O ŘEŠENÍ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC METODOU SÍTÍ

I. BABUŠKA, Praha a L. MEJZLÍK, Brno.

(Došlo dne 10. února 1955.) DT:517.944

Metoda sítí se dnes stává jednou z nejužívanějších metod numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic. Velká část nejdůležitějších technických problémů vedoucích na parciální dif. rovnice je dnes řešena touto metodou. Užití velkých matematických strojů staví metodu sítí ještě více do popředí. V tomto článku bychom chtěli shrnout nejzávažnější práce tohoto oboru a upozornit praktiky na rozsáhlou theoretickou matematickou problematiku souvisící s touto metodou.

Obsah

I. Úvod

1. Hlavní myšlenka metody sítí. Hlavní myšlenka metody sítí je ve své podstatě velmi prostá. Při řešení diferenciální rovnice nahradíme derivace diferencemi a řešíme potom soustavu takto vzniklých algebraických lineárních diferenčních rovnic. Řešíme je metodami pro řešení soustavy lineárních rovnic. (Theorie diferenčních rovnic zde však nenachází aplikace.)

Hledané řešení diferenciální rovnice má rozmanitý fysikální význam. Může popisovat na př. rozdělení tepla nebo napětí v tělese, šíření vln v prostoru atd.

Na základě dosažených výsledků usuzuje technik dále o chování konstrukce a provádí dimensování atp. Veškeré tyto závěry jsou ovlivněny řadou technických okolností, které nejsou přesně zachyceny ve výpočtu. Jsou ovlivněny tím, že některé závislosti a vztahy zjednodušujeme třeba i na úkor správnosti, aby bylo vůbec možno přijít k nějakým numerickým závěrům. Není proto výjimkou, že i přesné theoretické řešení se od skutečnosti poměrně dost liší (o 10—20—30 %). Pak ovšem je zbytečné provádět výpočet s přehnanými nároky na přesnost, ale je velmi užitečné znát odhad chyby, které se dopustíme při výpočtu prováděném určitým způsobem, aby výpočet nebyl zbytečně pracný. (Jde na př. o to, abychom nevolili zbytečně hustou síť, neprováděli příliš mnoho iteračních kroků a pod.)

Hlavní myšlenku metody sítí lze v jednotlivých případech interpretovat i fysikálně (myšlenka převedení na rošty a pod.). Srv. na př. Marcus [1]. Intuitivně má pěkně rozvinutou myšlenku převodu diferenciálních rovnic na diferenční také Southwell [6], [9].

2. Rozsah použitelnosti, výhody a nevýhody metody sítí. a) Z hlavní myšlenky metody sítí jest patrno, že metoda je použitelná u celkem libovolných typů parciálních diferenciálních rovnic. Zatím se jí však většinou používá jen u lineárních diferenciálních rovnic, neboť po nahrazení derivací dostaneme soustavu lineárních rovnic, na jejichž řešení máme vypracovánu řadu metod. U nelineárních rovnic naproti tomu narážíme na potíže jak technického rázu, tak na některé nevyjasněné otázky rázu theoretického (konvergenční otázky a pod.). Pro řešení nelineárních diferenčních rovnic užil metody sítí Fox [4].

b) Dále je celkem patrno, že metoda sítí je tím vhodnější, čím hladší jsou funkce a derivace, které vyjadřujeme diferenčním způsobem. Řada otázek souvisící s problémy různých nespojitostí není dnes ani prakticky ani theoreticky uspokojivě řešena. Na štěstí se v technické praxi podobné problémy vyskytují zřídka. Viz Motz [2].

c) Důležitou a prakticky významnou otázkou je problém nekonečných definičních oblastí, které se v praxi poměrně často vyskytují. Takovou oblastí může být na př. polorovina nebo rovina s výřezem a pod. Síť, která by konečnými oky pokryla celou oblast, by měla nekonečně (spočetně) mnoho ok a tím bychom dostali soustavu o nekonečně mnoha neznámých. Naopak, abychom zachovali konečný počet rovnic, museli bychom se uchýlit k okům o nekonečné velikosti, čím se však z celkem pochopitelných důvodů značně sníží přesnost. Zdá se nám, že není ani praktického ani theoretického důvodu k tomu, abychom užívali nekonečných ok. Doporučujeme proto užívat v podstatně systému nekonečně mnoha rovnic, které se řeší metodou redukované soustavy (srv. Kantorovič a Krylov [1], kde je také uvedena příslušná literatura), která spočívá v tom, že položíme rovny nule všechny neznámé s výjimkou vybraného konečného počtu. (Viz ještě dále technickou intepretaci.)

