ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

3

80

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 80 • Č. 3 • STR. 261—386 • PRAHA 31. VIII. 1955

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky“*)

SVAZEK 80 (1955)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Obsah:

Články:

Referáty

Recense:

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV
SVAZEK 80 * PRAHA, 31. VIII. 1955 * ČÍSLO 3

ČLÁNKY

DESET LET MATEMATIKY V OSVOBOZENÉM ČESKOSLOVENSKU

VOJTĚCH JARNÍK, Praha

(Došlo dne 30. dubna 1955.)

DT:51

Desáté výročí osvobození Československa slavnou sovětskou armádou je vhodnou příležitostí, aby se každý z nás zamyslil nad vývojem věcí v uplynulém desítiletí, nad širokými a jasnými perspektivami, které před naším lidem otevřel nástup k socialismu, a aby zpytoval svědomí, do jaké míry sám dovedl přispět k tomuto vývoji a přizpůsobit svou práci potřebám společnosti, směřující cestou lidové demokracie k socialismu a komunismu.

Chceme-li s tohoto hlediska přehlédnout aspoň zběžně charakter vývoje a perspektivy matematiky v osvobozeném Československu, musíme se zastavit u jiného — tentokráte smutného — jubilea: na podzim minulého roku uplynulo patnáct let od onoho tragického dne 17. listopadu 1939, kdy fašističtí okupanti vyhnali učitele i studenty z českých vysokých škol, uvrhli tisíce studentů do koncentračních táborů a zavřeli všechny české vysoké školy. Budovy českých vysokých škol byly obsazeny německými vysokými školami, některé se dokonce staly kasárnami nejhorších nacistických hrdlořezů.

Tuto smutnou událost si musíme připomenout, chceme-li si uvědomit, v jakém stavu zastihlo naši vědu osvobození. Mluvíme-li zde speciálně o matematice, je nutno zdůraznit, že v předmnichovské republice nebylo téměř vědeckých matematických středisek mimo vysoké školy; výjimku činilo pouze nevelké matematické oddělení Škodových závodů a snad ještě několik pracovníků v matematické statistice, umístěných v různých institucích.

Byla tedy matematika postižena zavřením vysokých škol velmi těžce. Profesoři byli dáni na „dovolenou s čekatelným" a byli tedy ihned po osvobození k disposici, ale mladší matematikové — asistenti (i soukromí docenti), absolventi a studující matematiky — si musili za okupace hledat jiné uplatnění, ať na školách nižších stupňů, či ve výrobě nebo jinde (pokud ovšem o ně nebylo „postaráno" v koncentračních táborech nebo na nucených pracích). Také studenti, kteří maturovali za okupace, si musili nalézti jiné zaměstnání a jistě mnozí z nich byli pro vysokou školu definitivně ztraceni. Přes to však velký počet mládeže z postižených ročníků nastoupil po osvobození na vysoké školy, aby buď dokončil nebo započal vysokoškolské studium.

Prvním úkolem vysokých škol bylo proto co nejrychleji obnovit především činnost pedagogickou — a potom ovšem i činnost vědeckou, bez které není na delší dobu myslitelná zdárná pedagogická činnost vysoké školy. Již v červnu 1945 započaly přednášky mimořádného letního běhu, do kterého se dal zapsat ohromný počet studentů, postižených šestiletým zavřením vysokých škol. Zde musíme vděčně vzpomenout mladých matematiků, kteří opustili svá místa, přihlásili se ku práci na vysokých školách jako asistenti a umožnili vysokým školám svou obětavou prací zvládnout jejich mimořádně vypjaté pedagogické úkoly. Nemyslím při tom jen na universitu, ale také na matematické ústavy a stolice na vysokých školách technických, zaplavených spoustou posluchačů. Na universitě, při menším poměrně počtu studentů matematiky, nebyla situace přece jen tak kritická.

Nebylo ovšem možno zastavit se pouze při obnově předválečného stavu. Směr vývoje naší společnosti, vytýčený Košickým programem, jasně ukazoval, že bude nutno přikročit k hluboké reformě vysokoškolského studia, která by skoncovala se starým liberalistickým pojetím a která by zaměřila výchovnou a výukovou činnost vysokých škol na produkci pracovníků, uvědoměle oddaných myšlence socialismu a odborně co nejlépe připravených pro jeho budování. Přitom ovšem každý vědní obor měl v tomto obecném rámci své speciální problémy. Pokud se matematiky týče, je nutno připomenout, že předválečné přírodovědecké fakulty vychovávaly v matematice především učitele středních škol; pouze malé procento se po dokončení studií mohlo věnovat vědecké práci na vysokých školách a ještě méně se jich dostalo do výzkumu. Výjimku tvořili nečetní posluchači kursu pojistné matematiky a matematické statistiky. Bylo jasno, že budování socialismu si vyžádá daleko četnější, vydatnější a hlubší pomoci matematiky ve vědeckém výzkumu všeho druhu, než tomu bylo v minulosti. Proto bylo nutno při reformě studia matematiky na universitách dbát toho, aby vedle učitelů středních škol byli vychováváni také specialisté, mající důkladné vzdělání zvláště v těch základních oborech matematiky, na kterých spočívá možnost jejich aplikací. Úsilí o provedení reformy vysokoškolského studia naráželo ovšem na nejrůznější překážky a teprve vítězný únor 1948 umožnil, aby se reforma stala skutkem. Vedle učitelského studia (které se podstatně více než dříve zaměřilo na potřeby budoucích učitelů) bylo již v r. 1948 zřízeno speciální studium, zaměřené především na analysu, a dřívější kurs pojistné matematiky byl přebudován na studium matematické statistiky. Počítalo se a počítá se dosud s tím, že absolventi studia matematické analysy se uplatní jednak ve vědeckých a výzkumných ústavech, jednak na vysokých školách; přitom je třeba poznamenat, že ještě řadu let bude zapotřebí značného počtu nových učitelů matematiky na vysokých školách technického směru.

Neučitelské směry studia byly zavedeny ovšem současně i na ostatních vědních oborech filosofických a přírodovědeckých fakult a vzbudily velký zájem studentů; nastal místy až přílišný odliv studentů z větví učitelských. Později, r. 1953, byly pak pro výchovu učitelů na nejvyšším stupni jedenáctiletky zřízeny zvláštní Vysoké školy pedagogické. Tento vývoj organisace studia matematiky na vysokých školách je však sotva možno považovat za ukončený.

Zvláštní postavení matematiky mezi ostatními vědami je dáno tím, že matematika je základní pomocnou vědou pro téměř všechny vědy přírodní a technické a že s rostoucími potřebami těchto věd při socialistickém budování budou tyto vědy klásti na matematiku stále četnější a rozmanitější, ale také stále do větší hloubky jdoucí požadavky. Jevilo se proto hned od osvobození žádoucím, aby byla zřízena instituce, která by se zabývala vědeckým bádáním v matematice, nejsouc při tom rušena ani běžnými povinnostmi vyučovacími ani každodenními požadavky úzce resortního výzkumu. Matematikové počítali ovšem s tím, že takový matematický ústav bude zřízen v budoucí Československé akademii věd; aby však byla připravena půda a aby nebyl ztrácen čas, byl na podzim r. 1947 zřízen z iniciatity prof. Ed. Čecha při tehdejší České akademii věd a umění Matematický ústav. Tento ústav rozvinul pod vedením prof. Čecha bohatou činnost v Praze a v Brně. Jeho pracovním stylem byly vedle cyklů přednášek hlavně vědecké semináře, typická to forma kolektivní vědecké práce v matematice. Ježto ústav neměl (kromě jedné administrativní síly) interních zaměstnanců, musil se přizpůsobovat vědeckému zaměření svých externích pracovníků a nemohl se také věnovat takovým problémům, jejichž úplné řešení je časově příliš náročné a které vyžadují pomocného personálu — a právě takové nároky klade většina problémů, jejichž řešení vyžaduje praxe.

Situace se radikálně změnila, když r. 1950 byl současně s dalšími šesti přírodovědeckými ústředními ústavy zřízen při Ústředí výzkumu a technického rozvoje *Ústřední ústav matematický*, jehož ředitelem se stal opět Ed. Čech. Ústav České akademie věd a umění byl pak likvidován, jakmile Ústřední ústav převzal veškeré jeho úkoly. Tím byl konečně zřízen vědecký matematický ústav ústředního charakteru, který zaměstnával řadu vědeckých i pomocných pracovníků a který našel také umístění, byť skrovné a postačující jen jako provisorium. Při založení Československé akademie věd v listopadu 1952 přešel tento ústav do matematicko-fysikální sekce nové akademie pod názvem *Matematický ústav ČSAV*.

