intervalu.*

Důkaz: [1], část II, 52.

(2.3) Fubiniho věta. *Má-li funkce $f(x, y)$ P-integrál v intervalu $K = \langle a, b; c, d\rangle$, platí*

$$\int\limits_K f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \Big(\bar{\int\limits_c^d} f(x, y)\,dy\Big)\,dx = \int\limits_a^b \Big(\underline{\int\limits_c^d} f(x, y)\,dy\Big)\,dx\,.$$

Důkaz: [1], část II, 77.

(2.4) *Nechť f má P-integrál v intervalu K. Pro $I \subset K$ položme $P(I) = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak P je slabě spojitá v K.*

Důkaz: [1], část II, 81.

(2.5) *Má-li f P-integrál v $\langle a, t \rangle$ pro každé $t \in \langle a, b \rangle$ a existuje-li konečná limita $\lim_{t \to b - a} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = A$, pak existuje také $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$.*

Důkaz: [1], část II, 90.

(2.6) (a) *Buď f bodová funkce v intervalu K. Existuje-li R-integrál z f v K, pak existuje také P-integrál z f v K a rovná se R-integrálu.*

(b) *Označme $P_A(K)$ resp. $L(K)$ množinu všech perronovsky absolutně resp. lebesgueovsky integrovatelných funkcí v K. Pak platí $P_A(K) = L(K)$.*

(c) *Buď $K = \langle a, b \rangle$; nechť f má v K nevlastní R-integrál resp. nevlastní L-integrál. Pak má také P-integrál.*

Důkaz: (a) [1], část II, 60. (b) [1], část III, 11. (c) plyne z (a) resp. (b) a (2.5).

Poznámka. V dalším se budeme zabývat jen dvojrozměrným případem.

3. Nevlastní dvojrozměrné integrály. Všimněme si nejprve nevlastního R-integrálu. Ten se obvykle definuje ne právě exaktně, ale smysl těchto definicí je následující (uvažujeme případ jediného „singulárního" bodu).

(3.1) Buď K interval, bod $z \in K$. Buď D omezená oblast, jejíž hranicí je jednoduchá uzavřená křivka konečné délky; nechť $z \in D$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{d(D) \to 0} (R) \iint_{K - D} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A\,,$$

řekneme, že existuje nevlastní R-integrál funkce f v K a rovná se A.

Poznámka. Je-li f definována v intervalu K a je-li množina A částí K, definujeme jako obvykle

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_K f(x)\,.\,\chi_A(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde χ_A značí charakteristickou funkci množiny A. Zřejmě nezáleží na tom, do kterého intervalu množinu A vnoříme. Neexistuje-li integrál napravo, řekneme, že integrál z f přes množinu A neexistuje.

Definice se obdobně rozšiřuje i pro případ konečně mnoha singulárních bodů. Lze však ukázat, že takto definovaný integrál nepřekračuje třídu L-integrálu; to plyne z této věty:

(3.2) *Funkce f má nevlastní R-integrál (ve smyslu definice (3.1)), právě když $|f|$ má nevlastní R-integrál.* (Viz na příklad knihu *K. Petr*: Počet integrální (1931), odstavec 307.)

Od této chvíle klademe $K = \langle 0, 1; 0, 1 \rangle$; to není na újmu obecnosti.

(3.3) Buď v K definována funkce f; nechť pro $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$ $I(x, y)$ značí interval $\langle x, 1; y, 1 \rangle$. Nechť existuje R-integrál z funkce f v $K - I(x, y)$; označme

$$\Phi(x, y) = \iint_{K - I(x,y)} f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{[x,y] \to [1,1]} \Phi(x, y) = A\,, \quad 0 \leqq x < 1\,, \quad 0 \leqq y < 1\,,$$

pak řekneme, že existuje nevlastní R-integrál funkce f v K a rovná se A.

Takto definovaný integrál označme R^{**}. Podobně definujme L^{**}-integrál a P^{**}-integrál. Nemusili jsme se samozřejmě omezovat na případ, kdy bod z leží ve vrcholu K, ale tato definice je stejně jen pomocná.

Poznámka. (3.3) odpovídá tomu případu ve (3.1), kdy oblasti D jsou otevřené intervaly. Měli bychom důsledněji označit

$$\Phi(x, y) = \iint_{\overline{K - I(x,y)}} f(x, y)\, dx\, dy\,,$$

neboť množina $K - D$ je uzavřená; ale hodnota integrálu je v obou případech stejná. Této poznámky dále častěji použijeme.

