O PLOCHÁCH KLÍNOVÝCH II

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 11. října 1954.) DT:513.62

Autor vyšetřuje nejprve kubickou zborcenou plochu, určenou dvěma řídicími přímkami a řídicí parabolou, která má s dvojnásobnou řídicí přímkou společný nevlastní bod. Vhodnou substitucí přejde tato plocha v klínovou plochu se systémem parabol, jež obsahuje ještě další systém rovinných křivek. Tento druhý systém se promítá do souřadnicové roviny do systému křivek, navzájem perspektivně afinních, při čemž osou afinity je jedna souřadnicová osa a směrem afinity je druhá souřadnicová osa.

V druhé části článku nahrazuje autor zmíněný systém parabol systémem parabol stupně n a zobecňuje předešlé výsledky i pro tento případ.

§ 1. Pomocná zborcená plocha třetího stupně.

Úmluva 1. Nechť a, b, c, d jsou konstanty. Definujme funkci $F(x, y, z) = (ax + b)\, y^2 + (cx - z + d) \,.\, x^2$; plochu o rovnici $F(x, y, z) = 0$ označme μ.

Pro parciální derivace funkce F platí $F_x = ay^2 + x(3cx - 2z + 2d)$, $F_y = 2(ax + b)\, y$, $F_z = -x^2$, $F_{xx} = 2 \,.\, (3cx - z + d)$, $F_{xy} = 2ay$, $F_{xz} = -2x$. $F_{yy} = 2(ax + b)$, $F_{yz} = F_{zz} = 0$.

Všecky první parciální derivace bodu $(x_0, y_0, z_0) \in \mu$ se rovnají nule, právě když platí $x_0 = y_0 = 0$. Pro druhé parciální derivace v bodě $(0, 0, z_0)$ platí $F_{xx} = 2(d - z_0)$, $F_{yy} = 2b$, $F_{xy} = F_{xz} = F_{yz} = F_{zz} = 0$.

Pro kuželovou plochu tečen, jdoucích bodem $(0, 0, z_0)$ dostáváme rovnici $(d - z_0)\, x^2 + by^2 = 0$; její diskriminant je

$$\begin{vmatrix} d - z_0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} .$$

Z toho plyne okamžitě:

Bod $(0, 0, z_0)$ je biplanární, právě když platí $b \neq 0$, $d \neq z_0$.
Bod $(0, 0, z_0)$ je uniplanární, právě když platí buďto $b = 0$, $d \neq z_0$ anebo $b \neq 0$, $d = z_0$. (1)

Všecky druhé parciální derivace bodu $(x_0, y_0, z_0) \in \mu$ se anulují, právě když platí $x_0 = y_0 = b = 0$, $d = z_0$.

Předpokládejme, že platí $b = 0$. Funkci F lze pak přepsat do tvaru $x(ay^2 + (cx - z + d) \cdot x)$. Pro nenulové a rozpadá se tedy plocha μ v rovinu $(x = 0)$ a kvadriku $(ay^2 + (cx - z + d) \cdot x = 0)$. Je-li $a = 0$, pak plocha μ rozpadá ve dvojnásobnou rovinu $(x = 0)$ a v rovinu $(z = cx + d)$. Dosavadní výsledky nyní shrneme:

Poučka 1,1. *Plocha μ z úmluvy 1 má své singulární body na ose z; platí pro ně tvrzení* (1). *Je-li splněna rovnice $b = 0$, pak se plocha μ rozpadá.*

Předpokládejme dále, že platí $b \neq 0$ a že se plocha μ rozpadá. Potom lze funkci F přepsat do tvaru $(Ax + By + Cz + D)(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + a_{22}y^2 + 2a_{24}y)$.

a) Platí-li $B \neq 0$, pak jest $a_{13} = a_{14} = a_{22} = 0$. Je-li dále $C = 0$, pak F neobsahuje člen x^2z, a to je spor. Je-li $C \neq 0$, pak F neobsahuje člen z, a to je též spor.

