Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

REFERÁTY

O STABILITĚ POHYBU

(Referát o přednášce JAROSLAVA KURZWEILA, přednesené v matematické obci dne 14. III. 1955.)

Dr Kurzweil zaměřil přednášku k obrácení hlavních vět o stabilitě. Nejprve podal Ljapunovovu definici stability nulového řešení $x_1 = x_2 \dots x_n = 0$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i\,(t, x_1, \dots, x_n),\ i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

kde o funkcích $X_i\,(t, x_1, \dots, x_n)$ předpokládáme, že jsou definované a spojité v oblasti G bodů $[t, x_1, \dots, x_n]$ vzniklé kartézským součinem oblasti bodů $[x_1, \dots, x_n]$ obsahující počátek a polopřímky $t \geqq 0$. Přitom ještě předpokládáme jednoznačnost řešení v oblasti G a $X_i\,(t, 0, \dots, 0) \equiv 0$.

Definice stability. *Řešení $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ systému diferenciálních rovnic nazýváme stabilní, jestliže k libovotnému $\varepsilon > 0$ existuje $\sigma > 0$, že pro každé řešení $x_i\,(t)$, pro které je $\sum_{i=1}^{n} |x_i(0)|^2 < \sigma^2$, platí $\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|^2 < \varepsilon^2$ pro všechna $t \geqq 0$.*

Přednášející ještě použil pojmů asymptotické, stejnoměrné a silné stability.

Definice asymptotické stability. *Řešení $x_1 = \dots = x_n = 0$ systému diferenciálních rovnic nazýváme asymptoticky stabilní, je-li stabilní a jestliže existuje $\eta > 0$, že pro řešení $x_i(t)$, pro které je $\sum_{i=1}^{n} |x_i(0)|^2 < \eta^2$, platí $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$.*

Definice stejnoměrné stability. *Řešení $x_1 = \dots = x_n = 0$ nazýváme stejnoměrně stabilní, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ můžeme nalézti $\delta > 0$ (pouze v závislosti na ε), že k libovolnému $t_0 \geqq 0$ a řešení $x_i(t)$, pro něž platí $\sum_{i=1}^{n} |x_i(t_0)|^2 < \delta^2$, je $\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|^2 < \varepsilon^2$ pro všechna $t \geqq t_0$.*

Definice silné stability. *Řešení $x_1 = \dots = x_n = 0$ nazýváme silně stabilní, jestliže je stejnoměrně stabilní a existuje-li spojitá, monotonní funkce $\psi(t) > 0$, $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$ taková, že můžeme nalézt $\delta > 0$, aby pro libovolné $t_0 \geqq 0$ a řešení $x_i(t)$, pro které platí $\sum_{i=1}^{n} |x_i(t_0)|^2 < \delta^2$, bylo splněno $\sum |x_i(t)|^2 < \psi^2(t - t_0)$ pro všechna $t \geqq t_0$.*

V Ljapunových větách se používají funkce $V(t, x_1, \dots, x_n)$, o kterých budeme předpokládat, že jsou definovány, spojité a mají spojité parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ v oblasti G.

Funkci $V(t, x_1 \dots, x_n)$ nazveme *positivně definitní*, jestliže existuje funkce $W(x_1, \dots, x_n)$, že platí $V(t, x_1, \dots, x_n) \geqq W(x_1, \dots x_n)$ pro všechna $t \geqq t_0$ a $V(t, 0, \dots, 0) = W(0, \dots, 0)$, při čemž $W(x_1, \dots, x_n)$ je definitní v obvyklém smyslu.

Funkci $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ nazveme *stejnoměrně malou* v oblasti G, existuje-li positivně definitní funkce $Z(x_1, \ldots, x_n)$ tak, že platí

$$|V(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq Z(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{pro} \quad [t, x_1, \ldots, x_n] \in G .$$

Ljapunovova věta I: *Jestliže pro diferenciální rovnice (1) lze nalézti positivně definitní funkci $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, jejíž derivace podle pole vzhledem k systému diferenciálních rovnic (1), t. j. výraz*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i$$

je nekladný, pak řešení $x_1 = \ldots = x_n = 0$ je stabilní.