Zřízení ústavu s vlastními zaměstnanci a vlastními místnostmi umožnilo, aby ústav sestavil svůj pracovní plán a perspektivu svého rozvoje jednak podle očekávaných požadavků našeho přírodovědeckého, technického i jiného výzkumu, jednak v souladu s žádoucím rozvojem matematické vědy u nás. Přitom bylo ovšem nutno uvážit, že velká většina vědeckých pracovníků v matematice zůstává na vysokých školách a že proto otázka přebudování a dalšího rozvoje naší matematiky není jen věcí matematického ústavu, nýbrž musí být řešena celostátně. Přitom mnohé katedry matematiky na nově zřízených školách, zvláště technického směru, jsou obsazeny jen velmi malým počtem pracovníků, kteří by se ocitli v nebezpečné isolaci, kdyby vědecký život v matematice nebyl koordinován v celostátním měřítku. Proto se Ústřední ústav matematický vedle své interní práce ujal také tohoto úkolu. Když však ustavením Československé akademie věd byla zřízena vrcholná vědecká instituce a zároveň prudce vzrůstaly nároky, kladené na interní práci jejího matematického ústavu, byla v r. 1953 zřízena při matematicko-fysikální sekci akademie „matematická komise", která převzala péči právě o ty úkoly, které svým charakterem přesahují rámec jediného pracoviště. Komise pečuje o pořádání jednotlivých přednášek, cyklů přednášek i vědeckých seminářů a stará se také o to, aby se výsledky těchto přednášek a seminářů, jakož i jiné výsledky matematické práce — pokud nejsou in extenso publikovány — staly přístupnými všem matematickým pracovištím v republice. Velmi živě se rozvíjí činnost v rámci komise v Brně. V Praze pořádá m. j. pravidelné pondělní přednášky (více než 30 ročně) z matematiky, celkem však její činnost v Praze není úměrná počtu matematických pracovišť a pracovníků v hlavním městě republiky. Tím nechci říci, že by činnost matematiků v Praze byla malá; je velmi rozsáhlá, ale není dosud dostatečně soustředěna a koordinována.

Přednášková činnost byla po dlouhá desetiletí až do druhé světové války jednou z forem činnosti *Jednoty československých matematiků a fysiků*, která nedávno oslavila 90 let své existence. Jednota byla tehdy závažným střediskem vědecké, methodicko-didaktické, popularisační i publikační činnosti v oboru matematiky a fysiky a soustředila vědecké pracovníky, středoškolské profesory, studenty vysokých škol z těchto oborů i pracovníky jiných oborů (na př. inženýry), interesované v matematice a fysice. Při reorganisaci našeho vědeckého života byla přičleněna k Československé akademii věd (a její bratislavská pobočka též k Slovenské akademii věd). Změna základny, na které spočívala Jednota — na př. převedení publikační činnosti Jednoty do Československé akademie věd a pod. — způsobila dočasné ochabnutí její činnosti. V poslední době se však činnost brněnské a bratislavské pobočky Jednoty opět slibně rozvíjí a je nejvyšší čas, aby také pražské ústředí obnovilo činnost, hodnou tradic této staré a vysoce zasloužilé společnosti.

Vývoj matematiky na osvobozeném Slovensku má některé osobité rysy. Politika vládnoucí třídy v předmnichovské republice, která nepřála industrialisaci Slovenska a snažila se z něho vytvořit jakýsi agrární přívěsek k průmyslovým českým zemím, měla ovšem také neblahý vliv na rozvoj vědy na Slovensku. A tak r. 1945 bylo na vysokých školách na Slovensku pouze osm učitelských sil matematiky. Bouřlivý rozvoj Slovenska v lidově demokratickém Československu se ovšem projevil i ve vědě, na př. hojným zakládáním nových vysokých škol i vzrůstem počtu vědeckých a pedagogických pracovníků, takže dnes působí na slovenských vysokých školách okolo sedmdesáti učitelů matematiky. Tento rychlý kvantitativní růst je doprovázen i podstatným růstem vědecké činnosti, takže v prvních čtyřech ročnících Matematicko-fysikálneho časopisu Slovenské akademie věd napočteme již dvanáct slovenských autorů původních matematických vědeckých prací; většina z nich jsou pracovníci nejmladší generace. Organisaci vědy na Slovensku byla dána pevná základna ustavením Slovenské akademie věd r. 1953. Tato akademie nemá dosud matematického pracoviště, byla však při ní zřízena komise pro matematiku a fysiku, která vyvíjí pozoruhodnou činnost především v Bratislavě, ale na př. též v Košicích. Charakter činnosti je podobný jako u matematické komise Československé akademie věd (vědecké semináře, přednášky a pod.).

To, co bylo dosud řečeno, ukazuje jasně dvě věci. Především, že nároky, kladené na matematiku ve státě, budujícím socialismus, jsou kvantitativně daleko větší, ale také kvalitativně jiné, než nároky ve státě kapitalistickém. A za druhé, že k splnění těchto nároků dává naše lidově-demokratická republika matematikům prostředky, o kterých se jim v buržoasní republice nesnilo.

Ohlédneme-li se zpět do doby předmnichovské republiky, vidíme, že vědecká práce v matematice byla v podstatě věcí osobní iniciativy jednotlivých pracovníků. Její množství a úroveň bývala závažnou při habilitaci a při jmenování profesorem vysoké školy, ale její zaměření přitom zůstávalo věcí osobní záliby pracovníkovy. Tak se stalo, že vedle oborů, kde jsme dosáhli vskutku vysoké světové úrovně, zůstaly u nás jiné obory zanedbány, a to často takové obory, jejichž zanedbání dnes bolestně pociťujeme. Proto při určování vývojové linie matematiky u nás do budoucnosti je nutno dbát dvojího: Jednak toho, aby byly dále rozvíjeny ony obory, ve kterých jsme na základě vývoje v minulosti dosáhli pozoruhodné úrovně, jednak toho, aby byl podporován intensivní rozvoj těch oborů, které jsou nezbytné pro splnění úkolů, jež má matematika v socialistické společnosti, a které přitom u nás nejsou dostatečně rozvinuty.

Jak byla tato hlediska našimi matematiky pojata, o tom nás jako příklad může poučit práce Matematického ústavu, jeho organisace a jeho perspektivní plán práce i plán rozvoje, o kterých řeknu nyní několik slov.

Podle intencí prvního ředitele Ústředního ústavu matematického E. Čecha byl ústav od počátku zaměřen jednak na theoretické bádání, jednak na aplikace matematiky. O tom, že na potřeby aplikací byl brán náležitý zřetel, svědčí také ta okolnost, že bylo při něm zřízeno oddělení strojů na zpracování informací, ve kterém byla dána významnému odborníku A. Svobodovi možnost, aby uplatnil své bohaté vědomosti a zkušenosti v tomto oboru. Oddělení, které procházelo prudkým růstem, bylo potom (již v Československé akademii věd) osamostatněno a tvoří nyní pod vedením Doc. Svobody *Ústav matematických strojů* při matematicko-fysikální sekci akademie. Hlavním úkolem, který je již dalekosáhle rozpracován, je samočinný počitač, který bude mít řadu netradičních prvků. Mezitím byly vyřešeny s velkým úspěchem některé úkoly, týkající se strojů na děrné štítky. Ústav pořádal v posledních letech každoroční konference, těšící se pozornosti domácích zájemců i zahraničních odborníků. Práce Doc. Svobody a jeho spolupracovníků jsou publikovány z velké části ve Sbornících těchto konferencí.

Při převzetí Ústředního ústavu matematického akademií (koncem r. 1952) měl ústav oddělení pro tyto obory: theoretická matematika, pravděpodobnost a statistika, technická matematika, elementární matematika, stroje na zpracování informací. Důsledné respektování potřeb aplikací bylo v ústavě dodržováno za vedení ak. Čecha i — po odchodu Čechově na universitu — jeho nástupcem prof. Vl. Knichalem. Ústav poskytl výsledky své práce cennou podporu naší výstavbě i výrobě. Tak byly vyřešeny některé závažné theoretické problémy, týkající se velkých vodních staveb, dále velká řada dílčích problémů pro potřeby elektrotechnické fysiky; horlivě a s úspěchem se pracuje na zásadních otázkách numerických method. Oddělení elementární matematiky poskytuje pomoc škole. Statistické oddělení účinně spolupracuje na výzkumných problémech zemědělských i lékařských.

Perspektivní plán rozvoje ústavu zachovává dosavadní linii. Počítá se v něm jednak s řadou oddělení, majících bezprostřední styk s praxí, jednak s řadou oddělení theoretických, jejichž thematika je zvolena tak, že se týká základních oborů matematiky a současně tvoří předpoklady pro úspěšnou práci oddělení prakticky zaměřených.

Vedle matematického ústavu akademie je ještě nutno se zmínit o matematických odděleních *Výzkumného ústavu tepelné techniky* při ministerstvu strojírenství. Tato oddělení, vzniklá z dřívějšího matematického oddělení Škodových závodů a úspěšně vedená Doc. M. Hamplem a dr L. Špačkem, pracují ovšem pro potřeby svého resortu, avšak jejich pracovníci řeší zároveň závažné úkoly theoretické.

Přehlédněme nyní letmo *výsledky matematické vědecké tvorby* v osvobozeném Československu. V jejich rozvržení se značí přechodný charakter dnešní etapy vývoje u nás. V oborech, které byly u nás s úspěchem pěstovány již před válkou, uplatňují se nadále starší badatelé; většinou se okolo nich soustředí skupiny mladších pracovníků, často velmi úspěšných. V oborech, které byly u nás dříve zanedbávány a jejichž rozvoj se pro jejich naléhavost intensivně podporuje, se uplatňují s velkým zdarem naši mladí a nejmladší pracovníci, z velké části pracovníci Matematického ústavu akademie nebo jeho odchovanci, na př. absolventi aspirantury. Na tomto místě je třeba zdůraznit velký význam, který zavedení aspirantury mělo pro zlepšení kádrové situace v matematice.

