ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

4

80

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 80 • Č. 4 • STR. 387—508 • PRAHA 5. XI. 1955

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky"*)

SVAZEK 80 (1955)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Obsah:

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 80 * PRAHA, 5. XI. 1955 * ČÍSLO 4

ČLÁNKY

K NĚKTERÝM ZÁKLADNÍM OTÁZKÁM MATEMATICKÉ STATISTIKY

FRANTIŠEK FABIAN a JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Došlo dne 10. prosince 1954.) DT 519.2

Zasvěcencům je dobře známo, že matematická statistika (stručně jen statistika) se v tomto století rozvinula a rozvíjí ve velmi nadějnou vědu. Utopisté, jako je H. G. WELLS,[1]) předpovídají matematické statistice velkou budoucnost:

„Statistické myšlení bude jednoho dne pro zdatného občana právě tak nezbytné jako je schopnost číst a psát."

Zasvěcenců je však málo a utopistů ještě méně. Drtivé většině občanů je obsah slov „statistika" a „statistik" velmi nejasný a vyvolá v nich nanejvýš určité představy v souvislosti se Státním úřadem statistickým. Vše to je svědectvím, že statistika je věda mladá, teprve vstupující na arénu našeho života. A v takové situaci skutečně neškodí zamyslet se nad dosavadní historií statistiky, všimnout si filosofických souvislostí a načrtnout si některé úkoly.

I.

Moderní období ve vývoji statistiky se počíná pracemi KARLA PEARSONA, STUDENTA a v první řadě R. A. FISHERA. Většina z toho, co tvoří podstatu moderních učebnic statistiky byla objevena až v tomto století. Při tom je velmi poučné, že revoluční převrat nevzešel matematickým zdokonalováním a zobecňováním předešlých výsledků, ale prostřednictvím přímého styku s reálným materiálem. Fisherovy výsledky jsou neoddělitelné od jeho mnohaletého pobytu v Rothamstedské experimentální stanici, kde měl k disposici velké množství konkretních pozorování. Metody rozvinuté na biologickém materiálu byly

[1]) Citace převzata z článku *S. S. Wilks*: Undergraduated Statistical education, Journal Am. Stat. Ass., vol. *46* (1951).

přeneseny na zkoumání materiálu technického (kontrola jakosti) a na zkoumání společnosti (výběrová šetření). Jak čerpal z díla R. A. Fishera jeden ze zakladatelů kontroly jakosti W. A. SHEWHART,[2]) je vidět z následujících jeho slov:

„Tak jako mnozí jiní, během více než jedné čtvrtiny století nalézal jsem inspiraci a vodítko v originálních příspěvcích R. A. Fishera. Některé separáty jeho dřívějších prací jsem takřka zničil neustálým používáním..."

Statistika dostala v tomto moderním období řadu nových tváří. První změnu můžeme, i když trochu nepřesně, vyjádřit slovy, že statistika se stala z vědy o průměrech vědou o variacích. R. A. Fisher[3]) napsal o této věci následující slova:

„Hovořit o statistice jako o vědě o variacích může sloužit také k zdůraznění rozdílu mezi cíli moderních statistiků a jejich předchůdců. Do nedávných dob drtivá většina pracovníků na tomto poli neměla totiž jiného cíle než zjistit souhrnné či průměrné hodnoty. Samy variace nebyly předmětem studia, hledělo se na ně jako na tíživou okolnost, která ubírá na ceně průměrům. Rozdělení průměru normálního výběru bylo známo před sto roky, ale rozdělení standartní odchylky bylo předmětem moderního studia až od r. 1915."

Snahu, dělat statistiku tak, aby variace nehrály velkou roli, je vidět i v odporu statistiků, soustředěných kolem K. Pearsona k malým výběrům. Velké výběry totiž dovolují předpokládat, že odhady mají normální rozdělení se standardní chybou určenou z výběru. Toto stanovisko se však ukázalo neudržitelným a byly to právě malé výběry, které pozvedly statistiku na vyšší stupeň. Dnes je o těchto věcech v theorii jasno, ale zdaleka ještě ne v praxi. Ještě mnohde prodělává statistika svůj předhistorický stupeň vývoje a průměry jsou alfou a omegou statistických metod.

Úsilí učinit ze statistiky exaktní vědu — jejíž raison d'être by nebyl v tom, že existují případy, kdy ze všech špatných prostředků je tím nejlepším, uzákonilo zásadu, že statistika musí pevně spočívat na theorii pravděpodobnosti. Statistika, má-li to být skutečně solidní věda, nemůže být vědou o souborech pozorování definovaných velmi mlhavým způsobem, ale o souborech pozorování náhodných veličin. S tohoto hlediska vyplývá zásada, že ten, kdo přistupuje ke studiu statistiky, musel projít kursem theorie pravděpodobnosti. Prioritní postavení dosáhla theorie pravděpodobnosti především dík vyjasnění základních otázek — axiomů, limitních zákonů a podobně, na němž má hlavní zásluhu sovětská škola theorie pravděpodobnosti. Vznik nových kapitol theorie pravděpodobnosti, zejména vznik theorie stochastických procesů, odkrývá statistice nové vývojové možnosti.

---

[2]) *R. A. Fisher*: Contributions to Mathematical Statistics, předmluva.

[3]) *R. A. Fisher*: Statistical Methods for Research Workers, kapitola I, bod 1.

Výklad statistiky, založený na empirickém rozdělení četností a t. zv. theoretickém rozdělení četností, zavedeném čistě jen jako formálně popisný prostředek, je dnes přežitkem. A přece se stále píší knihy v tomto duchu a přece se stále ještě mnoho lidí z takových knížek učí. Není pak divu, že mezi přírodovědci je tak hluboko zakořeněn názor, že naopak theorie pravděpodobnosti je založena na statistice.

Samo zdokonalování matematických metod a sama změna v pojetí statistiky by bývala nebyla s to učinit z ní exaktní vědu, ledaže by se obor jejích aplikací velmi zúžil. Existuje poměrně málo pozorování, která vznikají živelně a která přesto můžeme považovat za pozorování náhodných veličin. R. A. Fisher při bližším zkoumání experimentů, jejich struktury a provádění došel k názoru diametrálně rozdílnému od názoru K. Pearsona a Jeffreyse, že ne každý experiment je možno vědecky zpracovat. Ve svém „*The Design of Experiments*“ vyslovil a mistrovsky aplikoval následující dialektickou myšlenku:[4])

> „Statistické zpracování a uspořádání experimentu jsou pouze dvě různé stránky téhož celku...“

Jinými slovy, aby bylo možno pozorování vědecky zpracovat, je nutno je vědecky pořídit. Asistence statistikova nezačíná po provedení experimentu, ale před jeho provedením. Statistik z člověka, který jen počítá, se stává inženýrem. Tato inženýrská práce nabývá velkého rozsahu ve všech třech hlavních oborech aplikace matematické statistiky, kterými jsou experimenty, výběrová šetření a aplikace v průmyslové výrobě. Přesto však existují matematičtí statistikové, nebo lépe řečeno matematici, zabývající se statistikou, kterým není jasný smysl na př. metody znáhodňování (randomisation), a kteří si myslí, že o statistice lze psát solidní články, ale že až na výjimky ji nelze solidně aplikovat. Povolání statistika v sobě zahrnuje obě tyto stránky — matematickou a inženýrskou — a v obou by měl být cvičen.

Aby mohla být statistika pozvednuta na novou vyšší úroveň, bylo třeba přeměn na obou pólech poznávacího procesu — na straně materiálu i ducha. Bylo nutno zavést nové myšlenkové principy, z nichž některé, jako je „test významnosti“ a „interval spolehlivosti“, jsou nám dnes již běžné. Tento proces probíhal zvlášť těžce a byl doprovázen vznikáním nových odrůd pravděpodobnosti, jako je „inversní pravděpodobnost“, „věrohodnost“ (likelihood), „fiduciální pravděpodobnost“ atd. Těmto pojmům bychom chtěli věnovat nyní trochu více pozornosti.

Inversní pravděpodobnost, zavedená Thomasem Bayesem (1763) byla prvním pokusem o využití theorie pravděpodobnosti jako nástroje induktivního myšlení. Pomocí Bayesových vzorců byla z pravděpodobnosti účinku při dané příčině počítána obrácená (inversní) pravděpodobnost příčiny při daném účinku. Zdrojem svízelí tu bylo stanovení t. zv. apriorních pravděpodobností příčin

[4]) *R. A. Fisher*: The Design of Experiments.

(hypotéz), které většinou vůbec nebyly náhodnými jevy, a tam, kde byly, scházel experimentální materiál. Při použití inversní pravděpodobnosti se totiž vychází z toho, že již před pokusem byl proveden jiný pokus, jehož podmínky jsou nám známy, a jenž skrytě vyústil v tu neb onu příčinu. Jako východ z nouze byl obvykle volen t. zv. Bayesův postulát, podle kterého se předpokládalo, že všechny možné hypotézy mají a priori stejné pravděpodobnosti.*)

Tento postulát vzbuzoval mnoho pochybností a byl příčinou mnoha ostrých výměn názorů. Definitivně se jej však podařilo vytlačit až R. A. Fisherovi, a to ani ne tak tím, že by jeho argumenty byly zvlášť výmluvné, jako tím, že naznačil cestu, jak se bez tohoto postulátu obejít. Byly to hlavně myšlenky, které daly vznik celé theorii testování hypotéz a intervalů spolehlivosti. Ovšem, proti použití inversní pravděpodobnosti tam, kde a priorní rozdělení skutečně existuje a je známo, není námitek. Statistická praxe však podala zatím jen velmi málo takových příkladů.

Jak známo, v theorii bodového odhadu hraje důležitou roli Fisherova metoda maximální věrohodnosti (maximum likelihood). První článek o této metodě, jejíž užití lze najít již u Gausse,[5]) napsal Fisher ještě jako stoupenec inversní pravděpodobnosti. Později toto své stanovisko zavrhl, a aby zdůraznil logickou odlišnost od inversní pravděpodobnosti, zavedl název „věrohodnost". Pojmu věrohodnost nelze však přikládat hlubší smysl než jako slovu, které nám ex definitione umožňuje říci „věrohodnost hypotézy a při výsledku x" místo „pravděpodobnost výsledku x při hypotéze a". Jak se však zdá, přikládal Fisher pojmu věrohodnost smysl hlubší, patrně pod vlivem skvělých výsledků, které metodou maximální věrohodnosti získal. Podle našeho mínění se může theorie statistiky bez pojmu věrohodnosti docela dobře obejít. U metody maximální věrohodnosti jde v podstatě o to, že pro jakoukoliv hodnotu odhadovaného parametru a má náhodná veličina

$$\frac{\partial}{\partial a} \log f(x, a)$$

střední hodnotu rovnu nule; to znamená, že místo toho, abychom své počínání odůvodňovali maximalisováním věrohodnosti, můžeme vyjít ze statisticky

---

*) O rehabilitaci Bayesova postulátu se pokusil H. Steinhaus v článku „*Pravděpodobnost, věrohodnost a možnost*" (Zastosowania Matematyki, t. 1, zeszyt 3 (1953)). O skutečnou rehabilitaci tu však neběží, neboť se mu podařilo dokázat jen to, že v určitých případech použití Bayesova postulátu vede ke stejným výsledkům jako běžné metody a tudíž nezpůsobí žádnou škodu. To, že s určitým předpokladem můžeme dojít ke stejnému výsledku jako bez něho, není jeho obhajobou. Kromě toho se zde nedosahuje žádného zjednodušení, neboť v případech, kdy H. Steinhaus definuje svůj nový pojem „možnost", je sestrojení intervalů spolehlivosti velmi prosté a srozumitelné pro každého přírodovědce. Také nelze souhlasit s názorem H. Steinhause, že dva způsoby sestrojení intervalového odhadu jsou totožné, jakmile vedou ke stejnému numerickému výsledku; rozhodující je zde logická stránka.

Článek H. Steinhause je zajímavým a originálním příspěvkem k logice statistického myšlení.

[5]) *R. A. Fisher*: Statistical Methods for ResearchWorkers, kapitola I, bod 5.

přirozeného předpokladu, že uvedená náhodná veličina se v pokuse realisovala jako střední hodnota. Právě uvedené statistické odůvodnění, na rozdíl od matematického odůvodnění Fisherova, by možná usnadnilo intuitivní chápání statistických vlastností odhadů, získaných touto metodou.

Pro intervalový odhad vypracoval R. A. Fisher metodu založenou na fiduciálním rozdělení pravděpodobnosti odhadovaných parametrů. Zacházet do logických fines, s nimiž je tato metoda spojována, by bylo velmi obtížné. Na štěstí to však není ani nutné, neboť vše, co tato metoda má v sobě kladného, je zachováno v metodě intervalů spolehlivosti, vypracované J. Neymanem. Soudíme, že lze souhlasit s následujícím Neymanovým zhodnocením fiduciální pravděpodobnosti:[6])

„Přikláním se k myšlence, že literatura o theorii fiduciálního usuzování se zrodila z podobných myšlenek jako theorie intervalů spolehlivosti. Zdá se však, že tyto myšlenky byly příliš vágní, než aby vykrystalisovaly v matematickou theorii."

Vyjmenovali jsme si několik změn, které podle našeho mínění měly zásadní význam při přeměně matematické statistiky v exaktní vědu. Kromě nich tu byla celá řada změn dalších, na př. zřejmá změna ve funkci (matematické) statistiky, která z více méně popisného nástroje se stala nástrojem operativního rozhodování, dále vznik sekvenční theorie, theorie rozhodovacích funkcí, mohutný růst neparametrických metod atd. To je však historie příliš přítomná, než abychom ji mohli dobře zhodnotit.

II.

Přistupme nyní k některým otázkám rázu filosofického.

Je známo, jak mohutně byla filosofie v minulém a nynějším století ovlivněna přírodními vědami, zvláště fysikou. Na př. vznik positivismu (machismu) je bezprostředně spjat s fysikálními vědami. Autoři tohoto referátu jsou přesvědčeni, že moderní statistika skýtá pro filosofii neméně bohatou látku k přemýšlení, jako moderní fysika. Záliba ve filosofii je u většiny velkých statistiků naprosto zřetelná. Na př. Lenin ve své známé práci „*Materialismus a empiriokriticismus*" mnohokrát cituje vyhraněné filosofické názory statistika K. Pearsona. Záliba filosofů ve statistice je již menší, a to k jejich vlastní škodě.

Gnoseologický význam statistiky vyplývá již z toho, že v této vědě, alespoň na poli experimentování, po prvé vůbec byla stanovena objektivní pravidla induktivního usuzování. Deduktivnímu usuzování se dítě učí hlavně na dvou předmětech — matematice a gramatice. Učí se, jak pomocí stran trojúhelníka určit jeho úhly a jak pomocí koncovky podstatného jména určit jeho

[6]) *J. Neyman*: Fiducial argument and the Theory of confidence interval, Biometrika XXXII (1941—42).

skloňování. Induktivnímu usuzování se neučí prozatím v žádném předmětu. Umění „učit se ze zkušeností“ se rozvíjí u každého člověka více méně živelně. Jak velké slabiny má toto umění, je vidět ze životaschopnosti nejrůznějších pověr, víry ve všelijaké tajemné souvislosti, karty, čísla a pod. R. A. Fisher ve svém „*The Design of Experiments*“ o této věci píše:

„Osvobození**) lidského intelektu musí zůstat potud neúplné, pokud bude volný jen ve vyvozování důsledků ze vžitých dogmatických thesí, a bude mu odpírán přístup k neočekávaným pravdám, které může dát jen přímé pozorování. Rozvoj experimentální vědy vykonal tedy mnohem víc, než že jen znásobil technickou kompetenci lidstva...“

Pohyb vědeckého poznání směrem k absolutní pravdě spočívá v nepřetržitém přijímání a zamítání hypotéz. Tvoření nových hypotéz je věcí geniality, kdežto při zamítání hypotéz hraje stále důležitější roli statistika. Nejoblíbenější motto K. Marxe znělo: „*O všem je nutno pochybovat.*“ A statistika nám dává prostředky jak o hypotézách pochybovat skutečně vědecky. Statistika pomáhá našemu poznání tím, že zmnohonásobuje rychlost, s jakou je úroda tvůrčích myšlenek lidstva tříděna na dobré zrno a plevel.

Idealismus, zvláště ve své positivistické podobě, našel mezi statistiky mnoho příznivců. Většina západních statistiků a theoretiků pravděpodobnosti nechává ve svých filosofických projevech positivismu otevřená vrátka.***)

Relativní úspěch positivismu pramení z toho, že je založen na pojmech jako „zkušenost“, „experiment“ a pod., které jsou velmi blízké každému přírodovědci a zvláště statistikovi. V souhlase s materialismem pokládá positivismus za jediný pramen našeho poznání počitky, ale na rozdíl od materialismu odmítá jít za tyto počitky. Tvrdí, že jediné, co je nám positivně dáno jsou počitky: O hmotě „samé o sobě“ i když snad i existuje, je podle nich neekonomické a metafysické(!) uvažovat, protože se o ní nikdy nemůže jinak přesvědčit než opět skrze počitky. Touto svou „ekonomií myšlení“ se positivisté dostávají do velmi neekonomických zmatků, mají-li mezi sebou rozlišit „Já“ a „Okolí“, představu a skutečnost a mají-li osvětlit existenci světa před člověkem. Konec konců se vždy ukáže, že jádro positivismu je idealistické.

Typickou aplikací positivismu v theorii pravděpodobnosti je Misesova koncepce, který pravděpodobnost (objektivní realitu) chce sestrojit z četností (počitků). Rozšíření u přírodovědců zmíněné již představy, že theorie pravděpodobnosti má svůj základ v matematické statistice a ne naopak, má positivistické kořeny. Vliv positivismu se jeví i v názvosloví, neboť ještě nedávno se ří-

**) Svobodou lidského ducha se tu rozumí možnost uvažovat nezávisle na autoritách podle objektivních pravidel. Pozn. vl.

***) V předmluvě k ruskému překladu „*An Introduction to Probability Theory and its Applications*“ A. N. Kolmogorov zcela oprávněně vytýká W. Fellerovi, že zásadní filosofické otázky prostě obchází.

kalo rozdělení četností (frequency distribution) tam, kde se nyní správně začíná říkat rozdělení pravděpodobností (probability distribution).

Důsledným machistou byl K. Pearson. Byl přesvědčen o tom, že „vědecké zákony jsou daleko více produkty lidského ducha, než fakty vnějšího světa". Není potom divu, že ve své tvůrčí práci, která měla vskutku gigantické rozměry, se soustředil na zdokonalování formálně popisného aparátu. Byl to na př. jeho systém křivek a úplná záplava nejrůznějších korelačních koeficientů, o níž si dnes můžeme učinit představu z KENDALLOVY knihy „*The Advanced Theory of Statistics*" nebo z obdobné záplavy testů významnosti, které se objevily za posledních 10 let. Pro Pearsona sám materiál nebyl podstatný, ale rozhodující, bylo teprve to, co z něho člověk vhodným popisem dovede stvořit. Lze si snadno představit, že toto stanovisko často vedlo k přímému znásilňování materiálu. Na př. Pearson ještě s dalšími matematiky použil Bayesových vzorců k odhadu koeficientu korelace tak, že za apriorní rozdělení těchto koeficientů zvolil empirické rozdělení v souboru koeficientů korelace anatomických měření, když byl toto rozdělení zhladil podle jedné ze svých křivek. Tento postup byl R. A. Fisherem ostře odsouzen. Filosofickými názory K. Pearsona lze také vysvětlit to, proč nechal na tak dlouho zapadnout Studentovy výsledky, ačkoliv měly přímo revoluční význam. To nejcennější, co po K. Pearsonovi zůstalo, je χ^2 rozdělení, pro které bude vzpomínán ve všech učebnicích statistiky.

Na druhé straně mnohé z Pearsonova díla ztratilo dnes již svou životaschopnost, jako na př. míra šikmosti, založená na rozdílu mezi $\bar{x}$ a modem, a řada jiných koeficientů. Přesto, že je Pearsonovo pojetí statistiky dnes již překonané, vládne ještě v mnoha oborech a objevuje se i v nově vycházejících knihách psaných nestatistiky. Je to tím, že mezi tyto kruhy moderní pojetí statistiky dosud nepronikło, což je především důsledkem nedostatečné spolupráce mezi nimi a matematickými statistiky.

Jedním z nejvýraznějších současných zastánců machismu v theorii pravděpodobnosti a matematické statistice je H. Jeffreys. Jeffreys ve své koncepci zastává názor, že nutno činit důsledný rozdíl mezi metodou a materiálem. Ve svém výkladu drží se Pearsonovy fundamentální these, že[7])

„Jednota všech věd spočívá pouze v její metodě a nikoliv v jejím materiálu. Člověk, který klasifikuje fakta jakéhokoliv druhu, který pochopí jejich vztah a popíše tyto vztahy, aplikuje vědeckou metodu, je člověk vědy... Nejsou to samotná fakta, která tvoří vědu, ale metoda, pomocí které to děláme."

Tedy ne materiál, ale metody zpracování musí být stejné. Odtud pramení také velmi rozšířená these, že statistickými metodami, bez vnitřního rozboru lze jakákoliv data „vědecky zpracovat". Toto zpracování nespočívá pak v ničem jiném, než v prostém „pearsonském" popisu a v provádění závěrů na podkladě tohoto popisu na výsledky budoucích pokusů, t. j. v rozhodování při

[7]) *H. Jeffreys*: The Theory of Probability.

akcích, bez ohledu na to, zda je popisem vystižen objektivní charakter příslušného pokusu.

Mezi velkými matematickými statistiky lze však najít i takové, jejichž koncepce je namířena proti machismu. Je to na př. R. A. Fisher, v jehož díle jsou některé stránky, které lze označit jako materialistické a dialektické.†) Na rozdíl od K. Pearsona byl přesvědčen, že to, co není dáno v samotném materiálu, není možno z něho získat sebeumělejším zpracováním. Zavedl objektivní kriteria tam, kde dříve vládla subjektivní libovůle. Jeho theorie odhadu rozťala gordický uzel spletený z nejrůznějších měr polohy, rozptylu, šikmosti atd. Svými testy významnosti učinil konec subjektivnímu a neseriosnímu používání Bayesova postulátu. Také jeho pojem informace obsažené ve výběru má materialistický charakter a jeho myšlenka o jednotě fysikálního průběhu a matematického zpracování materiálu je příkladem dialektiky. Na druhé straně fiduciální pravděpodobnost je odklon od materialistické linie, potvrzovaný nejlépe tím, že idealista Jeffreys, přes Fisherův odpor, se s ním v tomto bodě ztotožňuje.

R. A. Fisherovi je často vytýkána malá rigorosnost v matematických důkazech. Tuto Fisherovu stránku vysvětluje do jisté míry P. C. MAHALANOBIS[8]) v následujícím odstavci Fisherova životopisu:

> „Druhý vliv Cambridgeské university, ke kterému Fisher necítil sympatie byl nedávný přechod v řízení matematického vyučování od dřívější tradice matematických fysiků ke škole čistých matematiků, většinou kontinentálního původu. Explicitní vyslovení rigorosního úsudku ho zajímalo, ale jen za důležité podmínky, že takové explicitní prokázání rigorosnosti bylo nutné. Mechanický dril v technice rigorosní výpovědi se mu příčil z části pro jeho pedantičnost, z části jako překážka aktivního myšlení. Cítil, že bylo mnohem důležitější myslet aktivně, i za cenu občasných chyb, které bystrý duch brzo objeví, než postupovat s naprostou jistotou hlemýždím krokem po vychozených pěšinkách na dokonale sestavovaných mechanických berlách.“

A po pravdě je nutno říci, že několik Fisherových prohřešků proti matematické precisnosti bylo několikanásobně vyváženo originalitou a neočekávaností jeho řešení. Dva příklady za všechny jsou na př. jeho způsob sestrojení intervalů spolehlivosti pro poměr dvou středních hodnot a z-transformace pro korelační koeficient.

Materialistické stanovisko se nejuvědoměleji projevuje v sovětské theorii pravděpodobnosti a matematické statistice. Sovětská matematická statistika nedosáhla však dosud takového rozmachu a nehraje ve světovém měřítku takovou vedoucí roli jako sovětská theorie pravděpodobnosti. Jak však ukazuje rozvoj matematické statistiky za poslední léta v SSSR a poslední konference

†) To ovšem nic neříká o jeho politickém přesvědčení. K jakým paradoxům může v tom směru dojít, je vidět na př. z toho, že Hegel přes svou dialektiku byl přívržencem reakčního prušáctví.

[8]) *R. A. Fisher*: Contributions to Mathematical Statistics, životopis.

matematických statistiků v Kijevě,[9]) jsou sovětští vědci odhodláni tento stav věci rázně změnit. Připravuje se plánovité znásobení vědeckých kádrů a vydávání monografií a učebnic. Kromě toho je plánováno značné rozšíření výuky theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky na sovětských vysokých školách všech přírodovědeckých a technických zaměření.

Přejděme nyní k otázce theorie a praxe. Marxistický názor na spojení theorie a praxe vystihuje krásně toto starobylé motto:

> „Každá myšlenka je planá, když nezrá nakonec ve skutek,
> podobně každý čin — vyrůstej v myšlenku zas!"

Theorie musí čerpat z praktických problémů, ale musí se umět odpoutat od praktických představ. Theorie musí praxi štědře rozdávat své výsledky a přesto jí musí ještě mnoho myšlenek zůstat. Poměr mezi theorií a praxí má protikladný charakter a správný vývoj obou stránek může být zaručen jen v otevřeném střetání se názorů. U vynikajících statistiků se setkáváme s nejrůznějším poměrem k praxi. Na př. proti Studentovi a R. A. Fisherovi stojí A. Wald o němž Wolfowitz píše, že byl vždy ochoten bavit se o matematice, ale popularisace a speciální aplikace ho nezajímaly. Wolfowitz[10]) píše:

> „Byl prakticky založen v tom smyslu, že vždy měl při vypracovávání statistické theorie na zřeteli její statistický účel. Když tato theorie byla završena k jeho spokojenosti, nezajímal se o její speciální aplikaci na praktický problém."

Myslíme, že se tento poměr obrazil ve Waldově díle tendencí tvořit takové principy, které by nám umožňovaly rozhodovat o věcech na základě minimálních znalostí o nich.

Idealistické a materialistické proudy v matematické statistice jako v každé vědě mají své kořeny. Domníváme se, že zatím co ve společenských vědách je boj idealismu a materialismu odrazem třídního boje, ve vědách přírodních je ve velké míře odrazem dvojstranného charakteru samotného procesu poznání. Harmonický vývoj obou stránek poznání, ať jim říkáme bytí a vědomí, či objekt a subjekt, či theorie a praxe, může se uskutečňovat pouze v boji názorů. Víme, jak plodné bylo střetnutí názorů K. Pearsona, R. A. Fishera a J. Neymana. Jsou období, kdy poznání roste především tím, že jsou hromaděna nová zkušenostní fakta a jsou období, kdy rozhodující roli hraje rozvoj forem myšlení. Lenin ve fragmentu „*K otázce o dialektice*" se zřejmou sympatií uvádí představu o poznání jako o řadě kruhů. V rámečku uvádí některé „kruhy", v nichž se materialisté střídají s idealisty a s dialektickými spojením obou.

„Kruhy ve filosofii: (jest nutna chronologie osob?) Nikoli!

Antický: Od Demokrita k Platonovi a k dialektice Herakleitově.

---

[9]) Viz časopis: *Matematika — Fysika — Astronomie, Sovětská věda*, č. 5, 1954, ČSI.

[10]) *J. Wolfowitz*: Abraham Wald (1902—1950), Ann. Math. Stat., *23* (1952).

Renaissance: Descartes versus Gassendi (Spinoza?).

Nový: Holbach — Hegel (přes Berkeleye, Humea a Kanta).

Hegel — Feuerbach — Marx."

Hlavní chybou starého nazíracího materialismu bylo, že na poznání hleděl jako na pouhé pasivní odrážení objektivní reality. Činnou, aktivní účast lidského ducha na poznávacím procesu rozpracoval idealismus, ovšem tak, že ji zabsolutněl a odtrhl myšlení od reálné skutečnosti. Jak již zdůraznil Marx, je nutno idealismu tuto činnou složku odejmout, a dát jí náležité místo v rámci dialektického materialismu.

Autoři tohoto referátu mohou s jistotou o sobě tvrdit, že jsou materialisté, avšak býti dialektickými materialisty se mohou jen snažit. Přítomná doba dává konkrétní příklady, kdy taková snaha nemusí skončit úspěšně. Jazykozpytec N. J. MARR upadl do vulgárního materialismu, aniž by se toho byl nadál. Někteří sovětští ekonomové, chtějíce ekonomické zákony socialistické společnosti ne poznávat, ale sami je tvořit, upadli do subjektivního idealismu, aniž by si to také uvědomili. Být dialektickým materialistou najisto může být člověk jen ve věcech probojovaných a vyřešených. Avšak takové opatrnické stanovisko vede k úpadku tvůrčí práce, jak je toho důkazem naše soudobá filosofie a společenské vědy vůbec. Je třeba se co nejvíce učit od klasiků marxismu-leninismu, ale nabyté vědomosti uplatňovat tvůrčím způsobem. Cesta ku pravdě vede skrze omyly, a proto vždy vyžadovala a bude vyžadovat odvážných srdcí.

Nakonec se zamysleme nad tou skutečností, že theorie pravděpodobnosti a matematická statistika pronikají postupně skoro do všech oblastí lidského bádání, jakmile tyto dosáhnou určitého stupně ve svém vývoji. Matematická statistika a theorie pravděpodobnosti tvoří tak protiklad vůči všem ostatním vědám v souhlase s tím, jak náhodný pohyb tvoří dialektický protiklad nejrůznějším formám pohybu nutného, respektive, jak nezávislost tvoří dialektický protiklad nejrůznějším formám závislosti.

Protiklad statistických a nestatistických metod zkoumání má své objektivní příčiny. Zastavme se však nejdříve krátce u otázky objektivity vědeckých zákonů vůbec. To, že jsou dosud vědci, neuznávající objektivitu zákonů reálného světa, vidíme u Jeffreyse, který říká:[11])

„Máme vskutku nekonečně mnoho pravidel, kterým experimentální materiál vyhovuje, avšak která patrně nemusí být splněna na některém pokusu budoucím..."

Podle Jeffreyse může platit pro ten který jev tolik zákonů, kolik chceme — a je prý úkolem vědy nalézt ten nejjednodušší. A nalézt ten nejjednodušší, to je věcí ekonomie popisu a nemá nic společného se získáním objektivního zákona.

[11]) Viz [7]).

Jeffreys bere v ochranu ty, kteří tvrdí, že nalezení nejjednoduššího zákona spočívá ve zvláštnosti lidské psychologie(!).

A jsou to především zákonitosti statistické, jimž ještě dnes mnozí, a nikoliv nevýznamní vědci, přisuzují naprosto subjektivistický charakter, považujíce je za náhražku našich neznalostí, po případě nedostatku znalostí. Kde toho málo víš, používej statistiku — to je patrně kriteriem těchto vědců. To, že statistické zákonitosti vedle t. zv. dynamických zákonitostí mají právě tak objektivní charakter jako všudypřítomná náhodnost vedle nutnosti (jakožto dialektické protiklady jedné objektivní zákonitosti reálného světa) se příčí jejich myšlení.

Podle GIBBSE, jednoho ze zakladatelů statistické mechaniky, a jeho dnešních následovníků, nutnost užívání pravděpodobnosti a matematické statistiky vyplývá z nedokonalosti našich schopností. Subjektivismus Gibbsův vysvitne, slyšíme-li jeho slova o tom, že kdybychom mohli zjistit chování jednotlivých molekul, pak zákony thermodynamiky se dají nahradit zákony mechaniky. Tak tedy zákony thermodynamiky jsou náhražkou zákonů mechaniky. Zde je především nutno upozornit na to, že zákony thermodynamiky odrážejí chování systému v celku a ne jednotlivých částic. Systém jako celek se kvalitativně liší od „součtu" skládajících jej částic. Pohyb jednotlivých částic může být skutečně popsán v termínech mechaniky. Avšak v důsledku velkého počtu částic chaotický pohyb atomů a molekul přechází v novou kvalitu. Růst počtu částic v systému vede k projevení se úplně nového typu pohybu, který může být vyjádřen jedině zákony statistickými.

Znalost jednotlivých elementárních procesů na objektivitě statistických zákonitostí nic nemění. Oba typy zákonitosti existují v přírodě vedle sebe v dialektickém protikladu a jednotě současně. Tak na př. pohyb brownovské částice v celku ukazuje na čistě statistickou zákonitost. Víme sice, že trajektorie pohybu této částice se skládá z nesmírného množství přímočarých posuvů, avšak znalost všech těchto posuvů vzatých odděleně neřekne nám nic o zákonitostech Brownova pohybu v celku.

Podobně známý zákon, podle kterého tlak plynu na stěnu nádoby jakéhokoliv tvaru je stálý jak v čase tak na různých místech nádoby, platí nikoliv přes to, že vzájemný pohyb molekul je náhodný, ale právě proto.

Pojem dynamické zákonitosti vznikl v důsledku rozvoje mechaniky. Je známo, že snahy mechanistů, nahradit fysiku mechanikou, skončily nezdarem. Zrovna tak se nezdaří každá snaha mechanického supponování jedněch zákonitostí druhými i v ostatních případech. Obecně řečeno dynamická zákonitost spočívá v tom, že za daných vnějších podmínek počáteční stav jednoznačně předurčuje všechny další pohyby systému. Odtud plyne, že uznáme-li dynamickou formu zákonitosti jako nadřazenou ostatním, dopustíme se naprosto neopodstatněného zabsolutnění částečné formy zákonitosti.

V protikladu k dynamickým zákonitostem, vyjadřuje statistická zákonitost spojení mezi komplexem podmínek a existencí stability relativní četnosti daného jevu; pojem statistické zákonitosti odráží v abstraktní formě určité typy vztahů mezi jevy či procesy. Podle CHINČINA[12]) jsou to ty typy vztahů,

„které ve svých základních znacích jsou podmíněny především hromadným charakterem těchto jevů či procesů (t. j. existencí v nich velkého počtu v té nebo oné míře rovnomocných jevů, veličin atd.) tak, že individuální vlastnosti jednotlivých ingredientů do jisté míry jsou zatlačeny."

Všechny právě zde uvedené vztahy nevztahují se pouze na zákonitosti fysikální. Vztahují se především na jiné přírodní vědy, jako astronomii, agrobiologii, klimatologii, hydrologii, dále na technické vědy atd. Všude zde vystupují statistické zákonitosti vedle dynamických (nestatistických) stejně objektivně a jedny na druhé nelze převést.

Filosofickou část našeho referátu zakončeme tedy tvrzením, že nutnost rozsáhlého užívání theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky ve všech těchto vědách je dána ne subjektivními, ale objektivními příčinami.

III.

V této závěrečné části našeho referátu se pokusíme učinit některé závěry pro budoucnost. V prvé řadě je třeba, aby bylo skoncováno s šířením a užíváním zastaralé koncepce matematické statistiky a aby byla uvedena ve známost moderní matematická statistika. Za tím účelem třeba psát vhodné knížky a brožury a vyškolit ve statistice některé aspiranty přírodních a technických věd. Bylo by záhodno zajistit dostatečnou širokou a hlubokou výuku theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky na přírodovědných a technických oborech.

Je třeba ve všech oborech, používajících matematickou statistiku, napsat knížky, v nichž by se vyšší statistické metody od nižších nelišily tím, že místo samotného mediánu jsou tam kvartily a decily, místo jedné míry šikmosti tři míry šikmosti a pod. Pozorování by tu měla být důsledně považována za realisace náhodných veličin a počítané statistiky by měly být při nejmenším doprovázeny výběrovými chybami. Pravděpodobnost by v nich měla být jasně odlišena od relativní četnosti a ze statistického myšlení by měly být vyloženy alespoň testy významnosti a intervaly spolehlivosti.

Zběžný pohled na program nastávající konference ukazuje, že většina našich statistiků čerpá a řeší problémy na poli průmyslové výroby, kde také byly vybudovány dva velké výzkumné ústavy. Statistika v průmyslové výrobě je jistě velmi důležitá a osvědčená a věnovali ji svou energii desítky tvůrčích pracovníků. Nesmíme však zanedbávat ani jiné obory aplikací, z nichž mnohé mají velký národohospodářský význam.

Domníváme se na př., že kdyby do statistické evidence byly široce zavedeny

---

[12]) *A. C. Samojlovič*: Termodinamika i statističeskaja fizika, Gostechizdat, 1953, Moskva, str. 175.

výběrové metody, znamenalo by to zrovna takové úspory jako v hromadné výrobě. Vždyť výroba vyplněných dotazníků je dnes tou nejhromadnější ze všech hromadných výrob. Nelze nevidět, že na jedné straně je administrativní aparát zcela přetížen evidencí, takže stačí ji jen provádět, ale ne již dostatečně využívat; na druhé straně o řadě důležitých věcí zpráv nemáme.

Také aplikace v biologii, zvláště v agrobiologii nejsou rozvinuty v dostatečné míře, ačkoliv právě tento obor byl lůnem, ve kterém se moderní statistika zrodila. Prověřování agrobiologických hypotéz, jak v rostlinné, tak živočišné výrobě, pomocí analysy rozptylu by se mělo stát běžnou věcí.

Uvést ve skutek direktivy X. sjezdu KSČ[13]) o zemědělském výzkumu, znamená provést stovky experimentů. A každý z těchto experimentů, bude-li nedbale proveden a vyhodnocen, může vést k falešným rozhodnutím a tím i k hospodářským a politickým ztrátám.

Kromě toho začíná statistika pronikat do řady nových oborů, jako je stavebnictví, hydrologie, klimatologie, astronomie atd. Tyto obory slibují dát pro statistickou práci bohatou inspiraci a samy používáním statistiky mohou hodně získat.

Není sporu o tom, že u nás jsou dobré předpoklady pro úspěšný rozvoj jak aplikací, tak i theorie matematické statistiky. Proto je skoro nepochopitelné, proč vychází tak málo publikací. Možná, že je tomu tak proto, že mnozí pracovníci se obávají, že u jejich prací bude hodnoceno spíše než cena pro lidské poznání a užitečnost to, zda jejich matematická forma odpovídá soudobému vkusu. Také si myslíme, že naše národní ctižádost nemůže být uspokojena tím, že zobecníme některé věty, či zjednodušíme některé důkazy.

Proto končíme tento svůj referát vyslovením naděje, že tato konference přispěje k velkému rozkvětu matematické statistiky u nás. Jistě se to podaří, skloubíme-li dohromady theoreticko-pravděpodobnostní tradici sovětskou a „statistickou" tradici Fisherovskou.

Referát přednesený na první pracovní konferenci českosl. matematických statistiků v Praze, konané ve dnech 27.—30. VI. 1954.

---

[13]) Uveďme následující místo z referátu s. ŠIROKÉHO:

„Dále je třeba věnovat mnohem větší péči správnému dávkování umělých hnojiv, a to se zřetelem na strukturu půdy, na předplodiny, jakož i na množství vláhy".

„Pro jednotlivé kraje nejsou vypěstovány nejvhodnější odrůdy. V tomto směru výzkumná práce vážně zaostává. Nejvážnější nedostatky jsou u polních krmovin a technických plodin."

K THEORII VÍCEROZMĚRNÉHO INTEGRÁLU

KAREL KARTÁK, Praha.

(Došlo dne 8. července 1954.) DT: 517.397

Článek vznikl z autorovy diplomové práce, kterou vedl J. Mařík. Hlavním výsledkem je zobecnění na vícerozměrný případ této známé věty z theorie Perronova integrálu: *Má-li f Perronův integrál v* $\langle a, t\rangle$ *pro každé* $t \in \langle a, b)$ *a existuje-li konečná limita* $\lim\limits_{t\to b-} \int\limits_a^t f(x)\,dx = A$, *pak existuje také* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *a rovná se* A.

I. Vícerozměrné nevlastní integrály

1. Základní definice a označení. Budeme se převážně zabývat vícerozměrným Perronovým integrálem, definovaným v článku [1] J. Maříkem. (Tam je definován dokonce Perron-Stieltjesův integrál). Připomeňme si stručně jeho definici.

Intervalem I v m-rozměrném eukleidovském prostoru E_m nazveme kartézský součin m uzavřených nezvrhlých (t. j. obsahujících více než jeden bod) intervalů z E_1. Je-li $I = i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_m$, kde $i_k = \langle a_k, b_k\rangle$, $a_k < b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, budeme psát $I = \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_m, b_m\rangle$. Objemem intervalu I nazveme číslo $|I| = \prod\limits_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$. Řekneme, že posloupnost intervalů $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x \in E_m$, jestliže $x \in I_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a $\lim\limits_{n\to\infty} d(I_n) = 0$; $d(A)$ znamená pro $A \subset E_m$ průměr množiny A. Jako obvykle značí $O(A, \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, ε-okolí množiny A v E_m, $\bar{A}$ její uzávěr a Int A množinu všech jejích vnitřních bodů. Řekneme, že se intervaly I_1, I_2 nepřekrývají, jestliže platí Int $(I_1 \cap I_2) = \emptyset$.

Buď K m-rozměrný interval. Řekneme, že F je funkce intervalu v K, jestliže F je zobrazení množiny všech intervalů $I \subset K$ do množiny reálných čísel. Řekneme, že F je superaditivní v K, jestliže platí $F(I_1 + I_2) \geqq F(I_1) + F(I_2)$, kdykoli se intervaly I_1, I_2 nepřekrývají, $I_1 + I_2$ je interval v K a součet na pravé straně má smysl (t. j. nemá tvar $\infty - \infty$ nebo $-\infty + \infty$). Pro znaménko $\leqq$ resp. $=$ dostáváme definici subaditivní resp. aditivní funkce intervalu.

Buď F funkce intervalu v K. Řekneme, že F je slabě spojitá v bodě $x \in K$, jestliže $F(I_n) \to 0$, kdykoli $I_n \to x$, $I_n \subset K$. Je-li F slabě spojitá v každém bodě $x \in K$, řekneme, že je slabě spojitá v K.

Horní derivací funkce intervalu F v bodě $x \in K$ nazveme supremum množiny všech limit tvaru

$$\lim \frac{F(I_n)}{|I_n|} \text{ pro } I_n \to x,\ I_n \subset K\,;$$

označení $\overline{F}(x, K)$ nebo krátce $\overline{F}(x)$. Podobně dolní derivací funkce F v bodě $x \in K$ nazveme číslo

$$\underline{F}(x) = \inf_{\{I_n\}} \left(\lim_{\substack{I_n \to x \\ I_n \subset K}} \frac{F(I_n)}{|I_n|} \right);$$

lehce se zjistí souvislost s jednorozměrným případem.

Buď f bodová funkce v K. Řekneme, že funkce intervalu M je majorantou funkce f v K, jestliže

(1) M je superaditivní v K,

(2) $-\infty \neq \underline{M}(x) \geqq f(x)$ pro každý bod $x \in K$.

Řekneme, že m je minorantou f v K, když $-m$ je majorantou funkce $-f$ v K.

Přejděme k *definici Perronova integrálu*. Buď f bodová funkce v intervalu K. Horním Perronovým integrálem funkce f v intervalu K nazveme infimum množiny $\{M(K)\}$, kde M je majoranta f v K; označení $\overline{\int\limits_K} f(x)\,\mathrm{d}x$. Dolním Perronovým integrálem funkce f v K nazveme supremum množiny $\{m(K)\}$, kde m je minoranta f v K; označení $\underline{\int\limits_K} f(x)\,\mathrm{d}x$. Z podmínek (1), (2) pro majorantu plyne $\overline{\int\limits_K} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \underline{\int\limits_K} f(x)\,\mathrm{d}x$ (důkaz viz [1], část II, 43). Jestliže platí $\overline{\int\limits_K} f = \underline{\int\limits_K} f$ a je to konečné číslo, nazveme je Perronovým integrálem funkce f v intervalu K a označíme $\int\limits_K f(x)\,\mathrm{d}x$.

V dalším budou také zmínky o *Riemannově* a *Lebesgueově vícerozměrném integrálu*; jejich definice jest dobře známa. Pro krátkost budeme dále místo Perronův integrál psát P-integrál; podobně L-integrál, R-integrál a dále definované integrály.

2. Některé výsledky z theorie P-integrálu.

(2.1) *Má-li f P-integrál v K, má také P-integrál v I, kdykoli je interval $I \subset K$.*

Důkaz: [1], část II, 51.

(2.2) *P-integrál je aditivní funkce intervalu.*

Důkaz: [1], část II, 52.

(2.3) Fubiniho věta. *Má-li funkce $f(x, y)$ P-integrál v intervalu $K = \langle a, b; c, d\rangle$, platí*

$$\int\limits_K f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \Big(\overline{\int\limits_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \Big(\underline{\int\limits_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz: [1], část II, 77.

(2.4) *Nechť f má P-integrál v intervalu K. Pro $I \subset K$ položme $P(I) = \int_I f(x)\, dx$. Pak P je slabě spojitá v K.*

Důkaz: [1], část II, 81.

(2.5) *Má-li f P-integrál v $\langle a, t \rangle$ pro každé $t \in \langle a, b)$ a existuje-li konečná limita $\lim_{t \to b-a} \int^t f(x)\, dx = A$, pak existuje také $\int_a^b f(x)\, dx$ a platí $\int_a^b f(x)\, dx = A$.*

Důkaz: [1], část II, 90.

(2.6) (a) *Buď f bodová funkce v intervalu K. Existuje-li R-integrál z f v K, pak existuje také P-integrál z f v K a rovná se R-integrálu.*

(b) *Označme $P_A(K)$ resp. $L(K)$ množinu všech perronovsky absolutně resp. lebesgueovsky integrovatelných funkcí v K. Pak platí $P_A(K) = L(K)$.*

(c) *Buď $K = \langle a, b \rangle$; nechť f má v K nevlastní R-integrál resp. nevlastní L-integrál. Pak má také P-integrál.*

Důkaz: (a) [1], část II, 60. (b) [1], část III, 11. (c) plyne z (a) resp. (b) a (2.5).

Poznámka. V dalším se budeme zabývat jen dvojrozměrným případem.