Někdy se však postupuje tak, že nějakou jinou metodou než metodou sítí určíme chování hledané funkce v okolí nekonečna, čehož potom užijeme v kombinaci s metodou sítí. Jinými slovy to lze vyjádřit také tak, že místo nekonečné oblasti uvažujeme definiční oblast konečnou a okrajové podmínky předepíšeme přibližně. Uvedeme technický případ laminárního permanentního proudění podzemní vody pod vodní stavbou. Problém vede na parciální diferenciální rovnici druhého řádu v polorovině. Z theoretických úvah i praktických zkušeností plyne, že voda je v dostatečné hloubce v klidu. Proto můžeme zavést jakousi „fiktivní" hranici, na níž bude okrajová podmínka vyjadřovat tu skutečnost, že voda je v klidu. V daném příkladě můžeme postupovat také jinak: V dostatečné vzdálenosti budou proudnice prakticky kružnicemi, jak plyne z analysy vyjádření funkce v okolí nekonečna, a tak můžeme „fiktivní" hranici vytvořit ve tvaru kružnice s předepsaným rovnoměrným spádem potenciálu.

d) Použitelnost metody sítí je dnes omezena také možností řešit velké soustavy lineárních (diferenčních) rovnic.[1]) V literatuře se udává maximální zvládnutelný počet uzlových bodů sítě (který je totožný s počtem lineárních rovnic) pro řešení Dirichletova problému relaxační metodou kolem 4000. Pro řešení biharmonického problému se udává tento počet asi na 400. Je třeba, aby řešitel těchto velkých sítí měl značnou praxi a zkušenost, aby vůbec mohl tento problém zvládnout; ještě vhodnější je, aby se práce zúčastnila celá skupina počtářů.

Autoři tohoto článku mají větší zkušenosti pouze s přímými metodami řešení. Přímé řešení rovnic o 150 neznámých pro problém Laplaceovy rovnice se podařilo provést jednomu z autorů bez zvláštních potíží asi během 100 pracovních hodin při naprosto dostatečné přesnosti.

Byl řešen rovněž biharmonický problém převedený na 65 diferenčních rovnic.[2])

Domníváme se, že by bylo možno řešit přímými metodami v přijatelném čase systém asi o 300 až 400 neznámých pro Laplaceovou rovnici a do 150 neznámých při biharmonickém problému. Při tak velkých systémech rovnic je důležitý účinný systém kontroly. (Viz dále kapitolu o řešení diferenčních rovnic.) S hlediska omezených možností řešit rozsáhlé systémy rovnic je dnes metoda sítí prakticky, při nejmenším u nás, omezena na problémy rovinné.

e) Velkou předností oproti druhým metodám je nezávislost způsobu užití metody sítí vzhledem k tvaru definiční oblasti a okrajovým podmínkám.

f) Další výhodou je velká jednoduchost metody sítí, která je velmi málo náročná na odbornou kvalifikaci řešitele. Vyšší kvalifikace v podstatě vyžaduje jedině návrh sítě, převod diferenciální rovnice na diferenční a odhad chyby

---

[1]) Zatím nemají autoři zkušenosti s použitím samočinných počitačů. Proto veškeré úvahy se týkají možností daných obyčejnými kalkulačními stroji.

[2]) Výpočet byl proveden na stroji Rheinmetall-SASL.

(pokud je proveditelný). Zbytek je prací více méně mechanickou a pouze při relaxacích rozsáhlejších systémů je třeba větší zkušenosti — ne však vyšší kvalifikace.

Návrh sítě a sestavení rovnic je také prací nepříliš složitou a zvládne ji každý vysokoškolsky vzdělaný technik. Pouze při analyse přesnosti je třeba větších matematických znalostí.

Uvedená přednost je pro praxi velmi značná a metoda sítí poměrně zatlačuje jiné metody pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic, a to i tehdy, když by snad jiné analytické metody byly numericky výhodnější.

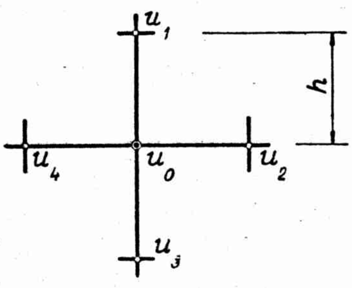
g) Nevýhody metody sítí jsou však dodnes také velké. Je to především množství počtářských prací. Jako příklad uveďme, že pro vyřešení parciální diferenciální rovnice druhého řádu dvou proměnných pomocí sítí o 100 uzlech přímými metodami je třeba asi 10 000 početních výkonů.

Theoreticky je metoda sítí málo propracována. Řada zásadních otázek je dodnes buď vůbec neřešena, nebo řešena naprosto neuspokojivě.

Přesto jsme však přesvědčeni, že pokrok ve stavbě samočinných počitačů zvětší ještě význam metody sítí.

II. Způsob převodu na diferenční rovnice

Převedení derivací na diference může být provedeno několika způsoby. Nejobvyklejší metodou je interpolační vyjádření derivací. Tato metoda záleží v tom, že několika body sítě se proloží interpolační polynom a počítá se derivace tohoto polynomu.



Obr. 1.