V *algebře* nás krátce po osvobození překvapil dlouhou serií prací vysoce zasloužilý nestor našich matematiků K. PETR (1868—1950); většina těchto prací jedná o vytvořujících funkcích pro počet invariantů kvadratických forem. Z našich vedoucích pracovníků v moderní algebře věnuje se VL. KOŘÍNEK v poslední době theorii svazů, ŠT. SCHWARZ theorii pologrup, o níž uveřejnil v poslední době dlouhou řadu prací; O. BORŮVKA vydal r. 1952 rozšířené vydání monografie o theorii grup, založené na jeho vlastní theorii grupoidů a rozkladů množin. Okolo těchto tří pracovníků se soustřeďují úspěšní mladí pracovníci z těchto oborů, na př. J. IVAN, J. JAKUBÍK, L. JÁNOŠ, M. KOLIBIAR, F. ŠIK, V. VILHELM, Č. VITNER a jiní. Z algebry vyšli též J. MAŘÍK, V. PTAK a L. RIEGER.

Št. Schwarz pracuje též úspěšně v *theorii čísel*. Spolu s V. JARNÍKEM pracovala řada pracovníků (A. APFELBECK, K. ČERNÝ, V. Knichal, J. KURZWEIL) v theorii diofantických aproximací, v geometrii čísel a v aplikacích theorie míry na arithmetické problémy.

Některými problémy rázu kombinatorického se zabývá A. KOTZIG. *Matematickou logikou* se s úspěchem zabývá L. Rieger.

V *matematické analyse*, oboru nepochybně nejdůležitějším pro aplikace matematiky, jsme neměli před válkou mnoho pracovníků. Ze starších pracovníků pracuje s úspěchem M. KÖSSLER v theorii analytických funkcí (mocninné řady a analytické vlastnosti polynomů). V theorii nekonečných řad publikoval J. RŮŽIČKA, v theorii reálných funkcí V. ALDA, V. Jarník a J. Mařík — poslední z nich v theorii integrálu. V theorii orthogonálních rozvojů dosáhl pozoruhodných výsledků již před válkou J. KOROUS, který pracuje i po válce v příbuzných otázkách.

Studium obyčejných diferenciálních rovnic se podstatně rozšířilo proti době předválečné, kdy téměř jediným představitelem tohoto širokého a důležitého oboru byl ak. J. HRONEC. Jde zde jednak o theorii dispersí, týkající se lineárních rovnic 2. řádu, vytvořenou O. Borůvkou a dále pěstovanou jím i jeho žáky (M. LAITOCH, M. ŠVEC, M. ZLÁMAL a j.). Za druhé jde o důležité otázky theorie stability a nelineárních oscilací, pěstované hlavně v Matematickém ústavě (J. Kurzweil, I. VRKOČ, M. Zlámal).

Studium parciálních rovnic bylo u nás rovněž před zřízením Matematického ústavu zanedbáváno; nyní se studují hlavně některé okrajové problémy pro rovnice druhého a čtvrtého řádu, zejména v souvislosti s matematickou theorií pružnosti a s vedením tepla (I. BABUŠKA, M. Hampl, K. REKTORYS); byla sepsána monografie o matematické theorii pružnosti (I. Babuška, K. Rektorys, F. VYČICHLO).

Velmi slibně se u nás rozvíjí *funkcionální analysa* pozoruhodnými pracemi M. KATĚTOVA (dualita v topologických lineárních prostorech) a jeho mladých následovníků J. Kurzweila (analytické operace v Banachových prostorech),

J. Maříka (theorie integrálu s hlediska funkcionální analysy) a V. Ptáka (topologické lineární prostory).

Zásadními otázkami *numerických method* početních se zabývá skupina mladších matematiků Matematického ústavu, vedená V. Knichalem.

Grafický počet se pěstuje na vysokém učení technickém (V. PLESKOT); zesnulý prof. V. HRUŠKA (1888—1954) se intensivně zabýval numerickými a grafickými methodami a vydal 1952 obšírnou monografii o počtu grafickém a grafickomechanickém.

Vážnost, které se již před válkou těšila po celém světě naše *topologie*, vděčíme jednak osobnímu dílu E. Čecha, jednak velké práci, vykonané v brněnském topologickém semináři, založeném Čechem v r. 1936. Je nesmírnou škodou pro naši topologii, že ztratila geniálního odchovance tohoto semináře B. POSPÍŠILA, který zemřel za okupace ve věku 32 let v důsledku útrap v nacistickém žaláři. Čech sám má po osvobození jen jednu topologickou práci (spolu s J. NOVÁKEM), ale jeho obecnou theorii homologie a theorii bikompaktního obalu budovali dále v četných pracích čelní zahraniční topologové.

V *abstraktní topologii* docílil vynikajícíh úspěchů především M. Katětov, který jednak vybudoval soustavnou theorii H - uzavřených prostorů, jednak podstatně rozšířil theorii dimense na obecné metrické prostory bez předpokladu separability. Vedle toho M. Katětov a J. Novák, který rovněž vyšel z brněnského semináře, obohatili abstraktní topologii o řadu velmi důmyslných a instruktivních příkladů prostorů s paradoxálními vlastnostmi. Dále byly J. Novákem a jeho spolupracovníky (L. MIŠÍK, M. NOVOTNÝ) studovány uspořádané prostory a popsány nové typy uspořádaných kontinuí. Obšírnou práci o topologických svazech uveřejnil K. KOUTSKÝ.

V *diferenciální geometrii* vybudoval E. Čech v řadě rozsáhlých prací obsáhlou theorii korespondencí, založenou na zcela novém plodném pojmu linearisující transformace. Cenné příspěvky k theorii korespondencí podali také V. Alda, Z. NÁDENÍK a A. ŠVEC; italští matematikové M. VILLA, G. VAONA a L. MURACCHINI navázali na Čechovu theorii a dospěli v ní k dalším krásným výsledkům. Na předchozí práce Čechovy navazuje J. KLAPKA a jeho žáci.

Řada prací z diferenciální geometrie je založena na methodách tensorového počtu. V metrické geometrii jde o studium přímkových a kanálových ploch (K. HAVLÍČEK), totálně geodetických variet (F. NOŽIČKA, AL. URBAN), o geometrický význam některých invariantů ploch a nadploch (F. Nožička, Al. Urban, F. Vyčichlo). V afinní a projektivní geometrii bylo studováno vnoření variet do prostorů vyšší dimense (F. Nožička, Al. Urban). Kongruence L - koulí a jejich oskulační K - prostory studoval Z. VANČURA. Methody tensorového počtu byly též aplikovány v mechanice, v theorii pružnosti, v theorii tenkostěnných konstrukcí a pod. (Nožička, Rektorys, Vyčichlo). Klasickou diferenciální geometrii pěstuje M. SYPTÁK a j. Kinematickými methodami se zabýval Z. PÍRKO.

Tradici *algebraické geometrie* zastupuje akad. B. Bydžovský, který také vydal z tohoto oboru obšírnou monografii (1948). Vedle něho pracují v tomto oboru J. Bílek, M. Fiedler, J. Metelka, R. Piska, L. Seifert, J. Srb a jiní.

Činnost v oboru *elementární geometrie* se rozvíjí ve všech větších střediscích. Z výsledků již publikovaných zasluhuje zvláštní zmínky vysoce hodnotná práce M. Fiedlera o různých typech simplexů se speciálními metrickými vlastnostmi.

V *deskriptivní geometrii* — ve které máme starou tradici — byly studovány některé plochy technické praxe (V. Havel, F. Kadeřávek). Četné články pojednávají o projektivní geometrii, o zobrazení útvarů do prostoru o větším počtu dimensí, o fotogrametrii (K. Havlíček, F. Kadeřávek, V. Medek, Al. Urban a jiní).

Theorie pravděpodobnosti a *matematická statistika* se nyní pěstují v širším rozsahu a s větší rozmanitostí než dříve. Publikace se týkají vztahu topologie a pravděpodobnosti (J. Novák), theorie rozhodovacích funkcí a stochastických procesů (V. Alda, A. Špaček, J. Truksa, K. Winkelbauer), spojitých transformací náhodných veličin (J. Seitz), podmíněných pravděpodobností (V. Fabián, M. Jiřina), theorie výběru a některých binomiálních rozložení a příslušných testů (J. Hájek).

V oboru *matematických strojů* číslicových byla publikována řada výsledků o výzkumu československého samočinného počítače SAPO (V. Černý, J. Marek, J. Oblonský, A. Svoboda). Úspěšnou prací je také stroj na výpočet krystalových struktur a stroj na Fourierovy synthesy (V. Černý, J. Oblonský). V oboru analogických matematických strojů je nejvýznamnější prací monografie A. Svobody z r. 1948. Na ni navazuje práce M. Valacha o kloubových mechanismech se třemi stupni volnosti. V. Vurcfeld vypracoval projekt stroje na řešení algebraických rovnic. Další rychlý vývoj průmyslu elektromechanických počítacích strojů, započatý již v letech 1949—52 návrhem a výrobou kalkulačního děrovače, bude umožněn pracemi A. Svobody o synthese reléových obvodů. Práce o theorii logických obvodů publikovali A. Svoboda, F. Svoboda, M. Valach, V. Vyšín. Řada prací je věnována methodice řešení úloh matematickými stroji (K. Korvasová. J. Marek, J. Oblonský, O. Pokorná, Z. Pokorný, J. Raichl, A. Svoboda).