b) Je-li $B = 0$, potom platí $a_{12} = a_{24} = 0$. Je-li dále $C \neq 0$, pak je též $a_{13} = a_{22} = 0$. Pak ale F neobsahuje y^2, a to není možné. Je-li $C = 0$, pak platí $F(x, y, z) = (Ax + D)(a_{11}x^2 + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + a_{22}y^2)$, při čemž $A \neq 0$, $Da_{13} = Da_{14} = 0$. Je-li $D = 0$, pak dostáváme spor s nerovností $b \neq 0$. Je-li $D \neq 0$, pak je $a_{13} = 0$; F opět neobsahuje x^2z. Ve spojení s poučkou 1,1 dostáváme tedy tento výsledek:

Poučka 1,2. *V úmluvě 1 platí $b \neq 0$, právě když je plocha μ nerozložitelná.*

Pro každé k zaveďme označení

$$\alpha_k = (y = kx),\ \beta_k = ((ak^2 + c)\, x - z + bk^2 + d = 0)\,. \tag{2}$$

Pak platí inkluse $\alpha_k \cap \beta_k \subset \mu$. Je-li $k \neq 0$, pak označme

$$\gamma_k = \left((ak^2 + c)\,\frac{y}{k} - z + bk^2 + d = 0\right).$$

Pak platí též $\alpha_k \cap \gamma_k \subset \mu$.

Důkaz tvrzení (2) je snadný. Toto tvrzení budeme potřebovat v příštím paragrafu.

Pro nenulová x lze rovnici plochy přepsat do explicitního tvaru

$$z = \frac{ax + b}{x^2}\, y^2 + cx + d = f(x, y)\,.$$

Pro parciální derivace této funkce platí

$$f_x = -\,\frac{ax + 2b}{x^3}\, y^2 + c\,,\quad f_y = 2y\,\frac{ax + b}{x^2}\,,\quad f_{xx} = \frac{2(ax + 3b)}{x^4}\, y^2\,,$$

$$f_{xy} = -\,\frac{2(ax + 2b)}{x^3}\, y\,,\quad f_{yy} = 2\,\frac{ax + b}{x^2}\,.$$

Dosadíme-li podle těchto rovnic do výrazu $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, dostaneme po krátké úpravě zlomek $\frac{-4b^2y^2}{x^6}$. Z toho ihned plyne další tvrzení:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Bod } (x, y, z) \in \mu \text{ je hyperbolický, právě když platí } x \neq 0 \neq y\,. \\ \text{Bod } (x, y, z) \in \mu \text{ je parabolický, právě když platí } x \neq 0 = y\,.\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Je-li tedy plocha μ nerozložitelná, pak je to zborcená plocha s torsální přímkou v rovině $(y = 0)$. Rozpadá-li se plocha v rovinu a v nerozložitelnou kvadriku, pak rovnice této kvadriky je $F_1(x, y, z) = ay^2 + (cx - z + d)\,x = 0$. Pro parciální derivace funkce F_1 platí rovnice $F_{1x} = 2cx + d - z$, $F_{1y} = 2ay$, $F_{1z} = -x$.

Tyto parciální derivace se rovnají nule pouze pro bod $V = (0, 0, d)$. Kvadrika je kuželovou plochou o vrcholu V.

Poučka 2. *Je-li plocha μ z úmluvy 1 nerozložitelná, pak je zborcená. Rozpadá-li se v rovinu a v nerozložitelnou kvadriku, pak tato kvadrika je kuželovou plochou o vrcholu* $(0, 0, d)$.

Z vyšetřovaného prostoru Π dostaneme homogenisací prostor Π^*. Plocha μ přejde tak v jistou plochu μ^*. Poněvadž μ^* je zborcená plocha třetího stupně, lze na ní najít v Π^* řídicí kuželosečku, dvojnásobnou řídicí přímku (mající s řídicí kuželosečkou právě jeden společný bod) a jednoduchou řídicí přímku.

