Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

# SEXTIKY INVARIANTNÍ VZHLEDEM KE KVADRATICKÝM INVERSÍM S TŘEMI BODY HLAVNÍMI

VLADIMÍR MAHEL, Praha.

(Došlo dne 14. ledna 1955.) DT:513.617.2

*Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.*

V této práci je provedeno vyšetřování křivek šestého stupně, invariantních vůči kvadratické inversi s třemi body hlavními a jsou ukázány některé vlastnosti sextik, reprodukovaných více inversemi se společnými body a přímkami hlavními.

**1.** Pod pojmem inverse budeme v této práci rozumět vždy jen inversi s třemi body hlavními. Při volbě souřadnicového systému tak, že střed inverse je v bodě $O_3$ a druhé dva hlavní body v bodech $O_1$ a $O_2$, je tato inverse dána rovnicemi

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varrho x_1'x_2' \quad (\varrho \neq 0)\,. \tag{1}$$

Leží-li ještě jednotkový bod na základní kuželosečce inverse, mají rovnice (1) tvar

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : x_1'x_2'\,. \tag{2}$$

Základní kuželosečka těchto inversí má tvar

$$x_3^2 - \varrho x_1x_2 = 0\,, \quad \text{resp.} \quad x_3^2 - x_1x_2 = 0\,. \tag{3a, 3b}$$

Leží-li střed inverse v souř. bodě $O_1$ (resp. $O_2$), druhé dva hlavní body v bodech $O_2$ a $O_3$ (resp. $O_1$ a $O_3$) a jednotkový bod na základní kuželosečce, mají rovnice inverse tvar

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_2'x_3' : x_1'x_2' : x_1'x_3'\,, \tag{4}$$

resp.

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_2' : x_1'x_3' : x_2'x_3'\,. \tag{5}$$

Rovnice sextiky budeme v dalším užívat ve tvaru:

$$\left.\begin{aligned} & x_3^6a_{00} + x_3^5(a_{10}x_1 + a_{11}x_2) + x_3^4(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \\ & + x_3^3(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) + \\ & + x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) + \\ & + x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^3x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^3 + a_{54}x_1x_2^4 + a_{55}x_2^5) + \\ & + a_{60}x_1^6 + a_{61}x_1^5x_2 + a_{62}x_1^4x_2^2 + a_{63}x_1^3x_2^3 + a_{64}x_1^2x_2^4 + a_{65}x_1x_2^5 + a_{66}x_2^6 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Při vyšetřování sextik, reprodukovaných inversí, budeme vycházet z těchto vět:

**Věta 1.** *Nerozložitelné křivce f stupně n-tého, která má v hlavním bodě $O_i$ bod $h_i$-násobný ($i = 1, 2, 3$), odpovídá inversi (1) křivka, která obsahuje nerozložitelnou součást F stupně $2n - h - h_2 - h_3$. Pro F je bod $O_1$ bodem $(n - h_1 - h_3)$-násobným, $O_2$ bodem $(n - h_2 - h_3)$-násobným a bod $O_3$ bodem $(n - h^1 - h_2)$-násobným.*

**Věta 2.** *Tečny inversní křivky ve středu inverse (1) jsou přímky, jimiž se z tohoto bodu promítají průsečíky křivky dané s protilehlou hlavní přímkou; tečny inversní křivky v hlavním bodě $O_i$ ($i = 1, 2$) jsou přímky, které odpovídají přímkám, jimiž se z bodu $O_j$ ($j = 1, 2, i \neq j$) promítají průsečíky křivky dané s protilehlou hlavní přímkou.*

**Věta 3.** *Leží-li singulární bod křivky mimo hlavní trojstran, odpovídá mu v inversi bod singulární o stejné násobnosti.*

Důkazy všech těchto tří vět dostaneme ihned specialisací obdobných vět pro obecnou kvadratickou transformaci. (Viz na př. BYDŽOVSKÝ: Úvod do algebraické geometrie, str. 618, věty a) až e).)

**Věta 4.** *Nutná podmínka pro to, aby nerozložitelná křivka stupně n-tého byla invariantní vůči inversi, jest: pro n sudé je střed inverse pro křivku bodem o sudé násobnosti, pro n liché bodem o liché násobnosti a druhé dva hlavní body jsou pro křivku body o stejné násobnosti.*

Důkaz. Mějme nerozložitelnou invariantní křivku $n$-tého stupně a nechť střed inverse (1) je pro křivku bodem $h_3$-násobným. Každý paprsek inverse protíná danou křivku ve středu inverse (v násobnosti $h_3$), v párech odpovídajících si bodů a případně v bodech samodružných, ležících na základní kuželosečce. Kdyby výraz $(n - h_3)$ byl číslo liché znamenalo by to, že na každém paprsku inverse leží jeden samodružný bod inverse, který je zároveň bodem křivky. To by ale znamenalo, že zákl. kuželosečka by měla s křivkou víc než $2n$ bodů společných, a tedy by proti předpokladu byla součástí křivky. Je tedy $(n - h_3)$ číslo sudé.