3. Nevlastní dvojrozměrné integrály. Všimněme si nejprve nevlastního R-integrálu. Ten se obvykle definuje ne právě exaktně, ale smysl těchto definicí je následující (uvažujeme případ jediného „singulárního" bodu).

(3.1) Buď K interval, bod $z \in K$. Buď D omezená oblast, jejíž hranicí je jednoduchá uzavřená křivka konečné délky; nechť $z \in D$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{d(D) \to 0} (R) \iint_{K-D} f(x, y)\, dx\, dy = A ,$$

řekneme, že existuje nevlastní R-integrál funkce f v K a rovná se A.

Poznámka. Je-li f definována v intervalu K a je-li množina A částí K, definujeme jako obvykle

$$\int_A f(x)\, dx = \int_K f(x) \,.\, \chi_A(x)\, dx ,$$

kde χ_A značí charakteristickou funkci množiny A. Zřejmě nezáleží na tom, do kterého intervalu množinu A vnoříme. Neexistuje-li integrál napravo, řekneme, že integrál z f přes množinu A neexistuje.

Definice se obdobně rozšiřuje i pro případ konečně mnoha singulárních bodů. Lze však ukázat, že takto definovaný integrál nepřekračuje třídu L-integrálu; to plyne z této věty:

(3.2) *Funkce f má nevlastní R-integrál (ve smyslu definice (3.1)), právě když $|f|$ má nevlastní R-integrál.* (Viz na příklad knihu *K. Petr*: Počet integrální (1931), odstavec 307.)

Od této chvíle klademe $K = \langle 0, 1; 0, 1 \rangle$; to není na újmu obecnosti.

(3.3) Buď v K definována funkce f; nechť pro $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$ $I(x, y)$ značí interval $\langle x, 1; y, 1 \rangle$. Nechť existuje R-integrál z funkce f v $K - I(x, y)$; označme

$$\Phi(x, y) = \iint_{K - I(x,y)} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, .$$

Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{[x,y] \to [1,1]} \Phi(x, y) = A \, , \quad 0 \leqq x < 1 \, , \quad 0 \leqq y < 1 \, ,$$

pak řekneme, že existuje nevlastní R-integrál funkce f v K a rovná se A.

Takto definovaný integrál označme R^{**}. Podobně definujme L^{**}-integrál a P^{**}-integrál. Nemusili jsme se samozřejmě omezovat na případ, kdy bod z leží ve vrcholu K, ale tato definice je stejně jen pomocná.

Poznámka. (3.3) odpovídá tomu případu ve (3.1), kdy oblasti D jsou otevřené intervaly. Měli bychom důsledněji označit

$$\Phi(x, y) = \iint_{\overline{K - I(x,y)}} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, ,$$

neboť množina $K - D$ je uzavřená; ale hodnota integrálu je v obou případech stejná. Této poznámky dále častěji použijeme.

Zřejmě platí $R^{**} \supset R$, $L^{**} \supset L$, $L^{**} \supset R^{**}$ (t. j. má-li funkce f R-integrál v K, má také R^{**}-integrál v K a jejich hodnoty jsou stejné; atd.). Ukažme teď, že neplatí $R^{**} \subset L$.

(3.4) *Na intervalu K existuje funkce f tak, že platí $(R^{**})\int_K f = 0$ a že neexistuje konečný integrál z f přes Δ, kde $\Delta = \mathop{\mathcal{E}}_{x,y]} ([x, y] \in K, x \geqq y)$.*

Důkaz (*J. Mařík*): Buď $a_1, a_2, \dots$ rostoucí posloupnost kladných čísel, která má limitu 1; buď dále $b_1, b_2, \dots$ posloupnost kladných čísel, která má limitu 0 a která tvoří divergentní řadu. Položme ještě $a_0 = 0$; nechť

$$K_n = \langle a_{n-1}, a_n; a_{n-1}, a_n \rangle \, , \quad \Delta_n = \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} [a_{n-1} \leqq y \leqq x \leqq a_n] \, .$$

Je tedy $\Delta_n \subset K_n$ pro $n = 1, 2, \dots$ Utvořme v každém intervalu K_n funkci f_n o těchto vlastnostech:

(1) f_n je spojitá v K_n a na hranici K_n má nulové hodnoty;

(2) $f_n(x, y) = - f_n(y, x)$ pro každý bod $[x, y] \in K_n$;

(3) $f_n(x, y) \geqq 0$ pro $[x, y] \in \Delta_n$;

(4) $\int_{\Delta_n} f_n = b_n$.

(Snadno se zjistí, že takové funkce f_n existují.)

Definujme nyní v K funkci f takto: Je-li $[x, y] \in K_n$, buď $f(x, y) = f_n(x, y)$. (Patří-li bod $[x, y]$ do $K_m \cap K_n$, kde $m \neq n$, je zřejmě $|m - n| = 1$, $f_n(x, y) =$

$= f_m(x, y) = 0$.) Nepatří-li $[x, y]$ do žádného z intervalů K_n, buď $f(x, y) = 0$. Snadno se zjistí, že funkce f je s výjimkou bodu $[1, 1]$ spojitá všude v K.

Dokážeme, že $\lim \Phi(x, y)$[1]) pro $[x, y] \in K$, $[x, y] \to [1, 1]$, $x < 1$, $y < 1$ existuje a rovná se nule.

Zvolme tedy kladná čísla x, y menší než 1; buď na př. $y \leqq x$. Je-li $y = x$, je z důvodu symetrie $\Phi(x, y) = 0$. Buď nyní $y < x$; označme $I_1 = \langle x, 1; y, x \rangle$. Platí $\Phi(x, y) + \int\limits_{I_1} f = \Phi(x, x) = 0$, tedy $\Phi(x, y) = -\int\limits_{I_1} f$. Buď $a_{n-1} < x \leqq a_n$. Interval I_1 zřejmě nemá společné body s intervaly $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ (v těch jsou první souřadnice nejvýš rovné $a_{n-1} < x$) ani s vnitřky intervalů K_{n+1}, $K_{n+2}, \ldots$ (v těch jsou druhé souřadnice větší než $a_n \geqq x$). Interval I_1 je částí Δ; na I_1 je tedy $f \geqq 0$. Na $I_1 - K_n$ je však $f = 0$; je proto $0 \leqq \int\limits_{I_1} f = \int\limits_{I_1 K_n} f \leqq \int\limits_{\Delta_n} f = b_n$, takže $0 \leqq |\Phi(x, y)| \leqq b_n$. Odtud plyne ihned, že $\lim \Phi(x, y) = 0$. Existuje tedy R^{**}-integrál $\int\limits_K f$ a rovná se nule. Lebesgueův integrál $\int\limits_K f$ však neexistuje, protože $\int\limits_\Delta f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_n} f_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Poznámka. Definujme v K funkci intervalu P předpisem $P(I) = \int\limits_I f$ (rozumí se R^{**}-integrál). Obsahuje-li I bod $[1, 1]$, je $P(I) = \int\limits_K f - \int\limits_{K-I} f = -\Phi(x, y)$, kde $I = \langle x, 1; y, 1 \rangle$. Je-li $a_{n-1} < \max(x, y) \leqq a_n$, je $|P(I)| = |\Phi(x, y)| \leqq b_n$; přitom je však plošná velikost intervalu I aspoň $(1 - a_n)^2$. Volíme-li na př. $b_n = \dfrac{1}{n}$, $a_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, je pro takový interval I poměr mezi $P(I)$ a plošnou velikostí intervalu I v prosté hodnotě nejvýš $\dfrac{b_n}{(1 - a_n)^2} = \dfrac{1}{n} \cdot \sqrt[3]{n^2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$; derivace funkce P v bodě $[1, 1]$ je potom rovna nule. Vidíme, že takto sestrojená funkce f má v K dokonce Newtonův integrál (viz [1], část II, 56).

4. P^{**}-integrál. V tomto odstavci dokážeme, že P-integrál je, podobně jako v jednorozměrném případě, zobecněním L^{**}-integrálu. Dokážeme totiž, že $P^{**} = P$.

(4.1) *Nechť existuje P-integrál z funkce f v intervalu K. Pak existuje také P^{**}-integrál z f v K a rovná se P-integrálu.*

Důkaz: Plyne ze slabé spojitosti P-integrálu; viz (2.4).

(4.2) *Nechť existuje P^{**}-integrál z funkce f v intervalu K a rovná se A. Pak existuje také P-integrál z f v K a rovná se A.*

Důkaz. Sestrojme tuto posloupnost čtverců: Rozdělme K na čtyři shodné čtverce a označme K_1, K_2, K_3 ty z nich, které neobsahují bod $[1, 1]$. Ve zbylém

[1]) Viz (3.3).

čtverci — označme ho L_1 — proveďme tuto operaci znova; dostaneme čtverce K_4, K_5, K_6; interval L_n rozdělíme podobně na intervaly K_{3n+1}, K_{3n+2}, K_{3n+3}, L_{n+1}, při čemž L_{n+1} obsahuje bod $[1, 1]$. Je tedy $L_n = \langle 1 - 2^{-n}, 1; 1 - 2^{-n}, 1 \rangle$. Položme ještě $K = L_0$.

Zvolme nyní libovolně $\varepsilon > 0$. Protože existují integrály $\int_{K_n} f$, $n = 1, 2, \ldots$, existují majoranty $M_1, M_2, \ldots$ v $K_1, K_2, \ldots$ tak, že platí

$$(\alpha) \qquad M_n(K_n) < \int_{K_n} f + \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) .$$

Každou funkci M_n rozšiřme na celý interval K tak, že položíme $M_n(I) = M_n(IK_n)$ resp. $M_n(I) = 0$ podle toho, je-li IK_n interval (nedegenerovaný) či nikoli. Funkce M_n jsou podle [1], část II, 22 superaditivní v K.

Zkoumejme nyní řadu

$$(\beta) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [M_{3n-2}(K) + M_{3n-1}(K) + M_{3n}(K)] .$$

Je $\int_{K_n} f \leqq M_n(K_n) = M_n(K) < \int_{K_n} f + \frac{\varepsilon}{2^n}$, tedy

$$\int_{L_{n-1}-L_n} f = \int_{K_{3n-2}} f + \int_{K_{3n-1}} f + \int_{K_{3n}} f \leqq M_{3n-2}(K) + M_{3n-1}(K) + M_{3n}(K) <$$

$$< \int_{L_{n-1}-L_n} f + \varepsilon \left(\frac{1}{2^{3n-2}} + \frac{1}{2^{3n-1}} + \frac{1}{2^{3n}} \right) .$$

Je však $\sum_{n=1}^{N} \int_{L_{n-1}-L_n} f = \int_{L_0-L_N} f = \int_{K-L_N} f$, jak se snadno zjistí indukcí; odtud plyne, že řada (β) konverguje a její součet leží v intervalu $\langle A, A + \varepsilon)$.

Zvolme nyní libovolný interval $I \subset K$ a utvořme řadu

$$(\gamma) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [M_{3n-2}(I) + M_{3n-1}(I) + M_{3n}(I)] .$$

Rozeznávejme dva případy:

(1) $[1, 1]$ nepatří do I. Potom pro velká n je $I \cap L_{n-1} = \emptyset$, tedy $I \cap K_{3n-2} = I \cap K_{3n-1} = \ldots = \emptyset$, $M_{3n-2}(I) = M_{3n-1}(I) = \ldots = 0$, takže řada ($\gamma$) má jen konečný počet nenulových členů a je proto konvergentní.

(2) $[1, 1]$ patří do I. Potom pro velká n je $L_{n-1} \subset I$, tedy $M_{3n-2}(I) = M_{3n-2}(I \cap K_{3n-2}) = M_{3n-2}(K_{3n-2}) = M_{3n-2}(K)$ atd. Řada (γ) se tedy až na konečný počet členů shoduje s řadou (β), takže je rovněž konvergentní.

Řada (γ) tedy definuje pro každý interval $I \subset K$ jisté číslo; označme je $\tilde{M}(I)$. Tím je definována v K funkce intervalu $\tilde{M}$, která je zřejmě superaditivní; zjistili jsme, že $A \leqq \tilde{M}(K) < A + \varepsilon$.

Definujme ještě v K funkci intervalu D tímto předpisem: Je $D(I) = 1$ resp. $D(I) = 0$ podle toho, obsahuje-li interval I bod $[1, 1]$ či ne. Funkce D je zřejmě aditivní, takže funkce

$$M = \tilde{M} + 5\varepsilon D$$

je superaditivní.

Dokážeme, že M je majorantou funkce f. Máme tedy dokázat, že platí $\underline{M}(x, y) \geqq f(x, y)$, $\underline{M}(x, y) \neq -\infty$ pro každý bod $[x, y] \in K$.

Buď napřed $[x, y] \neq [1, 1]$. Pak existují nejvýš čtyři indexy i tak, že $[x, y] \in K_i$. Lehce se zjistí (viz [1], část II, 29), že $\underline{M}(x, y, K) = \min_i \underline{M}_i(x, y, K_i)$, kde i probíhá uvedené indexy; je tedy $\underline{M}(x, y) \geqq f(x, y)$. Zřejmě je také $\underline{M}(x, y) \neq -\infty$.

Dokážeme ještě, že je $\underline{M}(1, 1) = +\infty$. Protože funkce $\Phi(x, y)$[2]) má v bodě $[1, 1]$ limitu A, existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý interval $I(x, y)$,[2]) kde $1 - \delta < x < 1$, $1 - \delta < y < 1$, je

$$\Big|\int_{K - I(x,y)} f - A\Big| < \varepsilon\,. \tag{*}$$

Je-li nyní $1 - \delta < x_1 < x_2 < 1$, $1 - \delta < y_1 < y_2 < 1$, $B = I(x_1, y_1) - I(x_2, y_2)$, je zřejmě

$$\Big|\int_B f\Big| = \Big|\int_{K - I(x_2,y_2)} f - \int_{K - I(x_1,y_1)} f\Big| < 2\varepsilon\,. \tag{**}$$

Zvolme takový interval $I(x, y)$, aby platilo $1 - \delta < x < 1$, $1 - \delta < y < 1$. K němu zvolme přirozené n tak velké, aby bylo $x < 1 - 2^{-n}$, $y < 1 - 2^{-n}$. Rozdělme interval $I(x, y)$ zřejmým způsobem na intervaly I_1, I_2, I_3, L_n. Je $\tilde{M}(I(x, y)) \geqq \tilde{M}(L_n) + \sum_{i=1}^{3} \tilde{M}(I_i)$. Z (β), (γ) plyne, že $\tilde{M}(L_n) = \tilde{M}(K) - \sum_{i=1}^{3n} \tilde{M}(K_i)$, je tedy $\tilde{M}(L_n) \geqq \tilde{M}(K) - \sum_{i=1}^{3n} \Big[\int_{K_i} f + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big] > \tilde{M}(K) - \int_{K - L_n} f - \varepsilon >$[3]) $\tilde{M}(K) - A - \varepsilon - \varepsilon \geqq -2\varepsilon$. Dále je $\tilde{M}(I_i) \geqq \int_{I_i} f$, $i = 1, 2, 3$, tedy $\sum_{i=1}^{3} \tilde{M}(I_i) \geqq \int_{I(x,y) - L_n} f >$[4]) -2ε. Je tudíž $\tilde{M}(I(x, y)) > -4\varepsilon$, $M(I(x, y)) > \varepsilon$. Odtud plyne ihned $\underline{M}(1, 1) = \infty$. Je proto $\overline{\int_K} f \leqq M(K) < A + 6\varepsilon$, $\overline{\int_K} f \leqq A$. Ze stejného důvodu je $\overline{\int_K}(-f) \leqq -A$, $\underline{\int_K} f \geqq A$, tedy $\int_K f = A$. Tím je věta dokázána.

Poznámka. Z předešlého výsledku plyne, že funkce z (3.4) má P-integrál. Tento příklad zároveň ukazuje, že i pro dva rozměry je P-integrál obecnější než L-integrál. Existence funkce z (3.4) je konstatována v článku [2]. — Poznamenejme ještě, že jiný příklad funkce mající P-integrál a nemající L-integrál

[2]) Viz (3.3).
[3]) Viz (*).
[4]) Viz (**).

lze sestrojit takto: Buď g funkce v $\langle 0, 1\rangle$, mající neabsolutně konvergentní P-integrál. Položme $f(x, y) = g(x)$ pro $[x, y] \in \langle 0, 1; 0, 1\rangle$. Lehce se zjistí, že f má pak neabsolutně konvergentní P-integrál (dokonce podle aditivních majorant a minorant); také zobecnění pro více rozměrů je zřejmé.

5. P^*-integrál. $P^* = P$. Podle (2.5) je jednorozměrný P-integrál spojitou funkcí svých mezí. Ukažme, že se tato vlastnost rozšiřuje na dvojrozměrný případ; nejprve podáme jinou definici nevlastních integrálů.

(5.1) Buď v K definována funkce f; nechť existuje P-integrál z funkce f v každém intervalu $\langle 0, x; 0, y\rangle$, kde $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $x + y < 2$. Označme

$$F(x, y) = \iint_{\langle 0,x;0,y\rangle} f(x, y)\, dx\, dy\,, \quad [1, 1] \neq [x, y] \in K\,.$$

Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{[x,y]\to[1,1]} F(x, y) = A\,, \quad \text{kde} \quad [x, y] \in K,\ [x, y] \neq [1, 1]\,,$$

pak řekneme, že existuje P^*-integrál z funkce f v K a rovná se A.

Poznámka. Podobně můžeme definovat i R^*-integrál, L^*-integrál.

(5.2) *Nechť existuje P^*-integrál z funkce f v intervalu K. Pak existuje také P-integrál z f v K a rovná se P^*-integrálu.*

Důkaz: Pro $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$ zřejmě platí

$$\Phi(x, y) = F(x, 1) + F(1, y) - F(x, y)\,,$$

kde Φ je definována ve (3.3). Tedy existuje také vlastní limita $\lim\limits_{[x,y]\to[1,1]} \Phi(x, y) = \lim F(x, y) = A$, kde $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$. Tvrzení plyne ze (4.2).

Tím je dokázáno, že platí $P^* \subset P$. Dokažme ještě obrácenou inklusi.

(5.3) *Nechť existuje P-integrál z funkce f v intervalu K a rovná se A. Pak existuje také P^*-integrál z f přes K a je rovný A.*

Nebo v ekvivalentní formě:

(5.4) *P-integrál je spojitá bodová funkce.*

Důkaz: Pro $0 \leqq x \leqq 1$ existuje tedy $\iint\limits_{\langle x,1;0,1\rangle} f = \Psi(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to 1-} \Psi(x) = 0$. Podle (2.3) je totiž

$$\iint_{\langle x,1;0,1\rangle} f = \int_x^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dy\Big)\, dx\,;$$

podle (2.5) je P-integrál spojitou funkcí svých mezí.

Je-li $0 \leqq x < 1$, použijeme odhadu

$$|F(x, y) - A| \leqq |F(x, y) - F(x, 1)| + |F(x, 1) - A| \leqq$$
$$\leqq \Big|\iint_{\langle 0,1;y,1\rangle} f\Big| + \Big|\iint_{\langle x,1;y,1\rangle} f\Big| + \Big|\iint_{\langle x,1;0,1\rangle} f\Big|\,.$$

Je-li $x = 1$, pišme $|F(x, y) - A| = |\iint_{\langle 0,1;y,1\rangle} f|$. Ze slabé spojitosti P-integrálu a předešlé poznámky plyne ihned, že $F(x, y) - A$ konverguje k nule pro $[x, y] \to [1, 1]$.

6. Nevlastní P-integrál. Následující otázka zůstala nevyjasněna: Buď $Q = \langle -1, 1; -1, 1\rangle$. Nechť existuje P-integrál z f přes $Q - I$, kdykoli I je interval, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$, a nechť existuje limita $\lim \int_{Q-I} f = A$ pro $I \to [0, 0]$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$. Má f P-integrál v Q?

V tomto odstavci ukážeme, že odpověď je kladná a že $\int_Q f(x) \, dx = A$.

(6.1) Definice. Buď K interval, F funkce intervalu v K. Řekneme, že F je spojitá v K, jestliže $F(I_n) \to 0$, kdykoli $K \supset I_n$, $n = 1, 2, \ldots, |I_n| \to 0$.

Poznámka. Zřejmě každá spojitá funkce intervalu je slabě spojitá. Opak neplatí, jak se lehce zjistí.

Podle (2.4) je P-integrál slabě spojitá funkce intervalu. Teď můžeme dokázat více.

(6.2) *P-integrál je spojitá funkce intervalu.*

Důkaz: Stačí provést pro interval $K = \langle 0, 1; 0, 1\rangle$. Podle (2.2) je P-integrál aditivní funkce intervalu. Označme podle (5.2) $F(x, y) = \iint_{\langle 0,x;0,y\rangle} f$, kde $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. Pro $I = \langle x_1, x_2; y_1, y_2\rangle \subset K$ platí $P(I) = \int_I f = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$. Podle (5.4) je F spojitá bodová funkce; protože K je kompaktní, je dokonce stejnoměrně spojitá na K. K danému $\varepsilon > 0$ existuje tedy $\delta > 0$ tak, že

$$([x_1, y_1] \in K, [x_2, y_2] \in K, (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 < \delta^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon .$$

Je-li $|I| < \delta^2$, je $\min(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) < \delta$. Je tedy $|P(I)| < 2\varepsilon$, kdykoli $|I| < \delta^2$.

(6.3) Věta. *Buď $Q = \langle -1, 1; -1, 1\rangle$ interval, f buď bodová funkce definovaná na Q. Nechť existuje P-integrál z f přes $Q - I$, kdykoli $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$, kde I je interval, a nechť existuje limita*

$$\lim_{I \to [0,0]} \int_{Q-I} f(x, y) \, dx \, dy = A \quad \textit{pro} \quad [0, 0] \in \operatorname{Int} I .$$

Pak existuje také P-integrál z f přes Q a rovná se A.

Důkaz: Položme $K = K_1 = \langle 0, 1; 0, 1\rangle$, $K_2 = \langle -1, 0; 0, 1\rangle$, $K_3 = \langle -1, 0; -1, 0\rangle$, $K_4 = \langle 0, 1; -1, 0\rangle$. Pro $l = 1, 2, 3, 4$ buď $f_i = f \cdot \chi_{K_i}$, kde χ_{K_i} je charakteristická funkce množiny K_i. Dokažme, že existují limity

$$\lim_{Q-I} \int f_i, \quad I \to [0, 0], [0, 0] \in \operatorname{Int} I , \quad i = 1, 2, 3, 4 .$$

Stačí na př. dokázat, že existuje $\lim \int_{K-I} f$ pro $I \to [0, 0]$, $I \subset K$. Položme pro krátkost $F(A) = \int_A f$ pro $A \subset Q$. Podle předpokladu ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$|F(Q - I_1) - F(Q - I_2)| < \varepsilon ,$$

kdykoli $I_k \subset Q \cap O([0, 0], \delta)$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I_k$, $k = 1, 2$. Volíme-li speciálně $I_k = \langle a, b; c, y_k \rangle$, $k = 1, 2$, $y_1 < y_2$, dostáváme

$$|F(\langle a, b; y_1, y_2 \rangle)| < \varepsilon .$$

Ze spojitosti funkce F plyne, že $|F(\langle 0, b; y_1, y_2 \rangle)| \leqq \varepsilon$. Podobně zjistíme, že je $|F(\langle x_1, x_2; 0, d \rangle)| \leqq \varepsilon$, kdykoliv je $0 < x_1 < x_2 < \delta$, $0 < d < \delta$. Je tedy

$$|F(K - I_1) - F(K - I_2)| \leqq 2\varepsilon ,$$

kdykoli $I_k \subset Q \cap O([0, 0], \delta)$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I_k$, $k = 1, 2$. Tedy je splněna nutná a postačující podmínka pro existenci limity $\lim \int_{K-I} f$, takže existují limity $\lim \int_{Q-I} f_i = A_i$, $I \to [0, 0]$, $[0, 0] \in \operatorname{Int} I$, $i = 1, 2, 3, 4$. Podle (4.2) platí $\int_Q f_i = A_i$. Protože je zřejmě $A = \sum_{i=1}^{4} A_i$, jest $\sum_{i=1}^{4} \int_Q f_i = \int_Q f = A$. Tím je důkaz ukončen.

II. Některé aplikace a další problémy

7. O integrálu součinu funkcí. V mnoha případech je důležité vědět, zda je součin dvou integrovatelných funkcí také integrovatelná funkce; stačí připomenout počítání Fourierových koeficientů.

V jednorozměrném případě je v této otázce celkem jasno; poznamenejme, že má-li na příklad f P-integrál a φ je monotonní, existuje také integrál z $f\varphi$ a platí obvyklá druhá věta o střední hodnotě (důkaz: [1], část II, 93). Naproti tomu lze lehce konstruovat příklad, kdy f má nevlastní R-integrál, φ je spojitá (dokonce má derivaci), a integrál z $f\varphi$ diverguje. φ má pak ovšem nekonečnou variaci. (Viz [1], část II, cvičení 13.)

Ve vícerozměrném případě se v případě L-integrálu taková věc stát nemůže. Je však snadné udat spojitou funkci $\varphi(x, y)$ tak, že P-integrál z $f \cdot \varphi$ přes K, kde f je funkce z (3.4), diverguje.

Nejdůležitější z tohoto okruhu otázek je asi ta, zda je možno použít vícerozměrného P-integrálu v theorii dvojných Fourierových řad. V theorii distribucí se vyskytují integrály $\int_K f\varphi$, kde φ je nekonečně derivovatelná. V případě P-integrovatelné funkce f není známo, zda na př. integrály ze součinů $f(x, y) \cdot \cos nx, \ldots$ konvergují.

Pro první účel by stačilo dokázat, že integrál ze součinu P-integrovatelné funkce $f(x, y)$ a funkce $\varphi(x)$ s variací konečnou konverguje. Není známo, zda tato věta platí. Ukážeme, že platí pro funkci f, mající nevlastní L-integrál. Dokážeme dokonce tuto obecnější větu:

(7.1.) *Nechť f má P-integrál v K a nechť φ je funkce s konečnou variací v $\langle 0, 1\rangle$. Nechť existuje P-integrál $\iint_I f(x, y)\, \varphi(x)\, dx\, dy$ pro každý interval I, který je částí K a neobsahuje bod $[1, 1]$. Pak existuje též P-integrál $\iint_K f(x, y)\, \varphi(x)\, dx\, dy$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že φ je monotonní. Je-li $I = \langle x_1, x_2; y_1, y_2\rangle \subset K$, má podle Fubiniovy věty funkce $\psi(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$ a tedy též funkce $\varphi(x) . \psi(x)$ P-integrál v $\langle x_1, x_2\rangle$. Můžeme tedy v K definovat funkci intervalu N předpisem

$$N(I) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\Big[\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy\Big]\, dx\,.$$

Snadno se zjistí, že N je (konečná) aditivní funkce a že $N(I) = \int_I f(x, y)\, \varphi(x)$ pro každý interval $I \subset K$, který neobsahuje bod $[1, 1]$. Z aditivity funkce N plyne, že pro každý interval $I \subset K$, který obsahuje bod $[1, 1]$, platí

$$N(K) - N(I) = \int_{K-I} f(x, y)\, \varphi(x)\,. \qquad (***)$$

Je-li $I = \langle x, 1; y, 1\rangle$, je podle 2. věty o střední hodnotě

$$N(I) = \varphi(x) \int_x^{\xi}\int_y^{1} f + \varphi(1) \int_{\xi}^{1}\int_y^{1} f\,.$$

Protože integrál funkce f je spojitou funkcí intervalu, je $N(I) \to 0$ pro $I \to$ $\to [1, 1]$. Ze vztahu (***) nyní plyne, že existuje P^{**}-integrál a tedy též P-integrál funkce $f(x, y)\, \varphi(x)$ v K. Tím je věta (7.1) dokázána.

Zavedeme ještě tuto **definici:** **(7.2)** *Buď f P-integrovatelná funkce v K. Řekneme, že bod $a \in K$ je L_f-singulární, jestliže neexistuje interval I takový, že $a \in \operatorname{Int} I$ a že na $I \cap K$ je f L-integrovatelná.*

Z věty (7.1) plyne, jak čtenář snadno dokáže, tato věta:

(7.3) *Buď f P-integrovatelná funkce v intervalu K. Buď φ funkce s variací konečnou na $\langle 0, 1\rangle$. Nechť je množina L-singulárních bodů funkce f konečná. Pak P-integrál z $f\varphi$ přes interval K existuje.*

8. O geometrickém významu P-integrálu. Příklad ve (3.4) ukazuje na „přílišnou obecnost" vícerozměrného P-integrálu. Je totiž vidět, že otočíme-li graf funkce $f(x, y)$ tak, aby se přímka $y = x$ ztotožnila na př. s osou x, přestává funkce f být integrovatelná. Zatím co pro L-integrál jsou dokázány velmi obecné věty o substituci, pro P-integrál neplatí ani věta o tak speciální substituci, jakou je rotace.

V tomto odstavci ukážeme, že existují funkce, které mají neabsolutně konvergentní integrál invariantní vzhledem k isometrickým transformacím. Zřejmě stačí dokázat následující větu:

(8.1) *Na množině* $\underset{[x,y]}{\mathcal{E}}(x^2 + y^2 \leqq 1)$ *existuje funkce* f, *mající* P*-integrál invariantní vzhledem k transformaci* $x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$, $y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$, *nemající však* L*-integrál.*

Důkaz. Na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ existuje funkce g, která je spojitá v $(0, 1\rangle$ a taková, že integrál $\int\limits_0^1 x\, g(x)\, dx$ je neabsolutně konvergentní. Označme $R = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}(x \geqq 0, y \geqq 0, x^2 + y^2 \leqq 1)$; pro $x^2 + y^2 \leqq 1$ buď $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$. Dokažme, že existuje integrál $\iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy$. Podle (4.2) stačí dokázat, že existuje P^{**}-integrál z f přes R (zde je ovšem „singulárním" bodem bod $[0, 0]$). Buď $[a, b] \in R$, $a > 0$, $b > 0$, $I(a, b) = \langle 0, a; 0, b\rangle$. Jest

$$\iint\limits_{R - I(a,b)} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{(I)} \ldots + \int\limits_{(II)} \ldots + \int\limits_{(III)} \ldots ,$$

kde

$$(I) \quad = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}([x, y] \in R,\ a^2 + b^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 1)\,,$$

$$(II) \quad = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}([x, y] \in R,\ 0 \leqq x \leqq a,\ b \leqq y \leqq \sqrt{a^2 + b^2 - x^2})\,,$$

$$(III) = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}([x, y] \in R,\ a \leqq x \leqq \sqrt{a^2 + b^2 - y^2},\ 0 \leqq y \leqq b)\,.$$

V těchto integrálech je integrovaná funkce spojitá; lze tedy užít věty o substituci. Máme tak

$$\int\limits_{(I)} \ldots = \int\limits_{(I)} g(\sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int\limits_{\sqrt{a^2+b^2}}^1 r\, g(r)\, dr\Big)\, d\varphi =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \int\limits_{\sqrt{a^2+b^2}}^1 r\, g(r)\, dr\,.$$

Druhý integrál odhadneme takto: Z existence limity $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^1 x\, g(x)\, dx$ plyne, že ke každému $\eta > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \delta \Rightarrow \Big|\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} x\, g(x)\, dx\Big| < \eta$. Je-li tedy $0 < \sqrt{a^2 + b^2} < \delta$, je

$$\Big|\int\limits_{(II)} \ldots\Big| = \Big|\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int\limits_{\frac{b}{\sin\varphi}}^{\sqrt{a^2+b^2}} r\, g(r)\, dr\Big)\, d\varphi\Big| < \tfrac{1}{2}\pi \cdot \eta\,.$$

Pro $[a, b] \to [0, 0]$, $a > 0$, $b > 0$ se tedy tento integrál blíží nule; podobně se vyšetří i třetí integrál.

Tím je dokázáno, že platí $(P) \iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{2}\pi \int\limits_0^1 g(r)\, r\, dr$. — Z podobných důvodů existují také integrály ve zbývajících čtvrtkružnicích; je zřejmé, že funkce f nemá L-integrál. Protože se rotací graf funkce f nemění, je věta dokázána.

Poznámka. Je přirozené položit si tuto otázku: Definovat P-integrál tak, aby integrovatelné funkce zůstaly integrovatelné i po substituci $\vec{X}' = \varphi(\vec{X})$, kde φ je isometrická transformace. Poznamenejme, že jeden možný způsob je definovat derivace majorant a minorant podle simplexů.

9. Další otázky. Z důkazu Fubiniho věty v [1] je vidět, proč bylo k definici P-integrálu třeba superaditivních a ne jen aditivních majorant.

(9.1) (*J. Mařík.*) *Existuje funkce dvou proměnných, mající P-integrál podle superaditivních majorant, nemající však P-integrál podle aditivních majorant?*

V (6.2) jsme dokázali, že P-integrál je spojitá funkce intervalu.

(9.2) *Nestačí k definici P-integrálu spojité majoranty a minoranty?*

Poznámka. V jednorozměrném případě tomu tak je ([3], str. 211).

(9.3) *Existuje funkce f v $K = \langle 0, 1;\ 0, 1\rangle$ taková, aby v tomto intervalu platilo*

$$(+)\qquad \int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^y f(u, v)\, dv\Big)\, du = \int\limits_0^y \Big(\int\limits_0^x f(u, v)\, du\Big)\, dv = F(x, y)\,,$$

aby takto definovaná funkce F byla spojitá v K a aby neexistoval P-integrál z funkce f v intervalu K?

Tolstov sestrojil příklad spojité funkce F v intervalu K takové, že v každém bodě platí

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y\, \partial x} = f(x, y) \neq \pm\infty$$

a že funkce f nemá L-integrál v žádném intervalu $I \subset K$ (viz [4]). Pro funkce F, f zřejmě platí vztah (+). Lze tedy položit slabší otázku:

(9.4) *Nechť f má P-integrál na K. Existuje interval $I \subset K$ tak, že f má L-integrál na I?*

Nejtěžší z tohoto okruhu otázek je asi tato:

(9.5) *Charakterisovat P-integrál mezi všemi aditivními funkcemi intervalu.*

Poznámka. V jednorozměrném případě je to rozřešeno větou o ekvivalenci P-integrálu a t. zv. „úzkého" Denjoyova integrálu ([3], str. 211).

LITERATURA

[1] *J. Mařík*: Základy theorie integrálu v euklidových prostorech. Časopis pro pěstování matematiky, roč. 77 (1952), 1—51, 125—145, 267—301.

[2] *J. Mařík*: Конспект статьи „Основы теории интеграла в эвклидовых пространствах". Чехосл. мат. журнал, Т. 2 (77), 1952, 273—277.

[3] *S. Saks*: Théorie de l'intégrale. Warszawa 1933.

[4] *Г. П. Толстов:* О криволинейном и повторном интеграле. Труды М. И. им. В. А. Стеклова, XXXV, М—Л 1950.

Резюме

К ТЕОРИИ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛА

КАРЕЛ КАРТАК (Karel Karták), Прага.

(Поступило в редакцию 8. VII. 1954 г.)

Работа посвящается многомерному интегралу Перрона; автор исходит из определения, данного Я. Маржиком в работе [1] (супераддитивные мажоранты). Главным результатом первой части является следующая **теорема:**

Пусть Q — интервал, $a \in Q$, f — функция на Q. Пусть существует интеграл Перрона функции f, распространенный на $Q - I$, для всякого интервала I, где $a \in \operatorname{Int} I$, *и пусть существует предел* $\lim\limits_{I \to a} \int\limits_{Q-I} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = A$ *для* $a \in \operatorname{Int} I$. *Тогда существует и интеграл Перрона функции f, распространенный на Q, и равняется A.*

Во второй части показаны некоторые приложения этой теоремы (интеграл произведения; геометрическое значение интеграла Перрона); далее разбираются некоторые проблемы.

Zusammenfassung

ZUR THEORIE DES MEHRDIMENSIONALEN INTEGRALS

KAREL KARTÁK, Praha.

(Eingelangt am 8. Juli 1954.)

Diese Arbeit betrifft das mehrdimensionale Perronsche Integral, wie es in [1] von J. Mařík definiert wurde. Das Hauptresultat des ersten Teiles lautet:

Es sei Q ein Intervall ($Q \subset E_2$), $a \in Q$, f sei eine Funktion auf Q. Es existiere das

Perronsche Integral $\int\limits_{Q-I} f(x, y)\, dx\, dy$ *für jedes Intervall* I, *das in seinem Innern den Punkt* a *enthält. Es soll weiter die Limit* $\lim\limits_{I \to a} \int\limits_{Q-I} f(x, y)\, dx\, dy = A$ (*wo* $a \in \operatorname{Int} I$) *existieren. Dann existiert auch das Perronsche Integral* $\int\limits_{Q} f(x, y)\, dx\, dy$ *und ist gleich* A.

Im zweiten Teile werden einige Anwendungen dieses Satzes gezeigt (die Existenz des Perronschen Integrals aus dem Produkt zweier Funktionen und die geometrische Bedeutung des Perronschen Integrals in gewissen Spezialfällen). Zum Schluss sind einige Probleme gestellt.

O EXISTENCI ROVINNÝCH MNOHOÚHELNÍKŮ S PŘEDEPSANÝMI ÚHLY

KAREL ČULÍK, Brno.

(Došlo dne 20. září 1954.) DT: 513.192

E. ČECH položil otázku, zda čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n \geqq 3)$, která splňují nerovnosti

$$0 < \alpha_i < 2\pi\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

a rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\,\pi\,, \tag{2}$$

jsou v daném pořadí velikostmi úhlů rovinného n-úhelníka.

A. RÉNYI ukázal,[1]) že odpověď na Čechovu otázku je kladná. Na Čechovu otázku lze navíc odpovědět (věta 2.4), že čísla α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqq 3)$, která splňují podmínky (1) a (2), jsou v daném pořadí velikostmi úhlů jednoduchého n-úhelníka.

Čechovu otázku lze přirozeně zobecnit tím, že podmínku (2) nahradíme zcela obecnou podmínkou

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m\pi\,, \tag{3}$$

kde m je přirozené číslo, které splňuje nerovnosti $0 < m < 2n$ a podmínku $m \equiv n \pmod 2$.

Čísla α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqq 3)$, která splňují podmínky (1) a (3), obecně *nejsou* velikostmi úhlů rovinného n-úhelníka. Lze však udat nutné a dostatečné podmínky, kdy tomu tak je (věta 4.2).

V souvislosti s úvahami o existenci rovinných mnohoúhelníků s předepsanými velikostmi jejich úhlů se ukázalo výhodným zavést pojem n-lomené čáry a vyšetřovat některé vlastnosti n-lomených čar, jako je na příklad absolutní jednoduchost (definice 4. a věta 3.3).

1. Rovinný mnohoúhelník definujeme ve smyslu L. POINSOTA:[2])

Definice 1. *Nechť prvky konečné posloupnosti* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ *značí*

[1]) *A. Rényi*: Poznámka o úhlech mnohoúhelníka, Čas. pro pěst. matematiky, *78* (1953), str. 305—306.

[2]) *L. Poinsot* vychází od skupiny bodů, pomocí nichž definuje strany mnohoúhelníka, zatím co na příklad *A. F. Möbius* od skupiny úseček a žádá jisté podmínky na jejich incidenci, jak je to známo z kombinatorické topologie (viz *M. Brückner*: Vielecke und Vielflache, str. 12—16).

body eukleidovské roviny, které splňují podmínku: $A_{i-1} \neq A_i \neq A_{i+1}$ pro každé i, při čemž klademe $A_j = A_k$, když $j \equiv k \pmod n$. Pak soustavu úseček A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, A_nA_1 nazýváme rovinným n-úhelníkem nebo mnohoúhelníkem a označujeme jej $A_1A_2 \ldots A_n$. Body A_i nazýváme jeho vrcholy a úsečky (uzavřené) A_iA_{i+1} jeho stranami. Orientované úhly $\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ polopřímek A_iA_{i-1}, A_iA_{i+1} nazýváme úhly první třídy a orientované úhly $\sphericalangle A_{i+1}A_iA_{i-1}$ nazýváme úhly druhé třídy n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$. Body ležící na stranách nazýváme body mnohoúhelníka.

Z definice vyplývá, že symboly $A_1A_2 \ldots A_n$ a $A_iA_{i+1} \ldots A_nA_1 \ldots A_{i-1}$ označují týž mnohoúhelník pro každé i. Kromě toho je zřejmé, že každý mnohoúhelník ve smyslu definice 1 je *souvislý*.[3])

Každé třídě úhlů n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$ odpovídá jeden „*břeh*" tohoto n-úhelníka.[4]) V dostatečně malém okolí jeho stran lze oba břehy od sebe odlišit barvami nebo šrafováním, jak to učinil také Rényi (viz jeho obrazce).

Velikosti úhlů obou tříd n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$, $\alpha_i \equiv \sphericalangle \overrightarrow{A_{i-1}A_iA_{i+1}} \pmod{2\pi}$ resp. $\alpha'_i \equiv \sphericalangle \overrightarrow{A_{i+1}A_iA_{i-1}} \pmod{2\pi}$, jsou jednoznačně určeny požadavkem

$$0 \leqq \alpha_i < 2\pi \text{ resp. } 0 \leqq \alpha'_i < 2\pi\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1'}$$

1.1. *Nechť je dán n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ $(n \geqq 2)$ a nechť α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou velikosti úhlů jedné jeho třídy. Pak vždy existuje nezáporné celé číslo m, které splňuje nerovnosti $0 \leqq m < 2n$ a podmínku $m \equiv n \pmod 2$ tak, že*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m\pi\,. \tag{3'}$$

Důkaz. Z požadavku (1') na čísla α_i vyplývá, že $0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 2n\pi$ a tedy také existence čísla m, které splňuje nerovnosti $0 \leqq m < 2n$. Snadno se dokáže tvrzení, že $\sphericalangle \overrightarrow{A_1A_2A_3} + \sphericalangle \overrightarrow{A_2A_3A_4} + \ldots + \sphericalangle \overrightarrow{A_{n-1}A_1A_n} + \sphericalangle \overrightarrow{A_nA_1A_2} \equiv$ $\equiv n\pi \pmod{2\pi}$ pro každé $n \geqq 2$. Odtud bezprostředně vychází, že $m \equiv n$ $\pmod 2$, tedy také, že m je celé.

1.2. *Nechť α_i resp. α'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqq 2)$ značí velikosti úhlů první resp. druhé třídy n-úhelníka. Pak platí:*

a) $\alpha_i = 0 \Leftrightarrow \alpha'_i = 0$ *pro každé i;*

b) $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_i + \alpha'_i = 2\pi$ *pro každé i;*

c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i = 2(n - s)\pi$, *kde s je celé nezáporné číslo, $0 \leqq s \leqq n$, které značí počet nulových úhlů některé třídy.*

d) $s = 0 \Leftrightarrow \alpha_i \neq 0$ *pro každé i, t. j. α_i splňují* (1).

Důkaz je zřejmý.

---

[3]) Právě *Möbius* připouští ve své definici mnohoúhelníky nesouvislé.

[4]) Definici „*břehu*" viz *E. Steinitz-H. Rademacher*: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, str. 12.

Definice 2. *Nechť je dán rovinný n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$, který splňuje podmínky:*

(a) *$A_i \neq A_j$ pro každé $i \neq j$;*

(b) *pro žádný vrchol A_i neplatí, že A_i leží mezi vrcholy A_j a A_{j+1};*

(c) *žádné dvě strany A_iA_{i+1} a A_jA_{j+1}, $i \neq j$, nemají společný vnitřní bod.*

Pak říkáme, že n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ je jednoduchý.[5])

Jednoduchý rovinný mnohoúhelník dělí rovinu na dvě disjunktní oblasti,[6]) vnitřek a vnějšek, které zřejmě odpovídají jeho „břehům", takže u jednoduchého mnohoúhelníka lze třídy jeho úhlů krátce nazývat třídou vnitřních a třídou vnějších úhlů.

Dále je zřejmé, že jestliže n-úhelník je jednoduchý, musí velikosti jeho vnitřních i vnějších úhlů splňovat Čechovu podmínku (1) (podle podmínky (c)) a musí být $n \geqq 3$.

Nechť je dán n-úhelník, jehož jedna třída úhlů je co do pořadí a velikosti určena čísly α_i, $i = 1, 2, \dots, n$ $(n \geqq 3)$, která splňují podmínku (1). Potom podle 1.2 d) je $s = 0$ a z 1.2 c) vyplývá, že vždy lze zvolit takovou třídu úhlů daného n-úhelníka, pro jejichž velikosti platí $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqq n\pi$. Potom o čísle $m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, jehož existence je zaručena v tvrzení 1.1, lze předpokládat, že $0 < m \leqq n$ a lze definovat celé číslo k vztahem $m = n - 2(k + 1)$. Pomocí tohoto čísla lze Čechovu podmínku (2) zobecnit na podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \{n - 2(k + 1)\} \pi , \tag{4}$$

kde k je celé číslo a splňuje nerovnosti $-1 \leqq k \leqq \left[\frac{n-3}{2}\right]$[7]) a $n \geqq 3$.

Čechovu zobecněnou otázku je tedy možno vyslovit takto: *Nechť čísla α_i, $i = 1, 2, \dots, n$ $(n \geqq 3)$, splňují podmínky (1) a (4). Existuje pro každé $n \geqq 3$ a každé celé k, splňující vztah $-1 \leqq k \leqq \left[\frac{n-3}{2}\right]$, rovinný n-úhelník, jehož úhly (jedné z obou tříd) jsou co do velikosti a pořadí určeny čísly α_i?*

1.3. *Nechť α_i resp. α'_i, $i = 1, 2, \dots, n$ $(n \geqq 3)$ značí velikosti úhlů první resp. druhé třídy n-úhelníka a splňují podmínku (1). Pak α_i splňují podmínku (2) tehdy a jen tehdy, když α'_i splňují podmínku*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i = (n + 2) \pi . \tag{2'}$$

Důkaz je zřejmý podle 1.2.

---

[5]) Viz *D. Hilbert*: Grundlagen der Geometrie, 7. vyd., str. 9—11.

[6]) Jednoduchý rovinný mnohoúhelník je *Jordanovou* křivkou a dělí tedy rovinu na dvě disjunktní oblasti (viz na příklad *v. Kerékjartó*: Vorlesungen über Topologie, str. 59).