Řídicí kuželosečka je kterákoliv parabola k^*, pro niž platí $k = \mu \cap (x = x_0)$, kde $x_0 \neq 0$. Dvojnásobná řídicí přímka d^* je osa z a její nevlastní bod. Pro jednoduchou přímku řídicí j^* odvodíme z rovnice pro β_k (tvrzení (2)) vztah $j = (ax + b = 0) \cap (z = cx + d)$ v případě, že $a \neq 0$; je-li $a = 0$, pak j^* je společná nevlastní přímka rovin β_k (plocha je v tomto případě konoidem). (4)

Tedy přímka $(y = 0) \cap (z = cx + d)$ je jediná torsální přímka plochy a počátek je jediný kuspidální bod.

Poučka 3. *Nerozložitelná plocha μ z úmluvy 1 je zborcená kubická plocha, určená řídicími křivkami k^*, j^*, d^* podle tvrzení* (4).

§ 2. Parabolické klínové plochy.

Úmluva 2. Předpokládejme, že $G(X)$ je nikoliv konstantní funkce, mající druhou derivaci všude na jistém intervalu J. Je-li F funkce z úmluvy 1, pak proveďme substituci tak, aby přešla ve funkci

$$F(G(X), y, z)\,. \qquad (5)$$

Anulováním této funkce vzniklá rovnice určuje plochu, kterou označíme $\varkappa$.

Pro parciální derivace funkce (5) platí

$$F_x = G'(X)[ay^2 - (3cG(X) - 2z + 2d)\,G(X)],\ F_y = 2y[aG(X) + b]\,,$$
$$F_z = -G^2(X),\ F_{xx} = G''(X)[(ay^2 + 3cG(X) - 2z + 2d)\,G(X)] - 2G'^2(X)\,.$$
$$.\,[3cG(X) - z + d],\ F_{xy} = 2ayG'(H),\ F_{xz} = -2G(X)\,G'(X),\ F_{yz} = F_{zz} = 0\,.$$

Funkce (5) má v bodě (X_0, y_0, z_0) všecky první parciální derivace nulové, právě když platí $G(X_0) = y_0 = 0$. Vyšetřujme takové body. Pro odpovídající druhé parciální derivace platí $F_{xx} = 2m^2G'^2(X_0)(d - z_0)$, $F_{yy} = 2b$, $F_{xy} = F_{xz} = F_{yz} = F_{zz} = 0$. Tedy kuželová plocha tečen, jdoucích bodem $(X_0, 0, z_0)$, má rovnici $(d - z_0)\,G'^2(X_0)\,X^2 - by^2 = 0$; její diskriminant je

$$\begin{vmatrix} (d - z_0)\,G'^2(X)_0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}\,.$$

Z toho ihned plyne další tvrzení (připomeňme, že platí $G(X_0) = 0$):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Bod } (X_0, 0, z_0) \in \varkappa \text{ je biplanární, právě když platí } d \neq z_0,\ G'(X_0) \neq 0 \neq b. \\ \text{Bod } (X_0, 0, z_0) \in \varkappa \text{ je uniplanární, právě když platí buďto } b = 0,\ d \neq z_0, \\ G'(X_0) \neq 0 \text{ anebo jeden z případů } b \neq 0,\ d = z_0, \text{ resp. } b \neq 0,\ G'(X_0) = 0. \end{array}\right\}\ (6)$$

Z poučky 1,1 vyplývá, že se plocha v případě $b = 0$ rozpadá v rovinu $(x = 0)$ a další plochu. Z tvrzení (2) vyplývá tento důležitý důsledek:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Plocha obsahuje pro každé nenulové } k \text{ křivku } \gamma_k \cap (y = k\,.\,G(x)), \\ \text{při čemž } \gamma_k \text{ je definováno v tvrzení (2). Průměty těchto křivek do ro-} \\ \text{viny } (z = 0) \text{ jsou perspektivně afinní pro osu afinity v ose } X \text{ a směr} \\ \text{afinity v ose } y. \end{array}\right\}\ (6^*)$$

Poučka 4. *Plocha $\varkappa$ nechť je dána podle úmluvy 2. Její bod (X_0, y_0, z_0) je singulární, právě když platí $G(X_0) = y_0 = 0$. Pro tyto singulární body platí tvrzení* (6). *Pro plochu $\varkappa$ platí dále tvrzení* (6*).