V otázkách *historie matematiky* nám především chybí hodnocení význačných postav naší matematiky, na jejichž díle spočívá dnešní naše práce. Jde především o matematiky XIX. století a prvních desítiletí XX. století. V Brně však již dost daleko postoupily práce, týkající se díla M. Lercha (vede O. Borůvka) a K. Pelze (vede L. Seifert), v Praze pak práce o díle J. Sobotky (matematické katedry Českého vysokého učení technického a Karlovy university). Historií matematiky v širším smyslu se zabývají F. Balada, K. Čupr, K. Koutský, Q. Vetter. Vztahy geometrie k umění studuje F. Kadeřávek.

V době přestavby naší společnosti stává se jednou ze základních otázek ideologických problém zaměření matematiky. Této otázce bylo u nás věnováno několik článků (Borůvka, Čech, Jarník, Knichal, Schwarz, Vyčichlo a j.) na př. při založení československé i slovenské akademie, při vydání školského zákona a pod. Otázkami poměru dialektického materialismu a matematiky se zabývali K. Koutský (který vedle řady článků vydal o tomto thematu knihu) a L. Rieger. Ideologickými otázkami matematické statistiky — které jsou zvláště aktuální — se zabývali F. Fabian a J. Hájek.

Pro rozvoj matematiky je důležitá otázka vyhledávání nadaných matematiků mezi žáky jedenáctiletek a podchycení jejich zájmu. K řešení tohoto problému vedle různých matematicko-methodických seminářů, na jejichž vylíčení není zde místa, přispívají „matematické olympiady", založené u nás po vzoru sovětském a polském r. 1951-52; jejich organisace se intensivně účastní Matematický ústav akademie svým oddělením pro elementární matematiku i matematicko-fysikální komise Slovenské akademie věd, jakož i katedry vysokých škol pedagogických.

Obraz naší matematiky by nebyl úplný, kdybych se nezmínil o publikačních možnostech v našem státě.

Pokud se týče *periodických publikací* a publikací podobného rázu (i když formálně nespadají pod pojem periodické publikace), jest na prvním místě uvést *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, vydávaný od r. 1872 Jednotou československých matematiků a fysiků. V posledních letech před válkou se skládal tento časopis vlastně ze tří částí (formálně ze dvou). První část byla mezinárodní a obsahovala původní práce z matematiky a fysiky, které bylo zde možno publikovat též ve světových jazycích. Druhá část měla hlavně ráz vědeckých informací: obsahovala přehledné referáty o pokrocích vědy, recense knih, zprávy o vědeckém životě u nás i v cizině, ale také drobnější původní práce. Třetí část obsahovala články didaktické. Občas byl připojován spolkový Věstník, informující o událostech v Jednotě. Mezinárodní část Časopisu byla velmi dobře známa po celém světě.

Po osvobození vycházel časopis nějakou dobu ještě v této formě, ale reorganisace a rozmach našeho vědeckého života si postupně vynutily řadu změn. Především byl matematický časopis oddělen od fysikálního. Za druhé se jeho tři části rozvinuly ve tři samostatné časopisy: z mezinárodní části se vyvinul *Čechoslovackij matematičeskij žurnal — Czechoslovac Mathematical Journal*, druhá část se rozvinula a osamostatnila pod názvem *Časopis pro pěstování matematiky*. Oba tyto časopisy vydává nyní Matematický ústav akademie. Z třetí části se vyvinul časopis *Matematika ve škole*, vydávaný Státním pedagogickým nakladatelstvím z pověření ministerstva školství. Na Slovensku vychází od r. 1951 *Matematicko-fyzikálny časopis* Slovenské akademie věd (původně měl trochu jiný titul), publikující původní vědecké práce z matematiky a fysiky.

V předmnichovské republice byla založena řada „Spisů" a „Sborníků", vydávaných jednotlivými vysokými školami a jejich fakultami. Z nich, zdá se, jsou pro matematiku nejvýznamnější „Práce přírodovědecké fakulty Masarykovy university" v Brně, založené r. 1921 B. Hostinským, které obsahují hojnost matematických prací a jsou velmi dobře známy v cizině. Další publikační možnosti poskytují ovšem *Rozpravy ČSAV* a *Práce Brněnské základny ČSAV*.

Druhou závažnou složkou ediční činnosti jsou *knižní publikace*. V předmnichovské republice vydávala matematické knihy především Jednota (částečně též Česká matice technická a j.). Jednota si zařídila nakladatelství a nakonec získala i tiskárnu Prometheus, která se vyvinula ve výbornou specialisovanou tiskárnu a je dodnes nejoblíbenější tiskárnou matematických autorů. Po osvobození při reorganisaci nakladatelství změnilo se nakladatelství Jednoty v Přírodovědecké vydavatelství, které se stalo jednou ze složek, z nichž se potom vytvořilo Nakladatelství Československé akademie věd. Dnes vycházejí matematické knihy především v Nakladatelství Československé akademie věd a ve Státním nakladatelství technické literatury. Počet vydávaných knih je podstatně větší než byl před válkou a jejich konsum vzrostl několikanásobně. Ale přes to nemůžeme být s naší knižní produkcí spokojeni. Vyšla sice již řada vědeckých učebnic základních oborů, ale máme i zde podstatné mezery. Za druhé vyšlo po osvobození velmi málo původních matematických monografií. A za třetí trpí naše knižní ediční činnost nedostatkem cílevědomého plánu a koordinace. Dosáhnout žádoucí proporcionality v publikacích domácích autorů není při jejich nedostatku snadná věc, ale i zde by se jistě dalo plánovitou akcí dosáhnout aspoň částečně toho, aby se naši autoři věnovali práci na knihách nejnaléhavějších. Ale v překladech ze zahraniční (především sovětské) literatury by se dalo plánovat zcela spolehlivě. Místo toho vidíme, že často vycházejí překlady několika knih příbuzných, zatím co jiné obory zůstávají bez základních učebnic.

Před válkou jsme téměř neměli literatury, která by dávala učitelům středních škol důkladné vědecké poučení o elementární matematice a odvětvích jí blízkých. Dnes máme již řadu knih tohoto rázu, jejichž autory jsou hlavně pracovníci vysokých škol pedagogických, především z vysoké školy pedagogické v Praze.

V popularisaci matematiky máme dobrou tradici již z předválečné činnosti Jednoty československých matematiků a fysiků. Mám na mysli dlouhou řadu knížek sbírky „Cesta k vědění". Tyto knížky předpokládaly u čtenáře asi úroveň absolventa střední školy a uváděly jej do nejrůznějších partií matematiky, fysiky a věd příbuzných. Pokračovatelem této sbírky v Československé akademii věd je sbírka „Věda všem".

Důležitou podmínkou zdárného rozvoje vědy v kterékoli zemi je kontakt domácích vědeckých pracovníků s vědou světovou. *Mezinárodní styky* našich matematiků, hojné před válkou, byly téměř úplně přervány okupací.

Po osvobození byly především navázány naše tradiční styky s Polskem, které se před válkou rozvinuly především ze spolupráce v oboru topologie. Tyto styky vyvrcholily prozatím r. 1949 společným sjezdem polských a československých matematiků v Praze. Tento sjezd byl ceněn jako vzor vědecké spolupráce mezi státy lidové demokracie. Samozřejmě nebyl tento sjezd jedinou příležitostí, při které se setkali českoslovenští a polští matematikové. Naši zástupci se účastnili sjezdů polských matematiků r. 1946, 1947, 1948 a zvláště sjezdu r. 1953, uspořádaného za hojné zahraniční účasti. Vedle toho byly zde ovšem vzájemné návštěvy jednotlivců, z naší strany především opětované cesty akademika Čecha do Polska, zájezd Doc. Svobody a j.

Polsko-československý sjezd v Praze 1949 znamená pro nás též počátek intimní spolupráce s maďarskými matematiky, kteří vyslali na sjezd osmičlennou delegaci. Sjezdu matematiků v Budapešti r. 1950 se bohužel účastnil jen jeden československý delegát a ani Bolyaiova jubilejní konference r. 1952 nebyla četně obeslána; ale později se tyto styky počaly zdárně rozvíjet a dnes vedle styků s Polskem patří k našim nejvíce rozvinutým mezinárodním stykům.

Styky s matematiky z Německé demokratické republiky začaly poměrně později vysláním naší delegace na sjezd německých matematiků v lednu 1953. Potom se však počaly čile rozvíjet, jak návštěvami německých matematiků u nás, tak také návštěvami našich matematiků v NDR; sluší zvláště zaznamenat účast našich delegací na dvou velkých vědeckých konferencích v Berlíně v říjnu 1954 (Riemannovo jubileum a matematická statistika) a dále učitelské působení Doc. O. FISCHERA z Matematického ústavu Československé akademie věd po jeden semestr na berlínské universitě (matematická statistika).

Styky s matematiky rumunskými a bulharskými se začínají teprve rozvíjet. Přece však jsme u nás měli již několik návštěv rumunských matematiků.

Studium ruské a sovětské matematické literatury bylo u nás pěstováno již před válkou a v některých oborech nabylo rázu intensivní spolupráce, jako na př. v některých partiích algebry a theorie čísel, především pak v topologii. Zvláště sluší ještě vzpomenout zesnulého prof. B. Hostinského (1884—1951), který byl velkým znalcem a propagátorem ruských a sovětských prací v theorii pravděpodobnosti, nejen u nás, ale na př. i ve Francii (Markovovy řetězce). Hlubší znalost sovětské matematické literatury byla však omezena na několik oborů a teprve po osvobození se rozrostla do větší šíře.