[7]) Symbolem $[x]$ označujeme *Gaussovu* funkci, t. j. největší celé číslo c, pro které $c \leqq x$.

2. Zobecněnou Čechovu otázku pro případ $k = 0$, kdy podmínka (4) přejde v původní Čechovu podmínku (2), vyšetřoval Rényi. Pro $n > 4$ lze volit čísla

$$\alpha_i = \frac{n-2}{n}\pi\,, \quad i = 1, 2, \dots, n\,,$$

která zřejmě splňují podmínky (1) i (2). Přesto tato čísla nevyhovují Rényiho požadavku,[8]) kterého ve svém důkazu užívá. Toto nedopatření je odstraněno následující větou 2.1.

V dalším všude klademe $\alpha_i = \alpha_j$, když $i \equiv j \pmod{n}$.

2.1. *Nechť čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ splňují podmínky* (1) *a* (2) *a nechť $n > 4$. Pak vždy existuje alespoň jeden index j takový, že $\pi < \alpha_j + \alpha_{j+1} < 3\pi$.*

Důkaz. Především existuje alespoň jeden index g takový, že $\pi < \alpha_g + \alpha_{g+1}$, neboť kdyby neexistoval, platilo by $\alpha_i + \alpha_{i+1} \leqq \pi$ pro každé i a podle (2) by muselo být

$$2(n-2)\,\pi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{i+1}) \leqq n\pi\,.$$

Odtud však plyne $n \leqq 4$ a to je spor. Dále existuje alespoň jeden index h takový, že $\alpha_h + \alpha_{h+1} < 3\pi$, neboť kdyby neexistoval, bylo by $\alpha_i + \alpha_{i+1} \geqq 3\pi$ pro každé i, a tedy podle (2)

$$2(n-2)\,\pi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{i+1}) \geqq 3n\pi\,.$$

Z toho však vychází, že $n \leqq -4$ a to je zase spor.

Nechť $\mathfrak{H}$ je množina všech indexů h, pro něž platí $\alpha_h + \alpha_{h+1} < 3\pi$. Její prvky označme $h_1, h_2, \dots, h_p$, kde $1 \leqq p \leqq n$, neboť podle předešlého $\mathfrak{H}$ není prázdná. Nechť dále $\mathfrak{R}$ je množina všech zbývajících indexů. Mohou nastat dva případy: 1. Jestliže $p = n$, pak mezi indexy $h_i \in \mathfrak{H}$ musí existovat, podle předešlého, alespoň jeden index h takový, že $\pi < \alpha_h + \alpha_{h+1}$. Potom h je hledaný index, neboť platí $\pi < \alpha_h + \alpha_{h+1} < 3\pi$. 2. Jestliže $p < n$, pak množina $\mathfrak{R}$ není prázdná a jistě v ní existuje index r takový, že pro vhodný index $h \in \mathfrak{H}$ platí $r + 1 = h$ a ovšem $\alpha_r + \alpha_{r+1} \geqq 3\pi$. Dále důkaz vedeme sporem. Předpokládejme, že pro každý index $h_i \in \mathfrak{H}$ platí $\alpha_{h_i} + \alpha_{h_i+1} \leqq \pi$, tedy zejména platí $\alpha_h + \alpha_{h+1} \leqq \pi$. Odtud však vyplývá, že $\alpha_h < \pi$, neboť podle (1) je $\alpha_{h+1} > 0$. Ježto $\alpha_h = \alpha_{r+1}$ a podle (1) je $\alpha_r < 2\pi$, musí být $\alpha_r + \alpha_{r+1} < 3\pi$ a to je spor. Musí tedy existovat alespoň jeden index $h_j \in \mathfrak{H}$ takový, že pro něj platí $\pi < \alpha_{h_j} + \alpha_{h_j+1}$ a to je hledaný index.

2.2. *Nechť $A_1A_2 \dots A_n$ je jednoduchý rovinný n-úhelník ($n \geqq 3$) a nechť čísla α_i, $i = 1, 2, \dots, n$ značí v tomto pořadí velikosti úhlů jedné jeho třídy. Pak čísla α_i*

[8]) Rényi totiž používá tvrzení: „*není-li pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ ($n \geqq 3$) $\alpha_i + \alpha_{i+1} = \pi$, pak musí existovat takový index j, že $\alpha_j + \alpha_{j+1} > \pi$, avšak $\alpha_{j+1} + \alpha_{j+2} \leqq \pi$*“.

jsou velikostmi jeho vnitřních resp. vnějších úhlů, když a jen když splňují podmínku (2) *resp. podmínku* (2').

Důkaz. Především čísla α_i splňují podmínku (1). Dále je známo a snadno se indukcí dokáže, že jestliže čísla α_i jsou velikostmi vnitřních úhlů n-úhelníka, že splňují podmínku (2). Z tvrzení 1.3 bezprostředně vyplývá také dostatečnost podmínky (2), aby α_i byly velikosti vnitřních úhlů, a také nutnost a dostatečnost podmínky (2'), aby α_i byly velikosti vnějších úhlů n-úhelníka.

Podmínky (1) a (2) resp. (2') na velikosti úhlů rovinného n-úhelníka jsou nutnými podmínkami jednoduchosti tohoto n-úhelníka. Obecně však tyto podmínky nestačí, neboť pro každé $n > 4$ lze snadno udat n-úhelníky se stejnými úhly, z nichž jeden je jednoduchý a druhý nikoliv. Naproti tomu se snadno dokáže tvrzení:

2.3. *Trojúhelník je jednoduchý, když a jen když velikosti jeho úhlů splňují podmínku* (1). *Čtyrúhelník je jednoduchý, když a jen když velikosti jeho úhlů splňují podmínky* (1) *a* (2) *resp.* (2').

2.4. *Nechť čísla* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n \geqq 3)$ *splňují podmínky* (1) *a* (2) *resp.* (1) *a* (2'). *Pak vždy existuje jednoduchý rovinný n-úhelník takový, že jeho vnitřní resp. vnější úhly jsou co do velikosti a pořadí určeny čísly* α_i.

Důkaz. Z tvrzení 1.3 je zřejmé, že větu stačí dokázat pro podmínky (1) a (2). Důkaz je jenom doplněným a současně opraveným důkazem Rényiho, proto postupujeme stejně jako on.

Rozlišíme dva případy: 1. Nechť platí $\alpha_i + \alpha_{i+1} = \pi$ pro každé i. Rényi ukázal, že v tomto případě je $n = 4$ a také, že vždy existuje rovnoběžník, jehož vnitřní úhly jsou co do velikosti a pořadí určeny čísly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Ale rovnoběžník je vždy jednoduchým čtyrúhelníkem. 2. Nechť existuje alespoň jeden index i, pro který platí $\alpha_i + \alpha_{i+1} \neq \pi$. Dále důkaz vedeme indukcí. Pro $n = 3$ je věta správná, neboť podle 2.3 je trojúhelník, jehož existence je zřejmá, také jednoduchý. Nechť je tedy $n \geqq 4$ a předpokládejme, že věta je dokázána pro každé n', které $3 \leqq n' < n$. Jestliže α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou daná čísla, pak vždy existuje index j takový, že $\pi < \alpha_j + \alpha_{j+1} < 3\pi$, neboť pro $n > 4$ je to zaručeno tvrzením 2.1 a pro $n = 4$ se to snadno dokáže. Definujme číslo $\alpha^* = \alpha_j + \alpha_{j+1} - \pi$. Pak zřejmě $(n - 1)$ čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j^*, \alpha_{j+2}, \ldots, \alpha_n$ splňuje podmínku (1) a jak Rényi ukázal také podmínku (2), takže podle induktivního předpokladu existuje jednoduchý $(n - 1)$-úhelník $A_1A_2 \ldots A_{j-1}A_j^* \,.\, A_{j+2} \ldots A_n$, jehož vnitřní úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny uvedenými $(n - 1)$ čísly. Rozlišíme dva případy: 1. $\alpha_j^* \neq \pi$. Pak existuje dostatečně malé $\varepsilon > 0$ tak, že uvnitř kruhového okolí vrcholu A_j^* o poloměru ε neleží kromě vrcholu A_j^* a vnitřních bodů stran $A_{j-1}A_j^*$ a $A_j^*A_{j+2}$ již žádný bod $(n - 1)$-úhelníka. Uvnitř tohoto okolí lze provést každou z Rényiho konstrukcí podle jeho obrazů a_1, a_2, b_1, b_2, takže vzniklý n-úhelník je jednoduchý a má předepsané úhly, které podle 2.2 musí být úhly vnitřními. 2. $\alpha_j^* = \pi$. Pak opět existuje dostatečně malé $\varepsilon > 0$ tak, že uvnitř okolí úsečky $A_{j-1}A_{j+2}$, které je definováno jako vnitřek ekvidistanty ve vzdálenosti ε, neleží kromě bodů stran $A_{j-1}A_j^*$ a $A_j^*A_{j+2}$ a vnitřních bodů stran $A_{j-2}A_{j-1}$ a $A_{j+2}A_{j+3}$ již žádný bod $(n-1)$-úhelníka. V tomto okolí lze provést Rényiho konstrukce podle jeho obrazu c, takže vzniklý n-úhelník je jednoduchý a jeho vnitřní úhly, jak plyne opět z 2.2, jsou co do pořadí a velikosti určeny čísly α_i.

3. Budeme vyšetřovat rovinné lomené čáry. **Definice 1'.** *Nechť prvky konečné posloupnosti $A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ $(n \geq 0)$ značí body eukleidovské roviny, které splňují podmínku: $A_{i-1} \neq A_i \neq A_{i+1}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak soustavu úseček $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_nA_{n+1}$ nazýváme n-lomenou čarou a označujeme ji $(A_0A_1 \ldots A_nA_{n+1})$. Body A_i nazýváme vrcholy a úsečky (uzavřené) A_iA_{i+1} nazýváme stranami n-lomené čáry $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$. Orientované úhly $\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ polopřímek A_iA_{i-1} a A_iA_{i+1} nazýváme úhly první třídy a orientované úhly $\sphericalangle A_{i+1}A_iA_{i-1}$ nazýváme úhly druhé třídy n-lomené čáry $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Body ležící na stranách nazýváme body n-lomené čáry.*

Definice 2'. *Nechť je dána rovinná n-lomená čára $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$, která splňuje podmínky:*

(a') *$A_i \neq A_j$ pro každé $i \neq j$;*

(b') *pro žádný vrchol A_i neplatí, že A_i leží mezi vrcholy A_j a A_{j+1};*

(c') *žádné dvě strany A_iA_{i+1} a A_jA_{j+1}, $i \neq j$, nemají společný vnitřní bod.*

Pak říkáme, že n-lomená čára $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$ je jednoduchá.

3.1. *Ke každému rovinnému n-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$ existuje nejednoduchá n-lomená čára $(A_nA_1A_2 \ldots A_nA_1)$, která má tytéž úhly jako daný n-úhelník.*

Důkaz je zřejmý.

Definice 3. *Dvě n-lomené čáry $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$ a $(B_0B_1 \ldots B_{n+1})$ nazýváme isogonálními, jestliže velikosti úhlů α_i a β_i některé z jejich tříd splňují podmínku $\alpha_i = \beta_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Vzhledem k 3.1 lze o isogonalitě hovořit také mezi n-úhelníky a také mezi n-úhelníky a n-lomenými čarami.

Vztah isogonality je ekvivalencí na množině všech rovinných n-lomených čar a také na množině všech rovinných n-úhelníků a určuje tedy rozklady těchto množin ve třídy isogonálních n-lomených čar případně ve třídy isogonálních n-úhelníků. Budeme vyšetřovat ty třídy n-lomených čar, jejichž prvky jsou vesměs jednoduché n-lomené čáry a tím také ty třídy, které neobsahují žádné n-úhelníky. Proto definujeme:

Definice 4. *n-lomenou čáru nazýváme absolutně jednoduchou, jestliže každá s ní isogonální n-lomená čára je jednoduchá.*

3.2. *Nechť n-lomená čára $(A_0A_1 \ldots A_{n+1})$ je absolutně jednoduchá. Pak každá* *m-lomená čára* $(A_i A_{i+1} \ldots A_{i+m} A_{i+m+1})$, *kde* $0 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq m \leqq n - i$, *je absolutně jednoduchá.*

Důkaz je zřejmý.

3.3. *Rovinná n-lomená čára* $(A_0 A_1 \ldots A_{n+1})$ *je absolutně jednoduchá, když a jen když velikosti úhlů* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n \geqq 0)$ *jedné její třídy splňují podmínku* (1) *a podmínku*

$$h\pi \leqq \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i \leqq (h + 2)\,\pi \tag{5}$$

pro každé $j = 1, 2, \ldots, n - 1$ *a každé* h, *pro které* $1 \leqq h \leqq n - j$.

Důkaz. I. Nechť $(A_0 A_1 \ldots A_{n+1})$ splňuje podmínky (1) a (5). Důkaz vedeme indukcí. Pro $n = 0$ i $n = 1$ splňuje 0-lomená čára $(A_0 A_1)$ i každá 1-lomená čára $(A_0 A_1 A_2)$ podmínky jednoduchosti z definice 2′ a je tedy absolutně jednoduchá. Nechť tedy dále je $n > 1$ a předpokládejme, že věta je dokázána pro každé $n' < n$. Konečně nechť $(B_0 B_1 \ldots B_{n+1})$ je libovolná n-lomená čára isogonální s $(A_0 A_1 \ldots A_{n+1})$, takže pro velikosti úhlů některé její třídy platí $\alpha_i = \beta_i$ pro každé i. Podle definice 4. stačí dokázat jednoduchost n-lomené čáry $(B_0 B_1 \ldots \ldots B_{n+1})$. Avšak je zřejmé, že $(B_0 B_1 \ldots B_{n-1} B_n)$ a $(B_1 B_2 \ldots B_n B_{n+1})$ jsou $(n - 1)$-lomené čáry, které splňují podmínky (1) a (5), takže podle induktivního předpokladu jsou absolutně jednoduché. Vzhledem k definici 2′ stačí k jednoduchosti $(B_0 B_1 \ldots B_{n+1})$ ukázat, že polopřímky $B_1 B_0$ a $B_n B_{n+1}$ nemají žádný společný bod. Předpokládejme opak a jejich společný bod označme C. Především musí být $B_1 \neq C \neq B_n$, neboť kdyby $B_1 = C$ resp. $B_n = C$, nebyla by $(B_1 B_2 \ldots B_{n+1})$ resp. $(B_0 B_1 \ldots B_n)$ absolutně jednoduchá, což je spor. Potom $(n + 1)$-úhelník $B_1 B_2 \ldots B_n C$ je jednoduchý a označme $\sphericalangle\, \overrightarrow{B_n C B_1} \equiv \gamma \pmod{2\pi}$, kde $0 \leqq \gamma < 2\pi$. Podle předešlého dokonce platí $0 \neq \gamma \neq \pi$, takže čísla γ, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ jednak splňují podmínku (1), jednak podle 2.2 podmínku (2) nebo podmínku (2′), t. j. jejich součet s je buďto $s = (n - 1)\,\pi$ nebo $s = (n + 3)\,\pi$. Avšak z podmínky (5) pro $j = 1$, $h = n - 1$ vyplývá

$$(n - 1)\,\pi \leqq \sum_{i=1}^{n} \beta_i \leqq (n + 1)\,\pi\,,$$

takže buď

$$(n - 1)\,\pi = s = \sum_{i=1}^{n} \beta_i + \gamma > \sum_{i=1}^{n} \beta_i \geqq (n - 1)\,\pi$$

nebo

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \beta_i + \gamma - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \geqq s - (n + 1)\,\pi = 2\pi\,,$$

což je v obou případech spor. Tedy polopřímky $B_1 B_0$ a $B_n B_{n+1}$ nemají společný bod.

II. Nechť $(A_0 A_1 \ldots A_{n+1})$ je absolutně jednoduchá. Potom zřejmě α_i splňují podmínku (1). Pro $n = 0$ a $n = 1$ je podmínka (5) splněna prázdně. Dále důkaz vedeme indukcí. Nechť tedy $n \geqq 2$ a předpokládejme, že věta je dokázána pro každé $n' < n$. Ježto $(A_0A_1 \dots A_{n+1})$ je absolutně jednoduchá, jsou, podle 3.2, také $(n-1)$-lomené čáry $(A_0A_1 \dots A_n)$ a $(A_1A_2 \dots A_{n+1})$ absolutně jednoduché, takže podle induktivního předpokladu platí

$$h\pi \leqq \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i \leqq (h+2)\,\pi$$

pro každé $j = 1, 2, \dots, n-2$ a každé $h = 1, 2, \dots, n-j-1$ a také pro každé $j = 2, 3, \dots, n-1$ a každé $h = 1, 2, \dots, n-j$. Zejména tedy platí

$$(n-2)\,\pi \leqq \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \leqq n\pi\,.$$

Předpokládejme, že $(A_0A_1 \dots A_{n+1})$ nesplňuje podmínku (5). Podle předešlého to znamená, že ji nesplňuje pro $j = 1$, $h = n - 1$, t. j. platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < (n-1)\,\pi \quad \text{nebo} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > (n+1)\,\pi\,.$$

V prvním případě potom platí

$$(n-2)\,\pi \leqq \sum_{i=2}^{n} \alpha_i < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < (n-1)\,\pi\,,$$

takže lze definovat

$$\beta = (n-1)\,\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,.$$

Potom číslo β splňuje nerovnost $0 < \beta < \pi$ a tedy s čísly α_i podmínku (1). Protože součet těchto $(n+1)$ čísel je roven $\{(n+1) - 2\}\,\pi$, což je podmínka (2) a $n + 1 \geqq 3$, existuje podle 2.4 $(n+1)$-úhelník $B_1B_2 \dots B_nB$, jehož úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny čísly α_i a číslem β. Podle 3.1 však také existuje n-lomená čára $(BB_1B_2 \dots B_nB)$, která zřejmě není jednoduchá, avšak je isogonální s $(A_0A_1 \dots A_{n+1})$, což je spor.

V druhém případě dojdeme ke sporu ihned, jakmile přejdeme k velikostem úhlů zbývající třídy, které, podle 1.2 b), jsou určeny vztahy $\alpha'_i = 2\pi - \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, a pro něž platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i = \sum_{i=1}^{n} (2\pi - \alpha_i) = 2n\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < (n-1)\,\pi\,.$$

Odtud se také vidí, že podmínku (5) splňují vždy současně obě třídy úhlů.

3.4. *Každá 3-lomená čára, jejíž úhly α_i, $i = 1, 2, 3$ splňují podmínku (1) a podmínku $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3\pi$, t. j. podmínku (4) pro $k = -1$, je absolutně jednoduchá.*

Důkaz. Podle 3.3 stačí ukázat, že α_i splňují (5). Mohou nastat tyto případy: 1. $j = 1$, $h = 2$. Pak $2\pi \leqq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3\pi \leqq 4\pi$; 2. $j = 1$, $h = 1$. Pak jistě je $\alpha_1 + \alpha_2 \leqq 3\pi$ a kdyby $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$, bylo by $\alpha_3 > 2\pi$, což je spor, tedy platí $\pi \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq 3\pi$; 3. $j = 2$, $h = 1$. Pak opět $\pi \leqq \alpha_2 + \alpha_3 \leqq 3\pi$ jako ve 2.

Jestliže čísla α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($n \geqq 2$) splňují podmínku (1), ale nesplňují podmínku (5), pak zřejmě splňují tuto podmínku: existuje alespoň jeden index j, $1 \leqq j \leqq n - 1$, a přirozené číslo h, $1 \leqq h \leqq n - j$, tak, že platí

$$\text{buď } \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i < h\pi \text{ nebo } \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i > (h + 2)\,\pi\,. \tag{6}$$

3.5. *Nechť α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, značí velikosti úhlů jedné třídy absolutně jednoduché n-lomené čáry a splňují podmínku (4) pro $k = -1$, t. j. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n\pi$. Pak každá n-lomená čára, jejíž úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny nějakou cyklickou permutací α_{c_i} čísel α_i, je absolutně jednoduchá.*

Důkaz. Pro $n = 0, 1, 2$ je to zřejmé a pro $n = 3$ to platí podle 3.4. Nechť tedy $n \geqq 4$. Podle 3.3 stačí dokázat, že každá cykl. permutace α_{c_i} splňuje podmínku (5) pro indexy i. Dokážeme to sporem. Nechť tedy existuje cykl. permutace α_{c_i} čísel α_i, která nesplňuje (5), t. j. splňuje (6) pro index c_j, $1 \leqq j \leqq n - 1$ a přirozené číslo h, $1 \leqq h \leqq n - j$.

Pak především platí $h \leqq n - 3$. Kdyby totiž bylo $h = n - 1$, muselo by být $j = 1$, ale pak je $n\pi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_{c_i}$ a tento výraz, podle toho, která z nerovností (6) platí, je buď $< (n - 1)\,\pi$ nebo $> (n + 1)\,\pi$, což je v obou případech spor. Kdyby dále bylo $h = n - 2$, mohlo by být $j = 1$, případně $j = 2$. Platí-li první nerovnost z (6), musí být $\sum_{i=j}^{j+n-2} \alpha_{c_i} < (n - 2)\,\pi$ a odtud pro $j = 1$ vyplývá $\alpha_{c_n} > 2\pi$ a pro $j = 2$ vyplývá $\alpha_{c_1} > 2\pi$, což je v obou případech spor. Platí-li konečně druhá nerovnost z (6), musí být $\sum_{i=j}^{j+n-2} \alpha_{c_i} > n\pi$, což je pro $j = 1$ i pro $j = 2$ zase spor.

Podle 3.3 základní permutace α_i splňuje (5). Proto musí být $c_{j+h} < c_j$ a dokonce, protože $h \leqq n - 3$, musí platit $c_{j+h} + 2 < c_j$. Potom je $c_{j+h+1} = u$, $c_{j-1} = u + v$, kde $2 \leqq u \leqq n - 3$ a $v = n - (h + 1) - 1$, takže $1 \leqq v \leqq \leqq n - 3$ a $u + v \leqq n - 1$ čili $v \leqq n - 1 - u < n - u$. Avšak současně platí $\sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i = n\pi - \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_{c_i}$ a tento výraz, podle toho, zda platí první nebo druhá nerovnost z (6), je buď $> n\pi - h\pi = (v + 2)\,\pi$ nebo $< n\pi - (h + 2)\,\pi = v\pi$. To však znamená, že čísla α_i nesplňují (5), a to je spor.

4. Na základě výsledků z předešlého odstavce můžeme odpovědět na zobecněnou Čechovu otázku. Nejdříve dokážeme pomocnou větu:

4.1. *Nechť čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ splňují podmínky (1), (6) a podmínku (4) pro $k \neq 0$. Pak vždy existuje cyklická permutace α_{c_i} čísel α_i, která splňuje podmínku:*

existuje index c_u, $1 \leqq u \leqq n - 1$ a přirozené číslo v, $1 \leqq v \leqq n - 3$, tak, že platí

$$(v - 1)\,\pi < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_{c_i} < v\pi\,. \tag{6'}$$

Důkaz. Nejdříve nechť $k > 0$, tedy $n \geqq 5$. Pak platí $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = [n - 2(k + 1)]\,\pi \leqq (n - 4)\,\pi$. Položíme-li $j = 1$, $h = n - 3$, lze psát $\sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i < (n - 4)\,\pi < h\pi$. Mezi všemi dvojicemi čísel j, h, které splňují tento vztah, t. j. splňují první z nerovností (6), existuje taková dvojice u, v, že v je minimální, což znamená, že pro žádný index u a přirozené číslo $v - 1$ tento vztah není splněn. Tedy platí $(v - 1)\,\pi \leqq \sum_{i=u}^{u+v-1} \alpha_i < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i < v\pi$ a ježto zřejmě $v \leqq n - 3$, je pro index u a přirozené číslo v splněna (6′) přímo pro základní permutaci čísel α_i.

Nechť dále $k = -1$, tedy $n \geqq 4$ a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n\pi$. Označme j, h dvojici čísel, pro kterou je splněna podle předpokladu podmínka (6). Jestliže je splněna první nerovnost z (6), pak mezi všemi dvojicemi, které jí vyhovují, existuje taková dvojice u, v, že v je minimální, t. j. platí $(v - 1)\,\pi \leqq \sum_{i=u}^{u+v-1} \alpha_i < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i < v\pi$. Stejně jako v důkaze k 3.5 se ukáže, že $v \leqq n - 3$, takže pro dvojici u, v je splněna (6′) opět přímo pro základní permutaci čísel α_i.

Jestliže je splněna druhá nerovnost z (6), nechť dvojice j, h je taková, že h je maximální, t. j. platí $(h + 2)\,\pi < \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i < \sum_{i=j}^{j+h+1} \alpha_i \leqq (h + 3)\,\pi$. Stejně jako v důkaze k 3.5 se ukáže, že $h \leqq n - 3$. Uvažujme cyklickou permutaci α_{j+h+1}, $\alpha_{j+h+2}, \ldots, \alpha_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{j+h}$, t. j. permutaci α_{c_i}, kde $c_i \equiv j + h + i \pmod{n}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Zvolme přirozená čísla u, v tak, že platí $u = 1$ a $v = n - h - 2$. Snadno se vidí, že platí $1 \leqq v \leqq n - 3$ a také, že platí

$$(v - 1)\,\pi = [(n - h - 2) - 1]\,\pi < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_{c_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=j}^{j+h} \alpha_i <$$
$$< (n - h - 2)\,\pi = v\pi\,.$$

Existuje tedy cyklická permutace α_{c_i} čísel α_i, pro kterou je splněna podmínka (6′), a to pro dvojici indexů u, v.

4.2. *Nechť čísla α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($n \geqq 3$) splňují podmínky (1) a (3). Potom platí:*

1. *Jestliže $m \neq n$, pak vždy existuje rovinný n-úhelník, jehož úhly jedné třídy co do velikosti a pořadí jsou určeny čísly α_i.*

2. *Jestliže $m = n$, pak n-úhelník, jehož úhly jedné třídy jsou co do velikosti a pořadí určeny čísly α_i, existuje tehdy a jen tehdy, když čísla α_i splňují podmínku* (6).

Důkaz. Na základě 1.2 lze se omezit na případ, kdy $m \leqq n$ a potom podmínku (3) nahradit podmínkou (4), takže větu lze dokázat ve dvou částech.

I. Nechť $k \geqq 0$. Větu dokážeme indukcí vzhledem ke k. Pro $k = 0$ je věta správná podle 2.4. Nechť dále $k \geqq 1$, tedy $n \geqq 5$ a předpokládejme, že věta je správná pro každé nezáporné celé $k' < k$. Podle 4.1 existuje jistá cyklická permutace čísel α_i, pro kterou je splněna podmínka (6'). Pro jednoduchost budeme tuto cyklickou permutaci označovat jako permutaci základní, t. j. platí: existuje index u, $1 \leqq u \leqq n - 1$ a přirozené číslo v, $1 \leqq v \leqq n - 3$, pro něž platí

$$(v - 1)\,\pi < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i < v\pi\,.$$

Definujeme číslo $\beta' = v\pi - \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i$. Pak zřejmě $(v + 2)$ čísel $\alpha_u, \alpha_{u+1}, \ldots, \alpha_{u+v}, \beta'$ splňuje podmínky (1) a (2). Protože $v + 2 \geqq 3$, musí podle 2.4 existovat $(v + 2)$-úhelník $A'_u A'_{u+1} \ldots A'_{u+v} B'$, jehož úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny čísly β', α_i, kde $u \leqq i \leqq u + v$. Avšak $v \leqq m = n - 2(k + 1)$, takže zbývá ještě $p = n - (v + 1) \geqq n - \{n - 2(k + 1)\} - 1 = 2k + 1 \geqq 3$ úhlů, které jsme zatím neuvažovali. Označíme-li $\mathfrak{M}$ množinu všech jejich indexů $1, 2, \ldots, u - 1, u + v + 1, \ldots, n$, pak jejich součet splňuje nerovnosti

$$\{n - 2(k + 1) - v\}\,\pi < \sum_{i \in \mathfrak{M}} \alpha_i < \{n - 2(k + 1) - (v - 1)\}\,\pi\,.$$

Definujeme $\beta = 2\pi - \beta'$. Pak platí

$$\sum_{i \in \mathfrak{M}} \alpha_i + \beta = \sum_{i \in \mathfrak{M}} \alpha_i + 2\pi - v\pi + \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i = \{(p + 1) - 2[(k - 1) + 1]\}\,\pi\,,$$

což je podmínka (4) pro $k' = k - 1$, které vyhovuje nerovnostem

$$0 \leqq k' = k - 1 \leqq \left[k - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2k + 1 - 2}{2}\right] \leqq \left[\frac{(p + 1) - 3}{2}\right].$$

Tedy $(p + 1)$ čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{u-1}, \beta, \alpha_{u+v+1}, \ldots, \alpha_n$ splňuje podmínku (4) a zřejmě i podmínku (1), takže podle induktivního předpokladu existuje $(p + 1)$-úhelník $A_1 A_2 \ldots A_{u-1} B A_{u+v+1} \ldots A_n$, jehož úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny uvedenými čísly.

Eukleidovským pohybem lze $(v + 2)$-úhelník $A'_u A'_{u+1} \ldots A'_{u+v} B'$ přemístit do polohy $A_u A_{u+1} \ldots A_{u+v} B$ tak, že vrchol B leží mezi A_{u-1} a A_u a také mezi A_{u+v} a A_{u+v+1} a břeh $(v + 2)$-úhelníka, který odpovídá velikostem úhlů α_i, kde $u \leqq i \leqq u + v$, přechází v bodě B ve břeh $(p + 1)$-úhelníka $A_1 A_2 \ldots A_{u-1} \,.\, B A_{u+v+1} \ldots A_n$, kterému odpovídají velikosti úhlů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{u-1}, \alpha_{u+v+1}, \ldots, \alpha_n$. Pak n-úhelník $A_1 A_2 \ldots A_n$ má požadované úhly, co do velikosti a pořadí určené předepsanými čísly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

II. Nechť $k = -1$. Nutnost podmínky (6) je zřejmá, neboť n-úhelník, který nesplňuje (6), splňuje (5), avšak (5) je podle 3.3 dostatečnou podmínkou absolutní jednoduchosti n-lomené čáry isogonální s daným n-úhelníkem, což je spor. Dokážeme dostatečnost podmínky (6). Podle 4.1 lze opět předpokládat, že základní permutace čísel α_i splňuje (6'), t. j. existuje index u, $1 \leqq u \leqq n-1$ a přirozené číslo v, $1 \leqq v \leqq n-3$ tak, že platí

$$(v-1)\,\pi < \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i < v\pi\,.$$

Definujeme číslo

$$\beta' = v\pi - \sum_{i=u}^{u+v} \alpha_i\,.$$

Pak zřejmě $(v+2)$ čísel $\alpha_u, \alpha_{u+1}, \ldots, \alpha_{u+v}, \beta'$ splňuje podmínky (1) a (2) a ježto $v+2 \geqq 3$, existuje podle 2.4 jednoduchý $(v+2)$-úhelník $A'_u A'_{u+1} \ldots A'_{u+v} B'$, jehož vnitřní úhly co do velikosti a pořadí jsou určeny uvedenými čísly. Pak zbývá $n-(v+1) \geqq 2$ čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{u-1}, \alpha_{u+v+1}, \ldots, \alpha_n$ a označíme-li $\mathfrak{M}$ množinu všech jejich indexů, zřejmě platí

$$(n-v)\,\pi < \sum_{i \in \mathfrak{M}} \alpha_i < (n-v+1)\,\pi\,.$$

Definujeme číslo $\beta = (n-v+2)\,\pi - \sum_{i \in \mathfrak{M}} \alpha_i$. Potom $(n-v)$ čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{u-1}, \beta, \alpha_{u+v+1}, \ldots, \alpha_n$ splňuje podmínky (1) a (2') a zřejmě $n-v \geqq 3$, takže podle 2.4 existuje $(n-v)$-úhelník $A_1A_2 \ldots A_{u-1}BA_{u+v+1} \ldots A_n$, jehož vnější úhly co do velikosti a pořadí jsou dány uvedenými čísly. Konečně platí $\beta = 2\pi - \beta'$, takže eukleidovským pohybem lze hořejší $(v+2)$-úhelník přemístit do polohy $A_uA_{u+1} \ldots A_{u+v}B$ tak, že vrchol B leží mezi vrcholy A_{u-1} a A_u a také mezi A_{u+v} a A_{u+v+1}. Při tom zřejmě vnitřní břeh $(v+2)$-úhelníka přechází v bodě B ve vnější břeh $(n-v)$-úhelníka, takže čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou velikostmi úhlů jedné třídy n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$.

Závěrem chceme upozornit, že celé číslo k, které bylo přiřazeno mnohoúhelníku v podmínce (4), má jednoduchý geometrický význam a že dovoluje podat jistou klasifikaci rovinných mnohoúhelníků a lomených čar. Obě tyto otázky budou řešeny v dalším článku.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

ODHAD CHYBY PŘI PŘIBLIŽNÉM ŘEŠENÍ INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

(Došlo dne 29. října 1954.) DT : 517.948

Tato práce navazuje na práci L. V. KANTOROVIČE [1]. Jejím cílem je vypracovat methodami funkcionální analysy obecné schema, které se dá užít k odhadu chyby různých method přibližných řešení integrálních rovnic. Podstata methody záleží v tom, že spolu s Banachovým prostorem X, v němž máme řešit rovnici $Ax = y$ uvažujeme podprostor $\tilde{X} \subset X$, ve kterém řešíme přibližnou rovnici $PA\tilde{x} = Py$, kdež P je projekce X na $\tilde{X}$. Zabýváme se potom odhadem rozdílu skutečného řešení x a přibližného řešení $\tilde{x}$.

Pro přibližné řešení integrálních rovnic byla vypracována řada method, založených na nejrůznějších myšlenkách. Avšak již zcela povrchní porovnání vyšetřování existence řešení a odhadu chyby v jednotlivých případech ukazuje, že užívané methody mají mnoho společného, takže se naskýtá otázka, zda není možno nějak jednoduše formulovat obecné principy, na kterých jsou jednotlivá vyšetřování založena. Touto otázkou se poprvé zabýval L. V. KANTOROVIČ ve své zajímavé stati [1], která obsahuje celou řadu důležitých myšlenek a výsledků.

Je zásluhou L. V. Kantoroviče, že ukázal, jak je možno methodami funkcionální analysy získat jednotný pohled na celou řadu v praxi používaných přibližných method řešení integrálních rovnic a zároveň hlouběji pochopit všechny činitele, ovlivňující odhad chyby. Byla to právě práce L. V. Kantoroviče, která dala popud k napsání následujícího článku. Ukazuje se totiž, že užitím trochu jiné myšlenky je možno docíliti zjednodušení obecných úvah a podati obecné schema, které se dá použít k odhadu chyby různých method přibližných řešení integrálních rovnic.

Vyložené methody lze použít také k získání některých theoretických výsledků týkajících se přibližných method. O těchto výsledcích hodláme pojednat v některém z příštích čísel časopisu.

Nynější práce si neklade úkol podat hotové recepty k řešení integrálních rovnic. Přesto, že uvedené theoretické odhady byly prověřeny na některých praktických výpočtech, k podobnému úkolu je možno zodpovědně přistoupit jen po získání velmi široké zkušenosti v řešení konkretních úloh tohoto typu, čehož nebylo možno zatím dosáhnout.

Methody odhadu chyby vyložené v nynější práci nejsou ve svém použití omezeny na případy níže uvedené. Ukážeme později ještě další aplikace těchto a podobných myšlenek.

K porozumění článku postačí jen nejelementárnější znalosti z theorie normovaných lineárních prostorů.

1.

Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Řekneme, že zobrazení K prostoru X do sebe je lineární, jestliže pro každou dvojici reálných čísel λ_1, λ_2 a každou dvojici x_1, x_2 prvků prostoru X platí

$$K(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 K x_1 + \lambda_2 K x_2 .$$

Řekneme, že zobrazení K prostoru X do sebe je ohraničené, jestliže existuje číslo α tak, že pro všechna $x \in X$ platí odhad

$$|Kx| \leqq \alpha |x| .$$

Takové číslo α nazýváme potom hranicí zobrazení K. Jestliže K jest ohraničené zobrazení prostoru X do sebe, pak mezi všemi hranicemi zobrazení K zřejmě existuje nejmenší; tuto hranici nazveme normou zobrazení K a označíme $|K|$. Snadno se zjistí, že pro ohraničené zobrazení K platí

$$|K| = \sup_{|x| \leqq 1} |Kx| .$$

Zobrazení prostoru K do sebe nazveme lineárním operátorem v X, jestliže je zároveň lineární a ohraničené.

Nechť A a B jsou dva lineární operátory v X. Položme pro každé $x \in X$

$$Cx = A(Bx) .$$

Zřejmě C jest opět lineární operátor v X. Z nerovností

$$|Cx| \leqq |A|\,|Bx| \leqq |A|\,|B|\,|x|$$

vyplývá, že $|C| \leqq |A|\,|B|$. Operátor C nazýváme součinem operátorů A a B (v tomto pořadí) a píšeme $C = AB$. Zobrazení X do X, které zobrazuje každý prvek $x \in X$ sám na sebe, jest zřejmě lineárním operátorem v X. Nazveme je jednotkovým operátorem a označíme J. Množina všech lineárních operátorů na prostoru X tvoří při nasnadě jsoucí definici sečítání a násobení skalárem a při právě uvedené definici násobení normovanou algebru, kterou budeme značiti $E(X)$.

Řekneme, že operátor A_l jest levým inversním operátorem k operátoru A, jestliže platí $A_l A = J$.

Řekneme, že operátor A_r jest pravým inversním operátorem k operátoru A, jestliže platí $AA_r = J$.

Řekneme, že operátor A^{-1} jest inversním operátorem k operátoru A, jestliže platí $A^{-1}A = AA^{-1} = J$.

Vztahy mezi zavedenými pojmy objasníme v několika poznámkách.

(1,1) *Daný operátor A má nejvýše jeden inversní operátor.*

Důkaz. Skutečně, předpokládejme, že B_1 a B_2 jsou inversními operátory k operátoru A. Potom

$$B_1 = B_1J = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = JB_2 = B_2 .$$

(1,2) *Jestliže daný operátor A má jak levý inversní A_l tak i pravý inversní A_r, potom A má inversní operátor A^{-1} a platí*

$$A_r = A_l = A^{-1} .$$

Důkaz. Za uvedených předpokladů je

$$A_r = JA_r = (A_lA)A_r = A_l(AA_r) = A_lJ = A_l ,$$

odkud ihned plyne existence inversního operátoru.

(1,3) *Nechť operátor B jest inversním operátorem k operátoru A. Potom operátor A jest inversním operátorem k operátoru B.*

Říkáme potom, že operátory A a B jsou navzájem inversní.

Důkaz je zřejmý.

(1,4) *Nechť operátory K_l a K_r splňují vztah*

$$K_lK_r = J .$$

Potom zobrazení K_r je prosté a zobrazení K_l je plné. Operátory K_l a K_r jsou navzájem inversní právě když je splněna jedna z následujících podmínek:

α) *K_l je prosté.*

β) *K_r je plné.*

Důkaz. Jestliže $K_rx_1 = K_rx_2$ jest $x_1 = K_lK_rx_1 = K_lK_rx_2 = x_2$, takže K_r je prosté. Je-li dáno $y \in X$, potom $K_l(K_ry) = y$, takže K_l je plné.

Nechť nyní K_l je prosté. Potom

$$K_l(K_rK_l) = (K_lK_r)K_l = K_l ,$$

takže

$$K_l(K_rK_l) = K_lJ .$$

Protože však K_l je prosté, musí $K_rK_l = J$.

Nechť za druhé K_r je plné. Potom

$$(K_rK_l)K_r = K_r(K_lK_r) = K_r ,$$

takže

$$(K_rK_l)K_r = K_r .$$

Protože však K_r je plné, musí $K_rK_l = J$.

(1,5) Snadno lze udati příklad dvou lineárních operátorů K_l a K_r, které splňují vztah $K_l K_r = J$, ale nejsou navzájem inversní. Nechť X znamená normovaný prostor všech konvergentních posloupností reálných čísel

$$x = \{x_1, x_2, \dots\},$$

kdež existuje $\lim x_k = x_0$, při čemž $|x| = \max_{k=0,1,2,\dots} |x_k|$.

Pro každé $x \in X$ definujeme

$$K_l x = \{x_2, x_3, x_4, \dots\},$$
$$K_r x = \{0, x_1, x_2, \dots\}.$$

Zřejmě K_l i K_r jsou lineární operátory na X s normou 1, které splňují vztah $K_l K_r = J$. Pro každé $x \in X$ platí však

$$K_r K_l x = \{0, x_2, x_3, \dots\}.$$

Operátor K_r má tedy levý inversní operátor K_l, ale nemá inversní operátor, operátor K_l má pravý inversní operátor K_r, ale nemá inversní operátor.

V následujících větách budeme předpokládat, že prostor X jest úplný. Za tohoto předpokladu dá se totiž snadno dokázati, že i algebra $E(X)$ jest úplná, čehož budeme podstatným způsobem využívat.

(1,6) *Nechť X je úplný normovaný lineární prostor. Nechť $B \in E(X)$. Nechť $|B - J| < 1$. Potom B má inversní operátor B^{-1}, pro nějž platí*

$$|B^{-1}| \leqq \frac{1}{1 - |B - J|},$$
$$|B^{-1} - J| \leqq \frac{|B - J|}{1 - |B - J|}.$$

Důkaz. Označme $V = (J - B)$. Z úplnosti algebry $E(X)$ a z odhadu $|V| < 1$ plyne konvergence řady

$$J + V + V^2 + \dots,$$

jejíž součet, jak se snadno zjistí, jest inversním operátorem k B. Uvedené odhady se dostanou snadným počtem.

(1,7) *Nechť X je úplný normovaný lineární prostor. Nechť L a R jsou lineární operátory na X, pro něž platí*

$$\beta = |LR - J| < 1.$$

Potom operátor R má levý inversní R_1 a operátor L má pravý inversní L_1, pro něž platí

$$|R_1| \leqq \frac{1}{1-\beta}|L|, \quad |L_1| \leqq \frac{1}{1-\beta}|R|,$$
$$|R_1 - L| \leqq \frac{\beta}{1-\beta}|L|, \quad |L_1 - R| \leqq \frac{\beta}{1-\beta}|R|,$$
$$|R_1 L_1 - J| \leqq \frac{\beta}{1-\beta}.$$

Důkaz. Podle (1,6) bude za uvedených předpokladů existovati inversn operátor Z^{-1} k operátoru $Z = LR$. Položme

$$L_1 = RZ^{-1}\,, \quad R_1 = Z^{-1}L\,.$$

Jest

$$LL_1 = L(RZ^{-1}) = (LR)Z^{-1} = ZZ^{-1} = J\,,$$

$$R_1R = (Z^{-1}L)R = Z^{-1}(LR) = Z^{-1}Z = J\,.$$

Odhady norem provedeme jen pro operátor L_1. Jest podle (1,6)

$$|L_1| = |RZ^{-1}| \leqq |R|\,|Z^{-1}| \leqq |R|\,\frac{1}{1-\beta}\,,$$

$$|L_1 - R| = |RZ^{-1} - R| = |R(Z^{-1} - J)| \leqq |R|\,|Z^{-1} - J| \leqq |R|\,\frac{\beta}{1-\beta}\,.$$

Nakonec dostáváme

$$R_1L_1 - J = Z^{-1}LL_1 - J = Z^{-1} - J\,,$$

odkud plyne poslední odhad.

Prvek $P \in E(X)$ nazýváme idempotentní, jestliže $P^2 = P$. Mějme idempotentní operátor P. Položme

$$Z = Z(P) = \underset{x}{E}\,[x \in X,\, Px = x]\,,$$

$$N = N(P) = \underset{x}{E}\,[x \in X,\, Px = 0]\,,$$

takže Z i N jsou uzavřené podprostory v X. Ukažme nejprve, že podprostory Z a N mají právě jeden společný bod. Skutečně, nechť $w \in Z \cap N$. Protože $w \in Z$, jest $w = Pw$. Protože $w \in N$, jest $Pw = 0$, odkud $w = 0$. Ukažme dále, že každý prvek $x \in X$ se dá psáti ve tvaru $n + z$, $n \in N$, $z \in Z$. Skutečně, rozklad

$$x = (x - Px) + Px$$

zřejmě je rozkladem žádaného tvaru. Z hořejního okamžitě plyne jednoznačnost takového rozkladu.

Všimneme si ještě, že prostor Z je vlastně množinou všech prvků tvaru Px, kde $x \in X$.

Skutečně, každý prvek tvaru Px patří do Z, neboť $P(Px) = Px$; naopak, prvek splňující vztah $x = Px$ jest zřejmě tvaru Px.

Každý idempotentní prvek algebry $E(X)$ představuje tedy vlastně projekci prostoru X na prostor Z. Z tohoto důvodu budeme idempotentní operátory nazývati též projektory.

Všimneme si nyní podrobněji projektorů na podprostory konečné dimense. Budeme potřebovati především několik poznámek k označení. Jestliže X je normovaný lineární prostor, označme Y lineární prostor všech lineárních funkcionálů na X. Je-li $y \in Y$, potom hodnotu funkcionálu y v bodě $x \in X$ označíme $\langle x, y\rangle$.

Budiž X_0 podprostor X, Y_0 podprostor Y. Řekneme, že podprostor Y_0 určuje podprostor X_0, jestliže platí implikace

$$x_0 \in X_0\,, \quad \langle x_0, Y_0\rangle = 0 \Rightarrow x_0 = 0\,.$$

Smysl uvedené definice záleží v tom, že v tomto případě je prvek $z_0 \in X_0$ určen, známe-li hodnoty $\langle z_0, y_0\rangle$ pro každé $y_0 \in Y_0$. Skutečně, jestliže máme ještě $z_0' \in X_0$ takové, že pro každé $y_0 \in Y_0$ jest

$$\langle z_0, y_0\rangle = \langle z_0', y_0\rangle\,,$$

dostáváme $z_0 - z_0' \in X_0$, $\langle z_0 - z_0', Y_0\rangle = 0$, takže musí $z_0 - z_0' = 0$, tedy $z_0 = z_0'$.