Zřejmě platí $R^{**} \supset R$, $L^{**} \supset L$, $L^{**} \supset R^{**}$ (t. j. má-li funkce f R-integrál v K, má také R^{**}-integrál v K a jejich hodnoty jsou stejné; atd.). Ukažme teď, že neplatí $R^{**} \subset L$.

(3.4) *Na intervalu K existuje funkce f tak, že platí $(R^{**})\int_K f = 0$ a že neexistuje konečný integrál z f přes Δ, kde $\Delta = \mathop{\mathcal{E}}_{x,y]} ([x, y] \in K, x \geqq y)$.*

Důkaz (*J. Mařík*): Buď $a_1, a_2, \ldots$ rostoucí posloupnost kladných čísel, která má limitu 1; buď dále $b_1, b_2, \ldots$ posloupnost kladných čísel, která má limitu 0 a která tvoří divergentní řadu. Položme ještě $a_0 = 0$; nechť

$$K_n = \langle a_{n-1}, a_n; a_{n-1}, a_n \rangle\,, \quad \Delta_n = \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} [a_{n-1} \leqq y \leqq x \leqq a_n]\,.$$

Je tedy $\Delta_n \subset K_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Utvořme v každém intervalu K_n funkci f_n o těchto vlastnostech:

(1) f_n je spojitá v K_n a na hranici K_n má nulové hodnoty;

(2) $f_n(x, y) = - f_n(y, x)$ pro každý bod $[x, y] \in K_n$;

(3) $f_n(x, y) \geqq 0$ pro $[x, y] \in \Delta_n$;

(4) $\int_{\Delta_n} f_n = b_n$.

(Snadno se zjistí, že takové funkce f_n existují.)

Definujme nyní v K funkci f takto: Je-li $[x, y] \in K_n$, buď $f(x, y) = f_n(x, y)$. (Patří-li bod $[x, y]$ do $K_m \cap K_n$, kde $m \neq n$, je zřejmě $|m - n| = 1$, $f_n(x, y) =$

$= f_m(x, y) = 0.$) Nepatří-li $[x, y]$ do žádného z intervalů K_n, buď $f(x, y) = 0$. Snadno se zjistí, že funkce f je s výjimkou bodu $[1, 1]$ spojitá všude v K.

Dokážeme, že $\lim \Phi(x, y)$[1]) pro $[x, y] \in K$, $[x, y] \to [1, 1]$, $x < 1$, $y < 1$ existuje a rovná se nule.

Zvolme tedy kladná čísla x, y menší než 1; buď na př. $y \leqq x$. Je-li $y = x$, je z důvodu symetrie $\Phi(x, y) = 0$. Buď nyní $y < x$; označme $I_1 = \langle x, 1; y, x \rangle$. Platí $\Phi(x, y) + \int_{I_1} f = \Phi(x, x) = 0$, tedy $\Phi(x, y) = -\int_{I_1} f$. Buď $a_{n-1} < x \leqq a_n$. Interval I_1 zřejmě nemá společné body s intervaly $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ (v těch jsou první souřadnice nejvýš rovné $a_{n-1} < x$) ani s vnitřky intervalů K_{n+1}, $K_{n+2}, \ldots$ (v těch jsou druhé souřadnice větší než $a_n \geqq x$). Interval I_1 je částí Δ; na I_1 je tedy $f \geqq 0$. Na $I_1 - K_n$ je však $f = 0$; je proto $0 \leqq \int_{I_1} f = \int_{I_1 K_n} f \leqq \int_{\Delta_n} f = b_n$, takže $0 \leqq |\Phi(x, y)| \leqq b_n$. Odtud plyne ihned, že $\lim \Phi(x, y) = 0$. Existuje tedy R^{**}-integrál $\int_K f$ a rovná se nule. Lebesgueův integrál $\int_K f$ však neexistuje, protože $\int_\Delta f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_n} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Poznámka. Definujme v K funkci intervalu P předpisem $P(I) = \int_I f$ (rozumí se R^{**}-integrál). Obsahuje-li I bod $[1, 1]$, je $P(I) = \int_K f - \int_{K-I} f = -\Phi(x, y)$, kde $I = \langle x, 1; y, 1 \rangle$. Je-li $a_{n-1} < \max(x, y) \leqq a_n$, je $|P(I)| = |\Phi(x, y)| \leqq b_n$; přitom je však plošná velikost intervalu I aspoň $(1 - a_n)^2$. Volíme-li na př. $b_n = \frac{1}{n}$, $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, je pro takový interval I poměr mezi $P(I)$ a plošnou velikostí intervalu I v prosté hodnotě nejvýš $\frac{b_n}{(1 - a_n)^2} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt[3]{n^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; derivace funkce P v bodě $[1, 1]$ je potom rovna nule. Vidíme, že takto sestrojená funkce f má v K dokonce Newtonův integrál (viz [1], část II, 56).