Návštěvy sovětských matematiků u nás byly dosud velmi nečetné: vedle několika setkání při průjezdech sovětských matematiků Prahou byl to pouze prof. B. V. GNĚDĚNKO, který se účastnil statistické konference v Praze v červnu 1954. Přes to měli naši matematikové již řadu příležitostí pohovořit si se sovětskými matematiky, hlavně při různých kongresech (Varšava 1948 a 1953, Budapešť 1950 a 1952, Amsterodam 1954) a jako členové delegace Akademie a vysokých škol do SSSR. Pro budoucnost očekáváme velký prospěch od bližších styků se slavnou matematikou sovětskou.

Ze styků se západem je rozhodně nejvýznamnější opětovné pozvání akademika Čecha do Italie (v září 1953 a v únoru 1955), kde především v Bologni se vytvořila skupina, která se ve svých pracích inspiruje methodami Čechovými. Naše delegace se účastnila též mezinárodního matematického kongresu v Amsterodamu r. 1954.

Pozorujeme-li výsledky zahraničních styků našich matematiků s hlediska výchovy a zvyšování úrovně našich vědeckých kádrů, zjistíme, že je velmi užitečný jeden druh těchto styků, který se prozatím příliš málo pěstuje. Míním toto: Jestliže náš mladý pracovník, kterému se dostalo u nás co nejlepšího školení a který již začal vědecky pracovat, je na delší dobu (nejméně několik měsíců) přesazen do zahraničního prostředí (ovšem vědecky vynikajícího), rozšíří to neobyčejnou měrou jeho rozhled, okruh jeho zájmů i možnosti jeho další vědecké práce. Pokud se nám podařilo v několika málo případech takový studijní pobyt realisovat (prozatím to bylo v Polsku), byly výsledky překvapující.

Zmínil jsem se již o pražském sjezdu r. 1949 i o konferencích matematických strojů. Vedle těchto událostí došlo u nás jen ještě k jedné konferenci s mezinárodní účastí; byla to konference o matematické statistice v červnu 1954 za účasti zástupce sovětského, polského a maďarského. Na konferenci projevili všichni zahraniční hosté přání po zintensivnění spolupráce Sovětského svazu a lidových demokracií v počtu pravděpodobnosti a matematické statistice.

Na září letošního roku chystá se v Praze IV. sjezd československých matematiků s hojnou mezinárodní účastí, který jistě ukáže přednosti i nedostatky dnešního stavu naší matematiky i její postavení ve vědě světové a ukáže také, jak doufáme, nejvhodnější linii dalšího jejího rozvoje. Bylo by proto předčasné pokoušet se v tomto článku o nějaké definitivnější hodnocení; budiž proto tato stať považována za námět k diskusi, která se jistě rozvine na sjezdu i po něm o perspektivách naší matematiky v etapě budování socialismu.

ANALAGMATICKÉ KVINTIKY

VLADIMÍR BRUTHANS, Liberec.

(Došlo dne 16. prosince 1954.) DT:513.617.1

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

Předmětem tohoto článku jsou rovinné kvintiky, které se reprodukují nějakou kvadratickou inversí, tak zvané kvintiky analagmatické. Je provedeno roztřídění těchto křivek a jsou uvedeny jejich vlastnosti, které plynou z jejich analagmatické povahy. Nakonec jsou ukázány případy kvintik, které se reprodukují některými grupami algebraických transformací.

1. Kvintiky, které se reprodukují kvadratickou inversí, nazýváme kvintiky analagmatické.[1]) Abychom tyto křivky roztřídili, budeme rozeznávat tyto tři typy inverse:[2])

Typ **A**: Střed inverse leží mimo základní kuželosečku, jež je regulární. Tato inverse má tři hlavní body a její rovnice se dají uvést na tvar

$$x_1 = x_1'x_3', \quad x_2 = x_2'x_3', \quad x_3 = x_1'x_2'. \tag{A}$$

Typ **B**: Střed inverse leží mimo základní kuželosečku, jež se skládá ze dvou (různých) přímek. Tato inverse má dva hlavní body a její rovnice se dají uvést na tvar

$$x_1 = x_1'x_3', \quad x_2 = x_2'x_3', \quad x_3 = x_2'^2. \tag{B}$$

Typ **C**: Střed inverse leží na základní kuželosečce, jež je regulární. Tato inverse má jediný hlavní bod a její rovnice lze uvést na tvar

$$x_1 = x_1'^2, \quad x_2 = x_1'x_2', \quad x_3 = x_2'^2 - x_1'x_3'. \tag{C}$$

Omezíme se na kvintiky nerozložitelné, o nichž platí tato všeobecná věta:

Věta 1. *Nerozložitelná kvintika analagmatická má ve středu inverse bod o násobnosti buď jedna nebo tři.*

Tuto větu dokážeme nepřímo. Předpokládejme, že ve středu inverse má kvintika bod o sudé násobnosti. Potom každá přímka jím vedená, která není

[1]) [3], str. 506.
[2]) [2], str. 53-54.

tečnou křivky v tomto bodě, protne ji ještě v lichém počtu bodů. Je tedy na každé takové přímce vedle inversních dvojic jeden bod křivky samodružný, leda že by odpovídal středu inverse; v tomto případě by však musel ležet na hlavní přímce a takových bodů je konečný počet. To znamená, že na křivce leží nekonečně mnoho samodružných bodů, což je spor, neboť samodružné body inverse leží všechny na základní kuželosečce inverse a s tou má nerozložitelná kvintika jen deset společných bodů. Je tedy náš předpoklad nesprávný, čímž je věta dokázána.

2. Studujme nejdříve případ, kdy střed inverse je v trojnásobném bodě kvintiky. Souřadnicový systém volme vždy tak, aby rovnice příslušné inverse měly jeden ze shora uvedených tvarů. Trojnásobný bod kvintiky (jenž je středem inverse) je tedy bodem O_3 a kvintika má rovnici

$$x_3^2 u_3(x_1, x_2) + x_3 v_4(x_1, x_2) + w_5(x_1, x_2) = 0\,, \tag{1}$$

kde indexy při u, v, w udávají stupně těchto forem.

Typ ***A3***:[3]) Reprodukuje-li se tato kvintika inversí (***A***), musí být součet násobností hlavních bodů O_1, O_2 dvě. Nemohou pak být tyto násobnosti různé, neboť u křivky inversní by se vyměnily. Jsou tedy oba hlavní body jednoduchými body kvintiky, takže její rovnice má tvar

$$x_3^2 u_3(x_1, x_2) + x_3 v_4(x_1, x_2) + x_1 x_2 w_3(x_1, x_2) = 0\,. \tag{2}$$

Proveďme transformaci (***A***) a vynechme činitele $x_1 x_2 x_3^3$; obdržíme

$$x_3^2 w_3(x_1, x_2) + x_3 v_4(x_1, x_2) + x_1 x_2 u_3(x_1, x_2) = 0\,. \tag{3}$$

Ježto rovnice (2) a (3) musí vyjadřovat touž křivku a protože — vzhledem k nerozložitelnosti křivky — je $v_4(x_1, x_2) \neq 0$, plyne odtud $w_3(x_1, x_2) = u_3(x_1, x_2)$. Rovnice kvintiky, která se reprodukuje inversí (***A***), je tedy

$$(x_3^2 + x_1 x_2)\, u_3(x_1, x_2) + x_3 v_4(x_1, x_2) = 0\,. \tag{\textbf{A3}}$$

Z ní je zřejmé, že tečny křivky v jejím trojnásobném bodě ji protínají ve třech bodech ležících v přímce (osa o_3), jejíž zbývající dva průsečíky s křivkou jsou různé. Naopak lze rovnici každé kvintiky, jež má tyto vlastnosti, uvést na tvar (***A3***).

Typ ***B3***: Má-li se kvintika (1) reprodukovat inversí (***B***), musí mít — aby stupeň křivky zůstal týž — v hlavním bodě O_1 buď jednoduchý bod s tečnou o_3 nebo bod dvojnásobný, v němž tečny jsou různé od přímky o_3. Jinak je tento případ zcela obdobný předešlému a rovnice příslušné analagmatické křivky je

$$(x_3^2 + x_2^2)\, u_3(x_1, x_2) + x_3 v_4(x_1, x_2) = 0\,. \tag{\textbf{B3}}$$

[3]) Zachováváme označení typů ***A***, ***B***, ***C*** inversí podle odst. 1 a číslice ***3*** zde připojená připomíná, že jde o kvintiku, která má ve středu inverse trojnásobný bod. Podobný význam má označení v dalších odstavcích.

Shrnutím obou případů docházíme k větě:

Věta 2. *Nerozložitelná kvintika s trojnásobným bodem se reprodukuje kvadratickou inversí typu* **A** *nebo* **B** *se středem v trojnásobném bodě kvintiky tehdy a jen tehdy, leží-li další průsečíky tří tečen v trojnásobném bodě s kvintikou v přímce.*

Jsou-li ostatní dva průsečíky této přímky s kvintikou od sebe různé, reprodukuje se kvintika inversí typu **A**, *splývají-li v jeden dvojnásobný, reprodukuje se inversí typu* **B**.