Nechť nyní X_0 jest podprostor konečné dimense n a nechť podprostor $Y_0 \subset Y$ určuje X_0. Předpokládejme dále, že i Y_0 má dimensi n.

Volme basi $e_1 \ldots e_n$ v prostoru X_0 a basi $f_1 \ldots f_n$ v prostoru Y_0. Potom determinant utvořený z čísel $\langle e_i, f_j\rangle$ jest různý od nuly. Jinak by totiž bylo možno nalézti nenulovou lineární kombinaci x prvků e_i tak, že $\langle x, f_j\rangle = 0$ pro všechna j, odkud $\langle x, Y_0\rangle = 0$, což je spor s předpokladem, že Y_0 určuje X_0. Zejména odtud plyne, že pro každou posloupnost $\beta_1 \ldots \beta_n$ reálných čísel existuje právě jeden $x_0 \in X_0$ tak, že

$$\langle x_0, f_j\rangle = \beta_j\,.$$

Nyní můžeme popsati všechny projektory na podprostor konečné dimense.

(1,8) *Nechť X_0 je podprostor dimense n. Ke každému projektoru P prostoru X na X_0 existuje podprostor $Y_0 \subset Y$ dimense n, který určuje X_0. Přitom projekce x_0 prvku $x \in X$ je určena požadavky*

$$(\alpha)\ x_0 \in X_0\,,$$

$$(\beta)\ \langle x_0, f_j\rangle = \langle x, f_j\rangle\,,$$

kdež f_j je nějaká base prostoru Y_0.

Obráceně, jestliže je dán podprostor $Y_0 \subset Y$ dimense n, který určuje X_0, označme pro každé $x \in X$ znakem Px prvek, určený požadavky (α) a (β). Potom P je projekce X na X_0.

Důkaz. Nechť P jest projektor X na X_0. Označme $Y_0 = P^*(Y)$. Ukážeme nejprve, že Y_0 určuje X_0. Skutečně, mějme $x \in X_0$ takové, že $\langle x, Y_0\rangle = 0$. Protože $x \in X_0$, jest $x = Px$, a máme tedy pro každé $y \in Y$

$$\langle x, y\rangle = \langle Px, y\rangle = \langle x, P^*y\rangle = 0\,,$$

takže $x = 0$. Protože Y_0 určuje X_0 musí zřejmě $\dim Y_0 \geqq \dim X_0$. Rovnost dimensí vyplyne z toho, že i podprostor X_0 určuje Y_0. To však je jasné z duality, uvážíme-li, že P^* je zase projektor. Jestliže $x_0 = Px$, potom zřejmě

$$\langle x - x_0, Y_0 \rangle = \langle x - x_0, P^*(Y) \rangle = \langle P(x - x_0), Y \rangle = 0 ,$$

neboť $P(x - x_0) = 0$.

Je-li naopak dán podprostor $Y_0 \subset Y$ dimense n, který určuje X_0, jest podle předchozích úvah požadavky (α) a (β) jednoznačně určen prvek Px. Abychom dokázali, že P je projektor na X_0 stačí si uvědomiti, že především $P(X) \subset X_0$ a za druhé, že pro $x_0 \in X_0$ je $Px_0 = x_0$. Obojí je však ihned patrno z definice zobrazení P. Tím je důkaz dokončen.

Mějme tedy takovou projekci na n-dimensionální podprostor X_0. Jestliže potom každému $x \in X_0$ přiřadíme vektor o souřadnicích $\langle x, f_j \rangle$, dostaneme zřejmě algebraický isomorfismus mezi X_0 a prostorem číselných n-tic. Protože každý takový isomorfismus je zároveň isomorfismem ve smyslu topologie, existuje číslo $\alpha > 0$ tak, že

$$|x| \leqq \alpha \max_j |\langle x, f_j \rangle| .$$

Tohoto odhadu budeme později používat.

V dalším budeme vyšetřovat především operátory typu

$$K = J - \lambda H ,$$

když λ je reálné číslo, $H \in E(X)$. Operátory tohoto typu mají některé jednoduché vlastnosti, které formulujeme jako lemmata pro další použití.

(1,8) *Nechť $H \in E(X)$, m je celé nezáporné číslo. Označme*

$$K = J - \lambda H , \quad G_m = \sum_{j=0}^{m-1} (\lambda H)^j .$$

Potom platí

$$G_m K = K G_m = J - \lambda^m H^m .$$

Důkaz je snadný.

(1,9) *Mějme nyní prvek $y \in X$. Nechť x a z jsou spojeny vztahem*

$$x = G_m y + z .$$

Potom prvek x splňuje rovnici $Kx = y$, právě když prvek z splňuje rovnici

$$Kz = \lambda^m H^m y .$$

Jestliže potom $Kx = y$, jest $z = \lambda^m H^m x$.

Důkaz. Podle hořeního

$$Kx = KG_m y + Kz = y - \lambda^m H^m y + Kz ,$$

odkud

$$Kx - y = Kz - \lambda^m H^m y ,$$

což dokazuje první část tvrzení. Jestliže nyní $Kx = y$, dostáváme snadným počtem:

$$z = x - G_m y = x - G_m Kx = \lambda^m H^m x .$$

Význam předchozího lemmatu jest nasnadě. Máme-li najít prvek $x \in X$, který splňuje rovnici $Kx = y$, můžeme jej hledat ve tvaru $x = G_m y + z$, při čemž z musí splňovat rovnici $Kz = \lambda^m H^m y$. Úloha řešit rovnici $Kx = y$ je tedy převedena na řešení rovnice $Kz = \lambda^m H^m y$, která, jak později uvidíme, může být způsobilejší k přibližnému řešení než původní rovnice $Kx = y$.

Řekneme, že operátor $H \in E(X)$ má vlastnost F, jestliže je splněno následující tvrzení:

Je-li λ dané reálné číslo, potom operátor $K = J - \lambda H$ je prostý, právě když je plný.

Dokážeme nyní následující jednoduché lemma.

(1,10) *Nechť operátor H má vlastnost F. Potom operátor $K = J - \lambda H$ má inversní, právě když má levý inversní.*

D ů k a z. Skutečně, nechť K má levý inversní K_l. Potom podle (1,4) jest K prostý. Protože H splňuje vlastnost F, jest také plný, takže podle (1,4) operátory K a K_l jsou navzájem inversní.

2.

Budiž dán úplný normovaný lineární prostor X, uzavřený podprostor $\tilde{X}$ prostoru X a projektor P, zobrazující X na $\tilde{X}$.

Budiž dán $H \in E(X)$ a utvořme $K = J - \lambda H$. Uvažujme operátor PK. Jest ihned patrno, že operátor PK zobrazí prostor $\tilde{X}$ do sebe.

Parciální zobrazení PK restringované na $\tilde{X}$ je tedy lineárním operátorem na $\tilde{X}$. V dalším budeme užívat stejného označení jak pro operátor PK na prostoru X, tak i pro příslušný prvek algebry $E(\tilde{X})$. Ze souvislosti bude vždy zřejmé, o který z obou operátorů se jedná.

Operátoru K přiřadíme tedy operátor PK na prostoru $\tilde{X}$. Dá se očekávat, že při vhodné volbě prostoru $\tilde{X}$ a projektoru P dostaneme operátor, jehož vlastnosti lze jednak lépe přehlédnout a za druhé, jehož vlastnosti se příliš neliší od vlastností původního operátoru K (ve smyslu, který budeme později precisovat).

V aplikacích budeme většinou voliti $\tilde{X}$ konečně dimensionální, takže půjde v podstatě o vyšetřování matic. Vznikají především dvě hlavní otázky:

(1) Dejme tomu, že operátor $PK \in E(\tilde{X})$ má inversní. Za jakých předpokladů můžeme potom zaručit existenci inversního operátoru k operátoru $K \in E(X)$?

(2) Jestliže se nám již podařilo dokázat existenci inversního operátoru k operátoru K, máme odhadnout, jak dalece se od sebe liší řešení x dané rovnice $Kx = y$ od řešení $\tilde{x} \in \tilde{X}$ přibližné rovnice $PK\tilde{x} = Py$.

Uvidíme, že je možné současně udat odpověď na obě otázky. V dalších řádcích pokusíme se objasnit na jednom speciálním případě podstatu používaných method. Zvolíme případ $m = 1$ (tedy $G_m = J$), neboť na něm zřetelně vyniknou hlavní myšlenky odhadu.

Budiž dán prvek $x \in X$. Označme $Kx = y$ a položme $x = y + z$. Potom, jak víme podle (1,9), prvek z bude splňovat vztahy

$$Kz = \lambda Hy\,, \quad z = \lambda Hx\,.$$

Předpokládejme dále, že operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má inversní operátor W. Můžeme tedy najít prvek $\tilde{z} \in \tilde{X}$ tak, aby splňoval přibližnou rovnici

$$PK\tilde{z} = P\lambda Hy \quad (= PKz)\,.$$

Za přibližné řešení rovnice $Kx = y$ vezmeme potom prvek $\tilde{x} = y + \tilde{z}$. Pokusíme se odhadnout rozdíl $|x - \tilde{x}|$.

Jest

$$x - \tilde{x} = z - \tilde{z} = z - WPKz = (J - WPK)\,z\,.$$

Vezměme nyní libovolný prvek $z_1 \in \tilde{X}$. Protože $WPKz_1 = z_1$, bude

$$x - \tilde{x} = (J - WPK)\,z = (J - WPK)(z - z_1)\,,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq |J - WPK|\,|z - z_1|\,.$$

Je tedy vidět, že rozdíl $|x - \tilde{x}|$ bude tím menší, čím lépe je možno aproximovat prvek z prvky prostoru $\tilde{X}$. Je však $z = \lambda Hx$. Vznikne tedy zcela přirozeným způsobem otázka po aproximovatelnosti prvků tvaru Hx pomocí prvků prostoru $\tilde{X}$. Budeme předpokládat, že existuje malé číslo $\varepsilon > 0$ s následující vlastností:

Ke každému $x \in X$ existuje $x' \in \tilde{X}$ tak, že

$$|Hx - x'| \leqq \varepsilon |x|\,.$$

Prvek $z = \lambda Hx$ bude tedy aproximován prvkem $\lambda x'$ s chybou nejvýše $|\lambda|\,\varepsilon|x|$. Dostáváme celkem

$$|x - \tilde{x}| \leqq |J - WPK|\,|\lambda|\,\varepsilon|x| = \beta|x|\,.$$

Předpokládejme nyní, že $\beta < 1$. Potom snadno nahlédneme, že zobrazení K je prosté. Skutečně, jestliže $Kx = 0$, dostaneme $y = 0$ a tedy i $Kz = \lambda Hy = 0$. Je tedy $\tilde{z} = 0$, takže $\tilde{x} = 0$. Dostaneme potom

$$|x| = |x - \tilde{x}| \leqq \beta|x|\,,$$

což není jinak možné než když $x = 0$. Operátor K má tedy inversní. Tím je řešena první část naší úlohy, vztahující se k existenci inversního operátoru k operátoru K. Zároveň získané nerovnosti $|x - \tilde{x}| \leqq \beta|x|$ je možno použít k odhadu rozdílu mezi skutečným a přibližným řešením. K tomu cíli musíme z pravé strany naší nerovnosti odstranit závislost na (neznámé) veličině $|x|$. To však je snadné, neboť naši nerovnost můžeme přepsat ve tvaru

$$|x - \tilde{x}| \leqq \beta|\tilde{x}| + \beta|x - \tilde{x}|\,,$$

odkud

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\beta}{1-\beta}|\tilde{x}|\,.$$

Nyní můžeme přistoupit k přesné formulaci našich odhadů.

Zavedeme nejprve následující definici:

(2,1) *Budiž dán podprostor X' prostoru X a operátor $H \in E(X)$. Potom vzdáleností operátoru H od podprostoru X' nazveme číslo*

$$\sup_{|x| \leqq 1} \inf_{x' \in X'} |Hx - x'|\,.$$

Toto číslo jest vždy $\leqq |H|$.

Skutečně, protože $0 \in X'$, je $\inf\limits_{x' \in X'} |Hx - x'| \leqq |Hx|$, takže pro vzdálenost H od X' dostáváme odhad $\sup\limits_{|x| \leqq 1} |Hx|$, což není nic jiného než norma $|H|$.

(2,2) *Nechť $A \in E(X)$, $H \in E(X)$. Budiž dán podprostor X' prostoru X. Označme σ_1 vzdálenost operátoru H od X', označme*

$$\sigma_2 = \sup_{|x| \leqq 1,\, x \in X'} |Ax|\,.$$

Potom platí odhad

$$|AH| \leqq |A|\sigma_1 + |H|\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2\,.$$

Důkaz. Budiž dán prvek $x \in X$. Zvolme číslo $\omega_1 > \sigma_1$. Z definice vzdálenosti operátoru od podprostoru plyne potom existence prvku $z \in X'$ tak, že $|Hx - z| \leqq \omega_1|x|$.

Je potom $AHx = A(Hx - z) + Az$, takže máme odhad

$$|AHx| \leqq |A|\,\omega_1|x| + \sigma_2|z|\,.$$

Nyní však $|z| \leqq |Hx| + |Hx - z| \leqq |H|\,|x| + \omega_1|x|$, což dohromady s předešlým dá

$$|AHx| \leqq (|A|\omega_1 + |H|\sigma_2 + \omega_1\sigma_2)\,|x|\,.$$

Protože však ω_1 bylo libovolné číslo $> \sigma_1$, platí odhad uvedený v našem tvrzení.

Až do konce tohoto paragrafu budou dány pevně: Banachův prostor X, uzavřený podprostor $\tilde{X}$ prostoru X, projektor P zobrazující X na $\tilde{X}$, operátor $H \in E(X)$ vlastnosti F. Označme potom $K = J - \lambda H$; nechť pro každé přirozené číslo m znamená ε_m vzdálenost operátoru H^m od podprostoru $\tilde{X}$.

(2,3) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má inversní $W \in E(\tilde{X})$. Budiž m přirozené číslo. Nechť*

$$\beta_m = |J - WPK|\,|\lambda|^m\varepsilon_m < 1\,.$$

Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$.

Položíme-li

$$\tilde{x} = G_m y + \tilde{z}\,,$$

kdež $\tilde{z} \in \tilde{X}$ je řešení přibližné rovnice $PK\tilde{z} = P\lambda^m H^m y$, platí odhady

$$|x - \tilde{x}| \leqq \beta_m |x|\,,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\beta_m}{1 - \beta_m} |\tilde{x}|\,.$$

Důkaz. Buď dáno $x \in X$. Označme $y = Kx$ a vezměme $z \in X$ tak, aby platilo $x = G_m y + z$. Potom, jak víme, bude

$$Kz = \lambda^m H^m y\,, \quad z = \lambda^m H^m x\,.$$

Nyní $\tilde{z}$ je řešení rovnice $PK\tilde{z} = P\lambda^m H^m y = PKz$. Je tedy $x - \tilde{x} = z - \tilde{z} = (J - WPK)\,z$. Uvážíme-li, že $z = \lambda^m H^m x$, je $x - \tilde{x} = (J - WPK)\,\lambda^m H^m x$. Podle předešlého lemmatu máme tedy odhad

$$|x - \tilde{x}| \leqq \beta_m |x|\,.$$

Jestliže nyní $\beta_m < 1$, zjistíme snadno, že operátor K je prostý. Skutečně, jestliže $Kx = 0$, je $y = 0$ a tedy i $\tilde{z} = 0$, takže $\tilde{x} = 0$. Máme pak odhad $|x| = |x - \tilde{x}| \leqq \beta_m |x|$, což není jinak možné než že $x = 0$.

Tím je vše dokázáno, neboť operátor H má vlastnost F.

Případ $m = 0$ formulujeme zvláště.

(2,4) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má inversní $W \in E(\tilde{X})$. Nechť $\beta_1 < 1$. Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$. Jestliže $\tilde{x} \in \tilde{X}$ jest řešení přibližné rovnice $PK\tilde{x} = Py$, platí odhady*

$$|x - \tilde{x}| \leqq \beta_1 |x| + p\,,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\beta_1}{1 - \beta_1} |\tilde{x}| + \frac{p}{1 - \beta_1}\,,$$

kdež $p = |(J - WPK)\,y|$.

Důkaz. Tvrzení o existenci inversního operátoru je obsaženo v předešlém lemmatu. Jestliže tedy $\beta_1 < 1$ a máme prvky x a y splňující vztah $Kx = y$, bude

$$\begin{aligned} x - \tilde{x} = (J - WPK)\,x = (J - WPK)(\lambda Hx + y) = \\ = (J - WPK)\,\lambda Hx + (J - WPK)\,y\,, \end{aligned}$$

odkud ihned plynou uvedené odhady.

Předešlé dvě věty mají význam spíše theoretický. Jsou formulovány především tak, aby vynikla úloha všech podstatných činitelů, které ovlivňují odhad. Obě jsou speciálními případy následujících vět, upravených pro praktické použití.

(2,5) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má přibližný levý inversní operátor $Z \in E(\tilde{X})$.*

Budiž m přirozené číslo. Nechť

$$\omega_m = |(J - ZPK)\,\lambda^m H^m| < 1\,.$$

Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$. Položíme-li

$$x = G_m y + \tilde{z}\,,$$

kdež $\tilde{z} \in \tilde{X}$ je přibližné řešení přibližné rovnice

$$PK\tilde{z} = P\lambda^m H^m y \quad (\text{t. j. } \tilde{z} = ZP\lambda^m H^m y)\,,$$

platí odhady

$$|x - \tilde{x}| \leqq \omega_m |x|\,,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\omega_m}{1 - \omega_m} |\tilde{x}|\,.$$

Důkaz. Buď dáno $x \in X$. Označme $y = Kx$ a definujme $z \in X$ relací $x = G_m y + z$. Bude potom

$$Kz = \lambda^m H^m y\,, \quad z = \lambda^m H^m x\,.$$

Nyní $\tilde{z}$ je přibližným řešením rovnice

$$PK\tilde{z} = P\lambda^m H^m y = PKz\,,$$

takže

$$x - \tilde{x} = z - \tilde{z} = (J - ZPK)\,z = (J - ZPK)\,\lambda^m H^m x\,.$$

Důkaz se nyní snadno dokončí jako v případě předešlém. Případ $m = 0$ formulujeme zvláště.

(2,6) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má přibližný levý inversní operátor $Z \in E(\tilde{X})$.*

Nechť $\omega_1 < 1$. Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$.

Položíme-li $\tilde{x} = ZPy$, platí odhady

$$|x - \tilde{x}| \leqq \omega_1 |x| + p\,,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\omega_1}{1 - \omega_1} |\tilde{x}| + \frac{p}{1 - \omega_1}\,,$$

kdež $p = |(J - ZPK)\,y|$.

Důkaz. Tvrzení o existenci inversního operátoru je obsaženo v předešlém lemmatu. Jestliže tedy $\omega_1 < 1$ a máme prvky x a y spojené relací $Kx = y$, bude

$$x - \tilde{x} = (J - ZPK)\,z = (J - ZPK)(\lambda Hx + y) = \\ = (J - ZPK)\,\lambda Hx + (J - ZPK)\,y\,,$$

odkud ihned plynou uvedené odhady.

Užijeme-li v předešlých dvou větách na operátory $(J - ZPK)\,\lambda^m H^m$ odhadu lemmatu (2,2), dostaneme ihned následující výsledky:

(2,7) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má přibližný levý inversní operátor $Z \in E(\tilde{X})$ takový, že*

$$|J - ZPK| = \sigma < 1$$

(norma na $\tilde{X}$). Budiž m přirozené číslo. Nechť

$$\sigma_m = |J - ZPK|\,|\lambda|^m \varepsilon_m + |\lambda|^m |H^m| \sigma + |\lambda|^m \varepsilon_m \sigma < 1 .$$

Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$. Položíme-li

$$\tilde{x} = G_m y + \tilde{z} ,$$

kdež $\tilde{z} \in \tilde{X}$ je přibližné řešení přibližné rovnice

$$PK\tilde{z} = P\lambda^m H^m y \quad \text{(t. j. } \tilde{z} = ZP\lambda^m H^m y) ,$$

platí odhady

$$|x - \tilde{x}| \leqq \sigma_m |x| ;$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\sigma_m}{1 - \sigma_m} |\tilde{x}| .$$

(2,8) *Nechť operátor PK na prostoru $\tilde{X}$ má přibližný levý inversní operátor $Z \in E(\tilde{X})$ takový, že*

$$|J - ZPK| = \sigma < 1$$

(norma na $\tilde{X}$). Nechť $\sigma_1 < 1$. Potom operátor K má inversní. Je-li potom dáno $y \in X$, označme x řešení rovnice $Kx = y$. Položíme-li $\tilde{x} = ZPy$, platí odhady

$$|x - \tilde{x}| \leqq \sigma_1 |x| + p ,$$

$$|x - \tilde{x}| \leqq \frac{\sigma_1}{1 - \sigma_1} |\tilde{x}| + \frac{p}{1 - \sigma_1} ,$$

kdež $p = |(J - ZPK)\,y|$.

3.

Ukážeme nyní, jak lze theorie, vyložené v předešlém odstavci, použíti k odhadu chyby přibližných method řešení integrálních rovnic. Je zajímavé, že se stanoviska obecných úvah předešlého odstavce se nejpřirozenější methodou jeví methoda (3,1), která v podstatě pochází od L. V. Kantoroviče.

Domníváme se, že teprve jednotný přehled, založený na důsledném použití method funkcionální analysy, umožňuje plnější pochopení podstaty užívaných method.

Budeme potřebovat ještě dvě p o z n á m k y k o z n a č e n í. Mějme lineární prostor E_n, skládající se ze všech n-členných posloupností reálných čísel

$$x = (x_1, \ldots, x_n) .$$

Je-li potom dána matice (a_{ik}) $(1 \leqq i, k \leqq n)$, můžeme každému vektoru x přiřadit vektor y předpisem

$$y_i = \Sigma a_{ik} x_k \,.$$

Vzniklé zobrazení A prostoru E_n do sebe je zřejmě lineární a ohraničené při každé volbě normy v E_n. Nás bude zajímat především norma operátoru A ve dvou konkretních případech.

(1) Volme v E_n normu

$$|x|_{\square} = \max_i |x_i| \,.$$

Potom se snadno zjistí, že norma operátoru A je

$$|A|_{\square} = \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \,.$$

(2) Volme v E_n normu

$$|x|_{\circ} = (\Sigma x_i^2)^{\frac{1}{2}} \,.$$

Potom se dá dokázat, že pro symetrický operátor A platí

$$|A|_{\circ} = \max_j |\lambda_j| \,,$$

kdež λ_j jsou všechny kořeny charakteristické rovnice

$$|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \,.$$

Nyní máme vše připraveno, abychom mohli aplikovat výsledky předešlého odstavce na konkretní prostory.

Nechť X znamená lineární prostor všech funkcí spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$ s normou

$$|x| = \max_{a \leqq t \leqq b} |x(t)| \,.$$

Snadno se dokáže, že X jakožto normovaný prostor je úplný. Nechť $h(s, t)$ je funkce spojitá na čtverci $a \leqq s, t \leqq b$. Pro každé $x \in X$ definujeme

$$y(s) = \int_a^b h(s, t)\, x(t)\, \mathrm{d}t \,.$$

Tato funkce je zřejmě spojitá na $\langle a, b \rangle$ a představuje tedy jistý prvek $y \in X$. Dá se dokázati, že zobrazení H prostoru X do X, definované vztahem $y = Hx$, je lineární operátor vlastnosti F.

(3,1) Nechť $\tilde{X}$ jest daný n-dimensionální podprostor prostoru X. Předpokládejme, že jest dáno n bodů

$$a \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqq b$$

tak, že platí

$$\tilde{x} \in \tilde{X},\ x(t_j) = 0 \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \tilde{x} = 0 \,.$$

Projekci P prostoru X na $\tilde{X}$ definujeme požadavkem, aby prvek $\tilde{x} = Px$ splňoval rovnosti

$$\tilde{x}(t_j) = x(t_j) \,, \quad j = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Vidíme tedy, že se jedná o jakousi zobecněnou interpolaci. Mějme nyní $z \in X$ a $\tilde{z} \in \tilde{X}$ a všimněme si, co znamená rovnost $PK\tilde{z} = PKz$. Snadno se přesvědčíme, že tato rovnost jest ekvivalentní se splněním rovností

$$\tilde{z}(t_i) - \lambda \int h(t_i, t)\, \tilde{z}(t)\, dt = z(t_i) - \lambda \int h(t_i, t)\, z(t)\, dt \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Zvolíme-li nyní $e_j \in \tilde{X}$ tak, aby $e_i(t_j) = \delta_{ij}$, bude platit $\tilde{z} = \Sigma \tilde{z}(t_j)\, e_j$, takže, označíme-li ještě $\zeta_i = \tilde{z}(t_i)$, půjde o řešení systému rovnic

$$\zeta_i - \lambda \sum_j \zeta_j \int h(t_i, t)\, e_j(t)\, dt = z(t_i) - \lambda \int h(t_i, t)\, z(t)\, dt \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Označme T matici $(\delta_{ij} - \lambda\mu_{ij})$, kdež μ_{ij} jsou momenty

$$\mu_{ij} = \int h(t_i, t)\, e_j(t)\, dt$$

a předpokládejme, že existuje inversní matice T^{-1}. Potom zřejmě existuje též inversní operátor W k operátoru $PK \in E(\tilde{X})$. Dostáváme potom odhad

$$|\tilde{z}| \leqq \alpha \max_i |\tilde{z}(t_i)| \leqq \alpha |T^{-1}|_{\square} |PK|\, |z|\,.$$

Tím jest odhadnuta norma operátoru WPK na prostoru X. Máme tedy

$$|WPK| \leqq \alpha |T^{-1}|_{\square} |PK|\,.$$

Odhady chyby při této methodě dostaneme ihned z věty (2,3) respektive (2,4).

(3,2) Operátor PK přiřazuje prvku $\tilde{x} \in \tilde{X}$ prvek $\tilde{y} \in \tilde{X}$ určený požadavkem, aby hodnoty funkce $\tilde{y}$ v bodech t_i byly rovny

$$\tilde{x}(t_i) - \lambda \int h(t_i, t)\, \tilde{x}(t)\, dt\,.$$

Mějme formuli mechanické kvadratury s uzly v bodech t_k, která nahrazuje integrál $\int_a^b x(t)\, dt$ součtem $\sum_{k=1}^{n} A_k\, x(t_k)$. Zaveďme operátor $Q \in E(\tilde{X})$ požadavkem, aby pro $u \in \tilde{X}$ prvek $v = Qu$ splňoval rovnosti

$$v(t_i) = u(t_i) - \lambda\, \Sigma A_k\, h(t_i, t_k)\, u(t_k)\,.$$

Zřejmě existence inversního operátoru $Z \in E(\tilde{X})$ k operátoru Q jest ekvivalentní existenci matice inversní k matici $T = (\delta_{ij} - \lambda A_j\, h(t_i, t_j))$. Operátor Z vezmeme za přibližný inversní operátor k operátoru PK. Budeme potřebovat

(1) odhad operátoru ZPK na prostoru X,

(2) odhad operátoru $J - ZPK$ na prostoru $\tilde{X}$.

Stejně jako v předešlém případě dostaneme

$$|ZPK| \leqq \alpha |T^{-1}|_{\square} |PK|\,.$$

Abychom provedli odhad $J - ZPK$ na prostoru $\tilde{X}$, vezměme $x \in \tilde{X}$ a označme $q = ZPKx$. Je tedy

$$Qq = PKx\,.$$

Označíme-li pro krátkost $q_i = q(t_i)$, $x_i = x(t_i)$, znamená to platnost systému rovnic

$$q_i - \lambda \Sigma A_k h(t_i, t_k) q_k = x_i - \lambda \int h(t_i, t) x(t) \, dt ,$$

neboli

$$(q_i - x_i) - \lambda \Sigma A_k h(t_i, t_k)(q_k - x_k) =$$
$$= \lambda \Sigma A_k h(t_i, t_k) x(t_k) - \lambda \int h(t_i, t) x(t) \, dt = \varepsilon_i .$$

Dostaneme potom odhad

$$|q - x| \leqq \alpha \max_i |q_i - x_i| \leqq \alpha |T^{-1}|_\square \max_i |\varepsilon_i| .$$

Budeme tedy potřebovat odhad tvaru

$$\max_i |\int h(t_i, t) x(t) \, dt - \Sigma A_k h(t_i, t_k) x(t_k)| \leqq \varkappa |x| ,$$

platný pro $x \in \tilde{X}$. Dohromady s předešlým dostaneme potom

$$|J - ZPK| \leqq \alpha |T^{-1}|_\square |\lambda| \varkappa .$$

Odhad chyby při této methodě dostaneme potom ihned z vět (2,7) resp. (2,8).

Vidíme tedy, že k provedení našeho úkolu stačí provést odhad (pro $x \in \tilde{X}$)

$$\max_i |\Sigma A_j h(t_i, t_j) x(t_j) - \int h(t_i, t) x(t) \, dt| .$$

Provedeme takový odhad ve dvou konkretních případech.

(3,21) Buď dáno přirozené n, volme

$$t_k = a + k \frac{b - a}{n} , \quad k = 0, 1, \ldots, n , \quad A_0 = A_n = \frac{b - a}{2n} ,$$
$$A_1 = \ldots = A_{n-1} = \frac{b - a}{n} .$$

Označme pro $\delta > 0$

$$\omega_t(\delta) = \max_i \max_{\substack{a \leqq t' \leqq t'' \leqq b \\ |t' - t''| \leqq \delta}} |h(t_i, t') - h(t_i, t'')| .$$

Vezmeme pevné i $(0 \leqq i \leqq n)$ a odhadneme

$$|\int_a^b h(t_i, t) x(t) \, dt - \sum_{k=0}^{n} A_k h(t_i, t_k) x(t_k)| \leqq$$
$$\leqq \sum_{k=0}^{n-1} |\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t_i, t) x(t) \, dt - \frac{b - a}{2n} (h(t_i, t_k) x(t_k) + h(t_i, t_{k+1}) x(t_{k+1}))| .$$

Uvážíme-li, že funkce $x(t)$ je lineární v $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$, vidíme ihned, že

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(t_i, t_k) x(t) \, dt = \frac{b - a}{2n} (h(t_i, t_k) x(t_k) +$$
$$+ h(t_i, t_k) x(t_{k+1})) .$$

Užitím tohoto vztahu můžeme hoření výraz přepsati ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \int (h(t_i, t) - h(t_i, t_k))\, x(t)\, dt - \frac{b-a}{2n} (h(t_i, t_{k+1}) - h(t_i, t_k))\, x(t_{k+1}) \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n} \omega_t \left(\frac{1}{n}\right) |x| + \frac{b-a}{2n} \omega_t \left(\frac{1}{n}\right) |x| \right) = \frac{3}{2} (b-a)\, \omega_t \left(\frac{1}{n}\right) |x| \,.$$

takže za číslo $\varkappa$ můžeme vzíti $\frac{3}{2} (b-a)\, \omega_t \left(\frac{1}{n}\right)$.

(3,22) Formuli mechanické kvadratury

$$\int_a^b x(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} A_k\, x(t_k)$$

nazveme formulí Gaussova typu, jestliže v ní platí rovnost pro všechny polynomy stupně nejvýše $2n - 1$. V tomto případě je možno žádaný odhad provésti velmi snadno.

Označme $\tilde{X}$ množinu všech polynomů stupně nejvýše $n - 1$ a nechť pro každé $x \in X$ znamená Px polynom stupně $\leqq n - 1$, jehož hodnoty v bodech t_k souhlasí s hodnotami $x(t_k)$. Máme opět odhadnout

$$\max_i \left| \Sigma A_k h_{ik}\, x(t_k) - \int h(t_i, t)\, x(t)\, dt \right|$$

pro $x \in \tilde{X}$. Pro každé i $(1 \leqq i \leqq n)$ existuje polynom $p_i(t)$ stupně $\leqq n$, který nejlépe (v normě prostoru X) aproximuje spojitou funkci $h(t_i, t)$. Označme

$$\varrho = \max_i \max_{a \leqq t \leqq b} |h(t_i, t) - p_i(t)| \,.$$

Jestliže nyní $x \in \tilde{X}$, bude $p_i(t)\, x(t)$ polynom stupně $\leqq 2n - 1$, takže platí

$$\int p_i(t)\, x(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} A_k\, p_i(t_k)\, x(t_k) \,.$$

Dostáváme potom

$$\Sigma A_k h_{ik}\, x(t_k) - \int h(t_i, t)\, x(t)\, dt =$$
$$= \Sigma A_k h_{ik}\, x(t_k) - \Sigma A_k\, p_i(t_k)\, x(t_k) + \int (p_i(t) - h(t_i, t))\, x(t)\, dt \,.$$

Uvážíme-li ještě, že všechny $A_k \geqq 0$ a že $\Sigma A_k = b - a$, vidíme ihned, že náš výraz je odhadnut číslem

$$2(b-a)\, \varrho |x| \,,$$

takže můžeme vzíti $\varkappa = 2(b-a)\, \varrho$.

(3,3) Jestliže funkce $x(t)$ má na $\langle a, b \rangle$ spojité derivace až do řádu v včetně, platí odhad tvaru

$$\left| \int x(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} A_k\, x(t_k) \right| \leqq \mu \max_{a \leqq t \leqq b} |x^{(v)}(t)|$$

($v = 2$ pro methodu lichoběžníků, $v = 4$ pro methodu Simpsonovu, $v = 2n$ pro methodu Gaussovu). Předpokládejme, že jádro $h(s, t)$ má spojité parciální derivace podle obou proměnných až do řádu v včetně. Označme ještě pro $0 \leqq j \leqq v$

$$M_s^{(j)} = \max_{a \leqq s, t \leqq b} \left| \frac{\partial^j h}{\partial s^j} \right|, \quad M_t^{(j)} = \max_{a \leqq s, t \leqq b} \left| \frac{\partial^j h}{\partial t^j} \right|.$$

Budiž $u(t)$ funkce, která má na $\langle a, b \rangle$ spojité derivace až do řádu v včetně. Máme potom odhad

$$\max_{a \leqq s \leqq b} |\int h(s, t)\, u(t)\, \mathrm{d}t - \Sigma A_k\, h(s, t_k)\, u(t_k)\, \mathrm{d}t| \leqq$$

$$\leqq \mu \max_{a \leqq s,\, t \leqq b} \left| \frac{\partial^v}{\partial t^v} h(s, t)\, u(t) \right| \leqq \mu \sum_{j=0}^{v} \binom{v}{j} |u^{(j)}|\, M_t^{(v-j)}.$$

Položme nyní $P = J$ a tedy $\tilde{X} = X$.

Označme ještě H_0 onen operátor, který každému $x \in X$ přiřazuje funkci

$$\Sigma A_k\, h(s, t_k)\, x(t_k).$$

Vyšetřme, za jakých předpokladů operátor $K_0 = J - \lambda H_0$ bude míti inversní. Dokážeme, že to bude splněno, jakmile matice $T = \delta_{ik} - \lambda A_k\, h(t_i, t_k)$ bude mít determinant různý od nuly. Skutečně, je-li tomu tak a je-li dán libovolný prvek $y \in X$, můžeme určiti čísla ζ_i tak, aby

$$\zeta_i - \lambda\, \Sigma A_k\, h(t_i, t_k)\, \zeta_k = y(t_i).$$

Snadno se potom přesvědčíme, že funkce

$$y(s) + \lambda\, \Sigma A_k\, h(s, t_k)\, \xi_k$$

je řešením rovnice $K_0 x = y$. Označme potom Z operátor inversní k operátoru K_0; poslouží nám jako přibližný inversní k operátoru K. Z hořeního výrazu jest ihned patrno, že

$$|Z| \leqq 1 + |\lambda|(b - a)\, M\, |T^{-1}|_{\square},$$

kdež

$$M = \max_{a \leqq s,\, t \leqq b} |h(s, t)|.$$

Bude dále $J - ZK = Z(K_0 - K) = \lambda Z(H - H_0)$. Zjistili jsme před chvílí, že odhad $(H - H_0)$ umíme provésti pro funkce u, které splňují jakési podmínky derivability. Použijeme tedy věty (2,5) respektive (2,6). Jedná se totiž o odhad $(J - ZK)\, \lambda H = \lambda^2\, Z(H - H_0)\, H$, který můžeme provést, neboť vzhledem k našim předpokladům o jádru h prvky tvaru Hx mají potřebný počet derivací.

Skutečně, mějme libovolný prvek $x \in X$ a položme $u = Hx$. Snadno se zjistí, že pro všechna j $(0 \leqq j \leqq v)$ existuje spojitá derivace $u^{(j)}$ a splňuje rovnost

$$u^{(j)}(s) = \int \left(\frac{\partial^j}{\partial s^j} h(s, t) \right) x(t)\, \mathrm{d}t,$$

takže dostáváme odhad $|u^{(j)}| \leqq (b - a)\, M_s^{(j)}|x|$. Užijeme-li hořeního odhadu $(H - H_0)\, u$ pro $u = Hx$, dostaneme

$$|(H - H_0)\, Hx| \leqq \mu(b - a) \sum_{j=0}^{v} \binom{v}{j} M_t^{(v-j)}\, M_s^{(j)}|x|\, .$$

Vidíme tedy, že pro číslo ω_1 vět (2,5) a (2,6)máme odhad

$$\omega_1 = |(J - ZK)\lambda H| \leqq$$

$$\leqq \lambda^2(1 + |\lambda|(b - a)\, M|T^{-1}|_\square)\, \mu(b - a) \sum_{j=0}^{v} \binom{v}{j} M_s^{(j)}\, M_t^{(v-j)}\, .$$

Jestliže také prvek y má spojité derivace až do řádu v včetně, můžeme snadno provést i odhad čísla p věty (2,6). Je

$$p = |(J - ZK)\, y| \leqq |\lambda|\, |Z|\, |(H - H_0)\, y| \leqq |\lambda|\, |Z|\, \mu \sum_{j=0}^{v} \binom{v}{j} M_t^{(v-j)}\, |y^{(j)}|\, .$$

(3,4) Nechť nyní X jest Hilbertův prostor, příslušný intervalu $\langle a, b\rangle$. Mějme měřitelnou funkci $h(s, t)$, definovanou na čtverci $a \leqq s,\, t \leqq b$ (až na množinu nulové míry) a takovou, že

$$\int h^2(s, t)\, ds\, dt < \infty\, .$$

Dá se potom dokázati toto:

Je-li x libovolný prvek prostoru X, potom pro skoro všechna $s \in \langle a, b\rangle$ existuje integrál

$$y(s) = \int h(s, t)\, x(t)\, dt\, ,$$

a pro vzniklou funkci y je

$$\int y^2(s)\, ds < \infty\, .$$

Zobrazení H prostoru X do X, definované vztahem $y = Hx$, je lineární operátor vlastnosti F.

Mějme nyní n-dimensionální podprostor $X \subset \tilde{X}$ s ortonormální basí $e_1, \ldots, e_n$. Nechť P znamená ortogonální projekci X na $\tilde{X}$. Potom, jak známo, pro každé $x \in X$ prvek Px jest nejlepší aproximací prvku x pomocí prvků prostoru $\tilde{X}$. Označme

$$h_s(s, t) = \sum_{i=1}^{n} e_i(s) \int h(s, t)\, e_i(s)\, ds\, .$$

Je pak ihned patrno, že operátor PK jest vytvořen jádrem $h_s(s, t)$. Jestliže $x \in X$ a $\tilde{x} = \Sigma \xi_i e_i \in \tilde{X}$ splňují rovnost $PK\tilde{x} = PKx$, znamená to, jak ihned patrno, splnění rovností

$$\xi_i - \lambda\, \Sigma h_{ik} \xi_k = (x, e_i) - \lambda \int h(s, t)\, e_i(s)\, x(t)\, ds\, dt\, ,$$

kdež

$$h_{ik} = \int h(s, t)\, e_i(s)\, e_k(t)\, ds\, dt\, .$$

Existence operátoru W inversního k operátoru $PK \in E(\tilde{X})$ je tedy ekvivalentní tomu, aby matice $T = (\delta_{ik} - \lambda h_{ik})$ měla inversní. Dostáváme potom odhad

$$|\tilde{x}| = (\Sigma \xi_i^2)^{\frac{1}{2}} \leqq |T^{-1}|_0 \, |PK| \, |x| \, .$$

Tím jest odhadnuta norma operátoru WPK na prostoru X. Máme tedy

$$|WPK| \leqq |T^{-1}|_0 \, |PK| \, .$$

Odhadněme ještě vzdálenost ε operátoru H od $\tilde{X}$. Protože pro každé $z \in X$ prvek Pz je nejlepší aproximací prvku z pomocí prvků prostoru $\tilde{X}$, je

$$\varepsilon = |H - PH| \leqq \int (h(s, t) - h_s(s, t))^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \, .$$

Odhad chyby při této methodě dostaneme potom z vět (2,3) resp. (2,4).

LITERATURA

[1] *Л. В. Канторовнич,* Функциональный анализ и прикладная математика, УМИ *3* (1948), випуск 6 (28), 89—185.

[2] *Л. В. Канторович, И. В. Крылов,* Приближенные методы высшево анализа, Москва-Ленинград 1952.

Резюме

ОЦЕНКА ОШИБКИ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Властимил Птак (Vlastimil Pták), Прага.

(Поступило в редакцию 29/X 1954 г.)

Настоящая работа опирается на работу Л. В. Канторовича [1]. Она ставит себе целью разработать с использованием методов функционального анализа общую схему, которую можно применить к оценке ошибки различных приближенных методов решения интегральных уравнений. Сущность метода заключается в том, что наряду с пространством Банаха X, в котором нужно решить уравнение $Ax = y$, рассматривается подпространство $\tilde{X} \subset X$, в котором решается приближенное уравнение $PAx = Py$, где P — проекция X на $\tilde{X}$. Затем производится оценка разности между точным решением x и приближенным решением $\tilde{x}$.

Summary

ERROR ESTIMATES OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATIONS

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

(Received October 29, 1954.)

The starting point of the present investigations is the paper of L. V. KANTOROVITCH [1]. Methods of Functional Analysis are applied to build up a general schema which may be used to estimate the error of different approximate methods of solution of integral equations. If X is a Banach space where an equation $Ax = y$ is to be solved, we consider a subspace $\tilde{X} \subset X$ and the approximate equation $PA\tilde{x} = Py$, P being a projection of X on $\tilde{X}$. A method is developed to obtain an estimate of the difference between the exact solution x and the approximate solution $\tilde{x}$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1950)

O ROVINNÉM BIHARMONICKÉM PROBLÉMU V OBLASTECH S ÚHLOVÝMI BODY

IVO BABUŠKA, Praha.

(Došlo dne 1. listopadu 1954.) DT 513.73

V [1] bylo naznačeno jedno řešení biharmonického problému za předpokladu, že hranice definiční oblasti měla dostatečně hladkou hranici. V praxi se však většinou vyskytují oblasti, které mají pouze po částech dostatečně hladkou hranici s úhlovými body.

V této krátké poznámce ukážeme, že metoda orthonormálních funkcí, jak byla naznačena v [1], vede k cíli úplně stejně jako v případě oblastí s hranicí dostatečně hladkou. Ukážeme, že i konvergence pro oblasti s úhlovými body je v podstatě stejná jako pro oblasti s hranicí dostatečně hladkou.

1. Některé definice a pomocné věty

V tomto odstavci vyslovíme některé definice a věty které budeme dále potřebovat.

Definice 1. *Buď C jednoduchá orientovaná křivka. Buď $\vartheta(s)$ úhel kladného směru tečny s osou x, kde s jest délka oblouku. Nechť $\vartheta(s)$ je totálně spojitá funkce a nechť*

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s} \in L_p\,, \quad p > 1\,, \quad \text{t. j. nechť} \int_C \left|\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s}\right|^p \mathrm{d}s < \infty\,.$$

Potom budeme říkat, že křivka C je dostatečně hladká.

Křivku C budeme nazývat po částech dostatečně hladkou, jestliže je sjednocením konečného počtu oblouků O_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ s koncovými body A_i (orientace oblouků je shodná s orientací křivky) takových, že

1. $\displaystyle\int_{C_i} \left|\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s}\right|^p \mathrm{d}s < \infty$;[1])

2. $|\vartheta(A_i)_+ - \vartheta(A_i)_-| \neq 0$ [mod π],

[1]) V počátečním bodě oblouku béřeme derivaci zleva, v koncovém bodě derivaci zprava.

kde $\vartheta(A_i)_+$ *resp.* $\vartheta(A_i)_-$ *značí limity hodnot úhlu kladného směru tečny s osou* x *v bodě* A_i *pro* $A_i \prec z' \in C$ *resp.* $A_i \succ z \in C$.[2])

Body A_i *budeme nazývat singulárními body křivky* C. *Orientaci předpokládejme tak, že vnitřek je po levé straně.*

Věta 1. *Buď* C *jednoduchá po částech dostatečně hladká křivka a* Ω *její vnitřek. Buď* f *spojitá funkce na* $\bar{\Omega}$ *taková, že*

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}p} \mathrm{d}\Omega < \infty .$$

Potom pro $1 < p \leq 2$ *platí*

$$\left(\int_C |f|^q \,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}} \leq M \left\{\left[\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\frac{1}{\alpha}\iint_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}}\right\},$$

kde

$$\alpha = \iint_\Omega \mathrm{d}\Omega$$

a

$$q < \frac{p}{2-p}, \quad [\text{pro } p = 2 \text{ jest } q < \infty] .$$

Při tom konstanta M *nezávisí na funkci* f [*závisí ovšem na* q, p, Ω].

Důkaz. Viz [3], věta 2, str. 64, věta 2, str. 72 a poznámka str. 81.

Věta 2. *Buď* Ω *vnitřek jednoduché křivky* C. *Buďtež na* Ω *definovány funkce* f_1 *a* f_2 *takové, že*

$$\iint_\Omega |f_1|^p \,\mathrm{d}\Omega < \infty , \quad \iint_\Omega |f_2|^p \,\mathrm{d}\Omega < \infty .$$

Potom

$$\left[\iint_\Omega [(f_1)^2 + (f_2)^2]^{\frac{1}{2}p} \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\iint_\Omega (f_1)^p \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\iint_\Omega |f_2|^p \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Důkaz plyne okamžitě z nerovnosti Minkovského.[3])

Definice 2. *Buď* C *jednoduchá, po částech dostatečně hladká křivka a* Ω *její vnitřek. Buď na* Ω *definována integrovatelná funkce* f *taková, že*

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}p} \mathrm{d}\Omega < \infty , \quad p > \frac{4}{3} .$$

Buď na C *definována funkce* g. *Řekneme, že* g *je prodloužením funkce* f *na hranici*

[2]) Značíme $z \prec A_i$ resp. $z \succ A_i$, jestliže v okolí A_i je bod z za bodem resp. před bodem A_i, jdeme-li ve směru orientace křivky.