4. P^{**}-integrál. V tomto odstavci dokážeme, že P-integrál je, podobně jako v jednorozměrném případě, zobecněním L^{**}-integrálu. Dokážeme totiž, že $P^{**} = P$.

(4.1) *Nechť existuje P-integrál z funkce f v intervalu K. Pak existuje také P^{**}-integrál z f v K a rovná se P-integrálu.*

Důkaz: Plyne ze slabé spojitosti P-integrálu; viz (2.4).

(4.2) *Nechť existuje P^{**}-integrál z funkce f v intervalu K a rovná se A. Pak existuje také P-integrál z f v K a rovná se A.*

Důkaz. Sestrojme tuto posloupnost čtverců: Rozdělme K na čtyři shodné čtverce a označme K_1, K_2, K_3 ty z nich, které neobsahují bod $[1, 1]$. Ve zbylém

[1]) Viz (3.3).

čtverci — označme ho L_1 — proveďme tuto operaci znova; dostaneme čtverce K_4, K_5, K_6; interval L_n rozdělíme podobně na intervaly $K_{3n+1}, K_{3n+2}, K_{3n+3}, L_{n+1}$, při čemž L_{n+1} obsahuje bod $[1, 1]$. Je tedy $L_n = \langle 1 - 2^{-n}, 1; 1 - 2^{-n}, 1 \rangle$. Položme ještě $K = L_0$.

Zvolme nyní libovolně $\varepsilon > 0$. Protože existují integrály $\int_{K_n} f$, $n = 1, 2, \ldots$, existují majoranty $M_1, M_2, \ldots$ v $K_1, K_2, \ldots$ tak, že platí

$$(\alpha) \qquad M_n(K_n) < \int_{K_n} f + \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) .$$

Každou funkci M_n rozšiřme na celý interval K tak, že položíme $M_n(I) = M_n(IK_n)$ resp. $M_n(I) = 0$ podle toho, je-li IK_n interval (nedegenerovaný) či nikoli. Funkce M_n jsou podle [1], část II, 22 superaditivní v K.

Zkoumejme nyní řadu

$$(\beta) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [M_{3n-2}(K) + M_{3n-1}(K) + M_{3n}(K)] .$$

Je $\int_{K_n} f \leqq M_n(K_n) = M_n(K) < \int_{K_n} f + \frac{\varepsilon}{2^n}$, tedy

$$\int_{L_{n-1}-L_n} f = \int_{K_{3n-2}} f + \int_{K_{3n-1}} f + \int_{K_{3n}} f \leqq M_{3n-2}(K) + M_{3n-1}(K) + M_{3n}(K) <$$

$$< \int_{L_{n-1}-L_n} f + \varepsilon \left(\frac{1}{2^{3n-2}} + \frac{1}{2^{3n-1}} + \frac{1}{2^{3n}} \right) .$$

Je však $\sum_{n=1}^{N} \int_{L_{n-1}-L_n} f = \int_{L_0-L_N} f = \int_{K-L_N} f$, jak se snadno zjistí indukcí; odtud plyne, že řada (β) konverguje a její součet leží v intervalu $\langle A, A + \varepsilon)$.

Zvolme nyní libovolný interval $I \subset K$ a utvořme řadu

$$(\gamma) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [M_{3n-2}(I) + M_{3n-1}(I) + M_{3n}(I)] .$$

Rozeznávejme dva případy:

(1) $[1, 1]$ nepatří do I. Potom pro velká n je $I \cap L_{n-1} = \emptyset$, tedy $I \cap K_{3n-2} = I \cap K_{3n-1} = \ldots = \emptyset$, $M_{3n-2}(I) = M_{3n-1}(I) = \ldots = 0$, takže řada ($\gamma$) má jen konečný počet nenulových členů a je proto konvergentní.

(2) $[1, 1]$ patří do I. Potom pro velká n je $L_{n-1} \subset I$, tedy $M_{3n-2}(I) = M_{3n-2}(I \cap K_{3n-2}) = M_{3n-2}(K_{3n-2}) = M_{3n-2}(K)$ atd. Řada (γ) se tedy až na konečný počet členů shoduje s řadou (β), takže je rovněž konvergentní.

Řada (γ) tedy definuje pro každý interval $I \subset K$ jisté číslo; označme je $\tilde{M}(I)$. Tím je definována v K funkce intervalu $\tilde{M}$, která je zřejmě superaditivní; zjistili jsme, že $A \leqq \tilde{M}(K) < A + \varepsilon$.