V tomto případě ukázal Perzidskij, že za předpokladu existence a spojitosti parciálních derivací $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t, x_1, \ldots, x_n)$ lze v případě stability sestrojit zobecněnou funkci $V(t, x_1, \ldots, x_n)$. Při vyšetřování stability často nastává případ, že pravé strany diferenciálních rovnic X_i nezávisí explicitně na t. Systém diferenciálních rovnic má pak tvar:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i' (x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n . \tag{2}$$

Takový systém nazveme autonomní a Ljapunovova věta zní:

Ljapunovova věta I′: *Jestliže pro autonomní systém (2) existuje positivně definitní funkce $V(x_1, \ldots, x_n)$, jejíž derivace vzhledem k diferenciálním rovnicím (2), t. j. výraz:*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i'$$

je nekladný, pak řešení $x_1 = \ldots = x_n = 0$ je stabilní.

Problém obrácení této věty jest odlišný od předešlého problému, poněvadž nyní hledáme funkci $V(x_1, \ldots, x_n)$ nezávislou na t, kdežto dříve jsme měli k disposici širší třídu funkcí $V(t, x_1, \ldots, x_n)$. V tomto případě ukázal Malkin, že větu I′ nelze obrátit.

Asymptotickou stabilitu nám zaručuje II. věta Ljapunovova.

Ljapunovova věta II. *Jestliže pro systém diferenciálních rovnic (1) existuje funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, která je positivně definitní, stejnoměrně malá a jejíž derivace vzhledem k soustavě (1) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i$ je negativně definitní, potom řešení $x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) = 0$ jest asymptoticky stabilní.*

Tuto větu za předpokladu, že $X_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ jsou periodické a mají spojité parciální derivace, obrátil Massera. Funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, kterou sestrojil, byla periodickou funkcí t a v případě autonomním nezávisela na t. Později Malkin dokázal, že tvrzení II. Ljapunovovy věty lze zesílit, a to, že řešení $x_1 = \ldots = x_n = 0$ jest silně stabilní. K obracení této věty Malkin rozvinul Masserovu methodu a dokázal, že jsou-li parciální derivace $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t, x_1, \ldots, x_n)$ spojité a omezené v oblasti G, pak za předpokladu, že řešení $x_1 = \ldots = x_n = 0$ je silně stabilní, existuje funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ splňující požadavky II. věty.

Nyní přednášející uvedl vlastní výsledek, který určuje podmínky stejnoměrné stability:

Věta. *Nulové řešení $x_1 = \ldots = x_n = 0$ soustavy diferenciálních rovnic (1) je stejnoměrně stabilní tehdy a jen tehdy, jestliže existuje funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, která je positivně definitní a stejnoměrně malá, má spojité parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ a platí*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i \leqq 0$$

pro $[t, x_1, \ldots, x_n] \in G$.

V theorii stability jsou potřebné také věty o nestabilitě a to věta Ljapunovova a věta Četajevova.

Ljapunovova věta III: *Nechť pro systém diferenciálních rovnic (1) existuje omezená funkce* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ *v oblasti* G *taková, že její derivace vzhledem k systému diferenciálních rovnic (1) splňuje vztah*

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W,$$

kde λ *je kladná konstanta a funkce* $W(t, x_1, \ldots, x_n)$ *je nezáporná. Jestliže k libovolně malému* $\eta > 0$ *existuje bod* $(t, x_1, \ldots, x_n)$, $t \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 < \eta^2$, *že platí* $V(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$, *potom řešení* $x_1 = \ldots = x_n = 0$ *jest nestabilní.*

Věta Četajevova. *Nechť pro systém diferenciálních rovnic (1) existuje spojitá, omezená a nezáporná funkce* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ *v oblasti* G *o těchto vlastnostech:*

1. Budiž P *oblast bodů* $[t, x_1, \ldots, x_n]$ *pro něž* $V(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$. *Potom* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ *má spojité parciální derivace* $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ *v oblasti* P.

2. K libovolnému $\alpha > 0$ *existuje* $\beta > 0$, *že pro všechny body* $[t, x_1, \ldots x_n]$, *pro něž platí* $V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqq \alpha > 0$, *platí* $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i \geqq \beta > 0$.

3. K libovolnému $\eta > 0$ *existuje bod* $[x_1, \ldots, x_n]$ *splňující* $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 < \eta^2$, *při čemž* $V(0, x_1, \ldots, x_n) > 0$.

Potom triviální řešení soustavy (1) jest nestabilní.

Obě věty v případě autonomním obrátil Krasovskij a v případě neautonomním Vrkoč.

Ivo Vrkoč, Praha.

O POUŽITÍ HAUSDORFFOVY MÍRY V ARITMETICE

(Referát o přednášce akademika Vojtěcha Jarníka, přednesené v matematické obci pražské dne 28. III. 1955.)