[3]) Minkovského nerovnost je

$$\left[\int |x + y|^p \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int |x|^p \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int |y|^p \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{p}} .$$

C oblasti Ω, jestliže existuje posloupnost funkcí f_n, $n = 1, 2, \dots$ spojitých na $\overline{\Omega}$ takových že je

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial(f_n - f)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(f_n - f)}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}p} \mathrm{d}\Omega + \iint_\Omega |f_n - f| \, \mathrm{d}\Omega \to 0 \,, \quad n \to \infty \,,$$

$$\int_C |g - f_n|^2 \, \mathrm{d}s \to 0 \,.$$

Poznámka 1. Jestliže f jest spojitá funkce na $\overline{\Omega}$, potom f na hranici je prodloužením i ve smyslu definice 2. Nehledíme-li případně na množinu míry nula, je to prodloužení jediné. (Srv. větu 1.) V tomto smyslu můžeme se dívat na definici 2 jako na zobecnění pojmu spojitého prodloužení.

Poznámka 2. V [1] zavedli jsme jiný pojem prodloužení (srv. def. 10 v [1]). Pro případ hranice dostatečně hladké jsou definice velmi podobné.

Poznámka 3. V definici 2 jsme předpokládali, že $p > \frac{4}{3}$. Vzhledem k větě 1 stačilo předpokládat, že $p > 1$ a místo $\int_C |g - f_n|^2 \, \mathrm{d}s \to 0$ požadovat, aby $\int |g - f_n| \, \mathrm{d}s \to 0$.

V dalším však vystačíme s případem $p \geqq \frac{4}{3}$ a získáme tím podobnost definice 2 a definice 10 v (1) pro případ dostatečně hladké hranice.

Věta 3. *Buď C jednoduchá, po částech dostatečně hladká orientovaná křivka a Ω její vnitřek. Buď $z_0 \in \Omega$. Potom pro každou holomorfní funkci φ definovanou na Ω takovou, že* $\operatorname{Im} \varphi(z_0) = 0$ *platí*

$$\iint_\Omega |\varphi|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \leqq K(\varepsilon) \left(\iint_\Omega (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega\right)^{1-} \,.$$

Přitom nerovnost platí pro každé $1 < \varepsilon < 0$ a konstanta $K(\varepsilon)$ nezávisí na funkci φ.

Důkaz. Viz větu 3 [2].

2. O biharmonickém problému

V tomto odstavci ukážeme, že metoda orthogonálních funkcí, jak byla popsána v [1], konverguje i pro oblasti s hranicí po částech dostatečně hladkou.

Definice 3. *Buď C jednoduchá, po částech dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Buďtež na C definovány funkce h a k takové, že*

$$\int_C |h|^2 \, \mathrm{d}s < \infty \,, \quad \int_C |k|^2 \, \mathrm{d}s < \infty \,.$$

Potom regulárním biharmonickým problémem vzhledem k oblasti Ω a funkcím h a k nazveme úlohu nalézti integrovatelnou biharmonickou funkci U takovou, že

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty$$

a funkce h a k jsou prodloužení $\frac{\partial U}{\partial x}$ resp. $\frac{\partial U}{\partial y}$ na hranici C ve smyslu definice 2.

Věta 4. *Buď C jednoduchá, po částech dostatečně hladká křivka a Ω její vnitřek. Regulární biharmonický problém vzhledem k oblasti Ω a funkcím h a k má řešení, jestliže existuje integrovatelná funkce f taková, že je*

1. $$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty\,.$$

2. *Funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ resp. $\frac{\partial f}{\partial y}$ má prodloužení h resp. k.*

Důkaz. Viz [3], str. 111 a další.

Platí nyní věta, jejíž tvrzení jest velmi podobné jako ve větě 19 v [1] a to i pro oblasti, jejichž hranice je křivka po částech dostatečně hladká.

Věta 5. *Buď C po částech dostatečně hladká a Ω její vnitřek. Buď $z_0 \in \Omega$. Buď ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$, posloupnost celistvých*[1]) *funkcí splňující tyto předpoklady:*

1. Posloupnost funkcí $v_n = \mathrm{Re}\, \psi_n$ jest uzavřená v prostoru všech harmonických funkcí na Ω integrovatelných s je kvadrátem, t. j. ke každému $\varepsilon > 0$ a každé harmonické funkci v takové, že

$$\iint_\Omega v^2\, \mathrm{d}\Omega < \infty\,,$$

existují koeficienty α_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, takové, že

$$\iint_\Omega \left(v - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i\right)^2 \mathrm{d}\Omega < \varepsilon\,.$$

2. Posloupnost funkcí $v_n = \mathrm{Re}\, \psi_n$ jest orthonormalisovaná, t. j. platí

$$\iint_\Omega v_n v_m\, \mathrm{d}\Omega = \begin{cases} 1 \text{ pro } n = m\,, \\ 0 \text{ pro } n \neq m\,. \end{cases}$$

3. Platí $\mathrm{Im}\, \psi_n(z_0) = 0$.

4. Platí $\psi_n = \Psi'_n$ a $\Psi_n(z_0) = 0$.

Buď dále g biharmonická funkce na Ωmající tyto vlastnosti:

1. $$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty\,;$$

2. $$g = \mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi + \chi]\,,$$ [4])

kde φ a χ jsou jisté holomorfní funkce definované na Ω.

Potom označíme-li

$$\varphi'_N = \tfrac{1}{4} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n\,, \quad \varphi_N = \tfrac{1}{4} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Psi_n\,,$$

---

[1]) Předpoklad, že funkce ψ_n jsou celistvé není podstatný.

[4]) Každou biharmonickou funkci lze v tomto tvaru vyjádřit. Srv. [4], str. 108.

$$F = \frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial g}{\partial y} = \varphi + z\bar{\varphi}' + \bar{\chi} ,$$

$$\alpha_n = \mathrm{Im} \int_C \overline{F}\psi_n \, \mathrm{d}t ,$$

$$\chi'_N(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{\overline{F(t)} - \overline{\varphi_N(t)} - \bar{t}\, \varphi'_N(t)}{t - z} \, \mathrm{d}t ,$$

platí

1. $\varphi'_N \to \varphi'$ *skoro stejnoměrně na* Ω *a*

$$\iint_\Omega |\varphi'_N - \varphi'|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \to 0$$

pro každé $1 > \varepsilon > 0$,

2. $\varphi_N \to \varphi$ *skoro stejnoměrně na* Ω *a na* C *platí*

$$\int_C |\varphi_N - \varphi|^2 \, \mathrm{d}s \to 0 \,,$$ [5])

3. $\chi'_N \to \chi'$ *skoro stejnoměrně bodově na* Ω.

Důkaz přenechávám čtenáři. Je úplně stejný jako ve větě 19 [1]. Tvrzení 2 a druhá část v tvrzení 1 plyne z vět 1 a 3 této poznámky.

LITERATURA

[1] *Ivo Babuška*: Poznámka k jednomu řešení biharmonického problému. Časopis pro pěstování matematiky *79* (1954), 41—63.

[2] *Ivo Babuška*: Од одном свойстве гармонических функций. Чехосл. мат. журнал, *5* (80), 1955, 220—223.

[3] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Лен. гос. унив. 1950.

[4] *Н. И. Мусхелишвили:* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.

Резюме

О ПЛОСКОЙ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ В ОБЛАСТЯХ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška), Прага.

(Поступило в редакцию 1/XI 1954 г.)

В статье распространяются результаты работы „Заметка к одному решению бигармонической проблемы“ [1] на области, границы которых достаточно гладки по частям.

[5]) Poněvadž $\Delta g = 4 \,\mathrm{Re}\, \varphi'$, snadno z věty 1 nahlédneme, že φ má prodloužení ve smyslu definice 2 [t. j. její reálná a imaginární část]. Pod integračním znamením uvažujeme právě toto prodloužení.

Zusammenfassung

ÜBER DAS EBENE BIHARMONISCHE PROBLEM IN GEBIETEN MIT WINKELPUNKTEN

IVO BABUŠKA, Praha.

(Eingelangt 1. 11. 1954.)

Dieser Artikel enthält die Verbreitung der Resultate der „*Bemerkung zur gewissen Lösung des biharmonischen Problems*“ (Časopis pro pěstování matematiky, *79*, 1954, 41—63) auch für Gebiete die durch teilweise glatte Kurve begrenzt sind.

CHARAKTERISACE TĚTIVOVÝCH A TEČNOVÝCH MNOHO-ÚHELNÍKŮ

LADISLAV KOSMÁK, Praha.

(Došlo dne 2. listopadu 1954.) DT: 513.192

V práci jsou nalezeny nutné a dostatečné podmínky pro to, aby $n \geqq 4$ bodů v rovině leželo na kružnici a aby se n přímek dotýkalo kružnice. Podmínky jsou vyjádřeny jednoduchými incidenčními vztahy; nejdůležitějším pojmem v těchto úvahách je pojem t. zv. orthocentrické přímky, přiřazené skupině čtyř přímek, jejíž žádné tři přímky neprocházejí týmž bodem a která obsahuje nejvýše jednu dvojici rovnoběžek. — Věty, dokázané v této práci, mají aplikace při studiu jisté speciální křivky, jak bude ukázáno ve společné práci ing. dr F. Sedláka a autora.

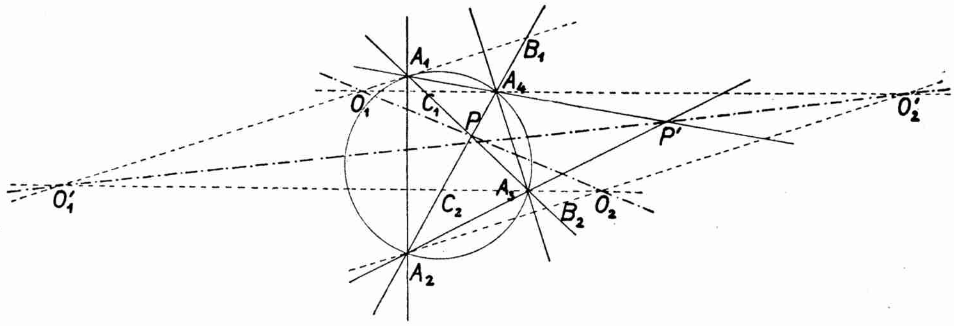
Je známo, že průsečíky výšek čtyř trojúhelníků, určených vždy třemi přímkami čtyřstranu*), leží na téže přímce; budeme ji nazývat *orthocentrická přímka* čtyřstranu. Obecněji platí: Je-li v rovině dáno n přímek ($n \geqq 4$), z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem, pak orthocentra všech trojúhelníků tvořených těmito přímkami leží na jedné přímce právě tehdy, když všechny dané přímky se dotýkají téže paraboly; přímka, na níž leží orthocentra, je řídicí přímkou této paraboly. — Obě tyto věty pocházejí od Steinera (Ges. Werke 1, str. 128, 134). Poznamenejme, že první z nich se nejjednodušeji dokáže dvojím použitím této věty: Jsou-li na přímce dány tři navzájem různé body A_1, A_2, A_3 a jsou-li pro $i = 1, 2, 3$ a_i, a_i' přímky takové, že $a_i \parallel a_i'$ a že a_i, a_i' neprocházejí bodem A_i a procházejí každá jedním ze zbývajících daných bodů tak, že a_1 prochází bodem A_2, a_2 bodem A_3 a a_3 bodem A_1, pak průsečíky dvojic přímek

$$(p_1, p_2'),$$
$$(p_2, p_3'),$$
$$(p_3, p_1')$$

leží na téže přímce. — Toto tvrzení snadno plyne z vět o stejnolehlosti trojúhelníků.

*) Čtyřstranem zde rozumíme skupinu čtyř přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem.

Definici orthocentrické přímky nyní rozšíříme na případ skupiny čtyř přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem a právě dvě jsou rovnoběžné; orthocentrickou přímkou takové čtveřice přímek budeme rozumět kolmici spuštěnou na rovnoběžky z průsečíku zbývajících dvou přímek. Kromě toho pro jednodušší vyjadřování zavedeme tyto názvy: průsečík každých dvou z libovolné skupiny přímek v rovině nazveme vrcholem té skupiny a spojnici dvou jejích vrcholů, která do ní nepatří, budeme říkat diagonála dané skupiny. Nyní platí:



Obr. 1.

Věta I. *Nechť body A_1, A_2, A_3, A_4 nejsou vrcholy rovnoběžníka a nechť žádné tři z nich neleží na téže přímce. Pak tyto body leží na kružnici právě tehdy, když orthocentrická přímka libovolné skupiny* **P** *čtyř přímek s vrcholy v těchto bodech buďto prochází průsečíkem diagonál té skupiny, na nichž po dvou leží dané čtyři body, anebo, neprotínají-li se tyto diagonály, je s nimi rovnoběžná.*

Důkaz. I. Nechť body A_1, A_2, A_3, A_4 leží na kružnici k. Rozlišujme tři možnosti.

a) Body A_1, A_2, A_3, A_4 jsou vrcholy lichoběžníka. Pak je tvrzení zřejmé, neboť tětivový lichoběžník je rovnoramenný.

Můžeme tedy předpokládat, že skupina **P** je čtyřstran. Pak jsou možné dva případy.

b) Průsečík diagonál, na nichž leží dané čtyři body, leží uvnitř čtyřúhelníka s vrcholy A_1, A_2, A_3, A_4. Je-li v tomto čtyřúhelníku při některém vrcholu pravý úhel, je tvrzení opět zřejmé; není-li tomu tak, jsou všecky body označené v obr. 1 navzájem různé a platí (viz obr. 1):

$$\triangle A_4C_1P \sim \triangle C_2A_3P \sim \triangle A_1B_1P \sim \triangle B_2A_2P ,$$

neboť tyto trojúhelníky mají stejně velký úhel při vrcholu P a kromě toho

$$\sphericalangle PA_4C_1 = \sphericalangle PC_2A_3 = \tfrac{1}{2}\pi - \sphericalangle A_1A_2A_4 = \tfrac{1}{2}\pi - \sphericalangle A_1A_3A_4 = \sphericalangle PB_2A_2 = \\ = \sphericalangle PA_1B_1 .$$

Platí tedy

$$\overline{C_1P} : \overline{A_3P} = \overline{A_1P} : \overline{B_2P} = \overline{A_1C_1} : \overline{A_3B_2} ,$$

a ježto

$$\triangle A_1O_1C_1 \sim \triangle B_2O_2A_3 ,$$

je

$$\overline{C_1P} : \overline{A_3P} = \overline{C_1O_1} : \overline{A_3O_2} .$$

Při tom

$$\sphericalangle PC_1O_1 = \sphericalangle PA_3O_2 ,$$

takže

$$\triangle PC_1O_1 \sim \triangle PA_3O_2 ,$$

a ježto sobě odpovídající strany jsou rovnoběžné a oba trojúhelníky mají společný vrchol P, leží body P, O_1, O_2 na téže přímce.

c) Průsečík diagonál, spojujících vždy dva z daných bodů, leží vně čtyřúhelníka $A_1A_2A_3A_4$. Podle b) je trojúhelník $A_1O_1A_4$ homologický s trojúhelníkem $A_3O_2A_2$; jejich odpovídající si strany se protínají v bodech O_1', O_2', P', které podle Desarguesovy věty leží na přímce. Ježto body O_1', O_2' jsou body orthocentrické přímky daného čtyřstranu a bod P' příslušný průsečík jeho diagonál, je tím věta dokázána i v tomto posledním případě.

II. Dokážeme nyní, že podmínka, o níž jsme právě zjistili, že je nutná pro to, aby body A_1, A_2, A_3, A_4 ležely na kružnici, je také postačující.

To se použitím druhé ze Steinerových vět citovaných na začátku snadno dokáže v případě, že jeden z bodů A_1, A_2, A_3, A_4 leží uvnitř trojúhelníka s vrcholy ve zbývajících bodech. Kdyby totiž orthocentrická přímka skupiny **P** procházela příslušným průsečíkem diagonál, musela by řídící přímka paraboly, určené přímkami skupiny **P** jako tečnami, procházet vnitřkem této paraboly. — Kromě toho si čtenář snadno sám provede jednoduchý důkaz v případě, že body A_1, A_2, A_3, A_4 leží na dvou rovnoběžkách.

Předpokládejme tedy, že body A_1, A_2, A_3, A_4 neleží na kružnici, že čtyřúhelník s vrcholy v těchto bodech je konvexní a že **P** je čtyřstran. Všimněme si nejprve případu, že průsečík D příslušných diagonál skupiny **P** leží uvnitř čtyřúhelníka $A_1A_2A_3A_4$. Nechť je označení voleno tak, že přímky A_1A_3 a A_2A_4 jsou diagonály skupiny **P**. Bez újmy obecnosti budeme předpokládat, že úhel při vrcholu A_2 trojúhelníka $A_1A_2A_3$ je tupý.

Opišme trojúhelníku $A_1A_2A_3$ kružnici k a nechť A_0 je její průsečík s přímkou A_2A_4. Veďme nyní v trojúhelníku $A_1A_2A_3$ vrcholy A_1 a A_3 rovnoběžku s protější stranou tohoto trojúhelníka a označme B_1, B_2 průsečíky těchto přímek s diagonálou A_2A_4. Dále vztyčme kolmici h_1 v bodě A_1 na přímku A_1A_2 a h_2 v bodě A_3 na přímku A_2A_3. Aspoň jedna z přímek h_1, h_2 protne přímku A_2A_4; protne-li ji jen jedna, je některá z přímek A_1A_2, A_2A_3 kolmá na diagonálu A_2A_4; dejme tomu, že je to přímka A_1A_2. Orthocentrum trojúhelníka tvořeného přímkami A_1A_2, A_3A_4, A_4A_1 leží potom na přímce A_2A_4 a je různé od bodu D, neboť jinak by bylo $A_1A_3 \perp A_3A_4$ a body A_1, A_2, A_3, A_4 by ležely na kružnici. Orthocentrum trojúhelníka tvořeného přímkami A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4

však neleží na přímce A_2A_4, takže v tomto případě orthocentrická přímka skupiny **P** nemůže procházet bodem D.

Můžeme tedy předpokládat, že obě přímky h_1, h_2 protnou přímku A_2A_4, a to h_1 v bodě H_1 a h_2 v bodě H_2. Ježto není $A_1A_2 \perp A_2A_3$, je bod H_1 různý od B_1 a H_2 různý od B_2. Podrobný rozbor jednotlivých možností polohy bodu vzhledem k bodům A_0, B_1, B_2, H_1, H_2 vede nyní k výsledku, že v žádném případě nemůže orthocentrická přímka skupiny **P** procházet bodem D. Tyto úvahy jsou sice zdlouhavé, avšak velmi snadné, a proto upouštíme od jejich výkladu.

Zbývá případ, že se diagonály skupiny **P** protínají vně čtyřúhelníka $A_1A_2A_3A_4$. Pak zcela obdobným způsobem jako v první části důkazu použitím Desarguesovy věty lze ukázat, že prochází-li orthocentrická přímka takové skupiny průsečíkem D diagonál, prochází i orthocentrická přímka té skupiny čtyř přímek s vrcholy v daných bodech, jejíž diagonály se protínají uvnitř čtyřúhelníka, průsečíkem jejích příslušných diagonál, což je nemožné.

Věta 2. *Jsou-li dány body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geqq 5$), z nichž žádné tři neleží na přímce, pak existuje uspořádaná skupina $n - 3$ čtveřic těchto bodů, která má tyto vlastnosti:*

a) *každá čtveřice kromě první má s předcházející tři společné body;*

b) *žádná z nich neobsahuje vrcholy rovnoběžníka;*

c) *každý z daných bodů patří do některé čtveřice.*

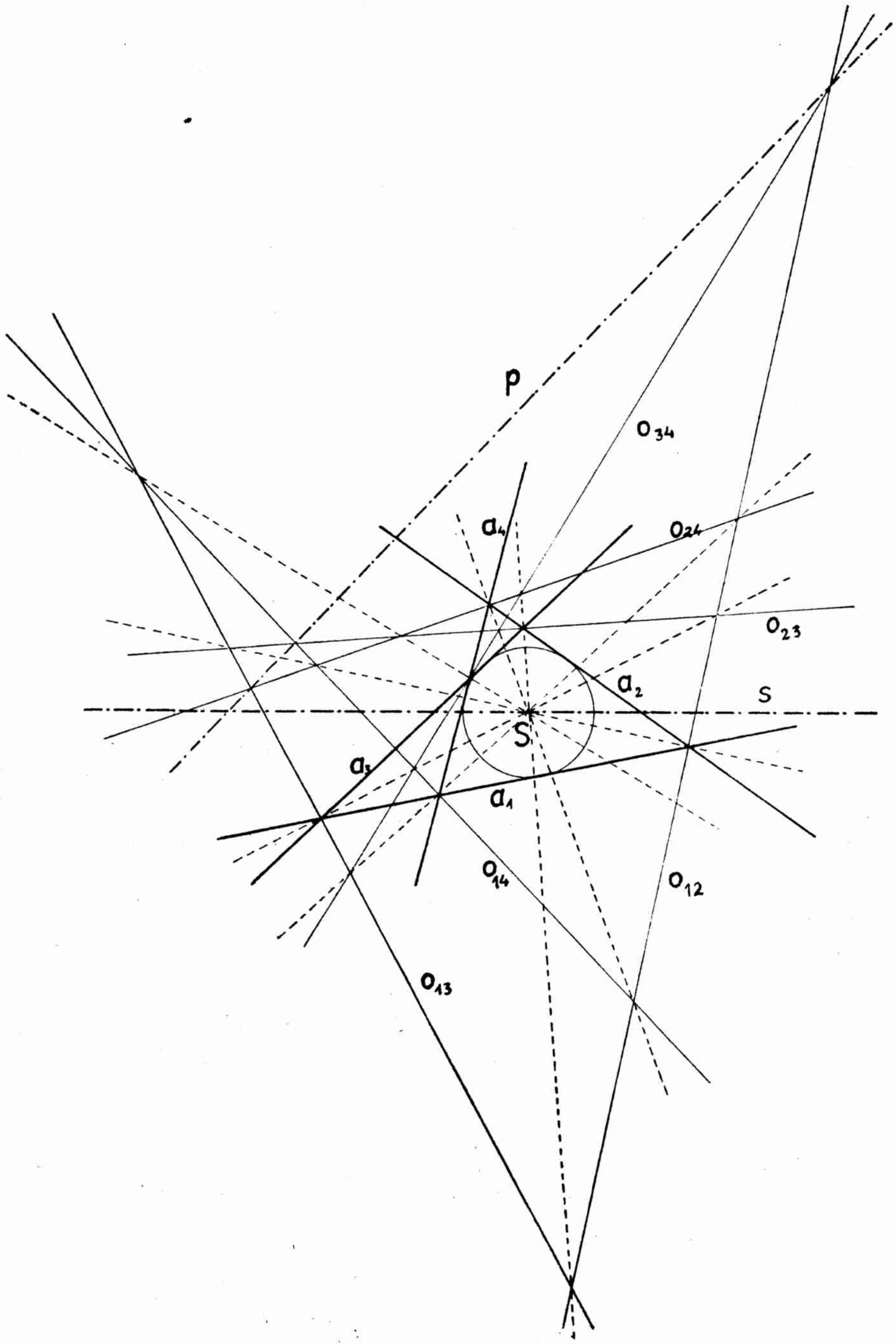
Důkaz se provede úplnou indukcí. Správnost tvrzení se snadno ověří pro $n = 5$. Je-li pak $n > 5$ a předpokládáme-li, že věta 2 platí pro $n - 1$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, stačí k uspořádané skupině $n - 4$ čtveřic, která je jim přiřazena podle věty 2, připojit jako poslední tu ze dvou čtveřic, jež podle prvního kroku důkazu odpovídají skupině pěti bodů skládající se z poslední čtveřice uspořádané skupiny odpovídající bodům $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ a z bodu A_n, která obsahuje bod A_n.

Věta 3. *Je-li n přirozené číslo, $n \geqq 5$, pak n bodů, z nichž žádné tři neleží na přímce, leží na kružnici právě tehdy, když pro každou z $n - 3$ čtveřic, které jsou daným n bodům přiřazeny podle věty 2, platí, že orthocentrická přímka libovolné skupiny čtyř přímek, která má vrcholy v bodech této čtveřice, prochází průsečíkem diagonál té skupiny, na nichž leží body této čtveřice anebo, neprotínají-li se, je s nimi rovnoběžná.*

Důkaz. Věta 3 bezprostředně plyne z věty 1 a 2.

Definice. Skupina $n \geqq 4$ přímek se nazývá tečnová, právě když všechny její přímky se dotýkají téže kružnice.

Věta 4. *Skupina čtyř přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem a nejvýš dvě jsou rovnoběžné, je tečnová právě tehdy, když platí: Sestrojíme-li osy dvojic různoběžek této skupiny tak, aby žádná neprocházela vnitřkem jednoho z konvexních útvarů, omezených všemi přímkami skupiny, pak orthocentra všech trojúhelníků, tvořených těmito přímkami, leží na téže přímce.* (Viz obr. 2.)



Obr. 2.

Důkaz. I. Nechť skupina čtyř přímek splňuje předpoklady věty 4. Tvrzení věty 4 zřejmě platí v případě, že daná skupina je souměrná podle osy, která její přímky buď neprotíná nebo protíná ve vrcholech skupiny; není-li tomu tak, je snadno patrno, že žádné tři osy, sestrojené podle věty 4, neprocházejí týmž bodem a žádné dvě z nich nejsou rovnoběžné. Trojúhelník tvořený těmito přímkami nazveme význačný, jsou-li přímky jeho stran osami úhlů (vnějších nebo vnitřních) při vrcholech některého trojúhelníka, tvořeného danými přímkami. Průsečíky výšek všech význačných trojúhelníků zřejmě leží ve středu S kružnice, jíž se dané přímky dotýkají. Dále si uvědomme, že čtyřúhelník omezený zmíněnými osami dvojic různoběžek dané skupiny, které procházejí dvěma dvojicemi protějších vrcholů dané skupiny, je tětivový; o tom se lze snadno přesvědčit výpočtem jeho úhlů.

Všimněme si nyní, že každý čtyřstran tvořený osami definovanými ve větě 4 buďto je tětivový nebo obsahuje význačný trojúhelník. Z toho podle věty 1 snadno plyne, že orthocentrické přímky všech těchto čtyřstranů procházejí bodem S, což však není možné jinak, než že všecky tyto přímky splývají.

II. Není-li skupina čtyř přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné, tečnová, je snadno patrno, že žádné tři průsečíky výšek význačných trojúhelníků neleží na přímce. Obsahuje-li daná skupina dvojici rovnoběžek, zjistíme, že orthocentra obou význačných trojúhelníků určují přímku různou od spojnice průsečíků dvojic os, které se protínají pod pravým úhlem.

Věta 5. *Je-li dána skupina $n \geqq 5$ přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, pak existuje uspořádaná skupina $n - 3$ čtveřic těchto přímek taková, že platí:*

a) *každá čtveřice kromě první má s předcházející tři společné přímky;*
b) *každá z daných přímek patří do některé čtveřice;*
c) *v každé čtveřici jsou nejvýš dvě rovnoběžky.*

Důkaz této věty se snadno provede úplnou indukcí zcela obdobně jako u věty 3.

Z věty 4 a 5 ihned plyne

Věta 6. *Skupina $n \geqq 5$ přímek, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, je tečnová právě tehdy, když každá z čtveřic přímek, které jsou jí přiřazeny podle věty 5, splňuje podmínku věty 4.*

Poznámka. Všimněme si, že ve čtyřstranu průsečíky těch os (sestrojených podle věty 4) dvojic přímek, které procházejí protějšími vrcholy, leží na přímce.

Резюме

ХАРАКТЕРИЗАЦИА МНОГОУГОЛЬНИКОВ, ОБРАЗОВАННЫХ ХОРДАМИ И КАСАТЕЛЬНЫМИ ОКРУЖНОСТИ

ЛАДИСЛАВ КОСМАК (Ladislav Kosmák), Прага.

(Поступило в редакцию 2. XI. 1954 г.)

Известно, что точки пересечения высот четырех треугольников, образованных сторонами полного четырехсторонника, лежат на прямой; эту прямую мы называем *ортоцентрической прямой* четырехсторонника. Главным результатом настоящей работы являются следующие две теоремы:

1. *Четыре точки в плоскости, которые не лежат в вершинах никакого параллелограмма или трапеции и из которых никакие три не лежат на одной прямой, лежат на окружности тогда и только тогда, если ортоцентрическая прямая произвольного четырехсторонника с вершинами в этих точках проходит через точки пересечения тех его диагоналей, на которых лежат данные четыре точки или, если они непересекаются, она параллельна им.*

2. *Четыре прямые, образующие четырехсторонник, касаются окружности тогда и только тогда, если ортоцентры всех треугольников, образованных биссектрисами внешних углов (т. е. тех, которые не содержат внутренность выпуклого четырехугольника, ограниченного данными прямыми) образованных парами данных прямых, лежат на одной прямой.*

Автор доказывает эти утверждения в несколько более общем виде и обобщает их на случай $n > 4$ точек и прямых.

Résumé

UNE CARACTERISATION DES POLYGONES INSCRIPTIBLES ET CIRCONSCRIPTIBLES

LADISLAV KOSMÁK, Prague.

(Reçu le 2 novembre 1954.)

Les orthocentres des quatre triangles formés des droites d'un quadrilatère complet sont situés sur la droite qu'on appelle *droite orthocentrique* de ce quadrilatère. Les résultats fondamentaux de ce travail consistent en deux théorèmes suivants:

1. *La condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points donnés dans un plan dont nuls trois n'appartient à une même droite et qui ne sont les sommets d'aucun parallélogramme ou trapèze soient situés sur une circonférence est que la droite orthocentrique de tout quadrilatère complet avec les sommets dans les points donnés passe par le point d'intersection des diagonales de ce quadrilatère qui joignent les points donnés ou, si ces diagonales ne se rencontrent pas, qu'elle soit parallèle avec elles.*

2. *La condition nécessaire et suffisante pour que quatre droites du plan dont nulles trois ne se coupent à un même point et nulles deux ne sont parallèles soient tangentes à une circonférence est que les orthocentres de tous les triangles formés des bissectrices des angles extérieurs (c'est-à-dire n'ayant pas de points communs avec l'intérieur du quadrilatère convexe formé des quatre droites données) formées des droites données se trouvent sur une droite.*

L'auteur démontre ces théorèmes et en donne des généralisations.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

GEOMETRIE SIMPLEXU V E_n

(druhá část)

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Došlo dne 20. listopadu 1954.) DT 513.821.2

V této druhé části práce se zavádí pojem význačné množiny simplexu, popisuje se množina vlastních i nevlastních význačných bodů a vlastních význačných přímek. Jsou zde uvedeny některé význačné množiny obecného simplexu a dokazují se věty o isogonální příbuznosti.

6. Význačné množiny simplexu. Budiž opět E_n eukleidovský prostor dimense n (n přirozené). Nazveme přípustným zobrazením m-tého řádu ($m \geqq 0$ celé) takové zobrazení φ, které každé uspořádané skupině $m + 1$ bodů A_1, $A_2, \ldots, A_{m+1}$ z E_n přiřazuje nějakou množinu $M \subset \bar{E}_n$,*)

$$M = \varphi(A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}) ,$$

a to tak, že platí: je-li T isometrické zobrazení $\bar{E}_n$, pak

$$\varphi(TA_1, TA_2, \ldots, TA_{m+1}) = T\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}) .$$

Budiž nyní $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ ($m \geqq 0$ celé) pevná skupina (ne uspořádaná) bodů z E_n. Nazveme *význačnou množinou* této skupiny každou takovou množinu $M \subset \bar{E}_n$, k níž existuje přípustné zobrazení m-tého řádu φ tak, že

$$M = \varphi(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{m+1}})$$

pro každou permutaci $(i_1, i_2, \ldots, i_{m+1})$ indexů $1, 2, \ldots, m + 1$. Význačnými množinami simplexu v E_n rozumíme význačné množiny skupiny vrcholů simplexu. Zřejmě průnik i sjednocení význačných množin simplexu jsou opět význačné množiny simplexu.

V dalších větách se budeme zabývat množinou všech význačných bodů pevného simplexu v E_n o vrcholech $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$, t. j. množinou všech význačných jednobodových množin tohoto simplexu.

Věta 16. *Množina všech vlastních význačných bodů simplexu tvoří (neprázdný) lineární prostor.*

*) $\bar{E}_n$ je eukleidovský prostor E_n, doplněný nevlastními body.

Důkaz. Označme Λ množinu všech vlastních význačných bodů daného simplexu. Jsou-li P, Q dva různé body Λ, pak každý vlastní bod přímky PQ je význačný bod simplexu: pro body P a Q to platí, každému jinému bodu S přímky PQ je přiřazen dělicí poměr λ $(0 \neq \lambda \neq 1)$ vzhledem k bodům P a Q. Odpovídají-li význačným bodům P a Q přípustná zobrazení φ a ψ, takže $P = \varphi(O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_{n+1}})$, $Q = \psi(O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_{n+1}})$ pro každou permutaci $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$, označme χ takové zobrazení, které každé uspořádané skupině $n + 1$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ z E_n přiřazuje množinu všech bodů X, k nimž existují vlastní body $P' \in \varphi(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1})$, $Q' \in \psi(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1})$, $P' \neq Q'$, tak, že X má dělicí poměr λ vzhledem k bodům P', Q'. Zřejmě je χ přípustné zobrazení a platí

$$S = \chi(O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_{n+1}})$$

pro každou permutaci $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$, t. j. bod S je rovněž význačným bodem simplexu.

Odtud však ihned plyne, že Λ je lineární prostor. Že Λ je neprázdné, ukážeme (nezávisle) ve větě 18.

Věta 17. *Nechť $\sigma_i(\xi_{kl})$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, jsou reálné funkce $\binom{n+1}{2}$ reálných proměnných ξ_{kl}, $k < l$, $k, l = 1, 2, \ldots, n + 1$, definované pro všechna kladná ξ_{kl}; definujme ještě pro $k > l$ $\xi_{kl} = \xi_{lk}$. Nechť dále platí: při výměně každých dvou indexů i, j, $i \neq j$, u ξ_{kl} se pro $i \neq p \neq j$ σ_p nezmění, σ_i přejde v σ_j a σ_j v σ_i.*[1] *Označme v simplexu Σ o vrcholech $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ čtverce vzdáleností bodů O_i, O_j symboly e_{ij}. Potom bod o barycentrických souřadnicích $\sigma_i(e_{kl})$, pokud existuje (t. j. pokud nejsou $\sigma_i(e_{kl}) = 0$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$), je význačný bod simplexu Σ.*

Důkaz. Nechť σ_i jsou funkce splňující předpoklady věty. Označme $\sigma(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1})$ zobrazení, které každé skupině bodů $A_1, \ldots, A_{n+1}$ z E_n přiřazuje buď bod o barycentrických souřadnicích $\sigma_i(a_{kl})$, kde $a_{kl} = \varrho^2(A_k, A_l)$, $i, k, l = 1, \ldots, n + 1$, vzhledem k simplexu $A_1, \ldots, A_{n+1}$, pokud body $A_1, \ldots, A_{n+1}$ jsou lineárně nezávislé a pokud nejsou $\sigma_i(a_{kl}) = 0$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$, anebo prázdnou množinu v opačném případě. Zobrazení σ je přípustné, jak plyne z invariance barycentrických souřadnic při isometrických transformacích. Dále je

$$\sigma(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) = \sigma(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{n+1}}) \tag{6,1}$$

pro každou permutaci $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ indexů $1, 2, \ldots, n + 1$. Podle předpokladů o funkcích σ_i to totiž platí pro každou transposici (podrobněji: je-li na jedné straně rovnosti (6,1) prázdná množina, je i na druhé straně prázdná množina; je-li na jedné straně (6,1) bod, je na druhé straně týž bod, neboť jeho bary-

[1]) Podrobněji: položíme-li $\xi'_{ik} = \xi_{jk}$, $\xi'_{jk} = \xi_{ik}$ pro $i \neq j \neq k$, $\xi'_{kl} = \xi_{kl}$ pro $i \neq k \neq j$, $i \neq l \neq j$, je pro $i \neq p \neq j$ $\sigma_p(\xi_{kl}) = \sigma_p(\xi'_{kl})$, $\sigma_i(\xi_{kl}) = \sigma_j(\xi'_{kl})$, $\sigma_j(\xi_{kl}) = \sigma_i(\xi'_{kl})$.

centrické souřadnice se nezmění až na výměnu příslušných dvou souřadnic, pro které se však zároveň mění oba vrcholy simplexu $A_1, \ldots, A_{n+1}$). Poněvadž každou permutaci lze složit z transposic, je tím věta dokázána.

Bezprostředním důsledkem je tato věta:

Věta 18. *V každém simplexu je bod o barycentrických souřadnicích* $(1, 1, \ldots, 1)$ *význačný bod. Nazývá se těžištěm simplexu.*

Důkaz. Stačí ve větě 17 položit $\sigma_i(\xi_{kl}) = 1$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$.

Poznámka. Nechť M_1 je neprázdná podmnožina množiny indexů $M = \{1, 2, \ldots, n + 1\}$. Potom těžiště té stěny simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$, která má vrcholy O_i, $i \in M_1$, má barycentrické souřadnice (vzhledem k celému simplexu) $T_{M_1} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1})$, kde $\xi_i = 1$ pro $i \in M_1$, $\xi_j = 0$ pro j non $\in M_1$. To plyne ihned z toho, že barycentrické souřadnice bodu v té stěně jsou $\xi_i = \xi_i^{(M_1)}$ pro $i \in M_1$, $\xi_j = 0$ pro j non$\in M_1$, kde $\xi_i^{(M_1)}$ jsou barycentrické souřadnice tohoto bodu (až příp. na faktor) vzhledem k simplexu (o příp. menším počtu dimensí) o vrcholech O_i, $i \in M_1$, jak vyplývá na př. z rovnice (2,8) odst. 2 prvé části tohoto článku.

Abychom mohli studovat lineární prostor Λ význačných bodů simplexu, zavedeme si nejprve pojem *grupy automorfismů simplexu*. Automorfismem simplexu v E_n nazýváme každé isometrické zobrazení E_n, které převádí množinu vrcholů simplexu v sebe. Automorfismy simplexu tvoří zřejmě grupu, kterou nazýváme grupou automorfismů simplexu. Každý automorfismus simplexu je jednoznačně určen permutací vrcholů simplexu (totiž permutací $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ čísel $1, 2, \ldots, n + 1$ takovou, že při tom automorfismu přejde vrchol O_k ve vrchol O_{i_k}), t. j. grupa automorfismů simplexu v E_n je isomorfní některé podgrupě grupy permutací $(n + 1)$-ho stupně. Množinu vrcholů simplexu lze rozložit na podmnožiny té vlastnosti, že každý vrchol O_i jedné podmnožiny přejde při libovolném automorfismu simplexu opět ve vrchol této podmnožiny, a při tom pro každý vrchol O_j této podmnožiny existuje alespoň jeden automorfismus simplexu, který převádí vrchol O_i ve vrchol O_j. Tyto podmnožiny odpovídají systémům transitivity uvedené podgrupy permutační grupy a budeme je proto nazývat systémy transitivity vrcholů. Tak simplex v E_n, jehož grupa automorfismů obsahuje jediný (identický) automorfismus, má $n + 1$ systémů transitivity vrcholů (v každém systému je vždy jeden vrchol).

Věta 19. *Význačné množiny simplexu* Σ *jsou právě ty množiny, které jsou invariantní při všech automorfismech simplexu* Σ.

Důkaz. Že význačná množina simplexu je invariantní při všech jeho automorfismech, je zřejmé. Nechť obráceně je M množina, invariantní při všech automorfismech simplexu Σ o vrcholech $O_1, \ldots, O_{n+1}$. Sestrojme nejprve ke každé permutaci $k_1, \ldots, k_{n+1}$ indexů $1, \ldots, n + 1$ zobrazení n-tého řádu $\psi_{k_1, \ldots, k_{n+1}}$ takto:

Nechť $A_1, \ldots, A_{n+1}$ je nějaká skupina $n + 1$ bodů z E_n; platí-li $\varrho(A_{k_i}, A_{k_j}) = \varrho(O_i, O_j)$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, n + 1$, t. j. tvoří-li (podle věty 3) body

$A_{k_1}, \ldots, A_{k_{n+1}}$ v tomto pořadí vrcholy simplexu Σ' shodného se simplexem Σ, pak $\psi_{k_1,\ldots,k_{n+1}}(A_1, \ldots, A_{n+1})$ je množina, která vznikne z M isometrií, převádějící Σ v Σ'. Neplatí-li $\varrho(A_{k_i}, A_{k_j}) = \varrho(O_i, O_j)$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, n + 1$, pak nechť $\psi_{k_1,\ldots,k_{n+1}}(A_1, \ldots, A_{n+1}) = \bar{E}_n$.

Zobrazení $\psi_{k_1,\ldots,k_{n+1}}$ jsou zřejmě vesměs přípustná. Položíme-li nyní $\varphi(A_1, \ldots, A_{n+1}) = \bigcap_{(k_1,\ldots,k_{n+1})} \psi_{k_1,\ldots,k_{n+1}}(A_1, \ldots, A_{n+1})$, je φ opět přípustné zobrazení a platí

$$M = \varphi(O_{i_1}, \ldots, O_{i_{n+1}})$$

pro každou permutaci $i_1, \ldots, i_{n+1}$ indexů $1, \ldots, n + 1$. Je tedy M skutečně význačná množina simplexu Σ.

Věta 20. *Nechť v simplexu Σ je r systémů transitivity vrcholů. Potom lineární prostor Λ význačných bodů simplexu má dimensi rovnu $r - 1$. Je určen r těžišti vždy té stěny simplexu Σ, která má vrcholy z jednoho systému transitivity vrcholů.*

Důkaz. Nechť simplex Σ má vrcholy $O_1, \ldots, O_{n+1}$ a nechť e_{ij} jsou opět čtverce vzdáleností vrcholů O_i, O_j. Označme na okamžik

$$x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n+1} \end{matrix} \right\|, \quad y = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n+1} \end{matrix} \right\|, \quad L = \|1, 1, \ldots, 1\|$$

(o $n + 1$ prvcích), $E = \|e_{ij}\|$.

Platí tato pomocná věta: *Nechť A je lineární zobrazení prostoru E_n, při kterém bodu o barycentrických souřadnicích $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ vzhledem k simplexu Σ odpovídá bod $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ tak, že pro $i = 1, \ldots, n + 1$ je*

$$y_i = \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} x_k\,,$$

t. j. pro $A = \|a_{ik}\|$ platí

$$y = Ax\,.$$

Zobrazení A je isometrické tehdy a jen tehdy, existuje-li nenulové číslo α tak, že

$$A'EA = \alpha^2 E\,, \tag{6,2}$$

$$LA \quad = \alpha L\,. \tag{6,3}$$

Důkaz. Podle rovnice (2,9) z věty 1 prvé části je čtverec vzdálenosti dvou vlastních bodů $\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}$ možno psát ve tvaru

$$\varrho^2(\overset{1}{X}, \overset{2}{X}) = \left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}}\right)' E \left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}}\right),$$

kde $\overset{1}{x}$ resp. $\overset{2}{x}$ jsou obdobné sloupcové matice barycentrických souřadnic bodů $\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}$ jako je matice x. Přitom je $L\overset{1}{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \overset{1}{x}_i \neq 0$, $L\overset{2}{x} \neq 0$. Odtud snadno plyne, že platí-li (6,2) a (6,3), je zobrazení A isometrické. Je-li obráceně A isometrické zobrazení, pak, jak známo, převádí vlastní body opět ve vlastní body a nevlastní opět v nevlastní; odtud plyne (6,3). Z toho, že platí $\varrho^2(A\overset{1}{X}, A\overset{2}{X}) = \varrho^2(\overset{1}{X}, \overset{2}{X})$ pro každou dvojici vlastních bodů $\overset{1}{X}, \overset{2}{X}$, pak plyne (s užitím (6,3))

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}}\right) A'EA \left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}}\right) = \left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}}\right)' E \left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}}\right),$$

t. j. po snadné úvaze rovnice (6,2).

Z této pomocné věty vyplývá, že automorfismům simplexu Σ odpovídají (až na nenulové faktory) takové matice $A = \|a_{ij}\|$, které mají tvar $a_{ij} = 1$ pro $j = k_i$, $a_{ij} = 0$ pro $j \neq k_i$, kde $(k_1, k_2, \ldots, k_{n+1})$ je permutace čísel $1, \ldots, n + 1$, a pro které je dále

$$A'EA = E\,. \tag{6,4}$$

Dokážeme teď druhou pomocnou větu:

Nechť $Y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ je vyjádření vlastního význačného bodu simplexu Σ v barycentrických souřadnicích a nechť vrcholy O_j, O_k simplexu Σ leží ve stejném systému transitivity. Potom je $y_j = y_k$.

Důkaz. Podle předpokladu existuje isometrické zobrazení A prostoru E_n tak, že převádí množinu vrcholů simplexu v sebe, a při tom vrchol O_j ve vrchol O_k. Pro příslušnou matici A tedy je

$$a_{kj} = 1\,, \quad a_{kl} = 0 \quad \text{pro} \quad l \neq j\,. \tag{6,5}$$

Protože Y je význačný bod, existuje přípustné zobrazení φ tak, že

$$Y = \varphi(O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}) = \varphi(AO_1, AO_2, \ldots, AO_{n+1})\,.$$

Odtud plyne, že pro některé $\varrho \neq 0$ je

$$Ay = \varrho y\,, \tag{6,6}$$

kde y je příslušná sloupcová matice. Protože Y je vlastní bod a platí (6,5), je v (6,3) $\alpha = 1$ a v (6,6) $\varrho = 1$. Ze vztahů (6,5) a (6,6) s $\varrho = 1$ pak ihned plyne $y_j = y_k$, jak jsme chtěli dokázat.