Derivaci dané funkce lze takto vyjádřit pomocí diferencí a nějakého zbytku, který závisí na derivacích uvažované funkce. Tak na př. pro Laplaceův operátor platí (obr. 1):

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{h^2}[u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0] + R_0$$

a

$$R_0 = \frac{2h^2}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \frac{2h^4}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right) + \dots .$$

Uvedený zbytek pak zanedbáme a dostáváme diferenční vyjádření Laplaceova operátoru. (Podrobnější výklad viz na př. Kantorovič - Krylov [1].) Laplaceův operátor jsme zde vyjádřili diferenčním způsobem pomocí pěti bodů, při čemž chyba je řádu h^2. Užijeme-li více bodů, můžeme zvýšit řád chyby, což zpravidla znamená její zmenšení. (Srv. práce Š. E. Mikeladzeho [1], [2], [10],

[12].) Jak zvýšiti přesnost tímto způsobem, ukazuje také Southwell [11]. Odhady zbytků viz také COLLATZ [2].

O zavedení zbytků do výpočtu se pokusil Fox [4]. Podobným způsobem odvozují vzorce také PANOV [5], BICKLEY [2], [3], VARVAK [14]a jiní.

Druhý způsob odvození diferenčních vzorců může být takový, že hledáme jednotlivé koeficienty v diferenčních výrazech tak, aby výraz byl přesný pro nejširší třídu funkcí.

Z dalších způsobů se někdy vyskytuje i odvození fysikální a pod.

ALBRECHT [1] užívá pro nahrazení operátoru Δu a $\Delta\Delta u$ Taylorova rozvoje ve zvlášť přehledném tvaru a podává vzorce různé přesnosti pro různé typy sítí.

Ve většině knih a učebnic jsou udávány diferenční vzorce pro pravidelné sítě. Vzorec pro nepravidelné sítě viz na př. MEJZLÍK [1] a Varvak [14].

III. O typech sítí

A) **Dvojdimensionální sítě.** Metoda sítí zde našla největší uplatnění a proto pojednáme o tomto případu podrobněji. Tvar sítě je ovlivněn několika okolnostmi. Je to tvar integrační oblasti, druh diferenciální rovnice a okolnosti, nutící nás ke změně hustoty uzlových bodů.

1. Pravoúhlé sítě. Pravoúhlé sítě patří k nejdéle užívaným druhům sítě a dnes se používají nejčastěji. Můžeme je dělit na

α) nepravidelné (obr. 2a, 2b),

β) obdélníkové,

γ) čtvercové.

α) Nepravidelné sítě. Tento druh sítě je používán velmi zřídka. Může mít však velké přednosti ve dvou případech:

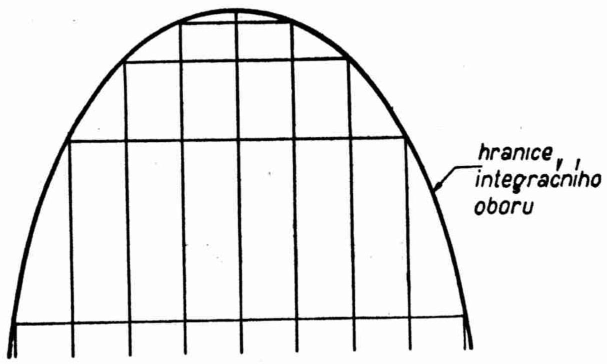
(1) Nepravidelnou sítí dosáhneme toho, že uzly sítě leží na hranici a okrajové podmínky jsou v souhlase s volbou této sítě (viz obr. 2a),

(2) můžeme touto sítí provádět zhušťování (viz obr. 2b).

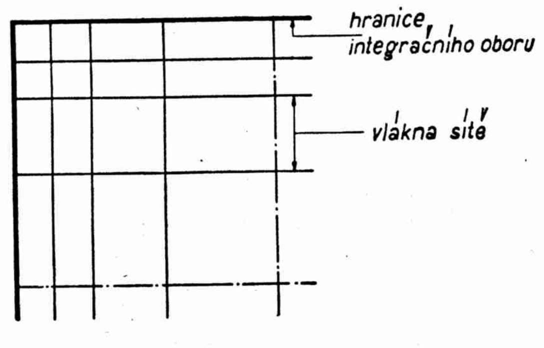
Nepravidelné sítě najdeme v literatuře poměrně zřídka. (Srv. na př. REKTORYS [1].) Za jediný případ můžeme považovat nepravidelnou síť vzniklou nepravidelnými oky při hranici (viz obr. 2c), kde body označené čísly 1 až 6 můžeme považovat za nepravidelné. Ve snaze zjednodušit relaxace omezuje se někdy jistá přesnost v těchto okrajových bodech a uvažují se pro tyto body diferenční rovnice jako pro body pravidelné. (Srv. BRILLA [1], Southwell [9], ALLEN [2]). Různé způsoby jiných úprav při okrajích uvádí ve svých pracích Panov [6], GILLES [1], Fox [1], [7], Fox - GOODWIN [1], Fox, HUSKEY, WILKINSON [1], Fox, Southwell [1], [2]. Poznamenejme, že největší komplikace nastávají při těch okrajových podmínkách, v nichž se vyskytují parciální derivace (na př. Neumannův a biharmonický problém).