Typ **C3**: Abychom vyšetřili případ kvintiky analagmatické vzhledem k inversi typu **C**, proveďme na rovnici (1) transformaci (**C**):

$$(x_2^2 - x_1x_3)^2\, u_3(x_1, x_2)\, x_1^3 + (x_2^2 - x_1x_3)\, v_4(x_1, x_2)\, x_1^4 + w_5(x_1, x_2)\, x_1^5 = 0\,. \quad (4)$$

Ježto je o_1 jedinou hlavní přímkou této inverse, musí levá strana rovnice (4) obsahovat činitele x_1^5; odtud a ze srovnání obou rovnic (1) a (4) plyne

$$u_3(x_1, x_2) = x_1u_2(x_1, x_2)\,, \quad v_4(x_1, x_2) = -\, x_2^2u_2(x_1, x_2)\,.$$

Rovnice kvintiky, která se reprodukuje inversí (**C**), je tudíž

$$(x_3^2x_1 - x_3x_2^2)\, u_2(x_1, x_2) + w_5(x_1, x_2) = 0\,. \quad (\mathbf{C3})$$

První polára bodu O_3 je

$$(2x_1x_3 - x_2^2)\, u_2(x_1, x_2) = 0\,,$$

t. j. skládá se z regulární kuželosečky — základní kuželosečky inverse — a dvojice přímek bodem O_3. Naopak lze rovnici kvintiky s trojnásobným bodem, jehož první polára se rozpadá uvedeným způsobem, vždy uvést na tvar (**C3**). Stačí ovšem, víme-li, že první polára trojnásobného bodu obsahuje jako součást regulární kuželosečku, neboť to, že druhá součást je pak dvojice přímek s průsečíkem v trojnásobném bodě křivky, plyne z toho, že tento bod je trojnásobným i u první poláry. Máme tedy výsledek:

Věta 3. *Nerozložitelná kvintika s trojnásobným bodem se reprodukuje kvadratickou inversí typu* **C** *se středem v tomto bodě tehdy a jen tehdy, jestliže první polára trojnásobného bodu obsahuje jako součást regulární kuželosečku.*

Poznámka 1. Obě přímky, které jsou součástí prvé poláry trojnásobného bodu, mají v tomto bodě pětibodový průsečík s křivkou. Jsou-li tedy tyto přímky různé, jsou to inflexní tečny.

Poznámka 2. Kvintiku (**C3**) lze považovat za mezný případ kvintiky (**A3**) nebo (**B3**), kdy totiž přímka, spojující průsečíky tečen v trojnásobném bodě s křivkou, tímto bodem prochází.

3. Uvažujme druhý případ, v němž střed inverse (a tedy též bod O_3) je v jednoduchém bodě kvintiky. Rovnice takové kvintiky má tvar

$$x_3^4u_1(x_1, x_2) + x_3^3v_2(x_1, x_2) + x_3^2w_3(x_1, x_2) + x_3r_4(x_1, x_2) + s_5(x_1, x_2) = 0\,. \quad (5)$$

Typ **AI**. Nechť se reprodukuje inversí (**A**); pak hlavní body O_1, O_2 musí být dvojnásobnými body kvintiky, t. j.

$$r_4(x_1, x_2) = x_1x_2r_2(x_1, x_2)\,, \quad s_5(x_1, x_2) = x_1^2x_2^2s_1(x_1, x_2)\,.$$

Po inversi máme

$$x_3^3s_1(x_1, x_2) + x_3^3r_2(x_1, x_2) + x_3^2w_3(x_1, x_2) + x_3x_1x_2v_2(x_1, x_2) + \\ + x_1^2x_2^2u_1(x_1, x_2) = 0\,. \tag{6}$$

Podmínky pro totožnost křivek (5) a (6) jsou

$$\begin{gathered} s_1(x_1, x_2) = \varrho u_1(x_1, x_2)\,, \quad u_1(x_1, x_2) = \varrho s_1(x_1, x_2)\,, \\ r_2(x_1, x_2) = \varrho v_2(x_1, x_2)\,, \quad v_2(x_1, x_2) = \varrho r_2(x_1, x_2)\,, \\ w_3(x_1, x_2) = \varrho w_3(x_1, x_2)\,. \end{gathered} \tag{7}$$

Jestliže $w_3(x_1, x_2) \neq 0$, plyne odtud $\varrho = 1$. Jestliže $w_3(x_1, x_2) = 0$, pak z podmínek (7) plyne $\varrho = \pm 1$; avšak, kdyby bylo $\varrho = -1$, obsahovala by křivka kuželosečku $x_3^2 - x_1x_2 = 0$, takže i v tomto případě $\varrho = 1$ a

$$s_1(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2)\,, \quad r_2(x_1, x_2) = v_2(x_1, x_2)\,.$$

Rovnice této analagmatické kvintiky je tudíž

$$(x_3^4 + x_1^2x_2^2)\, u_1(x_1, x_2) + (x_3^3 + x_1x_2x_3)\, v_2(x_1, x_2) + x_3^2w_3(x_1, x_2) = 0\,. \tag{AI}$$

Z této rovnice je zřejmo, že spojnice dvojnásobných bodů O_1, O_2 protíná křivku po páté v bodě na tečně v O_3. Na této spojnici leží též dva průsečíky první poláry s jeho kvadratickou polárou (nemají-li obě poláry tuto přímku za společnou součást).

Existují-li naopak na kvintice tři body s právě popsanými vlastnostmi a zvolíme-li je za příslušné souřadnicové body, je její rovnice

$$(x_3^4 + \lambda_1x_1^2x_2^2)\, u_1(x_1, x_2) + (x_3^3 + \lambda_2x_1x_2x_3)\, v_2(x_1, x_2) + x_3^2w_3(x_1, x_2) = 0\,. \tag{8}$$

Zbývá nám možnost volby jednotkového bodu; pokusme se tedy transformací $x_i = \varrho_ix_i'$ $(i = 1, 2, 3)$ převést rovnici (8) na tvar (**AI**). Konstanty ϱ_i je třeba volit tak, aby $\varrho_3^4 = \lambda_1\varrho_1^2\varrho_2^2$ a $\varrho_3^2 = \lambda_2\varrho_1\varrho_2$. Odtud — je-li $v_2(x_1, x_2) \neq 0$ — vyplývá podmínka

$$\lambda_1 = \lambda_2^2\,. \tag{9}$$

Uvažujme průsečíky křivky (8) s přímkou

$$x_2 - kx_1 = 0\,, \quad k \neq 0\,; \tag{10}$$

řešením obou rovnic dostaneme

$$x_2[x_3^4u_1(1, k) + x_3^3x_1v_2(1, k) + x_3^2x_1^2w_3(1, k) + \lambda_2x_3x_1^3kv_2(1, k) + \\ + \lambda_1x_1^4k^2\, u_1(1, k)] = 0\,. \tag{11}$$

U analagmatické kvintiky tvoří tyto průsečíky (vedle bodu O_3) dvě dvojice apolární vzhledem k základní kuželosečce inverse, k níž je také apolární dvojice, již tvoří bod O_3 a průsečík přímky (10) s osou o_3. Všechny tři dvojice náležejí tedy do téhož svazku. Splňují-li naopak průsečíky určené na přímce (10) formou na levé straně (11) tuto podmínku, dá se tato forma rozložit v součin dvou binárních forem $ax_2^2 + 2bx_2x_3 + cx_3^2$ a $dx_2^2 + 2ex_2x_3 + fx_3^2$, pro jejichž koeficienty je splněna podmínka[4])

$$af - cd = 0 \,. \tag{12}$$

Předpokládáme-li

$$u_1(1, k) \neq 0 \quad \text{a} \quad u_2(1, k) \neq 0 \tag{13}$$

pak z podmínek

$$\lambda_1 k^2 u_1(1, k) = ad \,, \quad u_1(1, k) = cf \,,$$

$$\lambda_2 k u_2(1, k) = 2(ae + bd) \,, \quad u_2(1, k) = 2(ce + bf)$$

plyne

$$\lambda_1 k^2 = \frac{ad}{cf} \,, \quad \lambda_2 k = \frac{ae + bd}{ce + bf}$$

a (12) má za následek $(\lambda_2 k)^2 = \lambda_1 k^2$, takže podmínka (9) je splněna. S přihlédnutím ke geometrickému významu předpokladů (13) je tím dokázáno:

Věta 4. *Charakteristické vlastnosti kvintiky, která se reprodukuje inversí typu* **A** *se středem v jednoduchém bodě kvintiky jsou tyto:*

α) *křivka má (aspoň) dva dvojnásobné body — označme je Q, Q' a jejich spojnici o;*

β) *první polára některého z dotykových bodů – označme jej O — tečen, vedených ke křivce z pátého průsečíku přímky o s křivkou, má na této přímce (vedle bodů Q, Q') dva body společné s kvadratickou polárou bodu O (anebo mají obě poláry přímku o za společnou součást);*

γ) *aspoň jedna přímka bodem O, jež není v něm tečnou a (není-li přímka o součástí obou polár) neprochází žádným průsečíkem první poláry s přímkou o, protíná kvintiku mimo bod O ve dvou regulárních dvojicích náležejících do téhož svazku spolu s dvojicí, již tvoří bod O s bodem na přímce o.*

Typ ***BI***. Tento typ je opět zcela obdobný předešlému, příslušná rovnice je

$$(x_3^4 + x_2^4)\, u_1(x_1, x_2) + (x_3^3 + x_3 x_2^2)\, v_2(x_1, x_2) + x_3^2 w_3(x_1, x_2) = 0 \,. \tag{\textbf{BI}}$$

Jde zřejmě o mezní případ kvintiky z věty 4, kdy totiž oba body Q, Q' splynou v jediný, a to buď α) dvojnásobný s jedinou tečnou, totiž přímkou o, nebo β) trojnásobný, v němž jednou z tečen je přímka o, anebo γ) čtyřnásobný, v němž přímka o není tečnou.