Definujme ještě v K funkci intervalu D tímto předpisem: Je $D(I) = 1$ resp. $D(I) = 0$ podle toho, obsahuje-li interval I bod $[1, 1]$ či ne. Funkce D je zřejmě aditivní, takže funkce

$$M = \tilde{M} + 5\varepsilon D$$

je superaditivní.

Dokážeme, že M je majorantou funkce f. Máme tedy dokázat, že platí $\underline{M}(x, y) \geqq f(x, y)$, $\underline{M}(x, y) \neq -\infty$ pro každý bod $[x, y] \in K$.

Buď napřed $[x, y] \neq [1, 1]$. Pak existují nejvýš čtyři indexy i tak, že $[x, y] \in K_i$. Lehce se zjistí (viz [1], část II, 29), že $\underline{M}(x, y, K) = \min\limits_i M_i(x, y, K_i)$, kde i probíhá uvedené indexy; je tedy $\underline{M}(x, y) \geqq f(x, y)$. Zřejmě je také $\underline{M}(x, y) \neq -\infty$.

Dokážeme ještě, že je $\underline{M}(1, 1) = +\infty$. Protože funkce $\Phi(x, y)$[2]) má v bodě $[1, 1]$ limitu A, existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý interval $I(x, y)$,[2]) kde $1 - \delta < x < 1$, $1 - \delta < y < 1$, je

$$\Big| \int\limits_{K - I(x,y)} f - A \Big| < \varepsilon\,. \tag{*}$$

Je-li nyní $1 - \delta < x_1 < x_2 < 1$, $1 - \delta < y_1 < y_2 < 1$, $B = I(x_1, y_1) - I(x_2, y_2)$, je zřejmě

$$\Big|\int\limits_B f\Big| = \Big| \int\limits_{K - I(x_2,y_2)} f - \int\limits_{K - I(x_1,y_1)} f \Big| < 2\varepsilon\,. \tag{**}$$

Zvolme takový interval $I(x, y)$, aby platilo $1 - \delta < x < 1$, $1 - \delta < y < 1$. K němu zvolme přirozené n tak velké, aby bylo $x < 1 - 2^{-n}$, $y < 1 - 2^{-n}$. Rozdělme interval $I(x, y)$ zřejmým způsobem na intervaly I_1, I_2, I_3, L_n. Je $\tilde{M}(I(x, y)) \geqq \tilde{M}(L_n) + \sum\limits_{i=1}^{3} \tilde{M}(I_i)$. Z (β), (γ) plyne, že $\tilde{M}(L_n) = \tilde{M}(K) - \sum\limits_{i=1}^{3n} \tilde{M}(K_i)$, je tedy $\tilde{M}(L_n) \geqq \tilde{M}(K) - \sum\limits_{i=1}^{3n} \Big[\int\limits_{K_i} f + \frac{\varepsilon}{2^i} \Big] > \tilde{M}(K) - \int\limits_{K - L_n} f - \varepsilon >$[3]) $\tilde{M}(K) - A - \varepsilon - \varepsilon \geqq -2\varepsilon$. Dále je $\tilde{M}(I_i) \geqq \int\limits_{I_i} f$, $i = 1, 2, 3$, tedy $\sum\limits_{i=1}^{3} \tilde{M}(I_i) \geqq \int\limits_{I(x,y) - L_n} f >$[4]) -2ε. Je tudíž $\tilde{M}(I(x, y)) > -4\varepsilon$, $M(I(x, y)) > \varepsilon$. Odtud plyne ihned $\underline{M}(1, 1) = \infty$. Je proto $\overline{\int\limits_K} f \leqq M(K) < A + 6\varepsilon$, $\overline{\int\limits_K} f \leqq A$. Ze stejného důvodu je $\overline{\int\limits_K}(-f) \leqq -A$, $\underline{\int\limits_K} f \geqq A$, tedy $\int\limits_K f = A$. Tím je věta dokázána.

Poznámka. Z předešlého výsledku plyne, že funkce z (3.4) má P-integrál. Tento příklad zároveň ukazuje, že i pro dva rozměry je P-integrál obecnější než L-integrál. Existence funkce z (3.4) je konstatována v článku [2]. — Poznamenejme ještě, že jiný příklad funkce mající P-integrál a nemající L-integrál

---

[2]) Viz (3.3).

[3]) Viz (*).

[4]) Viz (**).

lze sestrojit takto: Buď g funkce v $\langle 0, 1\rangle$, mající neabsolutně konvergentní P-integrál. Položme $f(x, y) = g(x)$ pro $[x, y] \in \langle 0, 1; 0, 1\rangle$. Lehce se zjistí, že f má pak neabsolutně konvergentní P-integrál (dokonce podle aditivních majorant a minorant); také zobecnění pro více rozměrů je zřejmé.