•

Přednášející se zabýval použitím Hausdorffovy míry na množiny čísel, která splňují jisté aproximační podmínky. Nejprve definoval vnější Hausdorffovu míru v prostoru $E_s (s = 1, 2, 3, \ldots)$:

Budiž M podmnožina v E_s a nechť $f(d)$ je funkce monotonně klesající k nule pro $d \to 0$. Zvolme číslo $\varrho > 0$ a pokryjme množinu M posloupností s-rozměrných krychlí $J_1, J_2, J_3, \ldots$, jejichž hrany $|J_1|, |J_2|, |J_3|$ nepřesahují ϱ.

Položme

$$L_\varrho = \inf \sum_{i=1}^{\infty} f(|J_i|),$$

kde infimum bereme pro všechna možná pokrytí splňující uvedené předpoklady. Klesá-li ϱ k nule, potom L_ϱ neroste a definujeme

$$\mu(M, f) = \lim_{\varrho \to 0} L_\varrho .$$

$\mu(M, f)$ nazýváme *vnější Hausdorffovou měrou* — pro stručnost Hausdorffovou měrou — množiny M a snadno lze ukázat, že $\mu(M, f)$ je vnější míra ve smyslu Carathéodoryově.

Zřejmě platí:

Nechť $\dfrac{f_1(d)}{f_2(d)} \to 0$ *pro* $d \to 0$.

Jestliže $\mu(M, f_1) > 0$, *pak* $\mu(M, f_2) = \infty$,

jestliže $\mu(M, f_2) < \infty$, *pak* $\mu(M, f_1) = 0$.

Odtud speciálně plyne, že $\mu(M, f) = 0$, jestliže množina M má konečnou Lebesgueovu míru a jestliže $\dfrac{f(d)}{d^s} \to 0$ pro $d \to 0$, neboť $\mu(M, d^s)$ je Lebesgueova míra množiny M.

Hausdorffovou dimensí dané množiny M — označme ji $\dim M$ — nazveme infimum takových čísel $\lambda (\lambda > 0)$, že $\mu(M, d^\lambda) = 0$.

Přistupme nyní k použití Hausdorffovy míry. Nechť $\omega(q)$ je kladná funkce definovaná pro $q > 0$ a nechť $(x_1, \ldots, x_s)$ je daná soustava reálných čísel. Říkáme, že soustava $(x_1, \ldots, x_s)$ připouští aproximaci $\omega(q)$, jestliže ke každému $Q > 0$ existuje řešení soustavy nerovností

$$\left| x_1 - \frac{p_1}{q} \right| < \omega(q) ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left| x_s - \frac{p_s}{q} \right| < \omega(q) ,$$

kde $p_1, \ldots, p_s, q$ jsou celá čísla, $q > Q$. Jak známo, každá soustava čísel $x_1, \ldots, x_s$ připouští aproximaci $\dfrac{1}{q^{1 + \frac{1}{s}}}$.

Označme $A(\omega)$ $(B(\omega))$ množinu těch soustav $(x_1, \ldots, x_s)$, které připouštějí (nepřipouštějí) aproximaci $\omega(q)$ a pro něž platí $0 \leqq x_1 < 1, \ldots, 0 \leqq x_s < 1$. Základní význam má tento výsledek CHINČINŮV (1926):

Nechť $\omega^s(q) \cdot q^{s+1} \to 0$ monotonně $(q \to \infty)$.

Jestliže $\int_1^\infty q^s \omega^s(q) \, dq < \infty$, potom Lebesqueova míra množiny $A(\omega)$ je 0;

jestliže $\int_1^\infty q^s \omega^s(q) \, dq = \infty$, potom Lebesqueova míra množiny $A(\omega)$ je rovna 1.

Jestliže tedy je $\int_1^\infty q^s \omega^s(q) \, dq < \infty$, potom je účelné vyšetřovat množinu $A(\omega)$ pomocí Hausdorffovy míry. Tomuto tematu věnoval akademik Jarník řadu prací.

Nejobecnějšího výsledku dosáhl akademik Jarník touto větou (1931):

Nechť funkce $f(2\omega(q))$ *je monotonní,* $\int_1^\infty q^s \omega^s(q) \, dq < \infty$.