Druhé tvrzení plyne z věty 1: Je-li bod $O_i$ ($i = 1, 2$) na dané křivce $h_i$-násobný, je na křivce inversní $(n - h_i - h_3)$-násobný, čili pro invariantní křivku platí:

$$h_i = \tfrac{1}{2}(n - h_3)\,, \quad (i = 1, 2)\,. \tag{7}$$

Už na základě vět 1—4 můžeme říci, že se inversí mohou reprodukovat pouze sextiky

A) s bodem čtyřnásobným ve středu inverse a s obyčejnými body v druhých dvou bodech hlavních (budeme je nazývat sextiky skupiny A),

B) mající ve všech třech bodech hlavních body dvojnásobné (sextiky skupiny B) a

C) sextiky, na nichž střed inverse neleží a v druhých dvou hlavních bodech jsou body trojnásobné (sextiky skupiny C).

**2.** V tomto odstavci si najdeme podmínky pro koeficienty rovnic invariantních křivek ve všech těchto třech případech.

**Věta 5.** *Nerozložitelná sextika skupiny* A *se reprodukuje inversí* (2) *tehdy a jen tehdy, když platí:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } a_{00} = a_{10} = a_{11} = a_{20} = a_{21} = a_{21} = a_{30} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{60} = a_{66} = 0 \\ \text{(při čemž alespoň jedno z čísel } a_{4i} \ (i = 1, 2, \ldots, 4) \text{ je různé od nuly)}\,, \end{array}\right\} \quad (8a)$$

$$\text{b) } a_{61} = a_{40}\,, \quad a_{62} = a_{41}\,, \quad a_{63} = a_{42}\,, \quad a_{64} = a_{43}\,, \quad a_{65} = a_{44}\,. \qquad (8b)$$

Důkaz. Podmínky (8a) vyjadřují polohu sextiky vzhledem k souř. systému. Rovnice sextiky při této volbě souř. systému tedy zní:

$$\begin{aligned} f \equiv x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) + \\ + x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^3x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^3 + a_{54}x_1x_2^4 + a_{55}x_2^5) + \\ + x_1x_2(a_{61}x_1^4 + a_{62}x_1^3x_2 + a_{63}x_1^2x_2^2 + a_{64}x_1x_2^3 + a_{65}x_2^4) = 0\,. \end{aligned}$$

Provedeme-li na tuto rovnici transformaci (2), dostaneme po vynechání faktoru $x_0x_2x_4^3$ (a po vynechání čárek) rovnici

$$\begin{aligned} F \equiv x_1x_2(x_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) + \\ + x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^3x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^3 + a_{54}x^1x_2^4 + a_{55}x_2^5) + \\ + x_3^2\,(a_{61}x_1^4 + a_{62}x_1^3x_2 + a_{63}x_1^2x_2^2 + a_{64}x_1x_2^3 + a_{64}x_2^4) = 0 \end{aligned}$$

porovnáním koeficientů obou rovnic $f \equiv kF$ dostáváme podmínky reprodukce ve tvaru:

$$\begin{array}{lcl} a_{40} = ka_{61}\,, & & a_{61} = ka_{40}\,, \\ a_{41} = ka_{62}\,, & a_{5i} = ka_{5i}\,, & a_{62} = ka_{41}\,, \\ a_{42} = ka_{63}\,, & (i = 1, 2, \ldots, 5)\,, & a_{63} = ka_{42}\,, \\ a_{43} = ka_{64}\,, & & a_{64} = ka_{43}\,, \\ a_{44} = ka_{65}\,, & & a_{65} = ka_{44} \end{array}$$

a z nich určíme číselný faktor $k$:

Kdyby všechna $a_{5i} = 0$, pak by existovalo řešení $k = \pm 1$; v tom případě však by sextika byla rozložitelná (faktor $x_3^2 \pm x_1x_2$). Je tedy aspoň jedno z těchto čísel různé od nuly a z této rovnice pak plyne $k = 1$ a tím je dokázána nutnost podmínek (8b).

Postačitelnost podmínek se ukáže přímým obrácením tohoto postupu.

Sextika skupiny A, reprodukovaná inversí (2) má tedy rovnici:

$$\left.\begin{aligned} (x_3^2 + x_1x_2)(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) + \\ + x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^5x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^2 + a_{54}x_1x_2^4 + a_{55}x_2^5) = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

**Věta 6.** *Nerozložitelná sextika skupiny* B *se reprodukuje inversí* (2) *tehdy a jen tehdy, když platí:*

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{a) } a_{00} = a_{10} = a_{11} = a_{50} = a_{55} = a_{60} = a_{61} = a_{65} = a_{66} = 0 \\
\text{(při čemž vždy aspoň jedno číslo v každé z trojic} \\
\qquad a_{20}, a_{21}, a_{22};\ a_{40}, a_{51}, a_{62};\ a_{44}, a_{54}, a_{64} \text{ je různé od nuly)},
\end{array}\right\} \qquad (10a)
$$

$$
\text{b) } \left.\begin{array}{llll}
a_{51} = a_{30}, & a_{53} = a_{32}, & a_{62} = a_{20}, & \multirow{2}{*}{$a_{64} = a_{22}$.} \\
a_{52} = a_{31}, & a_{54} = a_{33}, & a_{63} = a_{21}, &
\end{array}\right\} \qquad (10b)
$$