β) Obdélníkové sítě. Tyto sítě nenašly velkého uplatnění. Užívá se jich však ve speciálních případech. Uveďme na př. rovnici

$$k_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 ,$$



Obr. 2a.



Obr. 2b.

kde k_2 a k_1 jsou kladné konstanty. Zde zvolíme obdélníkovou síť tak, abychom zajistili jednak největší možnou přesnost a mimo to, abychom dostali jednoduchý tvar (stejné koeficienty) diferenčního vzorce.

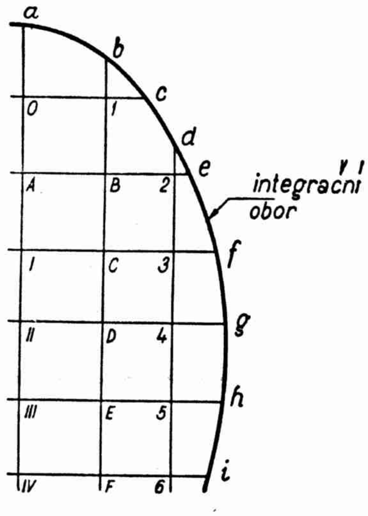
γ) Čtvercové sítě. Tyto sítě nalezly velmi široké uplatnění. Odhadujeme, že 90 % všech řešených problémů je řešeno pomocí čtvercové sítě. Výhoda čtvercové sítě spočívá v jednoduchých tvarech diferenčních vzorců pro nejčastěji užívané diferenciální rovnice.

Upozorněme zde zvláště na práce: Bickley [3], Albrecht [1], Varvak [14], Panov [5].

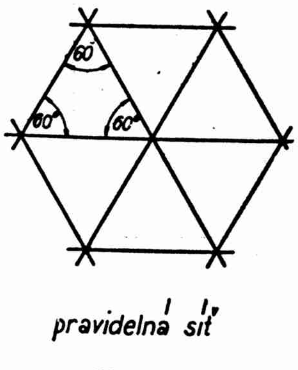
V případě čtvercových sítí se snažili někteří autoři (Southwell [9], Bickley [2] a jiní) zvýšit přesnost v některých speciálních případech (rovnice $\Delta\Delta u = f$ a $\Delta u = f$) různými jednoduchými způsoby.

2. Rovnoběžníkové sítě. Tyto sítě jsou zobecněním pravoúhlých sítí. V obecném pojetí se zabývá těmito sítěmi na př. Ljusternik [4]. Zvláštní význam zde mají sítě trojúhelníkové a to pravidelné (viz obr. 3a) a nepravidelné (viz obr. 3b). Nepravidelné sítě se používají zřídka. Častější jsou sítě pravidelné. (Srv. na př. Southwell [10], Albrecht [1], Juškov [1].) V diferečních výrazech se vyskytuje více bodů a proto se získává větší přesnost.

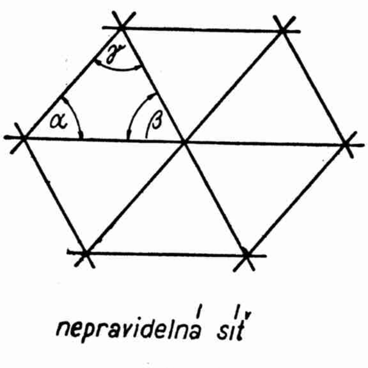
3. Šestiúhelníkové sítě. Zde opět přicházejí v úvahu sítě pravidelné a nepravidelné. Pokud je nám známo, nepravidelné sítě nebyly prakticky použity.



Obr. 2c.



Obr. 3a.