Nechť nyní je pro $M = \{1, 2, \ldots, n + 1\}$ $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_r$ rozklad množiny M, který odpovídá rozkladu množiny vrcholů simplexu Σ v systémy transitivity. Z druhé pomocné věty ihned plyne, že každý vlastní význačný bod Y má barycentrické souřadnice y_i tvaru

$$y_i = c_\lambda$$

pro $i \in M_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, r$. To však znamená, že bod Y leží v lineárním prostoru Λ_Σ, o němž mluví věta 20, vytvořeném těžišti systémů transitivity vrcholů. Tato těžiště mají totiž podle poznámky za větou 18 tvar (v barycentrických souřadnicích) $\overset{\lambda}{T} = (\overset{\lambda}{t_i})$, kde $\overset{\lambda}{t_i} = 1$ pro $i \in M_\lambda$, $\overset{\lambda}{t_i} = 0$ pro i non $\in M_\lambda$. Tedy $\Lambda \subset \Lambda_\Sigma$.

Obráceně, skupina vrcholů, které patří jednomu systému transitivity, je invariantní při všech automorfismech simplexu. Je tedy také těžiště vrcholů každého systému transitivity invariantní množina při všech automorfismech simplexu Σ, t. j. toto těžiště je význačný bod Σ. Odtud plyne, že $\Lambda_\Sigma \subset \Lambda$ a věta je dokázána.[2])

Všimněme si teď nevlastních význačných bodů. Jsou-li P, Q dva různé vlastní význačné body simplexu, je nevlastní bod přímky PQ (jakožto průnik význačné přímky PQ a význačné nevlastní nadroviny rovněž význačným bodem simplexu). Jsou tedy všechny nevlastní body lineárního prostoru Λ (přesněji $\bar{\Lambda}$) význačné body. Není však pravda, že vlastní i nevlastní body dohromady tvoří (uzavřený) lineární prostor. Tak pro $n = 1$ má každý simplex (dvojice různých bodů) jen jeden vlastní význačný bod (střed čili těžiště) a jeden nevlastní. Obdobně to může nastat i pro $n > 1$.[3])

Platí však tato věta:

Věta 21. *Nevlastní význačné body simplexu tvoří sjednocení $N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_k$ po dvou ortogonálních nevlastních lineárních prostorů N_i. Má-li Λ kladnou dimensi, je nevlastní lineární prostor prostoru Λ jedním z uvedených prostorů N_i.*

Důkaz. Dokážeme nejprve dvě pomocné věty:

I. Jsou-li P, Q dva různé význačné nevlastní body simplexu, pak buď P a Q jsou ortogonální, nebo každý bod přímky PQ je význačný.

Nejsou-li totiž P a Q ortogonální, pak bod P' přímky PQ, který je ortogonální k P, je rovněž význačný bod, který je různý od P i Q. Ke každému reálnému číslu λ, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$, lze přiřadit právě jeden bod X přímky PQ, pro který je dvojpoměr $(P, Q, P', X) = \lambda$, a takto dostaneme všechny body přímky PQ, různé od P, Q, P'. Jsou tedy všechny body přímky PQ význačné.

---

[2]) Na platnost věty 19 a odtud vyplývající vztah $\Lambda_\Sigma \subset \Lambda$ mne laskavě upozornil prof. VL. KNICHAL.

[3]) Plyne to na př. z této konstrukce:

Nechť $n > 1$. V E_n zvolme libovolný podprostor E_1 dimense 1 a další, s E_1 disjunktní podprostor E_{n-2}, pro $n > 2$ kolmý k E_1. V E_{n-2} sestrojme simplex $O_1, \ldots, O_{n-1}$ tak, aby všechny jeho (nenulové) hrany měly délky navzájem různé (takový simplex skutečně existuje, neboť tím požadujeme pouze platnost nerovností $\neq$, lineárních v e_{ij}). Označme P průsečík nadroviny ν, vedené prostorem E_{n-2} kolmo k E_1, s přímkou E_1. V E_1 teď zvolme body O_n a O_{n+1} tak, aby byly souměrně sdružené vzhledem k P a aby vzdálenost O_n a O_{n+1} byla různá od všech vzdáleností O_iO_j, $i, j = 1, \ldots, n - 1$, i od všech vzdáleností O_iO_n, O_iO_{n+1}. To lze, volíme-li O_nO_{n+1} dost malé. Tím dostáváme simplex $O_1, \ldots, O_{n+1}$, jehož grupa automorfismů má jen dva prvky, z nichž jeden odpovídá identitě a druhý symetrii podle ν. Každý vlastní význačný bod leží tedy v ν, avšak nevlastní bod přímky E_1 je rovněž význačným bodem, který neleží v ν.

II. Zavedeme-li relaci mezi význačnými nevlastními body $P \sim Q$, jestliže je buď $P = Q$, anebo $P \neq Q$ a celá přímka PQ je přímka význačných bodů, pak tato relace je ekvivalence.

Reflexivnost a symetrie uvedené relace je evidentní. Nechť nyní $P \sim Q$, $Q \sim R$, a při tom $P \neq Q$, $Q \neq R$ (jinak je zřejmě $P \sim R$). Jsou tedy všechny body přímek PQ a QR význačné. Leží-li body P, Q, R v přímce, je skutečně $P \sim R$. Nechť tedy neleží v přímce. Zvolme nějaký bod P_1 přímky PQ, různý od P i Q, a bod R_1 přímky QR, různý od Q i R (P_1 i R_1 jsou tedy význačné body). Můžeme teď v rovině určit jednoznačně soustavu projektivních souřadnic tím, že zvolíme body P, Q, R za vrcholy soustavy souřadnic a průsečík přímek P_1R a PR_1 za jednotkový bod soustavy. Každé třídě homogenních nenulových trojčíslí pak odpovídá nějaký bod roviny PQR, a dostaneme tím všechny body této roviny. Je proto každý bod roviny PQR význačný, a tedy i každý bod přímky PR, $P \sim R$.

Z II. pomocné věty plyne, že třídy nevlastních bodů podle uvedené ekvivalence tvoří lineární prostory. Z I. pomocné věty plyne, že dva takové různé lineární prostory jsou navzájem ortogonální. K důkazu věty 21 zbývá dokázat, že existuje-li neprázdný nevlastní útvar $\overline{N}$ lineárního prostoru Λ vlastních význačných bodů, pak $\overline{N}$ je jedním z uvedených lineárních prostorů. Kdyby totiž pro dvojici různých význačných nevlastních bodů P, Q platilo, že $P \in \overline{N}$, Q non$\in \overline{N}$, $P \sim Q$, pak by na přímce PQ existoval bod $R \neq P$, který by byl význačný, ale nebyl by kolmý k P. Je-li T těžiště simplexu, S bod přímky TP, různý od T i P, pak $S \in \Lambda$ je význačný bod a pata kolmice spuštěné z bodu S k přímce TR je vlastní bod S', který neleží v Λ, avšak je význačný. Tím jsme dostali spor.

Poznámka. Podobnou metodou jako v důkazu druhé pomocné věty při důkazu věty 20 lze ukázat: *Jsou-li vrcholy O_j a O_k ve stejném systému transitivity a je-li $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$ význačný nevlastní bod, pak platí $y_j = \pm y_k$.*

Pomocí nevlastních význačných bodů můžeme snadno popsat množinu význačných vlastních přímek.

Věta 22. *Množina význačných vlastních přímek simplexu je tvořena jednak množinou všech vlastních přímek prostoru Λ význačných bodů, jednak přímkami PQ, kde bod P probíhá Λ a bod Q probíhá ty nevlastní lineární prostory význačných bodů z věty 21, které jsou různé od nevlastního prostoru $\overline{N}$ prostoru Λ.*

Důkaz. Že každá přímka uvedených vlastností je význačná vlastní přímka, je zřejmé.

Nechť tedy obráceně je p význačná vlastní přímka. Je-li $p \in \Lambda$, věta platí. Předpokládejme tedy, že p non$\in \Lambda$. Pata kolmice z těžiště T simplexu na p je zřejmě vlastní význačný bod simplexu; označíme-li jej P, je $P \in \Lambda$. Nevlastní bod Q přímky p je význačný nevlastní bod, který neleží v $\overline{\Lambda}$. Tím je důkaz proveden.

Poznámka. Obdobně lze popsat množinu všech vlastních význačných lineárních prostorů dimense k, $0 < k < n$ pomocí bodů z Λ a nevlastních význačných lineárních prostorů dimense $k - 1$.

7. Speciální význačné množiny simplexu. Ve větě 19 jsme si ukázali, že těžiště simplexu je význačný bod. V tomto odstavci najdeme jiné význačné množiny simplexu a uvedeme jejich vlastnosti.

Věta 23. *Ke každému simplexu v E_n existuje právě jedna $(n - 1)$-koule,*[4] *která prochází všemi jeho vrcholy (opsaná $(n - 1)$-koule). Její rovnice v barycentrických souřadnicích je*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j = 0\,, \tag{7,1}$$

její střed je bod $S = (g_{01}, g_{02}, \ldots, g_{0,n+1})$[5] *a poloměr $r = \sqrt{-\frac{g_{00}}{2\Delta}}$. Neobsahuje žádný vnitřní bod simplexu.*

Důkaz. Věta plyne ihned z věty 14 a z faktu, že číslo $\sqrt{-\frac{g_{00}}{2\Delta}}$ je kladné jakožto čtverec vzdálenosti bodů S a O_j. Závěr vyplývá ze (7,1) a z $e_{ii} = 0$, $e_{ij} > 0$ pro $i \neq j$.

Poznámka I. Z nezávislosti bodu S na permutacích vrcholů a na isometrických transformacích plyne, že S je význačný bod (snadno to také plyne z věty 18).

Poznámka II. Můžeme teď pomocí množiny všech význačných bodů simplexu a opsané $(n - 1)$-koule popsat množinu všech význačných nadrovin simplexu. Nadrovina π je totiž význačná tehdy a jen tehdy, je-li její pól vzhledem k opsané $(n - 1)$-kouli význačný (vlastní nebo nevlastní) bod. Podobně to lze učinit pro každou význačnou regulární kvadriku simplexu.

Věta 24. *Nechť m je přirozené číslo, $m \leq n - 1$. Existuje jediná kvadrika, která se dotýká každé m-dimensionální stěny simplexu v E_n v těžišti této stěny.*[6] *V barycentrických souřadnicích je její rovnice*

$$(m + 1) \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 = 0\,, \tag{7,2}$$

její střed je v těžišti simplexu.

Důkaz. Předpokládejme, že taková kvadrika existuje; nechť má v barycentrických souřadnicích rovnici $\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0$. Snadno se zjistí, že vlastnost této kvadriky, že se dotýká každé m-dimensionální stěny simplexu v jejím

---

[4]) Viz odst. 5.

[5]) Čísla g_{00}, g_{0i}, Δ jsou zavedena v odst. 2 první části.

[6]) Těžištěm stěny $O_{k_1}, O_{k_2}, \ldots, O_{k_{m+1}}$ rozumíme těžiště těchto vrcholů.

těžišti, je ekvivalentní s tím, že pro každou takovou podmnožinu M_{m+1} množiny $M = \{1, 2, \ldots, n + 1\}$, která má $m + 1$ prvků, a pro každé $i \in M_{m+1}$ platí

$$\sum_{k \in M_{m+1}} a_{ik} = 0 .$$

Protože je $1 \leq m \leq n - 1$, plyne odtud snadno, že pro $i \neq j$ je $a_{ij} = a$, $a_{ii} = - ma$, $a \neq 0$. To však ihned dává (7,2). Že těžiště simplexu je středem kvadriky (7,2), plyne z faktu, že polární nadrovinou těžiště vzhledem ke kvadrice (7,2) je nevlastní nadrovina.

Poznámka. Kvadriky (7,2) pro $m = 1, 2, \ldots, n - 1$ jsou navzájem homotetické a homotetické i s kvadrikou téhož tvaru pro $m = 0$. Tato kvadrika prochází všemi vrcholy simplexu a nazývá se *Steinerova opsaná kvadrika* (nebo Steinerův opsaný elipsoid, neboť všechny kvadriky (7,2) pro $m = 0, \ldots, n - 1$ jsou eliptického typu), kvadriky (7,2) pro $m > 0$ Steinerovy vepsané kvadriky (elipsoidy). Množině kvadrik tvaru (7,2) pro $m > - 1$ budeme říkat *Steinerův systém kvadrik.*

Věta 25. *V simplexu existuje jediný bod L té vlastnosti, že součet čtverců jeho vzdáleností od $(n - 1)$-rozměrných stěn je minimální. V barycentrických souřadnicích je $L = (g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{n+1,n+1})$; nazývá se Lemoinův bod simplexu. Je vždy vnitřním bodem simplexu.*

Důkaz. Nechť $P = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+1})$ je vlastní bod. Pak součet čtverců jeho vzdáleností od stěn $\omega_i \equiv x_i = 0$ je podle (3,12)

$$\sum_{i=1}^{n+1} \varrho^2(P, \omega_i) = - \frac{\Delta}{2(\sum_i p_i)^2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{p_i^2}{g_{ii}} = - \frac{\Delta}{2\sum_i g_{ii}} + \left(- \frac{\Delta}{2\sum_i g_{ii}}\right) \frac{\sum_i g_{ii} \sum_i \frac{p_i^2}{g_{ii}} - (\sum_i p_i)^2}{(\sum_i p_i)^2} ,$$

První sčítanec je však součet čtverců vzdáleností pro Lemoinův bod. Druhý je [podle nerovnosti $(\sum_i a_i b_i)^2 \leq \sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2$ pro $a_i = \sqrt{|g_{ii}|}$, $b_i = \frac{p_i}{\sqrt{|g_{ii}|}}$, neboť g_{ii} jsou nenulová čísla téhož znamení $(- 1)^n$ podle (4,3) a (4,5)] stále nezáporný, dokonce kladný pro $P \neq L$. Odtud plyne věta. Že L je vnitřní bod, plyne ze (4,3) a (4,1).

Poznámka. Obdobně lze dokázat známou větu, že těžiště simplexu je bod, pro který je součet čtverců jeho vzdáleností od vrcholů minimální.

Věta 26. *Pro každý simplex v E_n existuje právě jeden vnitřní bod V, který má od všech $(n - 1)$-rozměrných stěn simplexu stejnou vzdálenost; je to střed vepsané $(n - 1)$-koule, t. j. $(n - 1)$-koule, která se dotýká $(n - 1)$-rozměrných stěn simplexu a obsahuje (kromě dotykových bodů) jen vnitřní body simplexu. V barycentrických souřadnicích je $V = (v_1, \ldots, v_{n+1})$, $v_i = \sqrt{|g_{ii}|}$, rovnice vepsané $(n - 1)$-koule je*

$$(\sum_i v_i)^2 (exx) - 2\sum_i v_i (evx) \sum_i x_i + [(evv) + |\Delta|] (\sum_i x_i)^2 = 0 , \qquad (7,3)$$

její poloměr

$$\varrho = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}|\Delta|}}{\sum_i v_i}. \tag{7,4}$$

Důkaz plyne snadno z (3,11).

Poznámka. Obdobně se zjistí, že celkem existuje pro simplex v E_n nejvýše 2^n bodů, které mají od všech $(n-1)$-rozměrných stěn stejnou vzdálenost. Jsou to (při vyjádření v barycentrických souřadnicích a při $v_i = \sqrt{|g_{ii}|}$) ty body

$$V_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1})} = (\varepsilon_1 v_1, \varepsilon_2 v_2, \ldots, \varepsilon_{n+1} v_{n+1}), \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

které jsou vlastní (t. j. pro něž $\sum_i \varepsilon_i v_i \neq 0$). Pro $V_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1})} \neq V$ to jsou středy t. zv. připsaných (vně vepsaných) $(n-1)$-koulí.

V následující větě zobecníme pro simplex definici isogonálně sdružených bodů a ve větách 28 a 29 dokážeme zobecnění jejich vlastností, známých z geometrie trojúhelníka.

Věta 27.[7]) *Nechť bod P neleží na žádné $(n-1)$-rozměrné stěně simplexu. Pak existuje právě jeden bod Q, který má tuto vlastnost:*

Jsou-li ω, ω' libovolné různé $(n-1)$-rozměrné stěny simplexu, pak nadroviny v_P resp. v_Q ze svazku nadrovin určeného ω, ω', procházející body P resp. Q, jsou sdružené v involuci ve svazku (ω, ω'), která má jako samodružné nadroviny půlící úhel nadrovin ω, ω'.

Jsou tedy úhly nadrovin v_P, ω a v_Q, ω' stejné. Je-li v barycentrických souřadnicích $P = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+1})$, $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$, platí pro $\varrho \neq 0$

$$\varrho p_i q_i = g_{ii}. \tag{7,5}$$

Body P, Q se nazývají isogonálně sdružené.

Důkaz. Budiž dán bod $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$, $p_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, n+1$, a předpokládejme, že existuje takový bod $Q = (q_1, \ldots, q_{n+1})$, že vyhovuje první části věty. Existuje index i tak, že $q_i \neq 0$; nechť $j \neq i$. Pro stěny $\omega \equiv x_i = 0$, $\omega' \equiv x_j = 0$ je $v_P \equiv p_j x_i - p_i x_j = 0$, $v_Q \equiv q_j x_i - q_i x_j = 0$. Snadno se zjistí, že obě nadroviny, půlící úhel nadrovin ω, ω', jsou tvaru $x_i\sqrt{|g_{jj}|} \pm x_j\sqrt{|g_{ii}|} = 0$. Poněvadž v_P a v_Q patří do involuce uvedené ve větě, je

$$(p_j x_i - p_i x_j)(q_j x_i - q_i x_j) \equiv \alpha(x_i\sqrt{|g_{jj}|} + x_j\sqrt{|g_{ii}|})^2 + \beta(x_i\sqrt{|g_{jj}|} - x_j\sqrt{|g_{ii}|})^2.$$

Odtud $p_i q_i = (\alpha + \beta)|g_{ii}|$, $p_j q_j = (\alpha + \beta)|g_{jj}|$; protože $p_i q_i \neq 0$, je $\alpha + \beta \neq 0$ a pro $\varrho = \dfrac{(-1)^n}{\alpha + \beta}$ (vzhledem k (4,3) a (4,5)) platí (7,5) pro indexy i a j. Avšak j byl libovolný index různý od i, platí tedy (7,5) pro $i = 1, \ldots, n+1$. Obráceně lze snadno zjistit, že bod Q definovaný (7,5) skutečně vyhovuje podmínce věty.

---

[7]) Ve větách 27—30 předpokládáme, že $n > 1$.

Poznámka. Z (7,5) vyplývá, že bod je sám k sobě isogonálně sdružen tehdy a jen tehdy, je-li některým z bodů $V_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n+1})}$ z předchozí poznámky, t. j., je-li středem vepsané nebo připsané $(n - 1)$-koule (případně směrem; ve větách 27 a 28 nerozlišujeme vlastní a nevlastní body). Je také zřejmé z (4,1) a (7,5), že isogonálně sdružené body leží ve stejných poloprostorech vyťatých vždy jednou $(n - 1)$-rozměrnou stěnou. Speciálně jsou oba nebo žádný vnitřním bodem simplexu.

Věta 28. *Isogonálně sdružené body (pokud alespoň jeden z nich je vlastní) jsou vždy dvojicí (příp. splývající) ohnisek rotačních kvadrik, dotýkajících se všech $(n - 1)$-rozměrných stěn simplexu.*[8])

Důkaz je založen na této větě, kterou zde nebudeme dokazovat:

Rotační kvadrika (v nadrovinových barycentrických souřadnicích, duálních k bodovým) s ohnisky $P = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+1})$, $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$ má tvar

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} g_{ij}\xi_i\xi_j - \varrho \sum_{i=1}^{n+1} p_i\xi_i \sum_{i=1}^{n+1} q_i\xi_i = 0$$

a obráceně, každá rovnice tohoto tvaru s $\varrho \neq 0$ a $\sum_{i=1}^{n+1} p_i \neq 0$ nebo $\sum_{i=1}^{n+1} q_i \neq 0$ je rovnicí rotační kvadriky s ohnisky P, Q.

Je tedy nutná a postačující podmínka, aby kvadrika $\sum_{i,j=1}^{n+1} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j = 0$ byla rotační s reálnými ohnisky $P = (p_i)$, $Q = (q_i)$ a aby se při tom dotýkala všech $(n - 1)$-rozměrných stěn, aby

$$\alpha_{ii} = g_{ii} - \varrho p_i q_i = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n + 1\,,$$
$$2\alpha_{ij} = 2g_{ij} - \varrho(p_i q_j + p_j q_i) \text{ pro } i \neq j\,.$$

Odtud a z (7,5) plyne věta 28.

Věta 29. *Nechť P je vlastní bod, který neleží na žádné $(n - 1)$-rozměrné stěně simplexu. Označme $\overset{i}{R}$, $i = 1, \ldots, n + 1$, body, souměrně sdružené s bodem P vzhledem ke stěnám simplexu $\omega_i \equiv x_i = 0$. Jestliže body $\overset{i}{R}$ leží v nadrovině, pak už neleží v lineárním prostoru menší dimense a směr kolmý k této nadrovině je isogonálně sdružený (nevlastní) bod s bodem P. Jestliže body $\overset{i}{R}$ neleží v nadrovině, pak střed $(n - 1)$-koule opsané simplexu $\overset{1}{R}, \ldots, \overset{n+1}{R}$ je isogonálně sdružený bod s bodem P (vzhledem k původnímu simplexu).*

Důkaz. Lehko se zjistí, že body $\overset{i}{R}$ mají v barycentrických souřadnicích tvar

$$\overset{i}{R} = (g_{ii}p_1 - 2g_{i1}p_i, g_{ii}p_2 - 2g_{i2}p_i, \ldots, g_{ii}p_{n+1} - 2g_{i,n+1}p_i)\,,$$

8) Rotační kvadrika je kvadrika, k níž existuje vlastní přímka tak, že každá nadrovina k této přímce kolmá protíná kvadriku v $(n - 2)$-sféře se středem na této přímce. Ohniska jsou body, z nichž tečný kužel obsahuje absolutní kvadriku.

kde

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}), \quad p_i \neq 0 \ (i = 1, \ldots, n + 1), \quad \sum_{i=1}^{n+1} p_i \neq 0 .$$

Předpokládejme nejprve, že body $\overset{i}{R}$ leží v nějaké nadrovině $\nu \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i x_i = 0$. Potom platí pro $k = 1, 2, \ldots, n + 1$:

$$g_{kk} \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i p_i - 2p_k \sum_{i=1}^{n+1} g_{ik} \gamma_i = 0 ,$$

čili

$$\sum_{i=1}^{n+1} g_{ik} \gamma_i = \frac{g_{kk}}{2p_k} \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i p_i . \tag{7,6}$$

Nadrovina ν je vlastní, t. j. levé strany rovnic (7,6) nejsou vesměs rovny nule. Tedy $\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i p_i \neq 0$ a podle (3,4) a (7,5) je isogonálně sdružený bod Q s bodem P nevlastní bod v kolmém směru k nadrovině ν. Odtud rovněž plyne, že taková nadrovina ν procházející všemi body $\overset{i}{R}$ je jediná.

Nechť nyní body $\overset{i}{R}$ neleží v žádné nadrovině; potom bod Q, isogonálně sdružený s P, je vlastní: kdyby byl nevlastní, pak by řádky matice $\|g_{ii}p_j - 2g_{ij}p_i\|$ souřadnic bodů $\overset{i}{R}$ byly lineárně závislé (po násobení i-tého řádku $\dfrac{1}{p_i}$ a sečtení, podle (2,15 d)), a tedy by byly lineárně závislé i sloupce ve sporu s tím, že body $\overset{i}{R}$ neleží v nadrovině. Přímým výpočtem podle vzorce (2,9) za použití (2,15) se zjistí, že vzdálenosti bodu Q od bodů $\overset{i}{R}$ jsou si navzájem rovny, t. j. bod Q je středem $(n - 1)$-koule opsané simplexu $\overset{1}{R}, \ldots, \overset{n+1}{R}$.

Z vět 19, 25 a 27 plyne ihned věta:

Věta 30. *Těžiště a Lemoinův bod simplexu jsou body isogonálně sdružené.*

Závěrem této části bych podotkl, že pomocí věty 18 můžeme tvořit libovolně mnoho význačných bodů simplexu, na př. bod

$$C_1 = (c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}), \quad \text{kde } c_i = \sum_j e_{ij}, \quad C_2 = (c_1^2, c_2^2, \ldots, c_{n+1}^2) \text{ atp.}$$

Některé takové body jsou (obecně) lineárně nezávislé, některé jsou vždy lineárně závislé, na př. bod C_2 a body $D = (d_1, \ldots, d_{n+1})$, $D' = (d_1', \ldots, d_{n+1}')$, kde $d_i = \sum_j e_{ij}^2$, $d_i' = \sum_{\substack{k,l \\ k \neq l}} e_{ik} e_{il}$, leží vždy v přímce (nebo dokonce splývají).

Lze dále definovat *algebraické význačné body simplexu* tak, že to jsou body o barycentrických souřadnicích $\sigma_i(e_{kl})$, kde $\sigma_i(\xi_{kl})$ jsou homogenní polynomy v ξ_{kl} s celými koeficienty, vyhovující podmínce ve větě 17. Tak na př. těžiště, Lemoinův bod, střed opsané $(n - 1)$-koule, body C_1, C_2, D, D' z předchozího odstavce a všechny body, které z nich vzniknou isogonální transformací, jsou body, které mají za $\sigma_i(\xi_{kl})$ homogenní polynomy s celými koeficienty. Tuto problematiku zde již nebudeme rozšiřovat. Je zajímavější studovat speciální simplexy, což učiníme ve třetí části.

Резюме

ГЕОМЕТРИЯ СИМПЛЕКСА В E_n II

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР, (Miroslav Fiedler), Прага.

(Поступило в редакцию 20/XI 1954 г.)

В настоящей второй части работы, первая часть которой была опубликована в журнале Časopis pro pěstování matematiky *79* (1954), 297—320, прежде всего дается для $m \geqq 0$ целого определение понятия допустимого отображения m-го порядка в евклидовом n-мерном пространстве E_n. Это такое отображение φ, которое всякой упорядоченной системе $m + 1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ из E_n ставит в соответствие некоторое множество $\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_{m+1})$ из $\overline{E}_n$ (т. е. из E_n, пополненного несобственными точками) так, что если T есть изометрическое отображение $\overline{E}_n$, то

$$\varphi(TA_1, TA_2, \ldots, TA_{m+1}) = T\,\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}) .$$

Если, далее, Σ — фиксированная система $m + 1$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ из E_n, то множество точек $M \subset \overline{E}_n$ называется избранным множеством от Σ, если существует допустимое отображепие φ m-го порядка так, что

$$M = \varphi(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{m+1}})$$

для любой перестановки $i_1, \ldots, i_{m+1}$ индексов $1, \ldots, m + 1$. Под избранным множеством симплекса мы понимаем избранное множество его вершин.

В работе далее изучается множество всех собственных избранных точек (т. е. избранных одноточечных множеств) симплекса в E_r и доказывается, что оно образует линейное пространство Λ образованное следующим образом:

Группа автоморфизмов симплекса Σ (т. е. группа тех изометрических отображений в E_n, при которых множество вершин $O_1, \ldots, O_{n+1}$ симплекса остается без изменения) изоморфна некоторой группе перестановок индексов $1, \ldots, n + 1$, так как каждое отображение T взаимно однозначно соответствует перестановке $i_1, \ldots, i_{n+1}$ такой, что $TO_k = O_{i_k}$. Обозначим через T_λ центр тяжести множества тех верших от Σ, которые отмечены индексами одной системы транзитивности S_λ упомянутой группы перестано-

вок. Тогда Λ будет линейным пространством, образованным всеми T_λ для всех систем транзитивности S_λ.

В последующих теоремах изучается множество несобственных избранных точек, собственных избранных прямых и избранных гиперплоскостей. Для полноты и в целях использования в третьей части приводятся некоторые избранные точки и избранные множества, являющиеся обобщением некоторых избранных (замечательных) точек треугольника, и обсуждаются их свойства. В заключение исследуется изогональное сродство в симплексе и доказывается, между прочим, что изогонально сопряженные точки являются фокусами гиперквадрик вращения, касающихся всех $(n - 1)$-мерных граней симплекса.

Summary

GEOMETRY OF THE SIMPLEX IN E_n (2nd part)

MIROSLAV FIEDLER, Prague.

(Received November 20, 1954.)

In the present paper (first part is published in Časopis pro pěstování matematiky *79* (1954), 297—320) we begin with the definition of an admissible mapping in the Euclidean n-space E_n. We say that φ is an admissible mapping of degree m ($m \geqq 0$ an integer) in E_n if for every ordered set of $m + 1$ points $A_1, \ldots, A_{m+1} \in E_n$ $\varphi(A_1, \ldots, A_{m+1})$ is a subset of $\overline{E}_n$ (i. e. E_n completed with improper points) such that, for every isometric mapping T of $\overline{E}_n$,

$$\varphi(TA_1, \ldots, TA_{m+1}) = T\,\varphi(A_1, \ldots, A_{m+1})\,.$$

Let Σ be a set of fixed points $A_1, \ldots, A_{m+1} \in E_n$. We say that a set $M \subset \overline{E}_n$ is a distinguished set of Σ if there exists an admissible mapping φ of degree m such that

$$M = \varphi(A_{i_1}, \ldots, A_{i_{m+1}})$$

for every permutation $i_1, \ldots, i_{m+1}$ of $1, \ldots, m + 1$. A set is a distinguished set of a simplex in E_n if it is a distinguished set of its $n + 1$ vertices.

Theorems 16—20 show that the set of all proper distinguished points (i. e. distinguished one-point-sets) of the simplex is a linear space Λ formed the following way:

The group of all automorphisms of the simplex (i. e. the group of all isometric transforms in E_n preserving the set of all vertices $O_1, \ldots, O_{n+1}$ of the simplex) is isomorphic to a permutation group of indices $1, \ldots, n + 1$, since for every such transform T there exists exactly one permutation $i_1, \ldots, i_{n+1}$ such that $TO_k = O_{i_k}$. Let us call transitivity systems of the vertices the sets S_λ of those ver-

tices of the simplex whose indices belong to one of the transitivity systems of the permutation group. Then Λ is the linear space generated by all the centres of gravity T_λ of the transitivity systems S_λ (theorem 20).

In the following theorems the sets of all improper distinguished points, proper distinguished lines, and distinguished hyperplanes are studied. For the sake of completeness and for the use in the third part some special distinguished points and distinguished sets are mentioned.

Finally the isogonal relationship in the simplex is studied. In theorem 28 is proved that isogonally associated points are foci of hyperquadrics of rotation touching all the faces of the simplex.

POZNÁMKA O EXISTENCI KONEČNÝCH GRAFŮ

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 23. prosince 1954.) DT 519.5

V této poznámce je udán algoritmus, podle něhož lze rozhodnout, zdali daná přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lze pokládat za stupně jednotlivých uzlů nějakého konečného grafu.

Grafem budeme rozumět konečnou množinu se symetrickou a nereflexivní binární relací mezi jejími prvky. Ke každému prvku přiřadíme počet všech těch prvků, které s ním stojí v grafové relaci. Z těchto přiřazených čísel sestavíme nerostoucí posloupnost a nazveme ji *strukturou*. Pořadí členů struktury určuje pořadí odpovídajících prvků grafu. Položme $(i, j) = 1$ (resp. $(i, j) = 0$), když i-tý prvek je (resp. není) v relaci s j-tým prvkem.

Dále nazveme *r-posloupností* konečnou nestoupající posloupnost, jejímiž členy jsou přirozená čísla, při čemž je první člen menší než počet všech členů a počet lichých členů je sudý; strukturu, která je r-posloupností, nazveme *r-strukturou.*

Věta 1. *Buď* $\|(i, j)\|$ *symetrická n-řadová matice, jejíž prvky jsou rovny některému z čísel* 1, 0 *tak, že hlavní diagonála je nulová a tak, že posloupnost* $\{(i, 1) + (i, 2) + \ldots + (i, n)\}_{i=1}^{n}$ *je nerostoucí. Tato matice určuje n-prvkový graf podle ekvivalence* $(i, j) = 1 \Leftrightarrow i$*-tý prvek je v grafové relaci s* j*-tým prvkem.*

Důkaz je zřejmý. Podmínka $(i, j) = (j, i)$ charakterisuje symetrii, podmínka $(i, i) = 0$ nereflexivnost grafové relace.

Věta 2. *Každý člen struktury je menší než počet všech členů. Žádný člen struktury není větší než součet ostatních členů. Lichých členů je ve struktuře sudý počet.*

Důkaz prvních dvou tvrzení je zřejmý. Dokážeme tedy ještě třetí tvrzení. Z podmínek $(i, j) = (j, i)$, $(i, i) = 0$ vyplývá, že součet všech členů struktury je sudé číslo. Zbytek důkazu je již snadný.

Z prvního tvrzení vyplývá, že struktura není prostou posloupností.

Věta 3. *Mezi grafy o r-struktuře* $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *existuje takový, pro nějž platí* $(1, n) = (2, n) = \ldots = (a_n, n) = 1$.

Důkaz. Vyberme libovolný graf struktury a. Existuje index k $(0 \leq k < n)$ tak, že pro vybraný graf platí $(1, n) = (2, n) = \ldots = (k, n) = 1$, $(k + 1, n) = 0$

(v případě $k = 0$ odpadá ovšem první systém rovnic). Je-li $k = a_n$, pak dokazované tvrzení platí. Je-li $k < a_n$, pak ve vybraném grafu (označme jej A_k) existuje index $v_k > k + 1$ tak, že platí $(v_k, n) = 1$. Dokážeme dále, že (vzhledem k A_k) existuje index w_k $(1 \leqq w_k < n)$, pro nějž platí $(k + 1, w_k) = 1$, $(v_k, w_k) = 0$.

V opačném případě by byla splněna rovnice $(v_k, w_k) = 1$ pro každý index w_k, pro nějž jest $1 \leqq w_k < n$, $(k + 1, w_k) = 1$. Potom by ale platilo $a_k < a_{v_k}$, a to ve sporu s předpokladem, že a je struktura. Tedy zmíněný index w_k existuje.

Nyní položme $(k + 1, n) = (n, k + 1) = 1$, $(k + 1, w_k) = (w_k, k + 1) = 0$, $(v_k, w_k) = (w_k, v_k) = 1$, $(v_k, n) = (n, v_k) = 0$; hodnoty ostatních (i, j) nechme beze změny. Takto definovaná čísla (i, j) určují podle věty 1 jistý graf A_{k+1} struktury a. Je-li $k + 1 = a_n$, pak dokazované tvrzení platí; je-li $k + 1 < a_n$, pak v předchozí úvaze nahradíme všude k indexem $k + 1$ a sestrojíme jistý graf A_{k+2} struktury a. A tak pokračujeme dále. Po konečném počtu kroků dojdeme k jistému grafu struktury a, pro nějž již dokazované tvrzení platí.

Věta 4. *Nechť $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ je r-posloupnost, pro niž platí $g_1 > 1$. Pak posloupnost $g_1 - 1, g_2 - 1, \ldots, g_{g_m} - 1, g_{g_{m+1}}, g_{g_{m+2}}, \ldots, g_{m-1}$ dá se přerovnat v r-strukturu (označme ji g'), právě když g je struktura. Je-li g' struktura, pak ke každému grafu struktury g' existuje nadgraf struktury g.*

Důkaz. Posloupnost g' neobsahuje žádný nulový člen. Kdyby totiž jistý člen $g_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, g_m)$ byl nulový, pak by bylo $g_i = 1$, a tedy též $g_m = 1 = i$; posloupnost g by pak obsahovala samé jednotky, a to odporuje předpokladu.

Nechť g je struktura; podle věty 3 existuje graf struktury g, jehož prvních g_m prvků je v grafové relaci s prvkem posledním. Odstraníme-li tento poslední prvek i s relacemi mezi ním a prvky předcházejícími a ponecháme-li ostatní prvky a relace beze změny, dostaneme jistý graf struktury g'.

Nechť g' je struktura a G' je libovolný graf struktury g'. Přidáme ke G' nový prvek a rozšíříme relaci v G' v symetrickou nereflexivní relaci tak, že nový prvek bude v rozšířené relaci s těmi prvky z G', které odpovídají členům $g_1 - 1, g_2 - 1, \ldots, g_{g_m} - 1$ struktury g'. Tímto rozšířením dostaneme jistý nadgraf (struktury g) grafu G'.

Věta. *Nechť $a^{(0)}$ je r-posloupnost s prvním členem větším než 1. Existuje algoritmus, podle něhož lze rozhodnout, zda $a^{(0)}$ je anebo není struktura.*

Důkaz. Nechť $a^{(0)}$ je struktura. Pak podle věty 4 je též $a' = a^{(1)}$ struktura, a tedy též (opět podle věty 4) $a^{(1)'} = a^{(2)}$ je struktura; takto pokračujíce, sestrojujeme struktury $a^{(2)'} = a^{(3)}$, $a^{(3)'} = a^{(4)}$ atd. Jsou možné dva případy. Buďto existuje index q_1 $(1 \leqq q_1 < n)$ tak, že poslední prvek z $a^{(q_1)}$ není menší než $n - q_1$, anebo takové q_1 neexistuje a pak existuje index q_2 $(1 \leqq q_2 < n)$ tak, že posloupnost $a^{(q_1)}$ obsahuje samé jednotky.

V prvním případě dostáváme spor s předpokladem, že $a^{(0)}$ je struktura (neboť podle prvního tvrzení věty 2 není $a^{(q_1)}$ strukturou); tedy ani $a^{(0)}$ není struktura a výsledek je v tomto případě negativní.

Vyšetříme ještě druhý případ. Poněvadž $a^{(0)}$ je r-posloupnost, je číslo $n - q_2$ sudé; snadno nahlédneme, že existuje jistý graf $A^{(q_2)}$ struktury $a^{(q_2)}$. Poněvadž $a^{(q_2)}$ je struktura, je podle poučky 4 též $a^{(q_2-1)}$ struktura a ke grafu $A^{(q_2)}$ sestrojíme rovněž podle poučky 4 jistý nadgraf $A^{(q_2-1)}$ struktury $a^{(q_2-1)}$. Poněvadž $a^{(q_2-1)}$ je struktura, je podle poučky 4 též $a^{(q_2-2)}$ struktura a ke grafu $A^{(q_2-1)}$ sestrojíme opět jistý nadgraf $A^{(q_2-2)}$ struktury $a^{(q_2-2)}$. Takto postupujeme dále, odvozujíce, že $a^{(q_2-i)}$ jsou struktury, a sestrojujíce jisté grafy $A^{(q_2-i)}$ struktur $a^{(q_2-i)}$, při čemž $A^{(q_2-i)}$ je nadgraf grafu $A^{(q_2-i-1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, q_2)$. Pro $i = q_2$ dostaneme hledaný výsledek, že totiž posloupnost $a^{(0)}$ je struktura; $A^{(0)}$ je pak jistý graf struktury $a^{(0)}$.

Věta 5. *Každá r-posloupnost se všemi členy stejnými je struktura.*

Důkaz. Danou posloupnost označme $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$; podle předpokladu jest $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Je-li a_1 sudé, pak položme $(i, j) = 1$, když*) $j \equiv i \pm \frac{a_1}{2} \pm t$ $(t = 0, 1, \ldots, \frac{a_1}{2} - 1)$; v ostatních případech položme $(i, j) = 0$. Takto definovaná (i, j) určují podle poučky 1 jistý graf struktury a. Je-li a_1 liché a n sudé, pak položme $(i, j) = 1$, když $j \equiv i \pm \frac{a_1 - 1}{2} \pm t$ $(t = 0, 1, \ldots, \frac{a_1 - 1}{2} - 1)$, $j \equiv i + \frac{n}{2}$; v ostatních případech položme opět $(i, j) = 0$. Takto definovaná čísla (i, j) určují podle poučky 1 jistý graf struktury a.

Резюме

ЗАМЕТКА О СУЩЕСТВОВАНИИ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Прага.

(Поступило в редакцию 23/XII 1954 г.)

Назовем *структурой* невозрастающую конечную последовательность узлов отдельных точек конечного графа. Далее, назовем *r-последовательностью* конечную невозрастающую последовательность натуральных чисел, причем первый член меньше числа всех членов, а число нечетных членов является четным числом; структуру, представляющую собой r-последовательность, назовем r-структурой.

Среди графов с данной r-структурой $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ существует такой граф, в котором последний узел соединен ребром с первыми a_n узлами (теорема 3).

*) Znakem $\equiv$ rozumíme kongruenci modulo n.

Предположим далее, что $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ есть r-последовательность, первый член которой больше 1. *Тогда последовательность $g_1 - 1, g_2 - 1, \ldots, \ldots, g_{g_m} - 1, g_{g_m+1}, g_{g_m+2}, \ldots, g_{m-1}$ можно перевести путем перераспределения в r-структуру (обозначим ее через g') в том и только в том случае, когда g есть структура. Если g' — структура, то для каждого графа структуры g' существует надграф структуры g* (теорема 4).

Если a есть r-последовательность с первым членом, большим единицы, то существует алгорифм, позволяющий установить, является ли a структурой или нет. (Главный результат работы.)

Алгорифм состоит в постепенном построении r-последовательности ${}^1a = a'$, ${}^2a = {}^1a'$, ${}^3a = {}^2a'$ (по обозначениям из теоремы 4); при доказательстве главную роль играет теорема 4.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE EXISTENZ DER ENDLICHEN GRAPHEN

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Eingelangt 23. XII. 1954.)

Wir bezeichnen die nicht wachsende endliche Folge der Grade der Knoten eines endlichen Graphen als *Struktur* dieses Graphen. Weiter bezeichnen wir als *r-Folge* eine endliche nicht wachsende Folge der natürlichen Zahlen mit dieser Eigenschaft: Das erste Element ist kleiner als die Zahl aller Elemente und die Zahl der ungeraden Elemente ist gerade. Die Struktur, die eine r-Folge ist, bezeichneten wir als *r-Struktur.*

Unter den Graphen mit gegebener r-Struktur $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ existiert ein solcher Graph, in welchem der letzte Knoten mit den ersten a_n Knoten verbuden ist. (Lehrsatz 3.)

Setzen wir voraus, dass $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ eine r-Folge ist, in welcher das erste Element grösser als 1 ist. Die Folge $g_1 - 1, g_2 - 1, \ldots, g_{g_m} - 1, g_{g_m+1}, \ldots, g_{m-1}$ lässt sich in eine Struktur umformen (wir bezeichnen sie g') dann und nur dann, wenn g eine Struktur ist. Wenn g' eine Struktur ist, dann existiert zu jedem Graphen der Struktur g' ein Obergraph der Struktur g. (Lehrsatz 4.)

Es sei a eine r-Folge mit dem ersten Element, das grösser als 1 *ist; dann existiert ein Algorithmus, nach dem sich entscheiden lässt, ob a eine Struktur ist.* (Das wichtigste Resultat der Untersuchung.)

Dieser Algorithmus besteht aus einer sukzessiven Konstruktion der r-Folgen ${}^1a = a'$, ${}^2a = {}^1a'$, ${}^3a = {}^2a'$, ... (nach Bezeichnung aus dem Lehrsatz 4); der Beweis beruht hauptsächlich auf dem Lehrsatz 4.

FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE TRIGONOMETRICKÝCH FUNKCÍ

OTOMAR HÁJEK, Praha.

(Došlo dne 12. ledna 1955.)

V článku jsou podána všechna řešení (holomorfní v okolí počátku) rovnic (2) a (6); rovnice (2) pro $a = b = 1$ a rovnice (6) pro $a = -b = 1$ přecházejí v známé adiční formule pro funkce $\sin x$, $\cos x$.

I.

Hledejme funkce F, G, H, holomorfní v počátku a vyhovující v okolí počátku rovnici

$$F(x + y) = a \, . \, G(x) \, . \, H(y) \tag{1}$$

(a je daná konstanta). Její řešení nazveme *exponenciálním řešením*. Předpokládejme $a \neq 0$. Zřejmě $G(0) = 0 \Rightarrow F \equiv 0 \Leftarrow H(0) = 0$, načež jedna z G, H je identicky 0 a druhá je libovolná. Pro $G(0) \, . \, H(0) \neq 0$ plyne z (1) $F(x) = a \, . \, G(0) \, . \, H(x) = a \, . \, H(0) \, . \, G(x)$, dále

$$k \, . \, F(x + y) = k \, . \, F(x) \, . \, k \, . \, F(y)$$

($k = (a \, . \, G(0) \, . \, H(0))^{-1}$), se známým řešením $F(x) = a \, . \, G(0) \, . \, H(0) \, . \, e^{\beta x}$. Řešení (1) jsou tedy:

pro $a \neq 0$

$$F(x) = a\alpha\gamma e^{\beta x}\,, \quad G(x) = \alpha e^{\beta x}\,, \quad H(x) = \gamma e^{\beta x}$$

(α, β, γ libovolné konstanty),

$$F = G = 0, \ H \text{ libovolná}\,,$$
$$F = H = 0, \ G \text{ libovolná}\,;$$

pro $a = 0$

$$F = 0, \quad G, H \text{ libovolné}\,.$$

II.