**Věta 6a.** *Nerozložitelná sextika skupiny* B *se reprodukuje inversí* (4) *tehdy a jen tehdy, když platí podmínky* (10a) *a podmínky:*

$$
\left.\begin{array}{llll}
a_{30} = a_{21}, & a_{41} = a_{32}, & a_{52} = a_{43}, & \\
a_{40} = a_{22}, & a_{51} = a_{33}, & a_{62} = a_{44}, & a_{63} = a_{54}.
\end{array}\right\} \qquad (11)
$$

**Věta 6b.** *Nerozložitelná sextika skupiny* B *se reprodukuje inversí* (5) *tehdy a jen tehdy, když platí podmínky* (10a) *a podmínky:*

$$
\left.\begin{array}{llll}
a_{33} = a_{21}, & a_{44} = a_{20}, & a_{54} = a_{30}, & \\
a_{43} = a_{31}, & a_{53} = a_{41}, & a_{63} = a_{51}, & a_{64} = a_{40}.
\end{array}\right\} \qquad (12)
$$

**Věta 7.** *Nerozložitelná sextika skupiny* C *se reprodukuje inversí* (2) *tehdy a jen tehdy, když platí:*

$$
\begin{aligned}
\text{a) } a_{00} \neq 0, \quad a_{40} = a_{44} = a_{50} = a_{51} = a_{54} = a_{55} = a_{60} = a_{61} = a_{62} &= \\
= a_{64} = a_{65} = a_{66} = 0, & \qquad (13a)
\end{aligned}
$$

$$
\text{b) } \left.\begin{array}{lll}
a_{41} = a_{20}, & a_{43} = a_{22}, & a_{53} = a_{11}, \\
a_{42} = a_{21}, & a_{52} = a_{10}, & a_{63} = a_{00}.
\end{array}\right\} \qquad (13b)
$$

D ů k a z y vět 6, 6a, 6b a 7 jsou analogické důkazu věty 5.

Rovnice sextiky skupiny B, reprodukované inversí (2), má tedy tvar:

$$
\left.\begin{aligned}
(x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) &+ \\
+ x_3(x_3^2 + x_1x_2)(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) &+ \\
+ x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (14)
$$

Rovnice sextiky skupiny C, invariantní vůči téže inversi, vypadá takto:

$$
\left.\begin{aligned}
(x_3^6 + x_1^3x_2^3)\, a_{00} + x_3(x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{10}x_1 + a_{11}x_2) &+ \\
+ x_3^2(x_3^2 + x_1x_2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) &+ \\
+ x_3^3(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (15)
$$

**3.** Zajímejme se nyní o možnost reprodukce sextiky více inversemi se společnými hlavními body. Musíme uvažovat dvě možnosti:

1. inverse mají společný střed inverse a hlavní trojstran, ale mají různé základní kuželosečky;

2. inverse mají sice společný hlavní trojstran, ale středy inversí nejsou totožné (střed jedné inverse leží v některém z druhých dvou hlavních bodů druhé inverse).

**Věta 8.** *Nerozložitelná sextika skupiny* A *se nereprodukuje víc inversemi s týmž středem inverse a s týmiž klavními body.*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje nerozložitelná sextika skupiny A, invariantní současně vůči inversi (2) a vůči inversi (1), kde předpokládáme $\varrho \neq 0, \varrho \neq 1$; provedeme-li na sextiku (9) tuto druhou transformaci, dostaneme porovnáním koeficientů (po vynechání čárek a faktoru $x_1x_2x_3^4$) podmínky:

$$a_{4i} = ka_{4i}\,, \qquad a_{5j} = k\varrho a_{5j}\,, \qquad a_{4i} = k\varrho^2 a_{4i}\,,$$
$$(i = 0, 1, \ldots, 4)\,, \quad (j = 0, 1, \ldots, 5)\,, \quad (i = 0, 1, \ldots, 4)\,.$$

Nemá-li se křivka rozpadnout, jsou tyto podmínky splnitelné pouze tak, že $k = 1$, $\varrho = 1$, což je ale spor s předpokladem.

**Věta 9.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* B *byla reprodukována více inversemi se společným středem a společnými body hlavními, jest:*

*a) tyto inverse jsou dvě a je-li jedna z nich tvaru:*

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : x_1'x_2'\,, \tag{2}$$

*je druhá tvaru:*

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : -\,x_1'x_2'\,; \tag{16}$$

*b) splnění podmínek* (10) *a podmínek:*

$$a_{30} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0\,. \tag{17}$$

Důkaz. Sextika skupiny B invariantní vůči (2) má rovnici (14); provedeme-li na tuto rovnici transformaci (1) s předpokladem $\varrho \neq 0$ a $\varrho \neq 1$, dostaneme (po vynechání čárek a faktoru $x_1^2x_2^2x_3^2$) porovnáním koeficientů:

$$a_{2i} = ka_{2i}\,, \qquad a_{3j} = k\varrho a_{3j}\,, \qquad a_{4k} = k\varrho^2 a_{4k}\,,$$
$$a_{2i} = k\varrho^4 a_{2i}\,, \qquad a_{3j} = k\varrho^3 a_{3j}\,,$$
$$(i = 0, 1, 2)\,, \quad (j = 0, 1, \ldots, 3)\,, \quad (k = 0, 1, \ldots, 4)\,.$$

Tyto podmínky jsou splnitelné — aniž se křivka rozpadne — pouze tak, že $k = 1$, a buďto je aspoň jedno z čísel $a_{3j}$ různé od nuly a pak nutně $\varrho = 1$, nebo jsou všechna $a_{3j}$ rovna nule a pak také existuje řešení $\varrho = -1$.