Omezíme se nyní na regulární body plochy $\varkappa$. Rovnici plochy lze pak přepsat do tvaru

$$z = \frac{aG(X) + b}{G^2(X)}\,y^2 + cG(X) + d\,.$$

Stanovením druhých parciálních derivací odvodili bychom i zde podmínky pro to, aby regulární bod byl hyperbolický, parabolický nebo eliptický. To již nebudeme provádět.

§ 3. Přímková plocha, vedoucí na klínové plochy s parabolami vyšších stupňů.

Úmluva 3. Nechť f, g, g_1, h, A, B jsou funkce jedné proměnné, které mají pro každou hodnotu argumentu spojitou derivaci. Označme $\varkappa$ plochu o rovnici

$f(y)\, g_1(x) + [h(x) - z]\, g(x) = 0$; pro každé k označme α_k rovinu o rovnici $y = kx$, β_k rovinu o rovnici $z = A(k)\, y + B(k)$; pro každé nenulové k označme γ_k rovinu o rovnici $z = A(k) \frac{y}{k} + B(k)$. Ta x, která (ne)anulují $g(x)$, budeme značit $x_2(x_1)$.

Poučka 7. *Platí-li úmluva 3 a podmínka*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f(kx_1)}{g(x_1)}\, g_1(x_1) + h(x_1) = A(k)\, x_1 + B(k) \textit{ pro každé } x_1 \textit{ a pro každé } k\,, \\ &f(kx_2) = 0 \textit{ pro každé } x_2 \textit{ a každé } k\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

pak platí též

$$\alpha_k \cap \beta_k \subset \varkappa \textit{ pro každé } k\,. \tag{8}$$

Platí-li úmluva 3, *podmínka* (8) *a neobsahuje-li $\varkappa$ žádnou rovinu, pak platí též* (7).

Důkaz. Nechť platí (7). Pro společné body (x_1, y, z) rovin α_k, β_k platí tedy $\frac{f(y)}{g(x_1)}\, g_1(x_1) + h(x_1) = z$. Pro body $(x_2, y, z) \in \varkappa$ platí rovnice $f(y)\, g_1(x_2) = 0$. Tato rovnice je splněna i pro $y = kx_2$ (nezávisle na z). Tedy platí (8).

Nechť platí (8). Platnost první rovnice v (7) je zřejmá. Pro body $(x_2, y, z) \in \alpha_k \cap \beta_k$ platí podle (8) $f(kx_2)\, g_1(x_2) = 0$. Je-li $g_1(x_2) \neq 0$, pak je též $f(kx_2) = 0$. Je-li $g_1(x_2) = 0$, pak platí $(x = x_2) \subset \varkappa$, což je ve sporu s předpokladem. Tento případ tedy nemůže nastat. Podmínka (7) je dokázána.

Poučka 8. *Platí-li úmluva 3, pak z* (8) *plyne též $\alpha_k \cap \gamma_k \subset \varkappa$ pro každé nenulové k.*

Důkaz je zřejmý.

Důsledek. *Substitucí $x = F(X)$ (kde $F(X)$ má pro každé X z jistého intervalu I spojitou derivaci) přejde plocha $\varkappa$ z úmluvy 3 v plochu $\varkappa_X$. Platí-li dále* (8), *pak dostáváme výsledek: Plocha $\varkappa_X$ obsahuje systém rovinných křivek $(y = k\, G(X)) \cap \gamma_k$ pro každé nenulové k. Průměty těchto křivek (směrem rovnoběžným s osou z) do roviny $(z = 0)$ jsou navzájem perspektivně afinní pro osu afinity v ose x a směr afinity v ose y.*

Tento důsledek je vlastně nejdůležitějším poznatkem celého článku.