Hledejme funkce F, G, holomorfní v počátku a vyhovující v okolí počátku rovnici

$$F(x + y) = a \, . \, F(x) \, . \, G(y) + b \, . \, F(y) \, . \, G(x) \tag{2}$$

(a, b jsou dané konstanty). Rovnici (2) nazveme *sinus-rovnicí*. Všimněme si, že přechází opět v sinus-rovnici s týmiž konstantami při transformaci

$$f(x) = e^{cx} . F(x) , \quad g(x) = e^{cx} . G(x) . \tag{*}$$

Předpokládejme $F \not\equiv 0$. Případ $a . b = 0$ vede na exponenciální řešení. Ukažme, že pro $a . b \neq 0$ se stačí omezit na případ $a = b = 1$. Především

$$F(x + y) = a_1 . F(x) . G_1(y) + F(y) . G_1(x) \tag{3}$$

s $G_1 = b . G$, $a_1 = \frac{a}{b}$; nyní $a_1 \neq 1$ implikuje ($F(x + y) = F(y + x)$ do (3))

$$F(x) . G_1(y) = F(y) . G_1(x) ;$$

dosazením do (3) máme rovnici typu (1) s exponenciálním řešením. Dále tedy řešíme rovnici

$$F(x + y) = F(x) . G(y) + F(y) . G(x) . \tag{4}$$

Také $F(0) \neq 0$ vede na exponenciální řešení: z (4) plyne $G(x) = \frac{1 - G(0)}{F(0)} F(x)$. Ukažme, že za předpokladů $F(0) = F'(0) = 0$ má (4) jen řešení $F \equiv 0$. Nechť $F(x) = \Sigma_0^\infty a_n x^n$, $G(x) = \Sigma_0^\infty b_n x^n$. Z (4) plyne pro každé m, n

$$\binom{n + m}{n} a_{n+m} = a_n . b_m + a_m . b_n . \tag{5}$$

Dokažme $a_{kn} = A_{k,n} . a_n$ indukcí podle k. Pro $k = 1$ je to zřejmé; položme v (5) $m = kn$; pak

$$a_{(k+1)n} = \frac{a_n . b_{kn} + a_{kn} . b_n}{\binom{(k + 1) n}{n}} = \frac{b_{kn} + A_{k,n} . b_n}{\binom{(k + 1) n}{n}} . a_n = A_{k+1,n} . a_n .$$

Odtud plyne $a_n = 0 \Rightarrow a_{kn} = 0$ pro každé k; zejména $a_1 = 0 \Rightarrow F \equiv 0$, cbd. Předpokládejme tedy $F(0) = 0 \neq F'(0) = a_1$. Případným užitím transformace (*) s $c = -\frac{F''(0)}{2F'(0)}$ dosáhneme toho, aby $F''(0) = 0 = a_2$. Z (4) plyne $G(0) = 1$, a

$$G(x) = \left(\frac{F(x + y) - F(x)}{y} - F(x) . \frac{G(y) - 1}{y}\right) : \frac{F(y)}{y} ,$$

kdykoliv $F(y) \neq 0 \neq y$; ježto $F'(0) \neq 0$, máme limitním přechodem

$$G(x) = \frac{1}{a_1} (F'(x) - F(x) . G'(0)) .$$

Pak $G'(0) = a_1^{-1}(F''(0) - a_1 G'(0)) = - G'(0)$, tedy $G'(0) = 0$, t. j., $G(x) = a_1^{-1} F'(x)$. Dosazením do (4): $F(x + y) = a_1^{-1}(F(x) . F'(y) + F(y) . F'(x))$. Pro každé m, n pak

$$\binom{n + m}{n} a_1 a_{n+m} = (n + 1) a_{n+1} a_m + (m + 1) a_{m+1} a_n .$$

Volbou $m = 2$ máme $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)\, a_1 a_{n+2} = 3a_3 a_n$, t. j.

$$a_{2n} = 0\,, \quad a_{2n+1} = k \,.\, \frac{p^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad (n \geqq 1)\,.$$

(4) má tedy řešení $F(x) = \alpha \,.\, \sin \beta x$, $G(x) = \cos \beta x$ v případě $a_3 \neq 0$, a $F(x) = \alpha x$, $G(x) = 1$ v případě $a_3 = 0$. Řešení rovnice (2) dostaneme tedy užitím zpětné transformace (*) a násobkem. Jsou to tato řešení:

$$F = 0, \; G \text{ libovolné};$$

pro $a + b \neq 0$

$$F(x) = \alpha e^{\beta x}\,, \quad G(x) = \frac{1}{a+b}\, e^{\beta x}\,;$$

pro $a = b \neq 0$

$$F(x) = \alpha e^{\beta x} \sin \gamma x\,, \quad G(x) = \frac{1}{a}\, e^{\beta x} \cos \gamma x\,,$$

$$F(x) = \alpha e^{\beta x} x\,, \quad G(x) = \frac{1}{a}\, e^{\beta x}\,;$$

(α, β, γ jsou libovolné konstanty).

III.

Hledejme funkce F, G, holomorfní v počátku, vyhovující v okolí počátku rovnici

$$F(x + y) = a \,.\, F(x) \,.\, F(y) + b \,.\, G(x) \,.\, G(y) \tag{6}$$

(a, b jsou dané konstanty). (6) nazveme *kosinus-rovnicí.* Všimněme si, že transformací (*) přejde opět v kosinus-rovnici s týmiž konstantami. Případ $a \,.\, b = 0$ vede na exponenciální řešení; nechť tedy $a \,.\, b \neq 0$. Zřejmě stačí předpokládat $a = -b = 1$ ($F_1 = aF$, $G_1 = \mathrm{i}\sqrt{ab} \,.\, G$), takže řešíme rovnici

$$F(x + y) = F(x) \,.\, F(y) - G(x) \,.\, G(y)\,. \tag{7}$$

Pro $G \equiv 0$ má (7) jen exponenciální řešení; pro konstantní F je také G konstantní. Z (7) plyne

$$F(x) \,.\, (1 - F(0)) = -\, G(x) \,.\, G(0)\,. \tag{8}$$

Kdyby $F(0) \neq 1$, pak $G(0) = 0$ implikuje $F \equiv 0$ a $G(0) \neq 0$ znamená jen exponenciální řešení. Všechny tyto případy z dalšího vyloučíme. Případným užitím transformace (*) s $c = -F'(0)$ lze dosáhnout toho, aby $F'(0) = 0$. Z (8) pak plyne $G(0) = 0$ (neboť předpokládáme $F(0) = 1$, $G \not\equiv 0$). Platí

$$\frac{F(x + y) - F(x)}{y} = F(x) \,.\, \frac{F(y) - 1}{y} - G(x) \,.\, \frac{G(y)}{y}\,.$$

pro $y \neq 0$; limitním přechodem máme $F'(x) = -G(x) \,.\, G'(0)$, tedy $G'(0) \neq 0$ (ježto F není konstanta), tedy

$$F'(x) = \frac{1}{s} G(x)\,, \quad \text{kde} \quad s = -\frac{1}{G'(0)}\,. \tag{9}$$

Zejména $F'(x + y) = \frac{1}{s} \,.\, G(x + y)$; (7) derivujeme podle x a srovnáme:

$$G(x + y) = G(x) \,.\, F(y) - s \,.\, G'(x) \,.\, G(y)\,. \tag{10}$$

Ze symetrie pak plyne

$$G(x) \,.\, (F(y) + s \,.\, G'(y)) = G(y) \,.\, (F(x) + s \,.\, G'(x))\,. \tag{11}$$

Nyní buď je $G'(x) = -\frac{1}{s} F(x)$ identicky, a (10) je pak sinus-rovnice $G(x + y) = G(x) \,.\, F(y) + G(y) \,.\, F(x)$ s řešením $G(x) = e^{\varrho x} \sin \tau x$, $F(x) = e^{\varrho x} \,.\, \cos \tau x$ (neboť $G(0) = 0$, a platí (7)). Anebo existuje y tak, že $F(y) + s \,.\, G'(y) \neq 0$, a pak z (11) plyne $G(x) = k \,.\, (F(x) + s \,.\, G'(x))$. Užitím (9)

$$s \,.\, F'(x) = k \,.\, (F(x) + s^2 \,.\, F''(x))\,, \tag{12}$$

takže F splňuje lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty. Může mít dvojí řešení; užitím počátečních podmínek $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$ a (9) dostáváme

$$F(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2 x})\,, \quad G(x) = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x})^{1)}$$

pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (a tyto funkce vyhovují (7)), anebo

$$F(x) = (1 - \lambda x)\, e^{\lambda x}\,, \quad G(x) = \pm\, \lambda x e^{\lambda x}$$

(a tyto funkce vyhovují (7)). Obecná řešení rovnice (2) dostaneme tedy užitím zpětné transformace (*) a násobkem. Jsou to tato řešení:

$$F = 0\,, \quad G = 0\,;$$

pro $a \,.\, b \neq 0$

$$F(x) = \frac{1}{a(\beta - \alpha)} (\beta e^{(\alpha + \gamma)x} - \alpha e^{(\beta + \gamma)x})\,,$$

$$G(x) = i \sqrt{\frac{\alpha\beta}{ab}} \,.\, \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{(\alpha + \gamma)x} - e^{(\beta + \gamma)x})\,;^{2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{a} (1 - \alpha x)\, e^{\beta x}\,, \quad G(x) = \frac{i\alpha}{\sqrt{ab}} \,.\, x e^{\beta x}\,;$$

F konstantní, $\quad G = \sqrt{\frac{F}{b} (1 - aF)}\,;$

---

[1]) Zde i dále vyhovují obě hodnoty odmocniny.

[2]) V tomto řešení je obsaženo též řešení $F(x) = e^{\varrho x} \,.\, \cos \tau x$, $G(x) = e^{\varrho x} \,.\, \sin \tau x$ pro $\beta = -\alpha = i\tau$, $\gamma = \varrho$.

pro $a = 0 \neq b$

$$F(x) = b\alpha^2 e^{\beta x}\,, \quad G(x) = \alpha e^{\beta x}\,;$$

pro $a \neq 0 = b$

$$F(x) = \frac{1}{a}\, e^{\beta x}\,, \quad G \text{ libovolné}\,;$$

pro $a = 0 = b$

$$F = 0\,, \quad G \text{ libovolné}\,;$$

(α, β, γ jsou libovolné konstanty — v prvém řešení $\alpha \neq \beta$).

(Viz též výtah tohoto článku v časopise Чехослов. матем. журнал, *5* (80), 1955, 432—434.)

RŮZNÉ

POZNÁMKA KE KVADRATICKÝM POLYNOMŮM

Pan Břetislav Novák, Chrudim, upozorňuje redakci na jeden způsob konstrukce kvadratických polynomů, které nabývají mnoha prvočíselných hodnot.

Lze snadno udat všechny polynomy $ax^2 + bx + c$ (a, b, c celá), které pro všechna celá x nabývají jen hodnot tvaru $6m \pm 1$ (m celé). Čísla tohoto tvaru zřejmě nejsou dělitelná dvěma ani třemi; není-li tedy číslo tvaru $6m \pm 1$ prvočíslem, je dělitelné některým z čísel $5^2, 5 \cdot 7, 5 \cdot 11, \ldots, 7^2, 7 \cdot 11, \ldots$, což je mezi malými čísly jakási výjimka. Dá se ukázat (což autor provádí rozeznáváním různých případů), že polynom $ax^2 + bx + c$ (a, b, c celá) nabývá pro všechna celá x hodnot tvaru $6m \pm 1$ právě v těchto případech:

$$\begin{array}{llll}
a = 3k & (\text{resp. } a = 3k + 2)\,, & a + b = 6l\,, & c = 6n + 1\,, \\
a = 3k + 1 & (\text{resp. } a = 3k + 2)\,, & a + b = 6l + 4\,, & c = 6n + 1\,, \\
a = 3k & (\text{resp. } a = 3k + 1)\,, & a + b = 6l\,, & c = 6n - 1\,, \\
a = 3k + 2 & (\text{resp. } a = 3k + 1)\,, & a + b = 6l + 2\,, & c = 6n - 1
\end{array}$$

(k, l, n celá).

Tím vysvětluje autor zajímavé vlastnosti polynomů, na které upozornila pí Marie Nováková (viz roč. *78* (1953) tohoto časopisu, str. 57—58). Je jasné, že tyto polynomy mají tvar, který uvádí p. B. Novák. Každé prvočíslo mimo 2 a 3 má totiž tvar $6m \pm 1$; nabývá-li nějaký polynom $ax^2 + bx + c$ (a, b, c celá) hodnot tvaru $6m \pm 1$ pro šest po sobě následujících celých čísel x, nabývá hodnot tvaru $6m \pm 1$ pro všechna celá x vůbec a má tedy popsaný tvar.

Mimo to autor upozorňuje:

Pro $c = 2$,

$$\begin{array}{lll}
a = 3k & (\text{resp. } 3k + 1)\,, & a + b = 6n + 3\,, \\
a = 3k + 1 & (\text{resp. } 3k + 2)\,, & a + b = 6n + 5\,,
\end{array}$$

pro $c = -2$,

$$\begin{array}{lll}
a = 3k & (\text{resp. } 3k + 2)\,, & a + b = 6n + 3\,, \\
a = 3k + 2 & (\text{resp. } 3k + 1)\,, & a + b = 6n + 1\,, \\
 & & x \neq 2m
\end{array}$$

a pro $c = \pm 3$,

$$\begin{aligned} a = 3k \text{ (resp. } 3k + 2), \quad a + b = 6n + 2, \\ a = 3k \text{ (resp. } 3k + 1), \quad a + b = 6n + 4, \\ x \neq 3m \end{aligned}$$

má číslo $ax^2 + bx + c$ rovněž tvar $6m \pm 1$. (Přitom jsou k, m, n celá čísla.)

REFERÁTY

PŘEDNÁŠKY MAĎARSKÝCH MATEMATIKŮ V ČESKOSLOVENSKU

K naší zprávě o pobytu maďarských hostů prof. dr LÁSZLO RÉDEIE a prof. dr OTTO VARGY v Československu, kterou jsme uveřejnili v předešlém čísle Časopisu, přinášíme dnes stručný obsah přednášek obou těchto vynikajících matematiků.

Přednášky prof. dr L. Rédeie:

Nový důkaz Hajósovy věty

(Předneseno 14. února 1955 v matematické obci pražské.)

$\mathfrak{G}$ označuje konečnou Abelovu grupu, $(\alpha)_e$ množinu prvků $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^{e-1}$ ($\alpha \in \mathfrak{G}$, $e \geq 2$). Při tom se předpokládá, že řád prvku α je větší nebo roven e. Známá věta Hajósova zní takto: Jestliže platí

$$\mathfrak{G} = (\alpha_1)_{e_1} \ldots (\alpha_n)_{e_n}$$

v tom smyslu, že každý prvek z $\mathfrak{G}$ se dá psát jednoznačně ve tvaru

$$\alpha_1^{i_1} \ldots \alpha_n^{i_n} \quad (i_k = 0, \ldots, e_k - 1;\ k = 1, \ldots, n)\,,$$

potom je alespoň jeden faktor $(\alpha_k)_{e_k}$ grupou. Přednášející podal nový důkaz, který je pro p-grupy překvapujícím způsobem jednoduchý, pro ostatní grupy však trochu složitější.

Pro p-grupy je důkaz jednoduchým důsledkem následující pomocné věty: Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ generátory konečné Abelovy p-grupy a jestliže každý podsystém $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ ($1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$) vytváří grupu řádu $\geq p^k$, potom, přeskupíme-li prvky $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vhodným způsobem a umocníme-li je na vhodná čísla, vznikne systém $\omega_1, \ldots, \omega_n$ takový, že $\omega_1, \ldots, \omega_k$ vytvářejí grupu řádu p^k ($1 \leq k \leq n$).

Theorie holomorfů pro okruhy

(Předneseno 5. března 1955 v matematické obci pražské.)

Ke klasickým pojmům „charakteristické podgrupy" a „holomorfu dané grupy" zavádějí se v theorii okruhů analogické pojmy, totiž: „charakteristický podokruh" a „holomorfy daného okruhu". Jako pomocné pojmy vystupují zde jisté dvojice zobrazení daného okruhu do sebe, t. zv. „dvojité homothetismy" („Doppelhomothetismen"). Každý prvoideál je charakteristický. Každý ideál okruhu s jednotkovým prvkem je charakteristický.

ζ-funkce v algebře

(Předneseno 7. března 1955 v matematické obci pražské.)

$\mathfrak{G}$ nechť označuje konečnou Abelovu grupu, (M) počet prvků konečné množiny M, n přirozené číslo, $\mathfrak{N}$ množinu čísel $1, \ldots, n$. Jsou-li $A_1, \ldots, A_n$ podgrupy grupy $\mathfrak{G}$, pak symbolem $A_{\mathfrak{M}}$ ($\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}$) označme součin všech A_i ($i \in \mathfrak{M}$).

Systém řádů

$$(A_{\mathfrak{m}}) \quad (\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N})$$

má velmi složité vlastnosti. K jejich objasnění zavedl přednášející komplexní funkci

$$\varrho(z) = \sum_{\mathfrak{m} \subseteqq \mathfrak{N}} (-1)^{(\mathfrak{m})} (A_{\mathfrak{m}})^{-z}.$$

Mezi jiným platí pozoruhodný „zákon setrvačnosti“ (pro konečné Abelovy grupy):

$$0 \leqq \varrho(z) < 1 \quad (z = 1, 2, \dots).$$

Ostřejší odhad již není možný a dále, jsou-li c, C, z ($z \neq 1, 2, \dots$; $z > 1$) daná reálná čísla, není ani jedna z nerovností

$$c < \varrho(z) < C$$

správná pro všechny uvažované grupy.

Funkci $\varrho(z)$ je možno zobecnit různým způsobem, jestliže za $\mathfrak{G}$ vezmeme v úvahu libovolný algebraický systém (na př. okruh) a za $A_1, A_2, \dots$ (v konečném nebo i nekonečném počtu) příslušné algebraické podsystémy systému $\mathfrak{G}$. Funkce $\zeta(z) = \varrho(z)^{-1}$ (pro tyto zobecněné funkce $\varrho(z)$) zahrnují v sobě jako zvláštní případy Riemannovu funkci $\zeta(s)$ a také Dedekindovy funkce ζ. Jsou proto souhrnně označovány názvem ζ-funkce (v algebře).

Podle autorova sdělení *Karel Drbohlav*, Praha.

Přednášky prof. dr O. Vargy:

Základy riemannovské geometrie

(Předneseno 14. února 1955 v matematické obci pražské.)

Budiž dán rozvrstvený prostor (der gefaserte Raum), který je určen tím způsobem, že každému bodu základního prostoru je přiřazen prostor vektorový. Zavedením vhodných předpokladů lze tyto vektorové prostory interpretovat jako „tečné prostory“ prostoru základního. Známým způsobem lze tu zavést diferenciálně geometrickou strukturu toho druhu, že kvadrát elementu oblouku je určen kvadratickou diferenciální formou. Na základě nového způsobu zobrazení daného prostoru na prostor eukleidovský definoval pak přednášející vzájemné vztahy jednotlivých tečných prostorů. Takto stanovený Riemannův prostor je jednoznačně určen, neboť z vyslovených definic lze určiti ekvivalenci dvou takových prostorů.

Míra křivosti měrné plochy (Eichfläche) Minkowského prostoru a geometrický význam jednoho tensoru křivosti Finslerova prostoru

(Předneseno 16. února 1955 v Praze.)

Metrika Minkowského prostoru indukuje na jeho měrné ploše (Eichfläche*)) metriku, která za přiměřených předpokladů je metrikou riemannovskou. Přednášející vyšetřoval míru křivosti této měrné plochy a stanovil, že tato míra křivosti je konstantní tehdy a jen tehdy, když daný Minkowského prostor má konstantní křivost. Nemá-li měrná plocha konstantní křivost, pak odchylku od konstantní míry křivosti lze charakterisovat jedním z tensorů křivosti Finslerova prostoru.

*) Obdoba německého termínu Eichfläche nebyla dosud v české matematické literatuře vytvořena. Zde uvedený termín „měrná plocha“ je tedy jen východiskem z nouze. Čeští fysikové užívají termínu plocha cejchovací, ale většině matematiků se tento termín nezamlouvá.

O Riemannových prostorech konstantní křivosti

(Předneseno 21. února 1955 v Praze.)

Základním n-hranem nadplochy nazveme n-hran, určený $n - 1$ lineárně nezávislými tečnými vektory této nadplochy a vektorem její normály v uvažovaném bodě nadplochy. Je známo, že v neeukleidovské geometrii Lobačevského a Bolyaie ke každému základnímu n-hranu v daném bodě existuje nadplocha, na které platí geometrie eukleidovská; v případě trojrozměrného prostoru jsou příslušnými plochami t. zv. *parasféry*. Na druhé straně je tato neeukleidovská geometrie geometrií speciálního Riemannova prostoru. Přednášející ukázal, že toto tvrzení lze obrátit. Dokázal, že existuje-li v obecném Riemannově prostoru k libovolnému danému základnímu n-hranu nadplocha s eukleidovskou metrikou, pak tento Riemannův prostor má konstantní křivost K, kde $K \leq 0$, t. j. buď v tomto prostoru platí geometrie Lobačevského a Bolyaie nebo je to prostor eukleidovský. Jestliže ke každému základnímu n-hranu existuje ryze imaginární nadplocha, jejímž reálným zástupcem je nadplocha s eukleidovskou metrikou, pak daný Riemannův prostor má konstantní nezápornou křivost.

O invariantech v hyperbolické geometrii a metrika Cayley-Kleinova

(Předneseno 23. února 1955 v Bratislavě.)

Rovinnou hyperbolickou geometrii lze určit reálnou jednoduchou (t. j. nedegenerovanou) kuželosečkou v projektivní rovině. Z kvadratické formy, která určuje tuto kuželosečku, můžeme sestrojit skalární součiny párů bodových. Přednášející dokázal, že každá funkce n bodů, která je invariantní vůči grupě projektivních transformací, reprodukujících tuto kuželosečku, je funkcí skalárních součinů uvažovaných bodů. Požadujeme-li, aby vzdálenost dvou bodů byla takovou invariantní funkcí, která pro různé dva body je vždy kladná, je spojitá a pro trojici bodů ležících v přímce je funkcí aditivní, pak tato vzdálenost je identická s metrikou Cayley-Kleinovou.

O invariantech plochy v eukleidovském prostoru

(Předneseno 1. března 1955 v Brně.)

Užitím vět, které odvodil O. Veblen, ukázal přednášející, že určení všech diferenciálních invariantů předepsaného řádu pro plochu v eukleidovském prostoru lze pomocí eliminací převést na projektivní theorii invariantů. Formy, které tu vystupují, jsou určeny první a druhou základní formou a tensorem křivosti dané plochy, jeho kovariantními derivacemi a kovariantními derivacemi tensoru druhé základní formy plochy.

Karel Havlíček, Praha.

RECENSE

I. G. Malkin: **Теория устойчивости движения.** Gos. izd. tech.-teor. lit., Moskva, 1952.

Pravděpodobně každý fysik nebo technik má jakousi intuitivní představu o tom, kdy je pohyb stabilní a kdy je nestabilní. Zkoumání stability pohybu (resp. rovnovážné polohy) zůstávalo dlouhou dobu při tomto intuitivním chápání stability. Také metody, jichž se k takovému zkoumání užívalo, byly často nerigorosní. Teprve H. Poincaré a A. M. Ljapunov v devadesátých letech minulého století formulovali jasně problém stability pohybu. A byl to především A. M. Ljapunov, který ve své klasické knize „Obščaja zadača ob ustojčivosti dviženija" podal soustavně základní definice i věty a založil tak teorii stability jako samostatnou disciplinu teorie diferenciálních rovnic.

Uveďme Ljapunovovu definici stability. Budiž dána soustava diferenciálních rovnic

$$\dot{y}_s = Y_s\,(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n)\,, \tag{1}$$

při čemž o pravých stranách předpokládáme, že jsou spojité a zaručují jednoznačnost řešení pro všechna $t \geqq t_0$ a všechna $y_1, y_2, \dots, y_n$ ležící v jisté uzavřené oblasti G; budiž $y_s = f_s(t)$ $(s = 1, 2, \dots, n)$ řešení soustavy (1) s počátečními hodnotami $y_s(t_0) = y_{s0}$, definované pro všechna $t \geqq t_0$, při čemž $(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \in G$. Potom řekneme, že řešení $y(t) \equiv (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \equiv (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ je *stabilní*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna řešení $x(t) \equiv (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ soustavy (1), pro něž $|x_s(t_0) - y_s(t_0)| \leqq \delta$ $(s = 1, 2, \dots, n)$, je $|x_s(t) - y_s(t) < \varepsilon$ $(s = 1, 2, \dots, n)$ pro všechna $t \geqq t_0$. Dále řekneme, že toto řešení $y(t)$ je *asymptoticky stabilní*, jestliže $\delta > 0$ lze dokonce zvolit tak, že všechna řešení $x(t)$, vycházející z δ-okolí bodu $y_0 \equiv (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$, kromě podmínky právě uvedené ještě splňují podmínku $x_s(t) \to y_s(t)$ pro $s = 1, 2, \dots, n$ a $t \to \infty$.

Uveďme hned, že vyšetřování stability nějakého partikulárního řešení $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ převádíme zpravidla na vyšetřování stability triviálního řešení $(0, 0, \dots 0)$ tím, že provedeme substituci $x_s = y_s - f_s(t)$ $(s = 1, 2, \dots, n)$. Tak dostaneme soustavu rovnic pro proměnné x_s

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n)\,, \tag{2}$$

kde $X_s(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$. Přitom předpokládáme, že soustavu (2) lze psát ve tvaru

$$\dot{x}_s = p_{s1}(t)x_1 + p_{s2}(t)x_2 + \dots + p_{sn}x_n + X'_s(t, x_1, x_2, \dots x_n)\,, \tag{3}$$

kde funkce X'_s obsahují v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ členy vyššího stupně než prvého. Jak se modifikují definice stability a asymptotické stability obecného pohybu při specialisování na vyšetřování triviálního řešení je zřejmé.

Obraťme se k obsahu Malkinovy knihy. Vedle úvodní první kapitoly se celá kniha dělí na tři velké části podle toho, co se předpokládá o pravých stranách soustavy (3). V prvé části vyšetřuje autor takové soustavy, jejichž pravé strany nezávisí explicitně na t („autonomní" nebo „stacionární" soustavy), ve druhé části vyšetřuje ty soustavy, jejichž pravé strany jsou periodickými funkcemi času (periodické soustavy) a konečně ve třetí části vyšetřuje soustavy s pravými stranami, jež jsou „obecnými“ funkcemi času („neautonomní“ nebo „nestacionální“ soustavy). Skladba každé z těchto tří částí je opět velmi obdobná. Nejprve se vyšetří podmínky stability či nestability triviálního řešení za toho předpokladu, že pravé strany jsou funkce lineární v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (t. j. $X'_s \equiv 0$), potom se zkoumají ty soustavy, u nichž lze o stabilitě triviálního řešení rozhodnout v podstatě pouze na základě lineárních částí pravých stran a konečně se probírají ty případy, kdy rozhodující vliv na stabilitu mají členy nelineární („kritické“ případy).

Přejděme nyní k podrobnějšímu rozboru obsahu knihy. V první kapitole uvádí Malkin základní definice stability i asymptotické stability a zmiňuje se o způsobech řešení problému stability pohybu. Autor v celé knize užívá pouze druhé Ljapunovovy metody. Připomeňme, že Ljapunov druhou metodou nazývá metodu řešení problému stability spočívající v konstrukci jisté funkce $V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (nyní běžně nazývané Ljapunovovou funkcí); o stabilitě lze potom rozhodnout z vlastností vlastní funkce V a její derivace podle pole (derivací funkce V podle pole nazýváme výraz

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n , \tag{3}$$

kde X_s jsou pravé strany soustavy (22)). Naproti tomu prvou metodou nazýval Ljapunov metodu tkvící ve vyšetřování explicitního vyjádření integrálů soustavy diferenciálních rovnic, na př. ve tvaru nekonečných řad v proměnných $t, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$.

Kapitola druhá, třetí a čtvrtá jsou věnovány vyšetření stacionárních soustav. V kapitole druhé nejprve autor uvádí definici funkce definitní, semidefinitní a indefinitní (pro funkci nezávisící explicitně na čase) a také jednodušší kriteria, jak se charakter jistých funkcí určí. Snad nebude na škodu, připomeneme-li definice uvedených funkcí. Říkáme, že funkce $V(x_1, x_2, \ldots, x_o)$ je *positivně* (*negativně*) *definitní*, jestliže existuje takové okolí H počátku souřadnic, že a) $V(0, 0, \ldots, 0) = 0$ a b) $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ ($V(x_1, x_2, \ldots x_n) < 0$) pro ostatní $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$. U funkce *semidefinitní* připouštíme, aby funkce $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se rovnala nule také ještě v jiných bodech kromě počátku. Funkce *indefinitní* nabývá kladných i záporných hodnot v libovolně malém okolí počátku.

Nyní již můžeme uvést pro ilustraci obsahu celé teorie klasické Ljapunovovy věty o stabilitě a nestabilitě pro autonomní soustavy.

Budiž dána soustava diferenciálních rovnic

$$\dot{x}_s = X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) , \tag{4}$$

kde $X_s(0, 0, \ldots, 0) = 0$ *pro* $s = 1, 2, \ldots, n$. *Jestliže existuje positivně definitní funkce* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *jejíž derivace podle pole je negativně semidefinitní* (*negativně definitní*), *pak triviální řešení je stabilní* (*asymptoticky stabilní*).

Z dvou Ljapunovových vět o nestabilitě uvedu pouze druhou, neboť prvá je obsažena v Četajevově větě o nestabilitě.

Jestliže pro soustavu (4) *existuje funkce* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *taková, že její derivace podle pole má tvar*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \lambda V + W(x_1, x_2, \ldots, x_n) ,$$

kde λ *je kladné číslo a* W *je negativně semidefinitní, při čemž* V *není positivně semidefinitní, pak je triviální řešení nestabilní.*

Konečně Četajevova věta o nestabilitě praví:

Jestliže pro soustavu (4) *existuje funkce* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *taková, že v libovolně malém okolí* *počátku existují body, v nichž $V > 0$ a ve všech takových bodech je také* $\frac{dV}{dt} > 0$, *pak je triviální řešení nestabilní.*

Užití uvedených vět je demonstrováno na několika příkladech. Autor též připojuje geometrickou interpretaci vět o stabilitě. Poznamenejme však, že tato interpretace nevystihuje úplně analytickou formulaci, neboť se při ní předpokládá, že funkce V v okolí počátku monotonně roste nebo klesá, což se při analytické definici nežádá a také ovšem nemusí být splněno, jak ukazuje třeba na příklad pro $n = 1$ funkce $V = x^2 \left(2 - \cos \frac{1}{x}\right)$.

V e třetí kapitole autor nejprve vyšetřuje stabilitu nulového řešení u lineární soustavy s konstantními koeficienty (je zřejmé, že ovšem u libovolné lineární soustavy je každé řešení stabilní (nestabilní), je-li jedno řešení stabilní (nestabilní)). Jelikož při úloze konstruovat funkci V k rozhodnutí o stabilitě triviálního řešení soustavy

$$\dot{x}_s = a_{s1} x_1 + a_{s2} x_2 + \dots a_{sn} x_n + X'_s(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (5)$$

se setkáme s nutností určit formu $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ m-tého stupně tak, aby byla splněna rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} (a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \dots a_{jn} x_n) = U \text{ resp. } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} (a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n) = \lambda V,$$

kde λ je dané číslo a U je daná forma m-tého stupně, vyjasňuje autor nejdříve podmínky řešitelnosti těchto dvou úloh. Potom už může snadno vyslovit tato kriteria stability podle prvého (t. j. lineárního) přiblížení:

a) *Jestliže všechny kořeny charakteristické rovnice* (jak známo, *charakteristickou* rovnicí nazýváme rovnici $|A - \varrho E| \doteq 0$, kde $A = (a_{sj})$ je matice koeficientů a_{sj} a E je jednotková matice) *soustavy prvého přiblížení*

$$\dot{x}_s = a_{s1} x_1 + a_{s2} x_2 + \dots + a_{sn} x_n \quad (s = 1, 2, \dots, n) \qquad (6)$$

mají záporné reálné části, je triviální řešení soustavy (5) *asymptoticky stabilní, ať jsou členy vyšších stupňů* X'_s *jakékoliv.*

b) *Jestliže alespoň jeden kořen charakteristické rovnice soustavy* (6) *má kladnou reálnou část, je triviální řešení soustavy* (5) *nestabilní, ať jsou členy vyšších stupňů* X'_s *jakékoliv.*

Význam i užití těchto Ljapunovových vět je opět ukázáno na několika příkladech.

V právě formulovaných Ljapunovových kriteriích se neobjevuje případ, že některé kořeny charakteristické rovnice mají jen záporné a nulové části. To proto, že v takovém případě charakter triviálního řešení soustavy lineární nikterak neurčuje charakter triviálního řešení soustavy nelineární, t. zn. na př., že triviální řešení soustavy lineární je stabilní a podle toho, jaké členy vyšších stupňů přidáme, dostaneme, že triviální řešení soustavy (5) je buď stabilní nebo nestabilní. Případy, kdy některé kořeny charakteristické rovnice prvého přiblížení mají pouze záporné a nulové reálné části, tvoří tedy kritické případy. Ty jsou předmětem čtvrté kapitoly recensované knihy. Jejich vyšetření je dost složité a autor se omezuje na případ jednoho nulového kořene a dvou kořenů ryze imaginárních (zbývající kořeny mají reálnou část zápornou). Ukazuje se, že až na některé výjimečné případy lze vyšetřování takových soustav převést na vyšetření rovnice $\dot{x} = X(x)$ v případě jednoho nulového kořenu a soustavy rovnic $\dot{x} = \lambda y + X(x, y)$, $\dot{y} = - \lambda x + Y(x, y)$ v případě dvou ryze imaginárních kořenů. Tento druhý případ je autorem probrán značně důkladně třemi různými metodami, neboť jeho řešení je úzce spjato s hledáním periodických řešení takových soustav a to je problém velmi důležitý pro technickou praxi. Tato čtvrtá kapitola je uzavřena výkladem o „bezpečných“ a „nebezpečných“ hranicích oblasti stability. Koeficienty soustavy diferenciálních rovnic totiž často závisí na dalších veličinách — parametrech soustavy — a pro praxi velmi důležitým úkolem je určovat tyto parametry právě tak, aby zkoumané řešení nebo dokonce nějaká celá soustava řešení byla stabilní. Oblast těch bodů v prostoru parametrů, pro něž je soustava stabilní, nazýváme *oblastí stability*. Pro praktické chování soustavy je velmi důležité nejen jak blízko je pracovní bod soustavy k hranici oblasti stability, ale i jak se chová soustava, když parametry leží na hranici oblasti. Body hranice, pro něž je soustava ještě stabilní, se ukazují být méně „nebezpečné“ než body, pro něž je už soustava nestabilní.

V páté kapitole přistupuje Malkin k vyšetřování soustav, jejichž pravé strany závisí explicitně na čase. Pro takové soustavy ovšem nevystačíme s Ljapunovovými funkcemi nezávislými na čase a je proto třeba zavést některé nové definice. Říkáme, že funkce $V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je *positivně* (*negativně*) *definitní*, jestliže existuje taková positivně (negativně) definitní funkce $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, že pro všechna dostatečně velká t a pro $\|x\| < h$, kde h je dostatečně malé, platí $V \geqq W (V \leqq -W)$. Funkci $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ nazveme *semidefinitní*, jestliže pro $t \geqq T$ a pro $\|x\| < h$ nenabývá hodnot určitého znaménka. Dále řekneme, že funkce je *stejnoměrně malá*, jestliže $V \to 0$ pro $\|x\| \to 0$ stejnoměrně vzhledem k t.

Pak Malkin uvádí věty Ljapunovovy a Četajevovu o stabilitě a nestabilitě triviálního řešení soustavy

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

jež jsou zcela obdobné oněm shora uvedeným, jen s tím rozdílem, že definitnost funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ musíme nyní chápat v právě definovaném smyslu a dále pro případ asymptotické stability musíme o funkci $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ předpokládat, že je stejnoměrně malá.

V další části kapitoly se zabývá Malkin už speciálně periodickými soustavami. Vykládá nejprve základy Floquetovy teorie lineárních periodických soustav. Podle této teorie každé řešení soustavy

$$\dot{x}_s = p_{s1}(t)\, x_1 + p_{s2}(t)\, x_2 + \ldots + p_{sn}(t)\, x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{7}$$

kde $p_{sk}(t)$ jsou periodické funkce s periodou ω, lze napsat jako lineární kombinaci n lineárně nezávislých řešení, při čemž komponenty k-tého řešení mají tvar $x_{ks} = P_{ks}(t) e^{\lambda_k t}$, kde $P_{ks}(t)$ je polynom v proměnné t s koeficienty o periodě ω a λ_k je t. zv. *charakteristický exponent*. Všechny charakteristické exponenty λ_k dostaneme z rovností $\lambda_k = \dfrac{1}{\omega} \lg \varrho_k$; ϱ_k jsou řešení charakteristické rovnice $|X(\omega) - \varrho E| = 0$, kde $X(\omega)$ je matice utvořená z hodnot funkcí x_{ks} v čase ω, při čemž funkce $x_{ks}(t)$ tvoří fundamentální soustavu řešení rovnic (7) s počátečními podmínkami $x_{ks}(0) = \delta_{ks}$ (δ je Kroneckerův symbol). Ukazuje se, že funkce $P_{ks}(t)$ shora zavedené se všechny redukují na periodické funkce, jestliže matice $X(\omega) - \varrho E$ má jednoduché elementární dělitele. Můžeme proto již snadno vyslovit větu: *triviální řešení soustavy* (7) *je asymptoticky stabilní, jestliže všechny charakteristické exponenty mají reálnou část zápornou, je nestabilní, jestliže alespoň jeden charakteristický exponent má kladnou reálnou část a je stabilní* (*nestabilní*), *jestliže vedle charakteristických exponentů se zápornou reálnou částí existují také charakteristické exponenty s nulovou reálnou částí a matice $X(\omega) - \varrho E$ má (nemá) jednoduché elementární dělitele*. Jelikož fundamentální systém řešení soustavy (7) obecně nedovedeme určit, ukazuje Malkin jak lze užít metody malého parametru k alespoň přibližnému určení charakteristických exponentů; dále podrobněji vyšetřuje rovnici $\ddot{x} + p(t)\, x = 0$, $p(t)$ periodická. Uvádí také zajímavý Ljapunovův výsledek, že každá soustava (7) s periodickými koeficienty je reducibilní. Soustavu lineárních rovnic se spojitými a omezenými koeficienty nazýváme *reducibilní*, jestliže existuje regulární lineární transformace proměnných s omezenými koeficienty a_{ik}, při čemž jsou omezené jak $\frac{d}{dt} a_{ik}$ tak koeficienty inversní transformace, která soustavu převádí na lineární soustavu s konstantními koeficienty.

Na základě kriterií pro stabilitu triviálního řešení soustavy (7) vyslovuje Malkin kriteria pro stabilitu triviálního řešení soustavy

$$\dot{x}_s = p_{s1}(t)\, x_1 + p_{s2}(t)\, x_2 + \ldots + p_{sn}(t)\, x_n + X'_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{8}$$

kde $p_{ik}(t)$ jsou periodické funkce, a funkce X'_s vedle $X'_s(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$, spojitosti a nějakých podmínek zaručujících jednoznačnost vyhovují ještě této podmínce: Existuje oblast $t \geqq t_0$, $\|x\| < h$, v níž jsou splněny nerovnosti $|X'_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqq A\{\sum_{i=1} |x_i|\}$, kde A je jistá konstanta (nepředpokládáme však periodičnost funkcí X'_s!). V případě, že konstanta A je dostatečně malá, dá se opět dokázat, že mají-li všechny charakteristické exponenty linearisované soustavy záporné reálné části, je také triviální řešení soustavy (8) asymptoticky stabilní a má-li alespoň jeden charakteristický exponent soustavy (7) kladnou reálnou část, je také triviální řešení soustavy (8) nestabilní. Případy, kdy charakteristické exponenty řešení soustavy (7) mají pouze záporné a nulové reálné části (alespoň jeden takový) jsou kritické. Ty jsou v knize opět vyšetřovány pro případ jednoho nulového charakteristického exponentu a dvou charakteristických exponentů ryze imaginárních. Způsob řešení je velmi obdobný tomu, jakým se úloha řeší u autonomních soustav.

V poslední šesté kapitole přistupuje Malkin k vyšetření nestacionárních soustav. Zabývá se nejprve stabilitou při trvale působících poruchách. Zatím jsme uvažovali jednorázové poruchy, které způsobovaly pouze výchylku počátečních hodnot. Nyní však vedle soustavy rovnic

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

budeme uvažovat soustavu

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) + R_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

(funkce X_s a R_s jsou spojité a zaručují jednoznačnost řešení obou soustav i existenci triviálního řešení $(0, 0\ldots, 0)$ a řekneme, že soustava (9) má stabilní triviální řešení při trvale působících poruchách R_s, jestliže k libovolně malému $\varepsilon > 0$ existují kladná čísla $\eta_1(\varepsilon)$ a $\eta_2(\varepsilon)$ tak, že všechna řešení $x(t)$ soustavy (10) vyhovující v počáteční okamžik t_0 nerovnostem $\|x(t_0)\| \leqq \eta_1$ při libovolných funkcích R_s vyhovujících v oblasti $t \geqq t_0$, $\|x\| < \varepsilon$ nerovnostem $|R_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \eta_2$, vyhovují pro všechna $t \geqq t_0$ nerovnostem $\|x\| < \varepsilon$. Vyšetření podmínek stability za trvale působících poruch R_s je pro praxi velmi užitečné, neboť při odvozování rovnic pohybu často některé síly zanedbáváme, ať už proto, že neznáme jejich přesné chování nebo proto, abychom usnadnili matematické řešení problému. Důležitý Malkinův výsledek zní: *jestliže Ljapunovova funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ sestrojená pro soustavu* (9) *zaručuje asymptotickou stabilitu triviálního řešení této soustavy a její parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial x_j}$ jsou omezené, je triviální řešení stabilní při trvale působících silách.*

Další významnou otázkou, kterou se Malkin zabývá je obrácení vět o stabilitě a nestabilitě při druhé Ljapunovově metodě. Zatím jsme uváděli věty asi tohoto charakteru: jestliže je dána soustava rovnic a existuje funkce V a ona sama a její derivace podle pole mají takové a takové vlastnosti, pak triviální řešení soustavy je stabilní, asymptoticky stabilní, resp. nestabilní. Nyní si však klademe otázku: jestliže triviální řešení je stabilní resp. nestabilní, kdy existuje Ljapunovova funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, která nám dovolí o stabilitě rozhodnout? V recensované knize jsou uvedeny nejdůležitější výsledky v té době známé, t. j. že Ljapunovovu větu o stabilitě pro stacionární případ nelze obrátit a Ljapunovovu větu o asymptotické stabilitě lze obrátit pro lineární nestacionární soustavu (Malkin a PERSIDSKIJ) a pro obecnou stacionární a periodickou soustavu (MASSERA). Od té doby byl celý komplex těchto otázek podroben dalšímu rozboru a byla dokázána možnost obrácení Četajevovy a druhé Ljapunovovy věty o nestabilitě (VRKOČ, KRASOVSKIJ) a za velmi obecných předpokladů i Ljapunovovy věty o asymptotické stabilitě pro obecné nestacionární soustavy (Malkin). (Podrobnosti viz v referátu o přednášce s. dr J. KURZWEILA o obrácení Ljapunovových vět v předcházejícím čísle Časopisu, str. 359—361 a v chystaném článku s. dr J. Kurzweila).

Z předcházejícího je snad jasné, jaký význam mají kořeny charakteristické rovnice u lineárních autonomních soustav a charakteristické exponenty u lineárních periodických soustav pro posouzení stability triviálního řešení. U obecných neautonomních soustav nahrazuje tyto veličiny pojem *charakteristického čísla* zavedený Ljapunovem. Jako charakteristické číslo nějaké funkce $f(t)$ definujeme číslo $-\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\lg |f(t)|}{t}$; jako charakteristické číslo jistého řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soustavy

$$\dot{x}_s = q_{s1}(t)\, x_1 + q_{s2}(t) x_2 + \ldots + q_{sn}(t)\, x_n \tag{11}$$

pak definujeme $-\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{1}{t} \lg \sum\limits_{i=1}^{u} |x_i|$. Systém n fundamentálních řešení soustavy (11) nazveme *normální*, jestliže charakteristická čísla řešení nabývají maximálních možných hodnot. U autonomních resp. periodických soustav se n charakteristických čísel normálního systému řešení rovná záporně vzatým kořenům charakteristické rovnice resp. záporně vzatým charakteristickým exponentům. Součet všech n charakteristických čísel normálního systému řešení se může nanejvýš rovnat číslu $\exp \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{ss}(\tau)\, d\tau$. Jestliže se tato dvě čísla sobě vskutku rovnají a jestliže se charakteristické číslo funkce $\exp \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{ss}(\tau)\, d\tau$ rovná záporně vzatému charakteristickému číslu funkce $\exp[-\int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{ss}(\tau)\, d\tau]$, říkáme, že soustava (11) je *regulární*. Již Ljapunov ukázal (jeho příklad Malkin také uvádí), že existují neregulární soustavy. Dá se však snadno dokázat, že každá reducibilní soustava je regulární. Poněvadž regulární soustavy hrají významnou úlohu při vyšetřování stability pohybu, je důležité umět určit již z koeficientů soustavy rovnic, zda soustava je regulární. Užitečnou větou v tomto směru je věta Ljapunovova udávající podmínku nutnou a postačující pro regularitu soustavy s trojúhelníkovou maticí. Věta Perronova udávající podmínku nutnou a postačující pro regularitu soustavy se čtvercovou maticí má spíše teoretickou cenu.

Několik paragrafů věnuje Malkin vyšetření pojmu stability charakteristického čísla. Říkáme, že charakteristická čísla $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$ soustavy (11) jsou stabilní, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze určit $\delta > 0$ tak, že charakteristická čísla $\lambda_1' \leqq \lambda_2' \leqq \ldots \leqq \lambda_n'$ normálního systému řešení rovnic

$$\dot{x}_s = (p_{s1}(t) + \varphi_{s1}(t))\, x_1 + \ldots + (p_{sn}(t) + \varphi_{sn}(t))\, x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

kde $|\varphi_{jk}(t)| < \delta$, vyhovují nerovnostem $|\lambda_i - \lambda_i'| < \varepsilon$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Skutečnost, že neregulární soustavy mohou mít nestabilní charakteristická čísla je dávno známa (PERRON). Teprve nedávno však VINOGRAD (Prikl. mat. mech. *17* (1953), str. 645—650) konstruoval regulární soustavu, jejíž charakteristická čísla jsou nestabilní. V Malkinově knize jsou uvedeny některé věty jednak udávající postačující podmínky pro stabilitu charakteristických čísel jednak dovolující odhadnout velikost charakteristických čísel dané soustavy.