Postačitelnost těchto podmínek se ukáže obrácením tohoto postupu.

Některé vlastnosti sextik, reprodukovaných těmito dvěma inversemi budou ukázány v následujícím odstavci.

V dalším budeme ještě potřebovat podmínky, analogické podmínkám věty 9, pro jinou volbu souř. systému:

**Věta 9a.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* B *byla reprodukována více inversemi se společným středem a společnými body hlavními, jest:*

*a) tyto inverse jsou dvě a je-li jedna z nich tvaru:*

$$x_1 : x_2 : x_3 = \quad x_2'x_3' : x_1'x_2' : x_1'x_3' , \tag{4}$$

*je druhá tvaru:*

$$x_1 : x_2 : x_3 = - x_2'x_3' : x_1'x_2' : x_1'x_3' ; \tag{18}$$

*b) splnění podmínek* (10a), (11) *a podmínek:*

$$a_{21} = a_{32} = a_{43} = a_{54} = 0 . \tag{19}$$

**Věta 9b.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* B *byla reprodukována více inversemi se spol. středem inverse a společnými body hlavními, jest:*

*a) tyto inverse jsou dvě a je-li jedna z nich inverse* (5), *je druhá tvaru:*

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_2' : - x_1'x_3' : x_2'x_3' ; \tag{20}$$

*b) splnění podmínek* (10a), (12) *a podmínek:*

$$a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{51} = 0 . \tag{21}$$

Důkazy vět 9a a 9b jsou naprosto stejné jako důkaz věty 9.

**Věta 10.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* C *byla invariantní vůči více inversím se společným středem a společnými body hlavními, jest:*

*a) tyto inverse jsou právě tři a je-li jedna z nich inverse* (2), *jsou druhé dvě tvaru:*

$$\left.\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varepsilon x_1'x_2' \\ x_1 : x_2 : x_3 &= x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varepsilon^2 x_1'x_2' \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(*kde* $\varepsilon$ *je komplexní hodnota třetí odmocniny z 1*);

*b) splnění podmínek* (13) *a podmínek:*

$$a_{10} = a_{11} = a_{20} = a_{21} = a_{22} = 0 . \tag{23}$$

Důkaz této věty je podobný důkazu věty 9 s tím rozdílem, že vede u nerozložitelné křivky na rovnici $\varrho^3 - 1 = 0$ pro $\varrho$.

Vlastnosti sextik, reprodukovaných touto trojicí inversí, si ukážeme v odstavci **5**.

Chceme-li se nyní zajímat o sextiky, invariantní vůči dvěma inversím se společným hlavním trojstranem, ale s různými středy, musíme se již omezit pouze na sextiky skupiny B, t. j. mající ve všech třech hlavních bodech body dvojnásobné.

**Věta 11.** *Nerozložitelná sextika je invariantní současně vůči inversím* (2) *a* (4) *tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny podmínky* (10) *a podmínky:*

$$\left.\begin{aligned} a_{30} = a_{33} = a_{21} , \quad a_{32} = a_{41} , \quad a_{43} = a_{31} , \\ a_{22} = a_{40} , \quad a_{44} = a_{20} . \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Důkaz. Proveďme na sextiku (14) transformaci (4); porovnáním koeficientů dostáváme nutné podmínky pro reprodukci:

$$\begin{array}{llll}
a_{20} = ka_{20}\,, & a_{21} = ka_{30}\,, & a_{40} = ka_{22}\,, & a_{31} = ka_{43}\,, \\
a_{31} = ka_{31}\,, & a_{22} = ka_{40}\,, & a_{41} = ka_{32}\,, & a_{33} = ka_{21}\,, \\
a_{42} = ka_{42}\,, & a_{30} = ka_{21}\,, & a_{43} = ka_{31}\,, & a_{20} = ka_{44}\,, \\
a_{32} = ka_{32}\,, & a_{32} = ka_{41}\,, & a_{44} = ka_{20}\,, & a_{21} = ka_{33}\,. \\
a_{22} = ka_{22}\,, & a_{33} = ka_{30}\,, & a_{30} = ka_{33}\,, &
\end{array}$$

Kdyby všechny koeficienty v prvém sloupci byly rovny nule, pak křivka je rozložitelná (faktor $x_1 + x_1x_2$); je tedy aspoň jeden z nich různý od nuly a pak $k = 1$ a tím dostáváme podmínky (24).

Postačitelnost se zase ukáže tak, že křivka, jejíž koeficienty splňují podmínky (10) a (24) se provedením transformací (2) a (4) nemění (až na faktor).