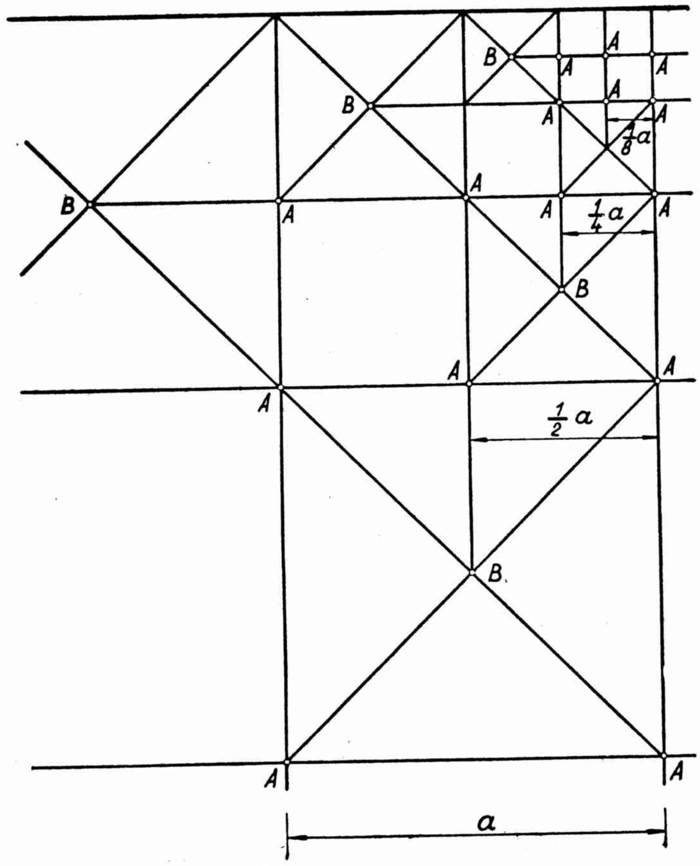


Obr. 3b.

Pravidelné šestiúhelníkové sítě mohou vzniknout z pravidelné trojúhelníkové sítě, což je jistou výhodou, neboť můžeme postupovat tak, že najdeme nejprve při relaxačních metodách přibližný průběh hledané funkce užitím šestiúhelníkové sítě, který potom dále zpřesníme pomocí trojúhelníkové sítě.

Další výhodou je, že se v diferenčních výrazech vyskytuje málo členů. Na druhé straně je to nevýhoda, neboť se tím snižuje přesnost.

4. Polární sítě. V polárních sítích bylo vyřešeno jen velmi málo problémů. Mohou být však vhodné pro některé speciální oblasti, jako je výseč, mezikruží a pod. Diferenční vzorce základních diferenciálních operátorů jsou poměrně složité. (Srv. na př. Varvak [14], Mejzlík [1].)



Obr. 4.

5. Nepravidelné sítě. MAC NEAL [1] na základě analogie s elektrickým obvodem odvodil vztahy, podle kterých se dají řešit analogicky některé typy diferenciálních rovnic.

Nepravidelné sítě se užívají prakticky na stycích integračních oborů, kde se mění tvar diferenciální rovnice. Jiným případem jsou sítě o problémech s předepsanými derivacemi na hranici. Docílíme-li, že je síť kolmá na hranici, můžeme někdy zjednodušit numerický výpočet. V takovém případě ovšem navazuje tato nepravidelná síť uvnitř na síť pravidelnou, většinou čtvercovou.

6. Dvojité sítě. Gilles [1] navrhoval pro některé speciální problémy metodu dvojité sítě, která spočívá v tom, že se problém vedoucí na rovnici jistého řádu s jednou neznámou funkcí převádí na problém popsaný soustavou rovnic nižších řádů s několika neznámými funkcemi a pro každou hledanou funkci se užívá zvláštní sítě.

7. Zhušťování sítí. Již dříve jsme se zmínili o tom, že hustota uzlů sítě má vliv na přesnost řešení, a také o tom, jak roste množství potřebné numerické práce v závislosti na množství bodů sítě. Proto je výhodné zhušťovat sítě pouze v místech, kde nám na přesnosti více záleží. Zhuštění provedeme nejsnáze vložením pruhu nepravidelné sítě. To má ovšem své nevýhody, neboť se v obecném případě komplikují diferenční rovnice.

Nejsnadněji se změní hustota při čtvercové síti. Zhuštění můžeme provést na př. užitím diagonální sítě, jak navrhuje Allen a Denis [3]. Příklad je na obr. 4.

B) **Problémy trojdimensionální a vícedimensionální.** Aplikace metody sítí na problémy trojdimensionální je po stránce theoretické stejná jako v případě dvojdimensionálním. V případě eliptické rovnice narůstá však počet uzlových bodů do nezvládnutelného počtu. Proto zde nenalezla metoda sítí zatím většího uplatnění.

Některé zmínky o trojdimensionálních problémech jsou v pracích Varvaka [16], Allena a Dennise [2]. Případ parabolických rovnic (dva argumenty polohy a jeden času) je však naopak dobře řešitelný. V tomto případě hrají totiž jednotlivé časové intervaly podobnou úlohu jako jednotlivé iterační kroky dvojdimensionálního problému.

Technicky lze tyto parabolické rovnice interpretovat na př. jako popis nepermanentního laminárního rovinného pohybu tekutin nebo proudění tepla v rovinných tělesech a pod. Čtenáře zde odkazujeme na práce autorů: Dussinbere [1], [2], Emmons [1], Milne [1], Allen, Severn [1], Rektorys [1], Milne-Thomson [1] atd.

IV. Zavádění okrajových podmínek

Okrajové podmínky se zavádějí různým způsobem v závislosti na druhu okrajového problému. Omezíme se zde pouze na podrobnější popis postupu pro případ Dirichletova problému.