Poučka 9. *Předpokládejme platnost úmluvy 3 a podmínky* (7), *při čemž dále jest $f(x) = g(x) = x^n$ pro jisté přirozené číslo n. Jsou-li funkce g_1, h analytické, pak jsou nejvýše lineární.*

Důkaz. První rovnici z podmínky (7) lze přepsat do tvaru $k^n g_1(x_1) + h(x_1) = A(k)\, x_1 + B(k)$. Rozvedeme-li funkce g_1, h v Maclaurinovy řady, dostaneme srovnáním koeficientů žádaný výsledek.

Poučka 10. *Předpoklady: Platí úmluva 3, při čemž $g_1(x) = ax + b$, $h(x) = cx + d$ pro jisté konstanty a, b, c, d; existuje funkce $\varphi(k)$ tak, že $a\varphi(k) +$*

$+ c = A(k)$, $b\,\varphi(k) + d = B(k)$; *je-li* $a \neq 0$, *pak* $\varkappa$ *neobsahuje rovinnou součást.* *Tvrzení*: *Potom podmínka* (8) *je ekvivalentní s podmínkou*

$$f(kx) = \varphi(k)\,g(x) \tag{9}$$

identicky v k, x.

Důkaz. Nechť platí (8). Po snadném výpočtu dostaneme pro souřadnice bodů z $\alpha_k \cap \beta_k$ rovnici $(ax_1 + b)\left(\frac{f(kx_1)}{g(x_1)} - \varphi(k)\right) = 0$. Dále platí též $f(kx_2)$ . . $(ax_2 + b) = 0$. Je-li $a = 0 \neq b$, pak platí (9) identicky v x. Nechť platí $a \neq 0$. Případ $\left(-\frac{b}{a}, y, z\right) \in \varkappa$ nemůže nastat, neboť plocha $\varkappa$ by obsahovala rovinu $\left(z = -\frac{cb}{a} + d\right)$. Celkem tedy platí (9).

Nechť platí (9). Pro společné body rovin α_k, β_k platí po substituci z (9) a po eliminaci $\varphi(k)$ rovnice $z = \frac{f(y)}{g(x_1)}(ax_1 + b) + cx_1 + d$. Poněvadž ale dále platí $(x = x_2) \cap (y = kx) \subset \varkappa$ pro každé x_2, jest tím platnost podmínky (8) prokázána.

Poučka 11. *Platí-li pro analytické funkce* f, g, φ *identita* (9), *pak platí* $g(x) = c_1x^n$, $\varphi(k) = c_2k^n$ *pro jisté konstanty* c_1, c_2.

Důkaz. Označme $f^{(i)}(0) = f_i$, $g^{(i)}(0) = g_i$, $\varphi^{(i)}(0) = \varphi_i$. Podle předpokladu platí

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \frac{x^i}{i!}\,, \quad g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \frac{x^i}{i!}\,, \quad \varphi(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \frac{k^i}{i!}\,.$$

Není-li f identicky nula, pak existují celá nezáporná čísla i_1, j_1 tak, že g_{i_1}, φ_{j_1} jsou nenulová čísla. Z rovnice (9) plynou však vztahy:

$$g_i\varphi_j = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j\,, \tag{10,1}$$

$$g_i\varphi_i = f_i\,. \tag{10,2}$$

Tedy podle (10,1) jest $i_1 = j_1$. Z obou rovnic (10) plyne dále, $g_i = \varphi_i = 0$ pro každé $i \neq i_1$. Z toho již plyne žádaný výsledek.

Poučka 12. *Nechť* a, b, c, d, n *jsou konstanty, z nichž* n *je přirozené číslo. Pak polynom* $(ax + b)\,y^n + (cx - z + d)\,x^n$ *je reducibilní, právě když platí* $b = 0$.

Důkaz. Je-li $b = 0$, Pak zřejmě polynom je reducibilní. Je-li $b \neq 0$ a je-li polynom reducibilní, pak jej lze přepsat do tvaru $(z + \Sigma a_{ij}x^{\alpha_i}y^{\beta_j})(\Sigma a'_{ij}x^{\alpha_i'}y^{\beta_j'})$. Vzhledem k členu $-xz$ musí být polynom v druhé závorce roven $-x^n$. Existence členu $(ax + b)\,y^n$ vede nyní ihned ke sporu, neboť tento člen by se musel vyskytovat v polynomu $\Sigma a_{ij}x^{\alpha_i}y^{\beta_i}$ a výsledek by obsahoval člen $(ax + + b)\,y^nx^n$. A to není možné. Poučka je dokázána.