**Věta 12.** *Sextika, reprodukovaná inversemi (2) a (4) je současně invariantní vůči třetí inversi, která má střed ve zbývajícím vrcholu společného hlavního trojstranu a druhé dva hlavní body ve středech prvých dvou inversí.*

Důkaz je jednoduchý. Podmínky pro reprodukci sextiky z věty 11 jsou identické s podmínkami věty 6b pro reprodukci sextiky inversí (5).

Sextika, reprodukovaná inversemi (2), (4) a (5) má rovnici:

$$\left.\begin{array}{r}
(x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \\
+ x_3(x_3^2 + x_1x_2)(a_{21}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{21}x_2^3) + \\
+ x_3^2(a_{22}x_1^4 + a_{32}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{31}x_1x_2^3 + a_{20}x_2^4) = 0\,.
\end{array}\right\} \qquad (25)$$

Vlastnosti této křivky jsou vyšetřovány v odstavci 6.

Hledáme-li maximální počet inversí se společnými hlavními body reprodukující sextiky, jsou nyní myslitelné kombinace inversí z vět 9 a 12, t. j. ke každé z inversí (2), (4) a (5) může existovat právě jedna inverse další podle věty 9 (resp. 9a, resp. 9b). Extrémní případ reprodukce sextiky šesti inversemi je vyšetřován v posledním odstavci.

**4.** Ve větě 9 byly odvozeny nutné a postačující podmínky pro reprodukci sextiky dvěma inversemi. Všimněme si nyní blíže tohoto případu.

**Věta 13.** *Inverse*

$$\begin{array}{l}
\mathbf{T}_1 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \phantom{-}x_1'x_2' \\
\mathbf{T}_2 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : -x_1'x_2'
\end{array}$$

*spolu s kolineací*

$$\mathbf{K} \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : -x_3' \qquad (26)$$

*a spolu s identitou tvoří komutativní grupu.*

Důkaz se provede skládáním těchto transformací a přezkoušením tabulky této grupy:

| | $J$ | $T_1$ | $T_2$ | $K$ |
|---|---|---|---|---|
| $J$ | $J$ | $T_1$ | $T_2$ | $K$ |
| $T_1$ | $T_1$ | $J$ | $K$ | $T_2$ |
| $T_2$ | $T_2$ | $K$ | $J$ | $T_1$ |
| $K$ | $K$ | $T_2$ | $T_1$ | $J$ |

(27)

Rovnice sextiky, reprodukované touto grupou transformací, zní:

$$\left.\begin{aligned}(x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \\ + x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) = 0\,.\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

**Věta 14.** *Libovolnému bodu $M$, který neleží na hlavních přímkách a zákl. kuželosečkách obou inversí, přiřazují transformace grupy další tři body (různé navzájem i různé od bodu $M$). Tato čtyřbodová skupina má tu vlastnost, že kterémukoliv bodu této skupiny odpovídá v kterékoliv transformaci grupy zase bod této skupiny.*

Důkaz. Mějme bod $M(a_1; a_2; a_3)$, pro jehož souřadnice nechť platí $a_1a_2a_3 \neq 0$, $a_3^2 \neq \pm\, a_1a_2$. V $\mathsf{T}_1$ bodu $M$ odpovídá bod $M_1(a_1a_3; a_2a_3; a_1a_2)$, v $\mathsf{T}_2$ bod $M_2(a_1a_3; a_2a_3; -a_1a_2)$ a v $\mathsf{K}$ bod $M_3(a_1; a_2; -a_3)$. Z tabulky grupy je nyní vidět, že podrobíme-li kterýkoliv bod této čtveřice kterékoliv transformaci grupy, dostaneme zase bod skupiny. Tyto čtyři body leží ovšem v jedné přímce, procházející společným středem obou inversí i kolineace.

**Věta 15.** *Nechť bod $M'$ leží na zákl. kuželosečce jedné inverse (nikoliv v bodě hlavním). Pak transformace grupy (27) (s výjimkou identity a té inverse, v níž je $M'$ samodružný) přiřazují bodu $M'$ jako bod odpovídající $M'_2$ druhý průsečík paprsku inverse bodu $M'$ s toutéž základní kuželosečkou. Volba obyčejných dvojnásobných bodů sextiky v dvojici bodů $M'$ a $M'_2$ je ekvivalentní dvěma lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

Důkaz. Nechť pro souřadnice bodu $M'$ platí $a_1a_2a_3 \neq 0$, $a_3^2 - a_1a_2 = 0$; pak souřadnice bodu $M'$ můžeme psát ve tvaru $M'(a_1^2; a_3^2; a_1a_3)$; podle označení z předchozí věty platí $M' = M'_1$ a $M'_2 = M'_3$, což je právě průsečík paprsku inverse bodu $M'$ s kuželosečkou $x_3^2 - x_1x_2 = 0$. Tento pár bodů mohl by splynout pouze v bodě hlavním a to je předpokladem vyloučeno. Obdobně by se důkaz provedl pro bod na druhé zákl. kuželosečce. Tvrzení o počtu podmínek pro určení křivky se dokáže tak, že dosadíme souřadnice bodu $M'$ do rovnice křivky a do jejích prvých parc. derivací. Dá se pak ukázat, že tato soustava 4 homog. lin. rovnic pro koeficienty křivky má hodnost právě 2. Bod $M'_2$ musí pak být pro křivku rovněž bodem dvojnásobným podle věty 3.