Courant, Friedrichs a Lewy [2] navrhují formulovat okrajové podmínky tak, že se užije pouze pravidelných bodů sítě. V těch se předepíše hodnota, kterou by v nich nabývala pevná, celkem však libovolná spojitá funkce definovaná v celém oboru a nabývající na hranici předepsaných hodnot. Podobným způsobem postupuje i Ljusternik [4].

Tento způsob je prakticky nevýhodný a obyčejně se užívá nepravidelné sítě v okolí hranice, jak jsme se o tom zmínili v odstavci o nepravidelných pravoúhlých sítích, s případným dalším zjednodušením, o němž jsme se již také zmínili.

Podobným celkem jednoduchým způsobem se zavádějí okrajové podmínky ve všech případech diferenciálních rovnic.

V. Konvergenční otázky metody sítí

Konvergenční otázky metody sítí nejsou dosud prostudovány tak, jak by si zasloužily. Studium se omezilo zejména na speciální typy rovnic. Jedině případ Dirichletova problému je poměrně dobře prostudován.

Konvergenčními otázkami se zabývají na př. Courant, Friedrichs, a Lewy ve své práci [2]. Vycházejí v podstatě z variačních principů, a proto na př. pro případ Dirichletova problému předpokládají konečný Dirichletův integrál $\iint\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) \mathrm{d}\Omega$. Poněkud jiným způsobem provádí důkaz v případě Dirichletova problému PHILIPS a WIENER [1]. Ljusternik [7] ve své práci dokazuje existenci řešení Dirichletova problému právě tím, že dokáže konvergenci přibližných řešení nalezených metodou sítí při postupném zhušťování sítě k přesnému řešení.

PETROVSKIJ [3] předložil velmi obecný důkaz konvergence. Dokázal, že z posloupnosti síťových funkcí, t. j. hodnot přibližných řešení, možno vybrat posloupnost, která konverguje stejnoměrně k harmonické funkci, jež vyhovuje okrajové podmínce v každém regulárním bodě ve smyslu existence superharmonického barieru. Jestliže se hranice skládá jedině z regulárních bodů v uvedeném smyslu, potom celá posloupnost konverguje k řešení Dirichletova problému.

Uvedené práce se zabývají problémem Dirichletovým pro celkem obecné oblasti. Případ čtverce, resp. obdélníku byl studován značně podrobněji vzhledem k tomu, že lze napsat explicite jak řešení přesné, tak i diferenční pomocí Fourierových řad (srv. LE ROUX [1].[3]) V poslední době bylo zde dosaženo jistých výsledků. Tak WALSH a YOUNG [3] studovali rychlost konvergence v závislosti na okrajových podmínkách. Přišli k závěru, že pro jisté (spojité) okrajové podmínky je konvergence pomalejší než h^α ($\alpha > 0$ libovolně pevné).

Naopak, má-li okrajová podmínka dvě spojité derivace, konvergence má rychlost h^2. Pro některé smíšené okrajové problémy eliptických rovnic dokazuje konvergenci BATSCHELET [1]. Předpokládá však omezenost čtvrtých derivací hledané funkce. Konvergenčními otázkami pro parabolické rovnice se

[3]) Tyto vzorce formálně poněkud v jiném tvaru udává HYMAN [1].

zabývá KAMYNIN [1], [2]. Jistou konvergenční otázku souvisící s rovnicí vedení tepla řešil také Rektorys [1]. Viz také Petrovskij [2].

VI. Problém odhadu chyby

Problém odhadu chyby je jednou z velmi důležitých matematických otázek. Uspokojivý odhad není dodnes znám. V praxi často užívaný odhad Rungeho — odhad metodou dvojnásobného kroku — je naprosto nedostatečně matematicky fundován a jeho platnost je problematická. (Odvození tohoto vzorce viz na př: Panov [6].)

Pravděpodobně theoreticky jedině fundovaný vzorec pro obecné oblasti je odhad GERŠGORINŮV [1], (srv. také Kantorovič - Krylov [1]). Největší vadou tohoto vzorce je však to, že je nutno znát horní odhad parciálních derivací až do 4. řádu. Collatz doporučil odhadnouti tyto derivace prakticky pomocí diferencí síťového řešení. Problematičnost tohoto postupu vynikne z toho, že i v naprosto „rozumných" a technicky důležitých problémech je čtvrtá derivace neomezená.

Podobným způsobem jako Geršgorin postupuje i Batschelet [1] v případě eliptické diferenciální rovnice.

Pro speciální oblast čtverce, díky vzorcům Le Rouxe, lze provést odhad chyby důkladněji. Těmito problémy se zabývali Walsch a Young [1] a WASSON [1]. Odhadem chyby v tomto případě se zabývá ROSENBLOOM [1].

VII. Řešení diferenčních rovnic

Způsob řešení velké soustavy lineárních rovnic ovlivňuje do velké míry praktickou použitelnost metody sítí.