Poznámka 3. Snadno se zjistí, že k tomu, aby se kvintika reprodukovala inversí typu **C**, je nutno, aby střed inverse byl bodem kvintiky o násobnosti vyšší než jedna. Kromě tedy již uvedeného typu ***C3*** neexistuje žádná další kvintika, jež by se touto inversí reprodukovala.

---

[4]) Srovnej [1], str. 122.

4. Kvintiky, které mají popsané charakteristické vlastnosti, mají pak všechny další vlastnosti analagmatických křivek. Uveďme některé tyto vlastnosti pro kvintiku typu **A3**.[5]) Její trojnásobný bod nazveme bodem O. Průsečíky tečen v bodě O s křivkou leží — jak bylo ukázáno — v přímce; zbývající dva průsečíky této přímky s křivkou nazveme body Q, Q'.

Věta 5. *Regulární kuželosečka jdoucí body O, Q, Q' protne kvintiku* **A3** *ještě v pěti bodech; promítneme-li těchto pět bodů z bodu O na křivku, dostaneme dalších pět bodů, jež leží v přímce.*

Neboť body O, Q, Q' jsou — jak patrno — hlavní body inverse, jíž se tato kvintika reprodukuje; kuželosečka jdoucí těmito body protne kvintiku trojnásob v bodě O, jednoduše v bodech Q, Q' a dále tedy ještě v pěti bodech. Ježto však je ke kuželosečce, obsahující všechny tři hlavní body, inversní křivkou přímka mimo tyto body, odpovídá pět průsečíků této přímky s kvintikou oněm pěti bodům na kuželosečce.

Podobně se dokáže:

Věta 6. *Promítneme-li z bodu O kvintiky* **A3** *pět jejích bodů ležících v přímce mimo body O, Q, Q', dostaneme na křivce dalších pět bodů a kuželosečka určená těmito pěti body prochází body O, Q, Q'.*

Dále platí:

Věta 7. *Přímka bodem Q protne křivku ještě ve čtyřech bodech; promítneme-li tyto čtyři body z bodu O na křivku, obdržíme další čtyři body v přímce, jež prochází bodem Q'. Geometrické místo průsečíků takových dvojic přímek je regulární kuželosečka.*

Jde totiž o dvojici přímek odpovídajících si v inversi a ty se protínají na základní kuželosečce inverse. Nazveme kuželosečku, o níž je řeč v této větě, kuželosečkou q.

Zvláštním případem věty 7, kdy dva z oněch čtyř bodů splynou v jediný, je věta:

Věta 8. *Jestliže tečna ke křivce* **A3** *v některém jejím bodě P prochází bodem Q, pak tečna v bodě P' ležícím s P na téže přímce bodem O (mimo body Q, Q') prochází bodem Q'. Obě tyto tečny se protínají na kuželosečce q.*

Třída kvintiky s obyčejným trojnásobným bodem je — ježto tento bod platí za tři obyčejné uzly — $m = 5 . 4 - 2 . 3 = 14$. Z bodu O lze tudíž vésti ke křivce čtrnáct tečen, počítáme-li do tohoto počtu každou tečnu v bodě O dvojnásob. Jinak zbývá osm tečen, o nichž platí věta:

Věta 9. *Osm dotykových bodů tečen vedených ke křivce* **A3** *z bodu O leží na kuželosečce q.*

Neboť v dotykovém bodu tečny z bodu O splývají oba body sobě odpovídající v jediný samodružný bod, jenž leží na základní kuželosečce inverse.

---

[5]) O této kvintice pojednává *Roberts* [4]. Vlastnosti, které odvozuje jinou cestou, jsou s hlediska analagmatické povahy křivky zřejmé.

5. Některé kvintiky se reprodukují více než jednou inversí. Složíme-li dvě takové inverse, které reprodukují touž kvintiku, obdržíme další transformaci, jež rovněž tuto křivku reprodukuje.

Má-li kvintika (**BI**) v hlavním bodě O_1 bod trojnásobný, může se reprodukovat též inversí se středem v tomto bodě. Jde-li o inversi typu **A** nebo **B**, je bod, ve kterém tečna v O_3 ke křivce protne osu o_3 (a tedy i křivku), různý od bodu O_1, takže jej můžeme zvolit za bod O_2. Učiňme to; křivka má pak rovnici

$$a_0x_3^4x_1 + x_3^3(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2) + x_3^2(c_1x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + c_3x_2^3) + \\ + x_3x_2^2(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2) + a_0x_2^4x_1 = 0\,, \tag{14}$$

kde $a_0 \neq 0$ a také buď $b_0 \neq 0$ nebo $c_1 \neq 0$ (bod O_1 by nebyl trojnásobný, nýbrž čtyřnásobný). Ježto je nyní jedním z průsečíků tečen v trojnásobném bodě s křivkou bod O_2, lze bod O_3 posunout po ose o_2 tak, že tyto tři průsečíky leží na spojnici tohoto bodu s bodem O_2. Lze tedy transformací

$$x_1 = x_1' + \varrho x_3'\,,\quad x_2 = x_2'\,,\quad x_3 = x_3' \tag{15}$$

uvést rovnici křivky na tvar

$$x_1^2x_3u_2(x_2, x_3) + x_1u_4(x_2, x_3) + u_2'(x_2, x_3)\, x_3u_2(x_2, x_3) = 0\,. \tag{16}$$

Rovnice křivky je po této transformaci (seřaďme ji podle mocnin proměnné x_1)

$$\begin{aligned} &x_1^2x_3(b_0x_2^2 + c_1x_2x_3 + b_0x_3^2) + x_1[a_0x_2^4 + b_1x_2^3x_3 + (2\varrho b_0 + c_2)\, x_2^2x_3^2 + \\ &+ (2\varrho c_1 + b_1)\, x_2x_3^3 + (2\varrho b_0 + a_0)\, x_3^4] + x_3(\varrho a_0x_3^4 + \varrho^2b_0x_3^4 + \varrho b_1x_3^3x_2 + \\ &+ \varrho^2c_1x_3^3x_2 + b_2x_3^2x_2^2 + \varrho c_2x_3^2x_2^2 + \varrho^2b_0x_3^2x_2^2 + c_3x_3x_2^3 + \varrho b_1x_3x_2^3 + b_2x_2^4 + \\ &+ \varrho a_0x_2^4) = 0\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Položíme-li $u_2'(x_2, x_3) = y_1x_2^2 + y_2x_2x_3 + y_3x_3^2$, plynou odtud podmínky

$$\begin{gathered} b_0y_1 = \varrho a_0 + b_2\,,\quad c_1y_1 + b_0y_2 = \varrho b_1 + c_3\,, \\ b_0y_1 + c_1y_2 + b_0y_3 = \varrho^2b_0 + \varrho c_2 + b_2\,, \\ b_0y_2 + c_1y_3 = \varrho^2c_1 + \varrho b_1\,,\quad b_0y_3 = \varrho^2b_0 + \varrho a_0\,. \end{gathered} \tag{18}$$

Je-li $\varrho = 0$, zůstává bod O_3 při transformaci (15) pevný; ježto o_1 je tečnou v O_3, je $y_2 = y_3 = 0$ a tedy $b_0y_1 = b_2$, $c_1y_1 = c_3$; odtud

$$b_0c_3 - b_2c_1 = 0\,. \tag{19}$$

Kdyby bylo $\varrho \neq 0$, bylo by též $b_0 \neq 0$ (neboť pro $b_0 = 0$, dává poslední rovnice (18) $a_0 = 0$, což není pravda). Vypočteme-li z první a třetí rovnice (18) y_1, y_3 a dosadíme-li do druhé, resp. čtvrté, dostáváme

$$y_2 = \frac{\varrho b_0b_1 + b_0c_3 - \varrho a_0c_1 - b_2c_1}{b_0^2} = \frac{\varrho b_0b_1 - \varrho a_0c_1}{b_0^2}\,,$$

tedy opět $b_0c_3 - b_2c_1 = 0$. Zbývající rovnice (třetí) by dávala

$$2a_0b_0^2 + b_0b_1c_1 - a_0c_1^2 - b_0^2c_2 = 0\,, \tag{20}$$

kteréžto podmínka by měla za následek dělitelnost formy na levé straně (17) formou $b_0x_2^2 + c_1x_2x_3 + b_0x_3^2$. Nemá-li se tedy křivka rozpadnout, musí být

$\varrho = 0$, takže právě tečna v jednoduchém středu inverse je hlavní přímkou odpovídající středu druhé inverse, jenž je v trojnásobném bodě kvintiky.