Na základě těchto dvou pomocných vět můžeme vyslovit větu o singulárních bodech reprodukovaných sextik:

**Věta 16.** *Nerozložitelné sextiky reprodukované grupou* (27) *mají pouze body dvojnásobné. Mají-li pouze obyčejné body dvojnásobné, mohou být pouze rodu* 7, 5, 3 *a* 1. *U těchto sextik leží všechny body dvojnásobné na zákl. kuželosečkách obou inversí.*

Důkaz. Sextika invariantní vůči grupě (27) má v hlavních bodech body dvojnásobné (a je tedy rodu nejvýše 7). Kdyby tato sextika měla ještě další bod singulární aspoň trojnásobný, musela by mít podle vět 14 a 15 ještě jeden (nebo tři) body sing. o stejné násobnosti, a pak paprsek inverse, na němž tyto body leží, by měl s křivkou nejméně 8 průsečíků společných a tedy by křivka byla rozložitelná. Kdyby měla sextika bod dvojnásobný ve čtveřici bodů z věty 14, měl by zase paprsek inverse 10 průsečíků s křivkou. Mohou tedy u nerozložitelné sextiky další body dvojnásobné tvořit pouze dvojice bodů z věty 15 nebo může ležet jeden bod dvojnásobný na ose kolineace **K**. V tomto případě by však podle věty 2 nebyl ve středu inverse obyčejný bod dvojnásobný.

Přitom u sextiky rodu 1 leží dva páry dvojnásobných bodů (kromě bodů hlavních) na jedné zákl. kuželosečce, kdežto třetí pár leží na zákl. kuželosečce druhé inverse. Přesto však těchto 6 bodů má zvláštní polohu:

**Věta 17.** *U sextiky rodu 1 z předchozí věty leží 6 bodů dvojnásobných (kromě bodů hlavních) na jisté kuželosečce.*

Důkaz. Nechť dva páry dvojnásobných bodů leží na zákl. kuželosečce $x_3^2 - x_1x_2 = 0$, t. j. jejich souřadnice mají tvar:

$$M(a_1^2;\, a_3^2;\, a_1a_3)\,,\quad M'(a_1^2;\, a_3^2;\, -a_1a_3)\,,\quad (a_1a_3 \neq 0)$$
$$N(b_1^2;\, b_3^2;\, b_1b_3)\,,\quad N'(b_1^2;\, b_3^2;\, -b_1b_3)\,,\quad (b_1b_3 \neq 0)\,;$$

třetí pár bodů nechť leží na druhé zákl. kuželosečce $x_3^2 + x_1x_2 = 0$, takže jejich souřadnice jsou

$$P(c_1^2;\, -c_3^2;\, c_1c_3)\,,\quad P'(a_1^2;\, -c_3^2;\, -c_1c_3)\,,\quad (c_1c_3 \neq 0)\,,$$

při čemž předpokládáme, že $P$ neleží na spojnicích $MM'$, $NN'$. Pak determinant

$$\begin{vmatrix} a_1^4 & a_3^4 & a_1^2a_3^2 & -a_1^3a_3 & -a_1a_3^3 & a_1^2a_3^2 \\ a_1^4 & a_3^4 & a_1^2a_3^2 & a_1^3a_3 & a_1a_3^3 & a_1^2a_3^2 \\ b_1^4 & b_3^4 & b_1^2b_3^2 & -b_1^3b_3 & -b_1b_3^3 & b_1^2b_3^2 \\ b_1^4 & b_3^4 & b_1^2b_3^2 & b_1^3b_3 & b_1b_3^3 & b_1^2b_3^2 \\ c_1^4 & c_3^4 & c_1^2c_3^2 & c_1^3c_3 & -c_1c_3^3 & -c_1^2c_3^2 \\ c_1^4 & c_3^4 & c_1^2c_3^2 & -c_1^3c_3 & c_1c_3^3 & -c_1^2c_3^2 \end{vmatrix}$$

je nulový, jak se snadno přesvědčíme odečtením sudých řádků od lichých a rozvedením podle prvých tří sloupců pomocí Laplaceovy věty.

**Věta 18.** *Paprsek inverse protíná reprodukovanou sextiku v bodech po dvou harmonicky sdružených (vzhledem ke středu inverse a průsečíku paprsku inverse s hlavní přímkou, neprocházející středem inverse). Tečny křivky v párech odpovídajících si bodů se protínají na hlavní přímce, neprocházející středem inverse.*

Důkaz této věty plyne ihned z toho, že kolineace (26) je involutorní perspektivní kolineace se středem ve středu obou inversí a s osou kolineace v hlavní přímce, neprocházející středem. Viz na př. J. VOJTĚCH: Rovinné sextiky invariantní při periodických kolineacích (Věstník Král. české společnosti nauk, 1913).

**5.** V tomto odstavci si uvedeme věty, obdobné větám předchozího odstavce, pro sextiky skupiny C, reprodukované trojicí inversí (2) a (22). Důkazy nebudeme provádět, protože jsou rovněž obdobné.