V zásadě můžeme dělit způsoby řešení systémů lineárních rovnic na metody přímé a nepřímé. Přímými metodami rozumíme metody charakteru eliminačního, nepřímými metodami metody charakteru iteračního. Přímých metod se užívá tam, kde systém rovnic počítáme pro více pravých stran, nebo v těch případech, při nichž iterační řešení pomalu konverguje. Podrobnější rozbor, kdy jsou výhodnější metody přímé (ve smyslu pracnosti) než metody nepřímé a naopak, není autorům znám. Ve většině prací je rozhodující subjektivní stanovisko.

O řešení lineárních rovnic viz práce FORSYTHE [1] s rozsáhlým seznamem literatury (srv. také FADĚJEVA [1]).

1. Přímé metody. Tyto metody mají eliminační charakter a je možno je provádět prakticky různými způsoby, na př. převodem na trojúhelníkovou matici, orthonormalisací, skupinovými eliminacemi, Milneho metodou (srv.

Milne [2]) a pod. Podstatnou úlohu zde hraje soustava kontrol. Výhodou je, že numerické práce dají se velmi zmechanisovat, takže je mohou provádět méně kvalifikované síly.

Do přímých metod můžeme zahrnout i metody, které jsou blízké eliminačním metodám a které jsou speciálně vypracovány pro rovnice odpovídající metodě sítí. Viz na př. Hyman [1] neb RUNGE [1]. Pro speciální rovnici Dirichletovu a speciální oblasti (obdélník) byly vypracovány některé rychlé metody, při nichž se užívá jistých hodnot předem vypočítaných (srv. MOSKOWITZ [1]).

2. Nepřímé metody. Nepřímé metody můžeme rozdělit na dvě skupiny: metody iterační, které jsou charakterisovány pevným iteračním postupem (iterace Ritzova a Gauss-Seidlova a p.), a metody relaxační, charakterisované tak, že při iteračním postupu bereme v úvahu již nalezené výsledky (na př. metoda největšího spádu a pod.).

a) Metody iterační. Iterační metody byly kdysi velmi oblíbeny (srv. na př. Panov [6], WOLF [1], LIEBMANN [1], RICHARDSON [1]). Můžeme je dělit na iterace prosté a skupinové. U iterací prostých měníme při jednom kroku hodnotu jediné neznámé, u iterací skupinových měníme hodnoty celé skupiny neznámých.

V konvergenčních otázkách u většiny metod hraje podstatnou úlohu positivní definitnost matice soustavy. Konvergenční otázky speciálně pro Dirichletův problém řeší DIAZ a ROBERTS [1]. Liebmannova iterační metoda je v theorii lineárních rovnic známa pod názvem Seidlova metoda, Richardsonova metoda pak je metoda, která v theorii numerického řešení lineárních rovnic je známa pod názvem metody Ritzovy.

Ze skupinových metod zde uvedeme způsob, který navrhuje SHORTLY a WELLER [1]. U této práce je třeba ovšem podotknout, že se zde řeší v podstatě skupinově celý Dirichletův problém, což se odrazí při sestavení diferenčních rovnic, které nejsou potom identické s normálním systémem rovnic pro Dirichletův problém. U iteračních metod, díky jejich pravidelnosti, může být alespoň částečně studována rychlost konvergence. Pro obdélník tak činí FRANKEL [1] a pro skupinové iterace studují rychlost konvergence Shortly a Weller [1].

Někteří autoři navrhují různé úpravy, aby byla zvýšena rychlost konvergence. Uvedeme zde práci Ljusternika [8].

b) Relaxace. Pojem relaxace zavedl Southwell v díle [8] a [12], kde šlo o řešení rámových a prutových konstrukcí uvolňováním styčníků a vyrovnáváním přebytků momentů. Velmi příbuznou metodou při řešení rámů je metoda Crossova.

Podstata relaxační metody matematicky spočívá v minimalisaci kvadratické formy příslušné k soustavě diferenčních rovnic. Iteruje se vždy na souřadnice, kterým odpovídá největší residuum, a píší se pouze změny v neznámých a residuích způsobených těmito iteracemi. (Residuum se nazývá zbytek na pravé straně soustav; při přesném řešení je zde nulový člen.) Relaxační metoda je dost příbuzná metodě „největšího spádu", neboť geometricky řečeno, iteraci provádíme ve směru jedné ze souřadnicových os, která svírá nejmenší úhel s gradientem příslušné kvadratické formy. S geometrického hlediska se relaxační metodou zabýval na př. SYNGE [1]. Postupem času přešlo se od jednobodových relaxací k relaxacím složitějším, t. zv. relaxacím blokovým, deskovým a pod., které urychlují konvergenci. Stručný přehled o těchto metodách viz STIEFEL [1], který také navrhuje jistou metodu, která je zlepšením metody největšího spádu. Na poněkud jiném principu je založena t. zv. skupinová relaxace (viz o tom na př. práce WOODSE [1]). Účelem tohoto způsobu je odstranit jedno residuum, aniž by se residua bezprostředně sousední změnila. Stiefel ve své práci [2] řeší otázku různých možností relaxací. Dnes je relaxační technika vypracována značně podrobně, zejména po stránce praktické, a to jak si uspořádat výsledky, jak je psát a pod. Souborněji o relaxačních metodách viz na př. Fox [1], Allen [2], Southwell [9] a j. V těchto a podobných pracích se často slučují otázky vlastní relaxace (řešení systému rovnic) a otázky souvisící s řešením parciálních rovnic pomocí sítí. Srovnej také práci NIKOLAJEVY [1].