5. P^*-integrál. $P^* = P$. Podle (2.5) je jednorozměrný P-integrál spojitou funkcí svých mezí. Ukažme, že se tato vlastnost rozšiřuje na dvojrozměrný případ; nejprve podáme jinou definici nevlastních integrálů.

(5.1) Buď v K definována funkce f; nechť existuje P-integrál z funkce f v každém intervalu $\langle 0, x; 0, y\rangle$, kde $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $x + y < 2$. Označme

$$F(x, y) = \iint_{\langle 0,x;0,y\rangle} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \quad [1, 1] \neq [x, y] \in K\,.$$

Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{[x,y]\to[1,1]} F(x, y) = A\,, \quad \text{kde} \quad [x, y] \in K,\ [x, y] \neq [1, 1]\,,$$

pak řekneme, že existuje P^*-integrál z funkce f v K a rovná se A.

Poznámka. Podobně můžeme definovat i R^*-integrál, L^*-integrál.

(5.2) *Nechť existuje P^*-integrál z funkce f v intervalu K. Pak existuje také P-integrál z f v K a rovná se P^*-integrálu.*

Důkaz: Pro $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$ zřejmě platí

$$\Phi(x, y) = F(x, 1) + F(1, y) - F(x, y)\,,$$

kde Φ je definována ve (3.3). Tedy existuje také vlastní limita $\lim\limits_{[x,y]\to[1,1]} \Phi(x, y) = \lim F(x, y) = A$, kde $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$. Tvrzení plyne ze (4.2).

Tím je dokázáno, že platí $P^* \subset P$. Dokažme ještě obrácenou inklusi.

(5.3) *Nechť existuje P-integrál z funkce f v intervalu K a rovná se A. Pak existuje také P^*-integrál z f přes K a je rovný A.*

Nebo v ekvivalentní formě:

(5.4) *P-integrál je spojitá bodová funkce.*

Důkaz: Pro $0 \leqq x \leqq 1$ existuje tedy $\iint\limits_{\langle x,1;0,1\rangle} f = \Psi(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to 1-} \Psi(x) = 0$. Podle (2.3) je totiž

$$\iint_{\langle x,1;0,1\rangle} f = \int_x^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\,;$$

podle (2.5) je P-integrál spojitou funkcí svých mezí.

Je-li $0 \leqq x < 1$, použijeme odhadu

$$|F(x, y) - A| \leqq |F(x, y) - F(x, 1)| + |F(x, 1) - A| \leqq$$
$$\leqq \Big|\iint_{\langle 0,1;y,1\rangle} f\Big| + \Big|\iint_{\langle x,1;y,1\rangle} f\Big| + \Big|\iint_{\langle x,1;0,1\rangle} f\Big|\,.$$

Je-li $x = 1$, pišme $|F(x, y) - A| = |\iint\limits_{\langle 0,1;y,1\rangle} f|$. Ze slabé spojitosti P-integrálu a předešlé poznámky plyne ihned, že $F(x, y) - A$ konverguje k nule pro $[x, y] \to [1, 1]$.

6. Nevlastní P-integrál. Následující otázka zůstala nevyjasněna: Buď $Q = \langle -1, 1; -1, 1\rangle$. Nechť existuje P-integrál z f přes $Q - I$, kdykoli I je interval, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$, a nechť existuje limita $\lim \int\limits_{Q-I} f = A$ pro $I \to [0, 0]$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$. Má f P-integrál v Q?

V tomto odstavci ukážeme, že odpověď je kladná a že $\int\limits_Q f(x)\,dx = A$.

(6.1) Definice. Buď K interval, F funkce intervalu v K. Řekneme, že F je spojitá v K, jestliže $F(I_n) \to 0$, kdykoli $K \supset I_n$, $n = 1, 2, \ldots, |I_n| \to 0$.

Poznámka. Zřejmě každá spojitá funkce intervalu je slabě spojitá. Opak neplatí, jak se lehce zjistí.

Podle (2.4) je P-integrál slabě spojitá funkce intervalu. Teď můžeme dokázat více.