Poučka 13. *Je-li v předpokladech poučky* 10 $b \neq 0$ *a platí-li* $\varphi(k) = k^n$ *pro jisté přirozené číslo* n, *pak roviny* γ_k *neobsahují tutéž přímku.*

Důkaz. Platí $\gamma_0 \cap \gamma_1 = (y = 0) \cap (z = b + d)$. Pro body $(x, 0, b + d)$ platí rovnice $bk(k^n - 1) = 0$, což je identita v k, právě když $b = 0$.

Poznámka. Vzhledem k ploše $\varkappa_x$ z důsledku poučky 2 obalují tedy roviny γ_k jistou válcovou plochu, jejíž povrchové přímky jsou rovnoběžné s osou x. Je-li $\varphi(k) = k^n$, pak její rovnici dostaneme eliminací parametru k z rovnic

$$bk^{n+1} + ayk^n + (d - z)\,k + cy = 0, \quad (n + 1)\,bk^n + anyk^{n-1} + d - z = 0\,.$$

Nerozřešena je otázka, jakou podmínkou jsou vázány funkce z úmluvy 3, jsou-li analytické a platí-li pro ně (7). Podmínce (7) vyhovují ovšem funkce $F(x) = g(x) = x^n$, $g_1(x) = ax + b$, $h(x) = cx + d$; otázka je, vyhovují-li jí ještě nějaké jiné funkce. Zdá se pravděpodobné, že tomu tak není.

§ 4. Geometrická interpretace.

Definice 1. Nechť A, n jsou konstanty, z nichž n je přirozené číslo. Parabolou stupně n budeme rozumět rovinnou křivku, která má při vhodné volbě souřadnicového systému rovnici $y = Ax^n$. Osu y pak nazveme osou, počátek vrcholem této paraboly.

Poučka 14. *Parabola stupně n je v rovině s daným systémem souřadnicovým jednoznačně určena osou,*) vrcholem (ležícím na ose) a bodem (neležícím na ose).* Důkaz je zřejmý.

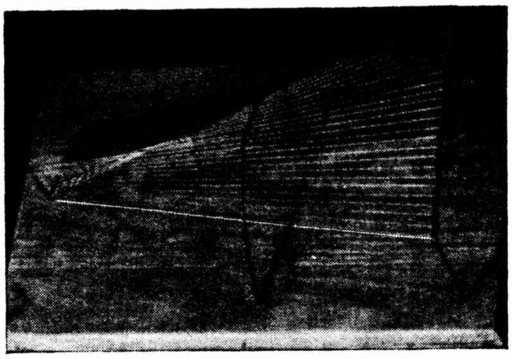
Definice 2. Nechť k je křivka v rovině $\gamma = (y = 0)$, k_{I} křivka v rovině ϱ rovnoběžné s osou x a různé od ν. Nechť pro přímku s roviny $(x = 0)$ platí $\nu \not\parallel s \not\parallel \varrho$. Křivka k_{I} nechť se promítá směrem s do roviny ν na křivku k'_{I} buďto perspektivně afinní s k podle osy rovnoběžné s osou x a směru v ose z anebo posunutou vzhledem ke k. Složením této projekce a perspektivní afinity dostaneme zobrazení mezi k_{I}, k; odpovídající body v tomto zobrazení označme A_{I}, A. Pro každé A_{I} non $\in \gamma \cap k_{\mathrm{I}}$ sestrojme parabolu p_A stupně n o ose rovnoběžné s osou z, o vrcholu A a bodu $A_{\mathrm{I}} \in p_A$. Pro každé $A_{\mathrm{I}} \in \nu \cap k$ sestrojme p_A jakožto bodem A_{I} jdoucí rovnoběžku s osou z. Plochu $\bigcup_{A_{\mathrm{I}} \in k_{\mathrm{I}}} p_A$ označme μ.