**Věta 19.** *Inverse*

$$T_1 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \; x_1'x_2' ,$$
$$T_2 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varepsilon x_1'x_2' ,$$
$$T_3 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varepsilon^2 x_1'x_2' ,$$

(kde $\varepsilon$, $\varepsilon^2$ jsou kompl. sdružené hodnoty $\sqrt[3]{1}$), spolu s kolineacemi

$$K_1 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : \varepsilon^2 x_3' ,$$
$$K_2 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : \varepsilon x_3'$$

a spolu s identitou tvoří grupu.

Tabulka této grupy vypadá takto:

| | $J$ | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $K_1$ | $K_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J$ | $J$ | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $K_1$ | $K_2$ |
| $T_1$ | $T_1$ | $J$ | $K_1$ | $K_2$ | $T_2$ | $T_3$ |
| $T_2$ | $T_2$ | $K_2$ | $J$ | $K_1$ | $T_3$ | $T_1$ |
| $T_3$ | $T_3$ | $K_1$ | $K_2$ | $J$ | $T_1$ | $T_2$ |
| $K_1$ | $K_1$ | $T_3$ | $T_1$ | $T_2$ | $K_2$ | $J$ |
| $K_2$ | $K_2$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_1$ | $J$ | $K_1$ |

(29)

Rovnice sextiky, reprodukované touto grupou, zní:

$$x_3^6 a_{00} + x_3^3(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) + x_1^3x_2^3a_{00} = 0 . \tag{30}$$

**Věta 20.** *Libovolnému bodu $M$, který neleží na hlavních přímkách a zákl. kuželosečkách inversí, přiřazují transformace grupy* (29) *dalších pět bodů (různých navzájem i od bodu $M$); tato šestibodová skupina má tu vlastnost, že kterémukoliv bodu této skupiny odpovídá v kterékoliv transformaci grupy zase bod této skupiny.*

**Věta 21.** *Nechť bod $M$ leží na zákl. kuželosečce jedné inverse (nikoliv v bodě hlavním). Pak transformace grupy* (29) *(s výjimkou identity a inverse, v níž je $M$ samodružný) přiřazují bodu $M$ jako body odpovídající vždy jeden z průsečíků paprsku inverse bodu $M$ s druhými dvěma zákl. kuželosečkami. Volba obyčejných dvojnásobných bodů sextiky* (30) *v této trojici bodů je ekvivalentní dvěma lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

**Věta 22.** *Nerozložitelné sextiky invariantní vůči grupě* (29) *mající dva obyčejné body trojnásobné v bodech hlavních (nikoliv ve středu inversí) mohou být pouze rodu* 4 *nebo* 1. *(V tomto případě další tři body dvojnásobné leží v trojici bodů z předchozí věty.)*

Důkazy vět 20—22 jsou anologické důkazu vět 14—16.

**6.** Ve větě 12 bylo ukázáno, že existují sextiky, reprodukované třemi inversemi se společným hlavním trojstranem, ale s různými středy inversí. Všimněme si blíže tohoto případu:

**Věta 23.** *Inverse*

$$\left.\begin{aligned} T_1 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : x_1'x_2' , \\ T_2 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_2'x_3' : x_1'x_2' : x_1'x_3' , \\ T_3 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_2' : x_1'x_3' : x_2'x_3' \\ &\text{spolu s kolineacemi} \\ K_1 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_3' : x_1' : x_2' , \\ K_2 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_2' : x_3' : x_1' \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

*a spolu s identitou tvoří grupu.*

Důkaz této věty je stejný jako důkaz analogických vět 13 a 19. Také tabulka této grupy je naprosto stejná jako tabulka grupy z věty 19.

**Věta 24.** *Libovolnému bodu $M$, který neleží na žádné z hlavních přímek a na žádné ze základních kuželoseček inversí, přiřazují všechny transformace grupy* (31) *dalších pět bodů* (*různých navzájem i od bodu $M$*). *Volba dvojnásobných bodů invariantní sextiky v této šestibodové skupině je ekvivalentní třem lineárním homog. podmínkám pro určení křivky.*

**Věta 25.** *Leží-li bod $M$ na jediné základní kuželosečce, pak všechny transformace grupy* (31) *mu přiřazují jako body odpovídající další dva body* (*různé navzájem i od bodu $M$*). *Volba dvojnásobných bodů sextiky v této trojici bodů je ekvivalentní dvěma lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

Důkazy těchto dvou vět jsou naprosto stejné jako důkaz věty 14 a 15.

**Věta 26.** *Leží-li bod $M$ v průsečíku dvou základních kuželoseček, je také samodružným bodem v třetí inversi. Volba dvojnásobného, resp. trojnásobného, resp. čtyřnásobného bodu v tomto průsečíku všech tří zákl. kuželoseček je ekvivalentní jedné, resp. dvěma, resp. čtyřem lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

Důkaz. Základní kuželosečky mají rovnice:

$$x_3^2 - x_1x_2 = 0 ; \quad x_1^2 - x_2x_3 = 0 ; \quad x_2^2 - x_1x_3 = 0 ;$$

prvé dvě kuželosečky se protínají v bodech:

$$(0, 1, 0) ; \quad (1, 1, 1) ; \quad (\varepsilon^2, \varepsilon, 1) ; \quad (\varepsilon, \varepsilon^2, 1) ,$$

z nichž první je bod hlavní a zbývající tři leží také na zákl. kuželosečce třetí inverse. Vyjádření počtu podmínek, které potřebuje volba singulárního bodu křivky v průsečíku zákl. kuželoseček, provedeme opět tak, že dosadíme souřadnice tohoto průsečíku do rovnice křivky (25) a do jejích prvých, resp. prvých a druhých, resp. prvých, druhých a třetích parc. derivací této rovnice a určíme hodnost soustavy lin. rovnic, které takto obdržíme.