(6.2) *P-integrál je spojitá funkce intervalu.*

Důkaz: Stačí provést pro interval $K = \langle 0, 1; 0, 1\rangle$. Podle (2.2) je P-integrál aditivní funkce intervalu. Označme podle (5.2) $F(x, y) = \iint\limits_{\langle 0,x;0,y\rangle} f$, kde $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. Pro $I = \langle x_1, x_2; y_1, y_2\rangle \subset K$ platí $P(I) = \int\limits_I f = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$. Podle (5.4) je F spojitá bodová funkce; protože K je kompaktní, je dokonce stejnoměrně spojitá na K. K danému $\varepsilon > 0$ existuje tedy $\delta > 0$ tak, že

$$([x_1, y_1] \in K, [x_2, y_2] \in K, (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 < \delta^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon\,.$$

Je-li $|I| < \delta^2$, je $\min(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) < \delta$. Je tedy $|P(I)| < 2\varepsilon$, kdykoli $|I| < \delta^2$.

(6.3) Věta. *Buď $Q = \langle -1, 1; -1, 1\rangle$ interval, f buď bodová funkce definovaná na Q. Nechť existuje P-integrál z f přes $Q - I$, kdykoli $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$, kde I je interval, a nechť existuje limita*

$$\lim_{I\to[0,0]} \int\limits_{Q-I} f(x, y)\,dx\,dy = A \quad \textit{pro}\ [0, 0] \in \operatorname{Int} I\,.$$

Pak existuje také P-integrál z f přes Q a rovná se A.

Důkaz: Položme $K = K_1 = \langle 0, 1; 0, 1\rangle$, $K_2 = \langle -1, 0; 0, 1\rangle$, $K_3 = \langle -1, 0; -1, 0\rangle$, $K_4 = \langle 0, 1; -1, 0\rangle$. Pro $l = 1, 2, 3, 4$ buď $f_l = f \cdot \chi_{K_l}$, kde χ_{K_l} je charakteristická funkce množiny K_l. Dokažme, že existují limity

$$\lim \int\limits_{Q-I} f_i, \quad I \to [0, 0], [0, 0] \in \operatorname{Int} I\,, \quad i = 1, 2, 3, 4\,.$$

Stačí na př. dokázat, že existuje $\lim \int_{K-I} f$ pro $I \to [0, 0]$, $I \subset K$. Položme pro krátkost $F(A) = \int_A f$ pro $A \subset Q$. Podle předpokladu ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$|F(Q - I_1) - F(Q - I_2)| < \varepsilon ,$$

kdykoli $I_k \subset Q \cap O([0, 0], \delta)$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I_k$, $k = 1, 2$. Volíme-li speciálně $I_k = \langle a, b; c, y_k \rangle$, $k = 1, 2$, $y_1 < y_2$, dostáváme

$$|F(\langle a, b; y_1, y_2 \rangle)| < \varepsilon .$$

Ze spojitosti funkce F plyne, že $|F(\langle 0, b; y_1, y_2 \rangle)| \leqq \varepsilon$. Podobně zjistíme, že je $|F(\langle x_1, x_2; 0, d \rangle)| \leqq \varepsilon$, kdykoliv je $0 < x_1 < x_2 < \delta$, $0 < d < \delta$. Je tedy

$$|F(K - I_1) - F(K - I_2)| \leqq 2\varepsilon ,$$

kdykoli $I_k \subset Q \cap O([0, 0], \delta)$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I_k$, $k = 1, 2$. Tedy je splněna nutná a postačující podmínka pro existenci limity $\lim \int_{K-I} f$, takže existují limity $\lim \int_{Q-I} f_i = A_i$, $I \to [0, 0]$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$, $i = 1, 2, 3, 4$. Podle (4.2) platí $\int_Q f_i = A_i$. Protože je zřejmě $A = \sum_{i=1}^{4} A_i$, jest $\sum_{i=1}^{4} \int_Q f_i = \int_Q f = A$. Tím je důkaz ukončen.

II. Některé aplikace a další problémy

7. O integrálu součinu funkcí. V mnoha případech je důležité vědět, zda je součin dvou integrovatelných funkcí také integrovatelná funkce; stačí připomenout počítání Fourierových koeficientů.

V jednorozměrném případě je v této otázce celkem jasno; poznamenejme, že má-li na příklad f P-integrál a φ je monotonní, existuje také integrál z $f\varphi$ a platí obvyklá druhá věta o střední hodnotě (důkaz: [1], část II, 93). Naproti tomu lze lehce konstruovat příklad, kdy f má nevlastní R-integrál, φ je spojitá (dokonce má derivaci), a integrál z $f\varphi$ diverguje. φ má pak ovšem nekonečnou variaci. (Viz [1], část II, cvičení 13.)

Ve vícerozměrném případě se v případě L-integrálu taková věc stát nemůže. Je však snadné udat spojitou funkci $\varphi(x, y)$ tak, že P-integrál z $f \cdot \varphi$ přes K, kde f je funkce z (3.4), diverguje.