Podle důsledku z poučky 7 a podle pouček 10, 11 lze vyslovit tuto poučku:

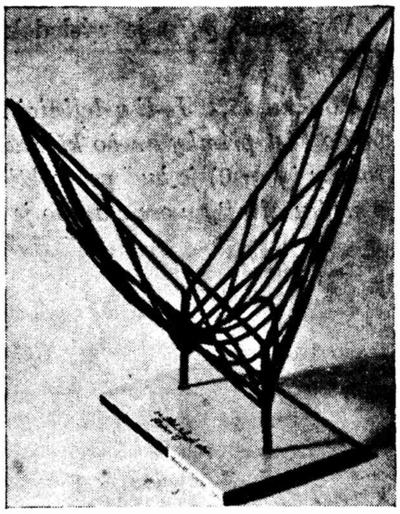
Poučka 15,1. *Je-li v definici 2 $\varrho \times \nu$, pak plocha μ obsahuje systém rovinných křivek k_t (pro každé nenulové t), které lze sestrojit takto: Promítneme k_{I} rovnoběžně s osou z do roviny $(z = 0)$; dostaneme tak křivku k_{I}^+. Pro každé nenulové t sestrojíme v rovině $(z = 0)$ křivku k_t^+ perspektivně afinní s k_{I}^+ pro osu afinity v ose x, pro směr afinity v ose y a pro charakteristiku t. Pak válcová plocha o řídicí křivce k_t^+ a povrchových přímkách rovnoběžných s osou z proniká plochu μ v rovinné křivce k_t.*

---

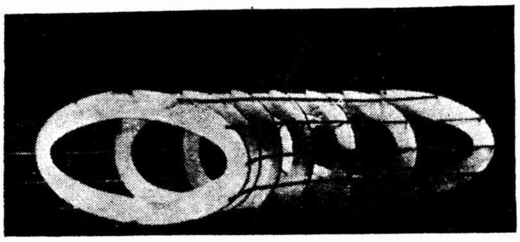
*) Rozumí se orientovanou osou.



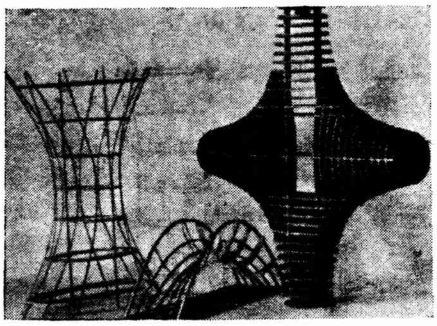
Model části pomocné zborcené plochy z § 1.



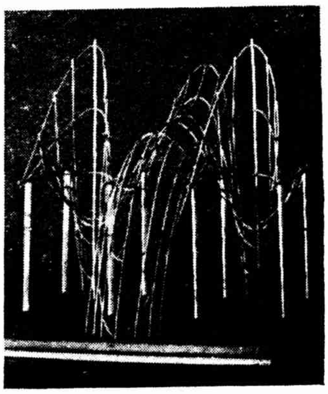
Model části parabolické klínové plochy se systémem sinusoid.



Model části parabolické klínové plochy se systémem elips.



Skupina modelů, zobrazujících části kuželosečkových klínových ploch.



Model části zobecněné parabolické plochy (paraboly jsou kubické) se systémem sinusoid.

Modely vypracovali posluchači fakulty inženýrského stavitelství v Praze.

V případě $\varrho \parallel \nu$ je výsledek obdobný (snadno bychom jej odvodili analyticky):

Poučka 15,2. *Je-li v definici 2 $\varrho \parallel \nu$, pak pro každé y_0 je průnik $(y = y_0) \cap \mu$ buďto část přímky anebo křivka, jejíž průmět (směrem rovnoběžným s osou y) do roviny $(y = 0)$ je buď perspektivně afinní s k o ose afinity rovnoběžné s osou x a o směru afinity v ose z anebo je posunutý vzhledem ke k.*