Jestliže $\int\limits_1^\infty f(2\omega(q))\, q^s\, \mathrm{d}q < \infty$, *pak* $\mu(A(\omega), f) = 0$;

jestliže $\int\limits_1^\infty f(2\omega(q))\, q^s\, \mathrm{d}q = \infty$, *pak* $\mu(A(\omega), f) = \infty$.

Odtud snadno plyne, že $\dim A\left(\frac{1}{q^\alpha}\right) = \frac{s+1}{\alpha}$ pro $\alpha > 1 + \frac{1}{s}$ a že množina $A(\omega_1) - B(\omega_2)$, $\frac{\omega_2(q)}{\omega_1(q)} \to 0$, je za jistých předpokladů neprázdná.

Jestliže $\int\limits_1^\infty q^s\omega^s(q)\, \mathrm{d}q = \infty$, potom podle Chinčinovy věty je Lebesqueova míra množiny $B(\omega)$ rovna nule a tak je možné studovat pomocí Hausdorffovy míry množinu $B(\omega)$. Prozatím byl vyšetřován pouze případ $s = 1$, neboť při důkazech se nelze obejít bez řetězových zlomků. Touto úlohou se zabýval akademik Jarník okolo r. 1930.

Pak uvedl výsledek KURZWEILŮV z r. 1951:

Nechť $\int\limits_1^\infty \omega(q) \,.\, q\, \mathrm{d}q = \infty$. *Položme* $\omega(q) = \frac{1}{q^2 g\,(q)}$ *a předpokládejme* $g(q) \to \infty$ *a* $\frac{g(qg(q))}{g(q)} \to 1$ *pro* $q \to \infty$.

Definujme funkci $f(d)$:

$$f(d) = \mathrm{d}\, \exp\left\{\frac{2}{3}\int\limits_1^{\frac{1}{\sqrt{d}}} \frac{\mathrm{d}t}{t\,.\,\mathrm{g}(t)}\right\}.$$

Potom platí:

$$\mu\left(B\left(\frac{1}{q^2 g(q)}\right), f\right) = 0\,,$$

$$\mu\left(B\left(\frac{1}{3q^2 g(q)}\right), f\right) = \infty.$$

Dokázat obdobnou větu pro $s > 1$ je stále otevřený problém a rozřešení tohoto problému je jedna z možných cest, jak dokázat, že existují soustavy čísel, které připouštějí aproximaci $\omega_1(q)$ a nepřipouštějí aproximaci $\omega_2(q)$, jestliže $\frac{\omega_1(q)}{\omega_2(q)} \to \infty$, $\int\limits_1^\infty q^s\omega_2^s(q)\, \mathrm{d}q = \infty$.

Konečně akademik Jarník hovořil o některých zajímavých výsledcích EGGLESTONEOVÝCH:

Budiž dána posloupnost přirozených čísel $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$. Je-li u přirozené číslo, nechť $n(u)$ je počet čísel q_i, která splňují nerovnost $q_i \leqq u$. Budiž $\alpha > 1 + \frac{1}{s}$. Nechť Z znamená množinu takových soustav $(z_1, \ldots, z_s)$, že pro každé $Q > 0$ soustava nerovností

$$\left|z_1 - \frac{p_1}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left|z_s - \frac{p_s}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha}$$

má řešení, při čemž p_i jsou celá čísla, q je některé číslo z dané posloupnosti $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $q > Q$.
Nyní platí:

Je-li $\inf\limits_{x \geq 1} \frac{n(x)}{x} > 0$, *pak* $\dim Z = \frac{s+1}{\alpha} \left(= \dim A\left(\frac{1}{q^x}\right)\right)$, *je-li* $\frac{q_{n+1}}{q_n} > l(l > 1$, konst.), *potom* $\dim Z = \frac{s}{\alpha}$.

Nechť $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$ je stále pevně daná posloupnost přirozených čísel. Nechť $\{v\}$ je t. zv. lomená část čísla v. Hardy a Littlewood dokázali, že pro skoro všechna čísla x množina čísel $\{q_i x\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, je hustá v intervalu (0,1).

Pro $0 < \alpha < 1$ nechť M_α je množina takových čísel x, pro něž je $\lim\limits_{i \to \infty} \{q_i x\} = \alpha$.

Platí:

Je-li $\frac{q_{i+1}}{q_i} < K$, *pak množina* M_α *je nejvýše spočetná, jestliže* $\frac{q_{i+1}}{q_i} \to \infty$ *pro* $i \to \infty$, *pak* $\dim M_\alpha = 1$.

Jaroslav Kurzweil, Praha.