Nejdůležitější z tohoto okruhu otázek je asi ta, zda je možno použít vícerozměrného P-integrálu v theorii dvojných Fourierových řad. V theorii distribucí se vyskytují integrály $\int_K f\varphi$, kde φ je nekonečně derivovatelná. V případě P-integrovatelné funkce f není známo, zda na př. integrály ze součinů $f(x, y) \cdot \cos nx, \ldots$ konvergují.

Pro první účel by stačilo dokázat, že integrál ze součinu P-integrovatelné funkce $f(x, y)$ a funkce $\varphi(x)$ s variací konečnou konverguje. Není známo, zda tato věta platí. Ukážeme, že platí pro funkci f, mající nevlastní L-integrál. Dokážeme dokonce tuto obecnější větu:

(7.1.) *Nechť f má P-integrál v K a nechť φ je funkce s konečnou variací v $\langle 0, 1\rangle$. Nechť existuje P-integrál $\int\int_I f(x, y)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ pro každý interval I, který je částí K a neobsahuje bod $[1, 1]$. Pak existuje též P-integrál $\int\int_K f(x, y)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že φ je monotonní. Je-li $I = \langle x_1, x_2; y_1, y_2\rangle \subset K$, má podle Fubiniovy věty funkce $\psi(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, \mathrm{d}y$ a tedy též funkce $\varphi(x) . \psi(x)$ P-integrál v $\langle x_1, x_2\rangle$. Můžeme tedy v K definovat funkci intervalu N předpisem

$$N(I) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)[\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, \mathrm{d}y]\, \mathrm{d}x\,.$$

Snadno se zjistí, že N je (konečná) aditivní funkce a že $N(I) = \int_I f(x, y)\, \varphi(x)$ pro každý interval $I \subset K$, který neobsahuje bod $[1, 1]$. Z aditivity funkce N plyne, že pro každý interval $I \subset K$, který obsahuje bod $[1, 1]$, platí

$$N(K) - N(I) = \int_{K-I} f(x, y)\, \varphi(x)\,. \qquad (***)$$

Je-li $I = \langle x, 1; y, 1\rangle$, je podle 2. věty o střední hodnotě

$$N(I) = \varphi(x) \int_x^{\xi}\int_y^1 f + \varphi(1) \int_{\xi}^{1}\int_y^1 f\,.$$

Protože integrál funkce f je spojitou funkcí intervalu, je $N(I) \to 0$ pro $I \to$ $\to [1, 1]$. Ze vztahu (***) nyní plyne, že existuje P^{**}-integrál a tedy též P-integrál funkce $f(x, y)\, \varphi(x)$ v K. Tím je věta (7.1) dokázána.

Zavedeme ještě tuto **definici: (7.2)** *Buď f P-integrovatelná funkce v K. Řekneme, že bod $a \in K$ je L_f-singulární, jestliže neexistuje interval I takový, že $a \in$ Int I a že na $I \cap K$ je f L-integrovatelná.*

Z věty (7.1) plyne, jak čtenář snadno dokáže, tato věta:

(7.3) *Buď f P-integrovatelná funkce v intervalu K. Buď φ funkce s variací konečnou na $\langle 0, 1\rangle$. Nechť je množina L-singulárních bodů funkce f konečná. Pak P-integrál z $f\varphi$ přes interval K existuje.*

8. O geometrickém významu P-integrálu. Příklad ve (3.4) ukazuje na „přílišnou obecnost“ vícerozměrného P-integrálu. Je totiž vidět, že otočíme-li graf funkce $f(x, y)$ tak, aby se přímka $y = x$ ztotožnila na př. s osou x, přestává funkce f být integrovatelná. Zatím co pro L-integrál jsou dokázány velmi obecné věty o substituci, pro P-integrál neplatí ani věta o tak speciální substituci, jakou je rotace.

V tomto odstavci ukážeme, že existují funkce, které mají neabsolutně konvergentní integrál invariantní vzhledem k isometrickým transformacím. Zřejmě stačí dokázat následující větu:

(8.1) *Na množině* $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}}(x^2 + y^2 \leqq 1)$ *existuje funkce* f, *mající* P*-integrál invariantní vzhledem k transformaci* $x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$, $y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$, *nemající však* L*-integrál.*