Na základě pomocných vět 24—26 můžeme říci, že grupou (31) se reprodukují i sextiky s vyššími singularitami. Tak se může reprodukovat sextika s jedním bodem čtyřnásobným (v průsečíku všech tří zákl. kuželoseček) a s třemi body dvojnásobnými (v bodech hlavních), sextika s dvěma body trojnásobnými (v průsečících zákl. kuželoseček) a s třemi body dvojnásobnými (v hlavních bodech), atd.

Nebudeme se zabývat všemi těmito případy a obrátíme se k otázce, nadhozené v závěru odstavce 3, totiž k možnosti reprodukce sextiky grupou (31) a dalšími třemi inversemi z vět 9, 9a a 9b.

**7. Věta 27.** *Sextika reprodukovaná grupou* (31) *je současně invariantní vůči grupě* (27) *tehdy a jen tehdy, když:*

$$\left.\begin{aligned} a_{00} &= a_{10} = a_{11} = a_{21} = a_{30} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{41} = a_{43} = a_{50} = a_{51} = \\ &= a_{52} = a_{53} = a_{54} = a_{55} = a_{60} = a_{61} = a_{63} = a_{65} = a_{66} = 0\,, \\ & a_{40} = a_{22}\,, \quad a_{44} = a_{20}\,, \quad a_{62} = a_{20}\,; \quad a_{64} = a_{22}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

*Jsou-li tyto podmínky splněny, je sextika také invariantní vůči inversím* (18) *a* (20).

Důkaz. Nutné a postačující podmínky pro reprodukci sextiky grupou (27) jsou podmínky (10) a (17) z věty 9 a pro reprodukci sextiky grupou (31) podmínky (10) a (24). Spojíme-li oboje tyto podmínky, dostaneme podmínky naší věty. Druhá část věty plyne z toho, že splněním podmínek (32) jsou také splněny nutné a postačující podmínky vět 9a a 9b.

Sextika, reprodukovaná těmito šesti inversemi má rovnici:

$$\left.\begin{aligned} x_3^4(a_{20}x_1^2 + a_{22}x_2^2) + x_3^2(a_{22}x_1^4 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{20}x_2^4) + \\ + x_1^2x_2^2(a_{20}x_1^2 + a_{22}x_2^2) = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

**Věta 28.** *Sextiky sítě* (32) *mají v bodech hlavních obyčejné uzly až na dva svazky sextik, které tam mají dvojnásobné body s jedinou tečnou s dotykem čtyřbodovým.*

Důkaz. Dvojice tečen ve všech hlavních bodech jsou vyjádřeny ryze kvadratickou rovnicí, na př. dvojice tečen v bodě $O_3$ má tvar: $a_{20}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0$. Splynout tyto dvě přímky mohou jedině tehdy, je-li jeden z koeficientů $a_{20}, a_{22}$ roven nule (kdyby byly oba současně rovny nule pak se křivka rozpadne na dvojnásob počítané hlavní přímky). Pak touto jedinou tečnou je jedna z hlavních přímek, mající v bodě dotyku styk čtyřbodový (druhé dva průsečíky s křivkou jsou v druhém bodě hlavním). Vzhledem k tomu, že tyto dvojice tečen mají ve všech hlavních bodech stejný diskriminant, nastane tento zjev současně ve všech třech hlavních bodech.

**Věta 29.** *Tři svazky sextik sítě* (32) *s obyčejnými body dvojnásobnými v hlavních bodech mají tu vlastnost, že dvojice tečen v těchto dvojnásobných bodech se dotýkají jediné kuželosečky.*

Důkaz. Determinant, vyjadřující podmínku, aby šest přímek

$$x_1\sqrt{a_{00}} + ix_2\sqrt{a_{22}} = 0\,, \quad x_2\sqrt{a_{00}} + ix_3\sqrt{a_{20}} = 0\,, \quad x_1\sqrt{a_{22}} + ix_3\sqrt{a_{00}} = 0\,,$$
$$a_1\sqrt{a_{00}} - ix_2\sqrt{a_{22}} = 0\,, \quad x_2\sqrt{a_{00}} - ix_3\sqrt{a_{20}} = 0\,, \quad x_1\sqrt{a_{22}} - ix_3\sqrt{a_{00}} = 0$$

se dotýkalo kuželosečky, má hodnotu $8i(a_{00}^3 - a_{22}^3)\,.\,\sqrt{a_{00}^3a_{22}^3}$. Je tedy roven nule tehdy a jen tehdy, je-li $a_{00}^3 = a_{22}^3$.