Úloha rozhodnout o stabilitě nebo asymptotické stabilitě triviálního řešení soustavy

$$\dot{x}_s = q_{s1}(t)\, x_1 + q_{s2}(t)\, x_2 + \ldots + q_{sn}(t)\, x_n + X'_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{12}$$

na základě chování řešení soustavy (11) je v případě obecné neautonomní soustavy dost obtížná. Je totiž známo, že jsou-li $q_{ik}(t)$ obecnými funkcemi času, není asymptotická stabilita triviálního řešení soustavy (11) ani postačující ani nutná k tomu, aby triviální řešení soustavy (12) bylo stabilní. Je-li však soustava (11) regulární, pak lze už dokázat Ljapunovovu větu velmi obdobnou té, o níž jsme se již zmínili u periodických soustav, totiž: *je-li soustava* (11) *regulární a všechna charakteristická čísla jejího normálního systému řešení jsou kladná, pak triviální řešení soustavy* (12) *je asymptoticky stabilní při libovolné volbě funkcí* X_s *vyhovujících nerovnostem*

$$|X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)| < A\, \{ \sum_{i=1}^{n} |x_i| \}^m, \quad A > 0, m > 1\,. \tag{13}$$

Podmínku regularity soustavy (11) lze sice vypustit, avšak pak musíme žádat, aby pro soustavu (11) existovala Ljapunovova funkce zaručující asymptotickou stabilitu, a aby funkce X'_s vyhovovaly nerovnosti (13) pro $m = 1$ a A dostatečně malé. Tato kriteria se navzájem úplně nepřekrývají.

Teorii kritických případů probírá Malkin v této kapitole pro některé speciální soustavy. Věc je dost složitá a výsledky nelze stručně popsat.

Celá Malkinova kniha je psána velmi jasně a srozumitelně. Zvláště prvé čtyři kapitoly jsou psány tak, aby jim mohl porozumět i inženýr bez hlubších matematických znalostí. Tyto kapitoly jsou také opatřeny mnoha osvětlujícími příklady matematického i technického charakteru.

Tiskových chyb je poměrně málo a pozorný čtenář si je snadno opraví. Větší věcná chyba se autoru vloudila do textu myslím jen na jednom místě. Na str. 94_{12} totiž tvrdí, že funkce (30.19) je definitně záporná, což není správné. Tvrzení se však stane správným, jestliže vynecháme člen xQ_1, který tam nemá ve skutečnosti být, poněvadž se můžeme snadno přesvědčit, že výraz xP_1 v (30.11) je identicky roven nule.

Malkinova kniha zaujímá nyní jistě prvé místo ve světové knižní literatuře o teorii stability. Ljapunovova kniha „Obščaja zadača ob ustojčivosti dviženija", která po prvé vyšla před šedesáti lety je psána nepřístupněji a pochopitelně také neobsahuje mnoho nových výsledků od té doby dosažených. Dubošin si v knize „Osnovy teorii ustojčivosti dviženija" (1952) klade jen omezený úkol, aby podal přístupný úvod ke zmíněnému klasickému dílu Ljapunovovu. Četajevova kniha „Ustojčivost dviženija" (1946) je daleko menšího rozsahu. Bellmanova kniha „Stability theory of differential equations" (1953) se zabývá klasickou teorií stability v Ljapunovově smyslu vlastně velmi málo. Malkinova kniha tedy celkem jako jediná dává čtenáři jasný a úplný obraz o současném stavu teorie stability (s výjimkou snad jedině vyšetřování stability některých speciálních soustav vyskytujících se v teorii automatického regulování; tato vyšetřování jsou alespoň částečně zachycena v Lurjeho knize „Nekotoryje nelinejnyje zadači avtomatičeskogo regulirovanija"). Lze tedy recensovanou knihu čtenáři co nejupřímněji doporučit ke studiu.

O. Vejvoda, Praha

O. Borůvka: **Úvod do theorie grup**, 2. rozšířené vydání, Přírodovědecké vydavatelství, 1952, stran 156.

Důvodem k napsání této recense byla skutečnost, že tato kniha nalezla velmi příznivou odezvu ve světové literatuře, kde o ní v minulém roce 1954 vyšly dvě recense, a to jedna stručnější v *Mathematical Reviews*, Vol. 15 (1954), No 1, str. 7 z péra C. Loewnera

(Stanford, California), druhá pak velmi podrobná v *Zentralblatt für Math.*, 49. B. (1954), str. 11—12 od H. Schwerdtfegra, zatím co v domácí literatuře nebylo o knize nikde referováno. Chci proto čtenáře tohoto Časopisu seznámiti s obsahem a hlavními charakteristickými rysy této knihy.

Jak už z názvu knihy vyplývá, nejde o vyčerpávající učebnici o grupách, nýbrž o dílo, v němž autor osvětluje a rozebírá základní pojmy, na nichž je theorie grup vybudována.

Kniha se skládá ze tří oddílů, z nichž první jedná o množinách, druhý o grupoidech, třetí o grupách.

Oddíl I. V kap. 1 jsou vyloženy základní poznatky o množinách. V kap. 2 zavádí autor pojem rozkladu $\bar{A}$ v množině G, jímž rozumí neprázdný systém neprázdných podmnožin v množině G, z nichž každé dvě jsou disjunktní, a pojem rozkladu na množině (jestliže systém podmnožin splňuje kromě hořejších vlastností podmínku, že každý prvek množiny je obsažen v některé podmnožině). Tyto dva pojmy se ukazují velmi užitečné hlavně v oddílech II a III, kde se pomocí nich zobecňují některé známé vlastnosti grup. V tomto směru je důležitý také pojem obalu podmnožiny B v rozkladu $\bar{A}$ (je to množina všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které jsou incidentní s podmnožinou B; označení $B \sqsubset \bar{A}$) a dále pojem průseku podmnožiny B s rozkladem $\bar{A}$ (což je množina neprázdných průniků jednotlivých prvků rozkladu $\bar{A}$ s podmnožinou B; označení $B \sqcap \bar{A}$). Dále je to pojem řetězce v rozkladu, zákryt rozkladu $\bar{A}$ a zjemnění rozkladu $\bar{A}$. Mezi společnými zákryty (zjemněními) rozkladů $\bar{A}$, $\bar{B}$ existuje zákryt nejmenší $[\bar{A}, \bar{B}]$ a největší zjemnění $(\bar{A}, \bar{B})$. Konečně se zavádí pojem doplňkových rozkladů (jestliže každý prvek jednoho rozkladu je incidentní se všemi prvky rozkladu druhého, které s ním leží v témže prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$).

V kap. 3 se mluví o zobrazeních do množiny a na množinu (neboli o pojmu funkce na množině do množiny, příp. na množinu). Ukazuje se, že každé zobrazení $\mathbf{g}$ množiny G na G^* definuje jistý rozklad na G, rozklad $\bar{G}$ příslušný k zobrazení $\mathbf{g}$. Autor si dále všímá zobrazení rozkladů. Dokazuje větu, že zobrazení $\mathbf{g}\bar{A}$ rozkladu $\bar{A}$ množiny G na množinu G^* je rozkladem $\bar{G}$ na G, když a jen když $\bar{A}$, $\bar{G}$ jsou doplňkové (při čemž $\bar{G}$ je rozklad příslušný k zobrazení $\mathbf{g}$). Zobecněným zobrazením množiny G do G^* rozumí autor takový vztah mezi prvky obou množin, jímž je ke každému prvku množiny G přiřazen nejméně jeden prvek množiny G^* (t. j. mnohoznačná funkce na G do G^*). Jestliže zobecněné zobrazení $\mathbf{g}$ množiny G na sebe je reflexivní a transitivní, nazývá se kongruence na množině. Symetrická kongruence, t. j. kongruence, pro níž ze vztahu $a \in \mathbf{g}b$ plyne vždy $b \in \mathbf{g}a$, je tedy ekvivalencí, neboť jde o relaci reflexivní, transitivní a symetrickou. Jestliže kongruence na množině splňuje zákon antisymetrie, t. j. plyne-li ze vztahů $a \in \mathbf{g}b$, $b \in \mathbf{g}a$ vždy $a = b$, dostaneme antisymetrickou kongruenci. Antisymetrická kongruence na G určuje v G částečné uspořádání, při čemž $a \leq b$ značí totéž, co $b \in \mathbf{g}a$. Je-li na G definována antisym. kongruence $\mathbf{g}$, pak ke každé uspořádané dvojici prvků a, b z G (vzhledem ke kongruenci $\mathbf{g}$) existuje nejvýš jeden prvek c, pro nějž platí: 1. $a \leq c$, $b \leq c$; 2. je-li v G prvek x takový, že $a \leq x$, $b \leq x$, pak je $c \leq x$. Prvek c se pak nazývá horní hranice prvků a, b a značí se $a \smile b$. Analogicky se definuje dolní hranice prvků a, b a značí se $a \frown b$.

V kap. 4 aplikují se některé z uvedených pojmů na theorii permutací konečné množiny.

II. oddíl, který je z větší části původní, začíná kap. 5 jednající o násobení v množině G, t. j. o pravidlu, jímž je ke každé uspořádané dvojici prvků a, $b \in G$ jednoznačně přiřazen opět nějaký prvek $c \in G$. V kap. 6 se definuje grupoid $\mathfrak{G}$ jakožto neprázdná množina G spolu s nějakým násobením $\mathbf{M}$ v množině G. Množina G se nazývá pole grupoidu. Grupoid v tomto smyslu po prvé definovali O. Ore a B. A. Haussmann (*Theory of Quasigroups*, *Amer. J.* 49, 1937), třebaže v jiném smyslu používá slova grupoid H. Brandt už v r. 1926, t. zv. *grupoid Brandtův*. Autor uvedl po prvé do české literatury tento pojem v r. 1939 ve své práci *Theorie grupoidů I*, Spisy přír. f. Brno, č. 275. Dále zavádí autor pojem podgrupoidu, nadgrupoidu a ideálu A (pro nějž platí $AG \subset A$, anebo $GA \subset A$), pojem součinu uspořádané skupiny n prvků a všímá si jejich vlastností.

V kap. 7 jedná se o homomorfním zobrazení neboli deformaci grupoidů, o jejich isomorfismu a automorfismu.

Kap. 8 je zcela originální. Jedná o vytvořujících rozkladech v G a na G, t. j. o rozkladu $\bar{A}$, jehož uspořádané dvojice prvků $\bar{a}$, $\bar{b}$ mají vlastnost, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, kde $\bar{c}$ je další prvek rozkladu $\bar{A}$. Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ je grupoid, jehož polem je množina prvků vytvořujícího rozkladu $\bar{A}$ a jehož násobení je definováno $\bar{a} \,.\, \bar{b} = \bar{c}$, kde $\bar{c}$ je onen prvek z rozkladu $\bar{A}$, pro nějž platí $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Autorovi přísluší priorita v zavedení tohoto pojmu (srv. jeho práci *Über Ketten von Faktoroiden* v *Math. Ann.*, T. 118, 1942, S. 41 ff.; srv. také Dubreil, *Algèbre I*, Paris 1946, p. 81). K faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ v grupoidu $\mathfrak{G}$ a k podgrupoidu $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ se druží pojem obalu podgrupoidu $\mathfrak{B}$ ve faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ a dále pojem průseku faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ s podgrupoidem $\mathfrak{B}$. K tomu přistupuje pojem zákrytu a zjemnění faktoroidů a pojem doplňkových faktoroidů (jsou-li doplňková jejich pole).

V kap. 9 vrcholí úvahy o grupoidech třemi větami o isomorfismu grupoidů a úvahami o deformaci faktoroidů.

V kap. 10, jíž končí II. oddíl, jsou shrnuty vlastnosti speciálních druhů grupoidů, zvl. grupoidů asociativních neboli pologrup, quasigrup a grupoidů s jednotkou. Kapitola končí krátkým výkladem o svazech. Autor definuje svaz jako dvojici soumístných, t. j. na témže poli definovaných grupoidů, jejichž násobení splňují zákon komutativní, asociativní, idempotenci a absorptivnost. Snadno se ukáže, že z této definice vyplývá možnost částečného uspořádání pole G dvěma vhodnými způsoby (t. zv. horní a dolní část. uspořádání svazu).

Oddíl III systematicky probírá vlastnosti grup, pokud vyplývají z analogických úvah o grupoidech.

Po 11. kap., v níž jsou shrnuty základní vlastnosti grup, mluví se v kap. 12 o rozkladech grup vytvořených podgrupami. Rozklad grupy $\mathfrak{G}$ v levé třídy vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ se značí $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, zatím co symbol $\mathfrak{G}/_p\mathfrak{A}$ značí rozklad v pravé třídy. Ukazuje se, že se zde celkem bez obtíží účinně uplatňují pojmy nejmenšího společného zákrytu dvou levých (pravých) rozkladů. Při tom se pro vzájemně zaměnitelné podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ v $\mathfrak{G}$ dokazuje věta: $[\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}] = \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Podobně o největším společném zjemnění dvou levých rozkladů platí $(\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}) = \mathfrak{G}/_l(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$. Dále se ukazuje, že pro vzájemně zaměnitelné podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou příslušné levé (pravé) rozklady grupy doplňkové. Zajímavý je také výsledek týkající se obalu podgrupy $\mathfrak{C}$ zaměnitelné s podgrupou $\mathfrak{A}$, kde $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$. Platí totiž vztah $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/_l\mathfrak{A} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\, \mathfrak{A}/_l\mathfrak{A}$. Analogický výsledek platí o průseku: $\mathfrak{B}/_l\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_l (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$.

Kap. 13 pojednává o invariantních podgrupách. Ukazuje se, že množina invariantních podgrup vzhledem k násobením $\smile$ a $\frown$ definovaným vztahy $\mathfrak{A} \smile \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \frown \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ tvoří modulární svaz. O vytvořujících rozkladech na grupě platí věta, že všechny vytvořující rozklady grupy jsou právě jenom rozklady vytvořené jednotlivými invariantními podgrupami.

Kap. 14 je věnována faktorovým grupám (neboli grupám tříd, podle před. vydání), které jsou speciálním případem faktoroidu, je-li totiž jeho polem vytvořující rozklad na $\mathfrak{G}$. Ukazuje se, že o faktorových grupách platí analogické věty jako o faktoroidech, zvl. pokud jde o jejich obal, průsek, zákryt a zjemnění.

Kap. 15 je v převážné části analogií kap. 9 z oddílu II. Navíc se v ní probírá pojem translace grupy, věta Cayleyova a realisace abstraktních grup.

Kniha končí kap. 16 o cyklických grupách.

Do knihy je zařazeno množství vhodných příkladů, mezi něž byly pojaty některé speciální věty (na př. o centru grupoidu a grupy, o hlavním rozkladu grupy, o normalisátoru grupy, o grupě diedrické, oktaedrické, a j.).

Předností Borůvkovy knihy jest především její přesnost po stránce obsahové, a po stránce výrazové jasnost, jazyková vytříbenost a stručnost, která není nikde na újmu srozumitelnosti. Také originální pojetí knihy ukazuje se velmi výhodné. Odkrývá nové souvislosti mezi jinak dosti odlehlými obory matematiky jako je theorie množin a theorie grup. V takovém pojetí, jak autor dochází k pojmu grupy, jeví se zavedené pojmy a úvahy nenásilné, přirozeně vyplývají z povahy věci a probíhají stupňovitě od jednodušších úvah o množinách a grupoidech k složitějším úvahám o grupách. Lze proto Borůvkovu knížku považovat za zdařilou a originální matematickou monografii, obohacující v mnohém směru naši moderní matematickou literaturu, která v posledních letech zaznamenává silný vzestup i na poli vysokoškolských učebnic.

Ani výprava knihy nezůstala pozadu za jejími zmíněnými přednostmi. Tisk je jasný a výrazný, vhodně rozlišený. Zvláště pečlivě je provedena sazba obtížných matematických symbolů.

Josef Škrášek, Brno.

M. Promberger: **Použití matic a tensorů v theoretické elektrotechnice.** Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1955, 166 stran, 51 obrázků. Cena váz. Kčs 25,70.

Tato kniha je určena technikům, pracujícím v oboru elektrických obvodů a zejména v oboru točivých strojů a pole. Autor podává tu základy theorie matic a tensorů jen velmi stručnou formou a soustřeďuje se hlavně na elektrotechnické aplikace výsledků. Celá kniha je psána přístupně a též nároky na znalosti čtenáře jsou minimální.

Stručná forma je však na některých místech na závadu, neboť nejsou vyznačovány věty a definice, takže nezasvěcenému čtenáři nebude všude zřejmé, co je úmluvou a co důsledkem. Tak ku příkladu na str. 23 je zaveden součet dvou matic takto: „Z nezávislosti jednotlivých prvků matice plyne přímo pravidlo pro sčítání matic" a následuje obvyklý vzorec.

Dílo je rozvrženo do čtyřech částí: prvá je věnována maticím, druhá lineárním elektrickým zapojením, třetí vektorům a tensorům, čtvrtá elektromagnetickému poli.

V první části jsou zavedeny matice a algebraické operace s nimi. Poté je přihlédnuto ke zvláštním druhům matic a maticovým polynomům, přičemž jsou odvozeny rovnosti Hamilton-Cayleyova a Sylvestrova.

Ve druhé části jsou probírány základní pojmy z lineárních elektrických obvodů, je řešena otázka o počtu úplných stromů sítě a bez důkazu jsou uvedena Kirchhoffova kombinační pravidla. Dále je sledováno řešení obvodů pomocí matic, zejména metoda uzlových potenciálů, a použití matic v theorii čtyřpólu. Poté je probrán maticový výpočet přechodových stavů v elektrických obvodech.

V další kapitole zabývá se autor theorií elektrických točivých strojů. Ukazuje, kterak je možno pomocí matic snadno vyjádřit závislosti mezi jednotlivými veličinami stroje.

Úvodem třetí části knihy zavádí autor pojem tensoru pomocí matice a odvozuje základní pravidla pro počítání s nimi. Největší pozornost je věnována tensorům třetího stupně. Závěrem třetí části jsou pak probírány základy tensorové analysy.

V poslední, čtvrté části díla, je sledováno nejprve maticové vyjádření vztahů mezi veličinami elektrostatického a magnetostatického pole, poté pole proměnného s časem a konečně čtyřrozměrné vyjádření elektromagnetického pole. Závěrem je pak vyšetřována elektrodynamika pohybujících se těles a jsou uvedeny četné příklady.

Kniha je doplněna bohatým odkazem na literaturu.

Možno říci, že kniha bude vítanou učebnicí pro techniky. Matematik nalezne v ní obšírné pole námětů pro aplikaci.

V. Doležal, Praha.

ZPRÁVY

AKADEMIK SAV ŠTEFAN SCHWARZ VYZNAMENÁN STÁTNÍ CENOU KLEMENTA GOTTWALDA Z MATEMATIKY V ROCE 1955

Letos v květnu byla udělena dr Štefanu Schwarzovi, členu korespondentu Československé akademie věd a akademiku Slovenské akademie věd, státní cena 1. stupně Klementa Gottwalda za práce v oboru pologrup. Dr Štefan Schwarz je profesorem matematiky na Slovenské technice v Bratislavě.

Již za války učinil prof. dr Štefan Schwarz předmětem svého studia *pologrupy*. Od této doby nepustil tuto teorii se svého zřetele a hlavně v posledních dvou letech 1953 a 1954 soustředil svou práci na tento obor a dosáhl v něm významných a velmi zaokrouhlených výsledků, zvláště pokud se týká periodických pologrup.

Jak známo, je grupa soustava prvků s jednou asociativní operací, kterou píšeme obyčejně jakožto násobení. Od toho násobení požadujeme stejně jako při násobení čísel, aby bylo asociativní, nepožadujeme však na rozdíl od číselného násobení, aby bylo komutativní. Dále žádáme, aby soustava, která je grupou, obsahovala jednotkový prvek a ke každému prvku prvek inversní, t. j. takový, že když jej s oním daným prvkem znásobíme, dostaneme prvek jednotkový. Pologrupa je jisté zobecnění pojmu grupy. Je to soustava prvků s jednou asociativní operací (násobením). Na rozdíl od grupy nepožadujeme však existenci ani jednotkového ani inversního prvku. Nutno však ihned zdůraznit, že je to zobecnění velmi přirozené a pro moderní matematiku velmi důležité. Tím se podstatně liší od mnohých jiných zobecnění, která se často objeví v literatuře o algebře, kdy se prostě vynechají některé z axiomů, jimiž je definován nějaký známý a starý algebraický útvar, a studují se vlastnosti takto vzniklého nového útvaru bez ohledu, zda tento nový útvar má pro matematiku nějaký význam. Rozvoj některých partií matematiky v posledních třiceti letech ukazoval velmi zřetelně na to, že pro mnohá vyšetřování je pojem grupy, který hrál v matematice posledních sta let tak základní a důležitou úlohu, příliš úzký. Toliko prostá zobrazení nějaké množiny na sebe tvoří grupu. Jakmile jde o zobrazení, která nejsou prostá, neb o zobrazení množiny na její pravou část, neexistuje k takovému zobrazení zobrazení inversní. Proto všechna zobrazení dané množiny do sebe netvoří grupu, nýbrž jen pologrupu. Tato okolnost způsobuje, že se pologrupy objevují naprosto přirozeně a nutně v nejrůznějších odvětvích matematiky. Tak na př. v teorii funkcí neb v geometrii, jakmile jde o zobrazení množin, které obsahují i singulární elementy, nevystačíme s grupami. Význam pologrup pro algebru je mimo jiné patrný z vyšetřování Krullových o teorii ideálů v okruzích, v nichž ideály nesplňují žádné podmínky konečnosti. Při těchto vyšetřováních definoval Krull prvoideál jako ideál okruhu, pro nějž komplementární množina je multiplikativní pologrupou, a právě na vlastnostech těchto pologrup vytvořených prvoideály založil celou teorii. Dnes je již zřejmo, že teorie ideálů je ve velmi úzkém vztahu s teorií pologrup. Rovněž v tak důležité matematické disciplině, jako je funkcionální analysa, mají pologrupy velký význam, jak je patrno již z toho, že E. Hill nazval svou velkou knihu o funkcionální analyse velmi významně: *Functional analysis and semi-groups*.

Teorie grup je dnes velkou a po mnohých stránkách velmi propracovanou budovou. Naproti tomu je teorie pologrup, ačkoli bylo v ní docíleno již řady významných výsledků, teprve na začátku svého rozvoje. Tím spíše v době, kdy se prof. Schwarz začal pologrupami zabývat, existoval o pologrupách jen malý počet prací. Zde je třeba uvésti nejdříve několik základních prací sovětského matematika A. SUŠKEVIČE a pak především práce A. S. MALCEVA, O. BORŮVKY, P. DUBREILE, A. H. CLIFFORDA a D. REESE.

V poslední době se objevují práce o teorii pologrup v matematických časopisech častěji, je jich však stále málo, zvláště přihlédneme-li k velkému významu pologrup, o němž jsem mluvil výše. Z matematiků, jichž práce mají společné body s pracemi prof. Schwarze, jsou to sovětští matematici JE. S. LJAPIN a N. N. VOROBJEV, a dále A. H. Clifford, J. A. Green a D. Rees.

V prvních pracích o teorii pologrup hledaly se teprve vhodné metody pro vyšetřování pologrup a pro budování jejich teorie. Nasnadě byl tento postup: snažit se převésti metody, které se osvědčily v teorii grup, do studia pologrup. Tak se v některých pracích řešila otázka, jak převésti do teorie pologrup pojem normální podgrupy. Vyšetřovaly se za tím účelem kongruence na pologrupě a homomorfismy pologrup. Cílem těchto vyšetřování bylo dokázat pro pologrupy analogické věty k větám z okruhu věty Jordan-Hölderovy. (P. Dubreil, a v jistém smyslu J. A. Green a Je. S. Ljapin.)

Nelze říci, že by tyto práce nebyly úspěšné. Ukazuje se však po mém mínění čím dále tím více, že těmito metodami nelze proniknout hlouběji do pologrup a odhalit tak jejich vnitřní strukturu. Pologrupa je útvar daleko obecnější a jeho struktura daleko rozmanitější, než je tomu u grupy. Proto se ukázalo, že není vhodné, přenášet prostě metody a koncepce z teorie grup na pologrupy. Nutno proto vyzdvihnout tu okolnost, že prof. Schwarz hned na začátku svých vyšetřování pologrup dal se jinou cestou, která se ukázala pro studium struktury pologrup mnohem plodnější, a to v době, kdy tyto věci nebyly ještě daleko tak zřetelné, jako jsou dnes. Prof. Schwarz použil ke studiu pologrup prostředků, které se tak osvědčily v teorii algeber: totiž ideálů a idempotentů. Těmito prostředky pracovali a pracují na příklad A. H. Clifford, D. Rees, N. N. Vorobjev a částečně též Je. S. Ljapin. Touto cestou se dal prof. Schwarz již v první své práci o pologrupách. O významu této práce svědčí to, že A. H. Clifford ji cituje na několika místech ve své práci: *Semigroups without nilpotent ideals*. Am. Journ. of Math. *71*, 1949, 834—844 (str. 834, 841, 842, 843). Clifford používá ve své práci $\mathfrak{n}$-potentních ideálů a radikálu, kteréžto pojmy definoval prof. Schwarz. Rovněž J. A. Green v práci *On the structure of semigroups*, Annals of Math. *54*, 1951, 163—177 cituje uvedenou Schwarzovu práci.

Co zde bylo řečeno o Schwarzových metodách, neznamená, že Schwarz používá výhradně metod vytvořených analogicky k teorii algeber. Právě naopak, kdykoli se to ukázalo výhodným, použil i jiných metod. Tak na př. v jedné práci používá jistých kongruencí definovaných na pologrupě.

Jest přirozené, že za dnešního stavu vědění o pologrupách nelze dosáhnout významných výsledků tím, že budeme studovat obecně pologrupy. Proto téměř všichni autoři vymezují si nějakými speciálními vlastnostmi tu neb onu kategorii pologrup, kterou pak studují. To činí i prof. Schwarz. Tak studoval na př. pologrupy, které mají maximální levý (pravý) neb dvojstranný ideál. O pracích patřících do této skupiny lze úhrnně říci toto: Autor v nich studuje důležitou skupinu pologrup a objasňuje v nich podrobně jejich strukturu. Tyto práce mají příbuznou tematiku s pracemi A. H. Clifforda a N. N. Vorobjeva. Proti těmto autorům však podstatně zjednodušuje důkazové metody a přináší nové a úplnější výsledky. Známé výsledky pak zobecňuje a zpřesňuje. V mnohých větách podstatně zjednodušuje předpoklady.

Jinou důležitou skupinou prací jsou práce o *periodických pologrupách*. Pologrupa S se nazývá periodickou, když pro každý prvek $a \in S$ posloupnost

$$a, a^2, a^3, \ldots$$

neobsahuje samé od sebe různé prvky. Pak tato posloupnost obsahuje jen konečný počet prvků od sebe různých. Prof. Schwarz vyšetřoval nejdříve obecně periodické pologrupy a objasnil jejich vnitřní strukturu. Dále se obrátil ke studiu charakterů konečných (a tedy periodických) komutativních pologrup. Docílil po této stránce značně úplných výsledků. Pokud vím, je to po prvé, co byly charaktery pologrup studovány. Práce neobsahuje však jen teorii charakterů, nýbrž je v ní udána i konstruktivní metoda, kterou lze pro konkretně danou pologrupu sestrojit všechny její charaktery.

Ve studiu pologrup pokračuje prof. Schwarz dále. Dnes jsou uveřejněny již další jeho práce o pologrupách, které nebyly ještě vytištěny, když se jednalo o udělení státních cen Klementa Gottwalda pro rok 1955. Proto přejeme prof. Schwarzovi v těchto dalších vyšetřováních mnoho zdaru. *Vl. Kořínek*, Praha.

UDĚLENÍ ŘÁDU REPUBLIKY AKADEMIKU BOHUMILU BYDŽOVSKÉMU

Již po druhé v tomto roce se naskytá příležitost, abychom na stránkách tohoto časopisu vyslovili blahopřání akademiku B. Bydžovskému. Po prvé bylo to v minulém čísle časopisu, kde K. Havlíček věnoval vřelá slova osobnosti i dílu akademika Bydžovského při příležitosti jeho 75. narozenin. Dnes blahopřejeme akademiku Bydžovskému k vysokému vyznamenání, které znovu dokumentuje význam práce jím vykonané a které současně ukazuje, jaké vážnosti se těší představitelé vědeckého a kulturního života v naší lidově demokratické republice: k májovému svátku pracujících byl akademiku Bydžovskému udělen Řád republiky.

Zdravili jsme radostně akademika Bydžovského, když na tribuně nositelů vyznamenání přihlížel májovému průvodu. Ale zdravili ho nejen matematikové, nýbrž i přečetní jiní manifestanti, neboť osobnost B. Bydžovského je známa a vážena v nejširších kruzích, tak jak to odpovídá šíři jeho zájmů a jeho mnohostranné činnosti. Čest jeho práci!

V. Jarník, Praha.

AKADEMIK JUR HRONEC VYZNAMENANÝ RADOM PRÁCE

Pri tradičnom májovom udelovaní čestných vyznamenaní najzaslúžilejším pracovníkom zo všetkých odborov ľudskej činnosti bol poctený tohto roku udelením Radu práce i prof. dr Jur Hronec, riadny člen Slovenskej akadémie vied, profesor Komenského univerzity v Bratislave.

Tohto vysokého pracovného vyznamenania sa mu dostalo za dlhoročnú úspešnú organizačnú, pedagogickú a vedeckú činnosť na našich vysokých školách.

Prof. Jur Hronec sa narodil dňa 17. mája 1881 v Gočove okr. Rožňava. Po skončení univerzity v Kluži stal sa v r. 1906 profesorom na gymnáziu v Kežmarku, kde pôsobil s prerušeniami do r. 1922. Školský rok 1908—1909 strávil v Göttingách. Hodnosti doktorskej dosiahol v r. 1912 v Giessenu u prof. L. Schlesingera. Odborom jeho dizertačnej práce bolo štúdium istého typu obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc. Štúdiu diferenciálnych rovníc ostal prof. Hronec verným až do dnešných čias a tieto tvoria ťažisko jeho odbornej činnosti.

V r. 1923 sa habilitoval pre odbor matematiky na Karlovej univerzite. V r. 1924 sa stal mimoriadnym a r. 1928 riadnym profesorom matematiky na Vysokej škole technickej v Brne. V rokoch 1935—38 zúčastnil sa prof. Hronec veľmi aktívne boja za zriadenie slovenskej techniky. V roku 1938 stal sa jej prvým rektorom. Podobne stál pri samom vzniku Prírodovedeckej fakulty Komenského univerzity v Bratislave. V rokoch 1939 až 1950 bol profesorom Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave. Dnes je profesorom a vedúcim katedry matematiky Komenského univerzity v Bratislave.

Prof. Hronec bol viackrát vysokoškolským funkcionárom, členom rôznych vedeckých a vedecko-osvetových organizácií. Zapojil sa tiež do organizovania mnohých ďalších vysokoškolských a vedeckých inštitúcií na Slovensku.

Venoval sa a venuje sa i dnes mnoho tiež činnosti pedagogickej v najširšom slova zmysle. Okrem radu vedeckých prác napísal i štyri vysokoškolské učebnice.

Za svoje zásluhy bol v roku 1953 menovaný medzi prvými riadnymi členmi Slovenskej akadémie vied, kde je teraz podpredsedom sekcie vied matematických a prírodných.

Profesorovi Hroncovi je dnes 74 rokov. Je však rozhodne mladým, ak mladosť posudzujeme podľa záujmu a chuti do práce. Zaujíma ho všetko, čo sa okolo neho odohráva. Sleduje s veľkou pozornosťou vývin nášho verejného a vedeckého života. A nie je iba pasívnym pozorovateľom. Súčasný spoločenský prerod sleduje s hlbokým pochopením. Hlásil sa vždy, a tým skôr dnes, k ľudu z ktorého vyšiel. Podporuje zo všetkých svojich síl tvorivé schopnosti mladšej a mladej generácie. Pracuje sám veľmi intenzívne, nevynechá jedinú prednášku a jeho húževnatosť a obetavosť môže byť skutočne vzorom i príslušníkom o mnoho mladších generácií.

Československá matematická obec sa úprimne teší z vysokého vyznamenania, ktorého sa profesorovi Hroncovi dostalo z rúk zástupcov nášho ľudu a praje mu mnoho ďalších pracovných úspechov.

Št. Schwarz, Bratislava.

ZPRÁVA O ZÁJEZDU DO POLSKA V KVĚTNU A ČERVNU 1955

V květnu t. r. vyslala mne ČSAV v rámci kulturní dohody mezi ČSR a Polskem na přednáškový zájezd do Polska. Zájezd se uskutečnil v době od 23. května do 13. června ve Varšavě, Vratislavi a Krakově.

Proslovil jsem celkem 8 přednášek v časovém rozsahu asi 18 hod. na tato themata: 1. Theorie dispersí, 2. Transformace integrálů diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu, 3. Obecné kriterium jednoznačnosti pro řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$, 4. Aplikace theorie rozkladů množin v oboru vědeckých klasifikací, 5. Množinové základy theorie grup. — Přednášel jsem česky. Přednášky se konaly v seminářích prof. Hartmana a prof. Marczewského (ve Vratislavi) dále v seminářích prof. Lejy, prof. Ważewského a prof. Szarského (v Krakově) a ve schůzích PTM (ve Vratislavi, Krakově a Varšavě). Účast na přednáškách byla dobrá, po přednáškách i během výkladu (v seminářích) byly diskuse.

Za svého pobytu v Polsku jsem se setkal s většinou profesorů působících na universitách, jež jsem navštívil, a seznámil jsem se s řadou mladších matematiků, zejména v Krakově, kde je významné středisko v oboru diferenciálních rovnic. Jednotlivá mimovaršavská matematická pracoviště mají v rámci činnosti Polské akademie věd (PAN) široké možnosti a vydatně jich využívají.

Moje přijetí v Polsku, zejména též v Matematickém ústavě PAN ve Varšavě, který v době mého pobytu (za nepřítomnosti prof. Kuratowského) vedl rektor varšavské university prof. Turski, bylo velmi srdečné. Během pobytu v jednotlivých městech ukázali mně polští kolegové pamětihodnosti svých měst a umožnili mně shlédnout i vzdálenější pozoruhodná místa (Kladsko, Zakopané, Nieborow, Lowicz).

Pobyt v Polsku mně přinesl řadu cenných zkušeností a přispěl, jak se domnívám, k utužení svazků mezi našimi a polskými matematiky.

O. Borůvka, Brno.

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

11. 5. 1955: *Václav Fabián,* Nové methody matematické statistiky při hodnocení několika ošetření (v zemědělském a jiném výzkumu) a jejich srovnání s analysou rozptylu.

16. 5. 1955: *Ladislav Rieger,* O základních problémech matematické logiky, I.

23. 5. 1955: *Ladislav Rieger,* O základních problémech matematické logiky, II.

30. 5. 1955: *V. Jarník, K. Havlíček, L. Truksa,* Deset let matematiky na universitě po osvobození.

6. 6. 1955: *E. Čech, K. Rychlík,* Vzpomínka na Karla Petra.

29. 6. 1955: *Otto Fischer,* O mém pobytu na Humboldtově universitě v Berlíně v letním semestru 1954-55.

Redakce.

ČINNOST BRNĚNSKÉHO ODBORU JČMF

Konaly se tyto *přednášky*:

2. 6. 1955: *J. Čermák,* O asymptotickém řešení diferenčních rovnic.

13. 6. 1955: *J. Kurzweil,* Obrácení Ljapunovových vět o stabilitě pohybu.

V rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků“ byly předneseny tyto *referáty*:

28. 4. 1955: *O. Borůvka,* Obecné kriterium pro jednoznačnost řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$.

5. 5. 1955: *Fr. Šik,* O svazově uspořádaných grupách.

12. 5. 1955: *M. Laitoch,* O charakteru fundamentálního systému integrálů dif. rovnice $y'' = Q(x)\, y$.

19. 5. 1955: *M. Ráb,* Oscilační vlastnosti integrálů dif. lineární rovnice 3. řádu.

M. Zlámal, Brno.

PREDNÁŠKOVÁ ČINNOSŤ BRATISLAVSKÉHO ODBORU JČMF

7. 3. 1955: *Tibor Šalát,* O prvočíslach.

21. 3. 1955: *Milan Kolibiar,* O riešiteľnosti rovníc pomocou radikálov.

24. 3. 1955: *Štefan Schwarz,* O matematickom živote v SSSR.

30. 3. 1955: *Marko Švec,* O jednej vlastnej úlohe dif. rovnice

$$y^{(n)} + Q(x, \lambda) y = 0.$$

6. 4. 1955: *Michal Greguš,* O niektorých vlastnostiach dif. rovnice tretieho rádu.

19. 4. 1955: *Eduard Čech,* Pojem styku ako základný pojem dif. geometrie.

20. 4. 1955: *Eduard Čech,* Projektívna deformácia plôch a príbuzné transformácie.

21. 4. 1955: *Eduard Čech,* Transformácie priamkových kongruencií.

27. 4. 1955: *Michal Greguš,* O oscilačných vlastnostiach dif. rovnice tretieho rádu.

3. 5. 1955: *Jaroslav Janko,* Moderné pohľady na niektoré základné problémy matematickej štatistiky.

4. 5. 1955: *Jaroslav Janko,* Problémy testovania štatistických hypotéz.

5. 5. 1955: *Jaroslav Janko,* Problém štatistického odhadu.

6. 5. 1955: *Jaroslav Janko,* Problémy z kontroly akosti výroby.

11. 5. 1955: *Alojz Švec,* Projektívna diferenciálna geometria korešpondencií medzi priamkovými plochami.

Okrem toho na začiatku letného semestra uskutočnila SAV prednášky:

22. 2. 1955: Člen-korešpondent Maď. akademie věd Prof. dr *Lászlo Rédei,* O funkcii dzéta v algebre.

23. 2. 1955: Člen-korešpondent Maď. akademie věd Prof. dr Otto Varga, Invarianty v neeuklidovskej geometrii a Kleinova metrika.

Ladislav Mišík, Bratislava.

OBHAJOBY DISERTAČNÍCH PRACÍ KANDIDÁTŮ MATEMATICKÝCH VĚD

Při Matematickém ústavu ČSAV obhajovali dne 23. září 1955 disertační práce tito kandidáti matematických věd:

dr *Miroslav Fiedler* práci: Geometrie simplexu v E_n,
dr *Vlastimil Pták* práci: O úplných topologických lineárních prostorech,
ing. dr *Ivo Babuška* práci: Řešení biharmonického problému s okrajovými podmínkami,
dr *Jaroslav Kurzweil* práci: On approximation in real Banach spaces;
dne 4. listopadu 1955 dr *Jan Mařík* práci: Vyjádření funkcionály integrálem.

Na přírodovědecké fakultě MU v Brně obhajovali:

27. dubna dr *Miloš Zlámal* práci: Studium oscilačních a asymptotických vlastností řešení lineárních diferenciálních rovnic,

21. září 1955 dr *František Šik* práci: Užití polarity v theorii grup.

Redakce.

DVA ROKY PRÁCE LIBERECKÉ KATEDRY MATEMATIKY A FYSIKY

Když před dvěma lety v září 1953 byla otevřena nová Vysoká škola strojní v Liberci, jediná naše vysoká škola v pohraničí, zahájila její katedra matematiky a fysiky činnost se čtyřmi členy interními (z nich fysiku obstarával pouze jeden) a dvěma členy dojíždějícími z Prahy. Citelný nedostatek odborných sil byl v těchto počátcích překonán především velkou obětavostí všech členů katedry a ochotou KNV v Liberci, který umožnil nejnutnější provoz katedry tím, že souhlasil s externím působením odborných pedagogických sil z jiných libereckých škol při vedení cvičení z deskriptivní geometrie na VŠS v Liberci. Tuto podporu poskytuje liberecký KNV zdejší technice dodnes, třebaže katedra matematiky a fysiky má už dvanáct členů interních a dva dojíždějící z Prahy (tři vědečtí pomocníci v tom nejsou započítáni); nesmíme zapomenout, že oproti jednomu ročníku loňskému máme v roce 1954-55 v Liberci dva ročníky studentů, což při jejich velkém počtu (přes 400 studentů) představuje značný pedagogický úvazek pro všechny členy katedry.

Protože při zahájení činnosti před dvěma lety bylo nutno všechno úsilí soustředit na vybavení katedry (inventář, knihovna, studijní pomůcky a pod.), nebylo první půl roku pomyšlení na samostatnou vědeckou práci členů katedry. Odborná práce byla tu omezena jen na studium literatury, o němž svědčí recense několika novinek, jež členové katedry uveřejnili v odborném tisku. Jistý čas si vyžádalo také vyškolení jednotlivých pracovníků k vědecké práci, protože šlo většinou o učitele matematiky a fysiky ze škol III. stupně, pro něž přechod na vysokou školu znamenal úplnou změnu jejich pracovního programu. Když postupem doby přibývali noví členové katedry matematiky a fysiky, vznikal pomalu kolektiv, složený z pracovníků různě specialisovaných. Proto vědecká práce byla organisována hlavně na individuálních plánech. Na schůzích katedry, které se konají téměř v pravidelných lhůtách, bývají vedle běžného programu a vedle čilých didakticko-methodických diskusí zařazeny i odborné referáty o výsledcích vědecké práce vlastní i cizí. Za dva roky bylo tak podáno celkem 14 delších referátů z nejrůznějších oborů (theorie funkcí, variační počet, metrické prostory, diferenciální geometrie, algebraická geometrie, náhradní schema kmitů piezoelektrických tyčinek a různé aplikace matematiky). Dne 14. dubna 1955 přednášel na schůzi katedry jako host ALOIS ŠVEC, aspirant ČSAV z Prahy, na thema „Práce laureáta st. ceny akademika E. ČECHA v diferenciální geometrii". Vedle toho v rámci oslav desátého výročí osvobození ČSR konali členové katedry několik odborných přednášek o svých výsledcích pro širší technickou a pedagogickou veřejnost v Liberci.

Prozatím v oboru matematické analysy úspěšně pracují na katedře J. BEČVÁŘ a M. NEKVINDA (jejich společné publikace jsou právě v tisku). J. ŠEDÝ dosáhl některých nových výsledků v aplikacích variačního počtu na afinní diferenciální geometrii ve spolupráci s FR. NOŽIČKOU. Dále je tu zastoupena algebraická geometrie pracemi V. METELKY o rovinných konfiguracích (12_4, 16_3) a VL. BRUTHANSE o analagmatických kvintikách. Rovněž ostatní členové drobnějšími pracemi přispívají k zvýšení odborné úrovně celé katedry.

Pozoruhodných výsledků dosahuje v piezoelektřině vedoucí oddělení fysiky J. TICHÝ, pod jehož vedením se dobře zapracovali i ostatní fysikové na katedře, zvláště F. SOŠKA.

Po dvou letech práce mohla tedy liberecká katedra matematiky a fysiky vyslat na sjezd matematiků v září 1955 čtyři své členy (oba dojíždějící z Prahy nejsou v tom započítáni). Všichni se sjezdu účastní aktivně.

Vedle této činnosti rozvíjí katedra spolupráci s Krajským pedagogickým sborem v Liberci a s Čs. společností pro šíření politických a vědeckých znalostí. Popularisace matematiky tu vázne hlavně pro nezájem širší veřejnosti; přesto se podařilo J. ŠEDÉMU uskutečnit několik populárních přednášek o matematice v libereckém kraji za spolupráce s K. HAVLÍČKEM. Popularisací je však přetíženo oddělení fysiky, kde J. Tichý a F. Soška vykonali pro liberecký kraj značný kus práce.

Pedagogické činnosti je ovšem věnována hlavní pozornost; nedostatek učebnic a učebních textů snaží se katedra nahradit vlastní svépomocí. Z deskriptivní geometrie sestavil J. NOVÁK sbírku příkladů, jež byla rozmnožena pro potřeby posluchačů. Z matematiky se rovněž připravuje podobná sbírka.

Karel Havlíček,
vedoucí katedry matematiky a fysiky
na VŠS v Liberci.

ZPRÁVA O ČINNOSTI SKUPINY PRO DĚJINY MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍCH VĚD

Počátkem r. 1955 zahájila svou činnost jako součást Komise pro dějiny přírodních věd a techniky Historického ústavu ČSAV pracovní skupina pro dějiny matematicko-fysikálních věd. Úkolem skupiny v prvém období činnosti je soustředit zájemce o dějiny matematiky a fysiky z řad pracovníků těchto oborů; na schůzkách pak mimo jiné prodiskutovávat jejich připravované práce a již vyšlé publikace a výhledově přikročit ke koordinaci thematiky prací.

Za schůzek pracovní skupiny v 1. pololetí 1955 byla jedna věnována problematice chemické, dvě fysikální a jedna matematické:

S. NOVÝ referoval o dosavadních výsledcích své práce: *Matematika v Čechách v II. pol. 18. století.* Po úvodu, v němž probral stručně hospodářské a politické předpoklady vývoje matematiky u nás, rozebral referent jednotlivé úseky matematické tvorby v našich zemích v daném období a došel k těmto závěrům:

V padesátých letech 18. století začíná u nás po delší přestávce samostatná matematická tvorba, která navazuje velmi brzy na nejnovější zahraniční výsledky. Matematické práce STEPLINGOVY, TESÁNKOVY a SCHAFGOTSCHOVY se sice nemohou vyrovnat úspěchům EULEROVÝM a LAGRANGEOVÝM, ale podílejí se na hromadění jednotlivých drobných matematických objevů své doby. Ke konci století theoretická matematická práce ochabuje, neboť se před úzkým kruhem českých matematiků objevují s velkou naléhavostí konkretní fysikální a inženýrské problémy, které však nejsou takového charakteru, aby bezprostředně vyvolávaly potřebu theoretické práce v matematice.

Hlavním nedostatkem práce pracovní skupiny bylo, že její kontakt s jednotlivými matematickými a fysikálními pracovišti byl nepatrný a tím i účast na schůzkách slabá. Provésti zlepšení v tomto směru bude hlavním úkolem budoucí práce.

Irena Seidlerová, Praha.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova, 40. telefon 246241-8 — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. Novinové výplatné povoleno Okrskovým poštovním úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. —Vyšlo dne 24. XI. 1955.
A-19808.