Důkaz. Na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ existuje funkce g, která je spojitá v $(0, 1\rangle$ a taková, že integrál $\int_0^1 x\, g(x)\, dx$ je neabsolutně konvergentní. Označme $R = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}(x \geqq 0, y \geqq 0, x^2 + y^2 \leqq 1)$; pro $x^2 + y^2 \leqq 1$ buď $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$. Dokažme, že existuje integrál $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$. Podle (4.2) stačí dokázat, že existuje P^{**}-integrál z f přes R (zde je ovšem „singulárním" bodem bod $[0, 0]$). Buď $[a, b] \in R$, $a > 0$, $b > 0$, $I(a, b) = \langle 0, a; 0, b\rangle$. Jest

$$\iint_{R - I(a,b)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{(I)} \ldots + \int_{(II)} \ldots + \int_{(III)} \ldots,$$

kde

$$(I) \quad = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}([x, y] \in R,\ a^2 + b^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 1)\,,$$

$$(II) \quad = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}([x, y] \in R,\ 0 \leqq x \leqq a,\ b \leqq y \leqq \sqrt{a^2 + b^2 - x^2})\,,$$

$$(III) = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}([x, y] \in R,\ a \leqq x \leqq \sqrt{a^2 + b^2 - y^2},\ 0 \leqq y \leqq b)\,.$$

V těchto integrálech je integrovaná funkce spojitá; lze tedy užít věty o substituci. Máme tak

$$\int_{(I)} \ldots = \int_{(I)} g(\sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{1} r\, g(r)\, dr \Big)\, d\varphi =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{1} r\, g(r)\, dr\,.$$

Druhý integrál odhadneme takto: Z existence limity $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x\, g(x)\, dx$ plyne, že ke každému $\eta > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \delta \Rightarrow \left|\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} x\, g(x)\, dx\right| < \eta$. Je-li tedy $0 < \sqrt{a^2 + b^2} < \delta$, je

$$\Big| \int_{(II)} \ldots \Big| = \Big| \int_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{\frac{b}{\sin\varphi}}^{\sqrt{a^2+b^2}} r\, g(r)\, dr \Big)\, d\varphi \Big| < \tfrac{1}{2}\pi \cdot \eta\,.$$

Pro $[a, b] \to [0, 0]$, $a > 0$, $b > 0$ se tedy tento integrál blíží nule; podobně se vyšetří i třetí integrál.

Tím je dokázáno, že platí $(P) \iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{2}\pi \int\limits_0^1 g(r)\, r\, dr$. — Z podobných důvodů existují také integrály ve zbývajících čtvrtkružnicích; je zřejmé, že funkce f nemá L-integrál. Protože se rotací graf funkce f nemění, je věta dokázána.

Poznámka. Je přirozené položit si tuto otázku: Definovat P-integrál tak, aby integrovatelné funkce zůstaly integrovatelné i po substituci $\vec{X}' = \varphi(\vec{X})$, kde φ je isometrická transformace. Poznamenejme, že jeden možný způsob je definovat derivace majorant a minorant podle simplexů.

9. Další otázky. Z důkazu Fubiniho věty v [1] je vidět, proč bylo k definici P-integrálu třeba superaditivních a ne jen aditivních majorant.

(9.1) (*J. Mařík.*) *Existuje funkce dvou proměnných, mající P-integrál podle superaditivních majorant, nemající však P-integrál podle aditivních majorant?*

V (6.2) jsme dokázali, že P-integrál je spojitá funkce intervalu.

(9.2) *Nestačí k definici P-integrálu spojité majoranty a minoranty?*

Poznámka. V jednorozměrném případě tomu tak je ([3], str. 211).

(9.3) *Existuje funkce f v $K = \langle 0, 1;\ 0, 1\rangle$ taková, aby v tomto intervalu platilo*

$$(+) \qquad \int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^y f(u, v)\, dv\Big)\, du = \int\limits_0^y \Big(\int\limits_0^x f(u, v)\, du\Big)\, dv = F(x, y)\,,$$

aby takto definovaná funkce F byla spojitá v K a aby neexistoval P-integrál z funkce f v intervalu K?

Tolstov sestrojil příklad spojité funkce F v intervalu K takové, že v každém bodě platí

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} = f(x, y) \neq \pm \infty$$

a že funkce f nemá L-integrál v žádném intervalu $I \subset K$ (viz [4]). Pro funkce F, f zřejmě platí vztah (+). Lze tedy položit slabší otázku:

(9.4) *Nechť f má P-integrál na K. Existuje interval $I \subset K$ tak, že f má L-integrál na I?*

Nejtěžší z tohoto okruhu otázek je asi tato:

(9.5) *Charakterisovat P-integrál mezi všemi aditivními funkcemi intervalu.*

Poznámka. V jednorozměrném případě je to rozřešeno větou o ekvivalenci P-integrálu a t. zv. „úzkého“ Denjoyova integrálu ([3], str. 211).