VIII. O přesnosti řešení lineárních rovnic

Otázka chyby řešení soustavy lineárních rovnic prakticky úzce souvisí s chybou způsobenou metodou sítí. Jde o to, aby přesnost řešení soustavy rovnic nebyla zbytečně velká vzhledem k přesnosti, s níž diferenční rovnice aproximují diferenciální rovnici, neboť numerická práce roste rychle s požadovanou přesností. Je však jeden podstatný rozdíl mezi oběma druhy chyb. Chyba při řešení lineárních rovnic má do jisté míry charakter nahodilosti, způsobené v podstatě zaokrouhlováním, na rozdíl od chyby, způsobené metodou sítě, kde charakter nahodilosti se vůbec nevyskytuje. Odhad chyby při řešení lineárních rovnic je důležitý, neboť poměrně malá residua mohou způsobit velkou chybu. Touto otázkou se theoreticky pro Dirichletův problém zabývá AJZENŠTAT [1].

Vzhledem k jisté nahodilosti je však theoretický horní odhad příliš nadhodnocen, a proto po stránce praktické lépe vyhovuje statistický odhad chyby, kde zaokrouhlovací chyby se považují za náhodné veličiny. Třebaže předpoklad o nahodilosti zaokrouhlovacích chyb není theoreticky dobře fundován a může se s ním dospět k absurdním výsledkům, přece statistický odhad dává pro praxi cenné výsledky. Metoda statistického odhadu chyb není ještě dostatečně propracována a přesnější výsledky jsou známy pouze pro případ Dirichletova problému pro čtverec. Uvedeme z této problematiky práce ABRAMOVA [2] a Ljusternika [5] a ŠURY - BURY [1]. Jistý statistický odhad udává na př. také Stiefel [1].

IX. Řešení problému vlastních čísel pomocí metody sítí

Pomocí diferenčních rovnic možno určovat také vlastní číslo problému. Podobně jako v minulých problémech vznikají i zde dva druhy otázek. Prvý druh souvisí s problémy konvergence vlastních hodnot soustavy diferenčních rovnic k vlastnímu číslu parciální rovnice.

Druhý druh otázek souvisí s výpočtem vlastních hodnot diferenčních rovnic. Z řady prací zabývajících se problematikou vlastních čísel uveďme na př. Crandala [1], Nikolajevu [1] a Ljusternika [4].

Saulev [1] ve své práci studuje asymptotickou rychlost konvergence diferečních vlastních hodnot k vlastní hodnotě parciální rovnice. Pro případ Dirichletova problému viz také práci Ljusternika [4].

X. Problémy souvisící s otázkami zvýšení přesnosti

Přesnost metody sítí závisí na řadě faktorů. Jsou to zejména

a) druh diferenciální rovnice,

b) druh diferenční aproximace difereciální rovnice a druh sítě,

c) hustota sítě,

d) okrajové podmínky a tvar integračního oboru,

e) přesnost řešení soustavy diferenčních rovnic.

Těmito jednotlivými otázkami se již zabývala řada autorů, jak již bylo poznamenáno na patřičném místě. Není nám však zatím známa žádná práce, která by posuzovala alespoň částečně uvedené faktory ve vzájemné souvislosti s cílem pochopit přesnost řešení parciální rovnice jako celku.

Všeobecně je možno říci asi toto:

a) Rovnice nižšího řádu lze řešit (se stejnou sítí) většinou přesněji než rovnice řádů vyšších,

b) Nemusí být vždy pravidlem, že aproximační diferenční vzorce vyšších řádů dávají přesnější výsledky než vzorce jednodušší nižších řádů. V praktických případech však dávají převážně vzorce vyšších řádů lepší výsledky. Pravidelnými sítěmi dojdeme obvykle k přesnějším výsledkům než sítěmi nepravidelnými;

c) Se vzrůstající hustotou sítě se zvyšuje přesnost. Nemusí to však býti v případech velmi „rozumných" s rychlostí úměrnou řádu diferenčního vzorce.

d) Okrajové podmínky v souvislosti s integračním oborem jsou rozhodujícím činitelem. V zásadě případy, kdy má řešení dostatečný počet omezených parciálních derivací, možno počítat metodou sítí přesněji než v případě, kdy jsou derivace neomezené.

e) Přesnost řešení rovnic může být důležitým činitelem a je nutno posuzovat ji v souvislosti s přesností metody sítí.