Jestliže volíme jednotkový bod v některém z průsečíků základních kuželoseček obou inversí, potom jsou rovnice první inverse, jíž se křivka reprodukuje,

$$x_1 = x_1' x_3' , \quad x_2 = x_2' x_3' , \quad x_3 = x_2'^2 , \tag{I}$$

rovnice druhé inverse

$$x_1 = x_2'^2 , \quad x_2 = x_1' x_2' , \quad x_3 = x_1' x_3' \tag{II}$$

a podmínka (19) se pozmění takto:

$$b_0 = b_2 , \quad c_1 = c_3 .$$

Složením obou inversí obdržíme involutorní kvadratickou transformaci třídy první

$$x_1 = x_2' x_3' , \quad x_2 = x_1' x_3' , \quad x_3 = x_1' x_2' . \tag{III}$$

Tyto tři involutorní kvadratické transformace spolu s identitou tvoří grupu. I máme výsledek:

Věta 10. *Kvintika, jejíž rovnici lze uvést na tvar*

$$x_1^2 x_3 (b_0 x_2^2 + c_1 x_2 x_3 + b_0 x_3^2) + x_1 (a_0 x_2^4 + b_1 x_2^3 x_3 + c_2 x_2^2 x_3^2 + b_1 x_2 x_3^3 + \\ + a_0 x_3^4) + x_2^2 x_3 (b_0 x_2^2 + c_1 x_2 x_3 + b_0 x_3^2) = 0$$

se reprodukuje dvěma inversemi a involutorní kvadratickou transformací třídy první, kteréžto transformace spolu s identitou tvoří grupu.

6. Nechť má kvintika (***BI***) v hlavním bodě O_1 trojnásobný bod s vlastností charakteristickou pro kvintiku typu **C3**; pišme její rovnici

$$x_3^4 (a_0 x_1 + a_1 x_2) + x_3^3 (b_0 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2) + x_3^2 (c_1 x_1^2 x_2 + c_2 x_1 x_2^2 + c_3 x_2^3) + \\ + x_3 x_2^2 (b_0 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2) + x_2^4 (a_0 x_1 + a_1 x_2) = 0 . \tag{21}$$

První polára bodu O_1 je

$$2 x_1 x_3 (b_0 x_2^2 + c_1 x_2 x_3 + b_0 x_3^2) + a_0 x_2^4 + b_1 x_2^3 x_3 + c_2 x_2^2 x_3^2 + b_1 x_2 x_3^3 + \\ + a_0 x_3^4 = 0 ;$$

tato křivka se podle předpokladu skládá z regulární kuželosečky a ze dvou přímek bodem O_1.

Budiž $a_0 \neq 0$; potom též $b_0 \neq 0$. Dělením se přesvědčíme, že nutná a postačující podmínka k tomu, aby forma $a_0 x_2^4 + b_1 x_2^3 x_3 + c_2 x_2^2 x_3^2 + b_1 x_2 x_3^3 + a_0 x_3^4$ byla dělitelná formou $b_0 x_2^2 + c_1 x_2 x_3 + b_0 x_3^2$ je

$$2 a_0 b_0^2 + b_0 b_1 c_1 - a_0 c_1^2 - b_0^2 c_2 = 0 . \tag{20}$$

Výsledek dělení je pak (až na nenulový činitel)

$$a_0 b_0 x_2^2 + (b_0 b_1 - a_0 c_1)\, x_2 x_3 + a_0 b_0 x_3^2 + 2 b_0^2 x_1 x_3 ,$$

kterážto forma položena rovna nule dává rovnici základní kuželosečky druhé inverse, jejíž rovnice jsou tedy

$$x_1 = a_0 b_0 x_2'^2 + (b_0 b_1 - a_0 c_1)\, x_2' x_3' + a_0 b_0 x_3'^2 + b_0^2 x_1' x_3' , \qquad (II')$$
$$x_2 = - b_0^2 x_2' x_3' , \quad x_3 = - b_0^2 x_3'^2 .$$

Kdyby bylo $a_0 = 0$, bylo by rovněž $b_0 \neq 0$ (křivka neobsahuje přímku o_2); potom též $b_1 \neq 0$. Protože jeden společný činitel je v tomto případě x_3, musely by formy

$$b_0 x_2^2 + c_1 x_2 x_3 + b_0 x_3^2 \quad \text{a} \quad b_1 x_2^2 + c_2 x_2 x_3 + b_1 x_3^2$$

mít již jen jeden společný činitel, avšak mají zřejmě buď žádný anebo dva (jsou symetrické); je tedy vždy $a_0 \neq 0$.

Složením obou inversí (*I*) a (*II'*) obdržíme opět involutorní kvadratickou transformaci třídy první.

Věta 11. *Křivka o rovnici* (21), *jejíž koeficienty splňují podmínku* (20), *reprodukuje se dvěma inversemi a involutorní kvadratickou transformací třídy první, kterážto transformace spolu s identitou tvoří grupu.*

7. Kvintika se může reprodukovat též dvěma inversemi, z nichž každá má střed v jednoduchém jejím bodě. Dokážeme existenci takové kvintiky typu ***AI*** v případě, kdy dva hlavní body obou inversí jsou společné a střed jedné inverse leží na základní kuželosečce druhé inverse. Tento vztah je ovšem vzájemný.

Zvolme dva společné hlavní body za body O_1, O_2, střed jedné inverse za bod O_3, střed inverse druhé za bod J. Rovnice kvintiky má tvar

$$x_3^4(a_0 x_1 + a_1 x_2) + x_3^3(b_0 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2) + x_3^2(c_0 x_1^3 + c_1 x_1^2 x_2 + c_2 x_1 x_2^2 +$$
$$+ c_3 x_2^3) + x_1 x_2 x_3 (b_0 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2) + x_1^2 x_2^2 (a_0 x_1 + a_1 x_2) = 0 \qquad (22)$$

a provedeme-li transformaci souřadnic

$$x_1 = x_3' - x_1' , \quad x_2 = x_3' - x_2' , \quad x_3 = x_3' ,$$

kterou se navzájem vymění bod O_3 a J, musíme obdržet rovnici téhož tvaru, což vede k podmínkám

$$\begin{aligned} a_0 + 5b_0 + 3b_1 + b_2 + 3c_0 + 2c_1 + c_2 &= 0 , \\ a_1 + 5b_2 + 3b_1 + b_0 + 3c_3 + 2c_2 + c_1 &= 0 , \\ 3b_0 + b_1 + 3c_0 + c_1 &= 0 , \\ 3b_0 + 4b_1 + 3b_2 + 2c_1 + 2c_2 &= 0 , \\ 3b_2 + b_1 + 3c_3 + c_2 &= 0 . \end{aligned} \qquad (23)$$

Jsou-li tyto podmínky splněny, reprodukuje se kvintika (22) dvěma inversemi, totiž

$$x_1 = x_1' x_3' , \quad x_2 = x_2' x_3' , \quad x_3 = x_1' x_2' , \qquad (I'')$$
$$x_1 = (x_1' - x_3')\, x_2' , \quad x_2 = (x_2' - x_3')\, x_1' , \quad x_3 = (x_1' - x_3')(x_2' - x_3') . \qquad (II'')$$

Složením obou inversí v pořadí (*I''*), (*II''*) obdržíme

$$x_1 = (x_1' - x_3')\, x_2' , \quad x_2 = (x_2' - x_3') x_1' , \quad x_3 = x_1' x_2' , \qquad (III'')$$

v pořadí opačném

$$x_1 = (x_3' - x_2')\,x_3', \quad x_2 = (x_3' - x_1')\,x_3', \quad x_3 = (x_3' - x_1')(x_3' - x_2'). \qquad (IV'')$$

Kvadratické transformace (*III''*) a (*IV''*) jsou cyklické třetího stupně a jsou k sobě navzájem inversní; opakujeme-li tedy jednu z těchto transformací dvakrát po sobě, obdržíme transformaci druhou. Složením na př. transformací (*I''*) a (*IV''*) obdržíme involutorní kolineaci

$$x_1 = x_3' - x_2', \quad x_2 = x_3' - x_1', \quad x_3 = x_3', \qquad (V'')$$

jejímž středem je bod J_3, osou spojnice $\overline{J_1J_2}$. Transformace (*I''*) až (*V''*) tvoří spolu s identitou grupu. Máme tedy výsledek:

Věta 12. *Kvintika o rovnici* (22), *v níž jsou splněny podmínky* (23) *se reprodukuje transformacemi* (*I''*) *až* (*V''*), *jež spolu s identitou tvoří grupu.*

Rovnice základní kuželosečky kvadratické inverse (*I''*) je $x_3^2 - x_1x_2 = 0$ a inverse (*II''*) $x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0$. Obě tyto kuželosečky se protínají v bodech O_1, O_2 a mimo to ještě ve dvou bodech, jichž spojnice je přímka $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, t. j. osa kolineace (*V''*).

LITERATURA

[1] *B. Bydžovský*: Úvod do algebraické geometrie (Praha 1948).

[2] *H. P. Hudson*: Cremona Transformations in Plane and Space (Cambridge 1927).

[3] *G. Loria*: Curve piane speciali algebriche e transcendenti. Curve algebriche. (Milano 1930).

[4] *W. R. W. Roberts*: Some properties of a certain quintic curve (Proc. Irish Ac, XXIV A).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

SEXTIKY INVARIANTNÍ VZHLEDEM KE KVADRATICKÝM INVERSÍM S TŘEMI BODY HLAVNÍMI

VLADIMÍR MAHEL, Praha.

(Došlo dne 14. ledna 1955.) DT:513.617.2

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

V této práci je provedeno vyšetřování křivek šestého stupně, invariantních vůči kvadratické inversi s třemi body hlavními a jsou ukázány některé vlastnosti sextik, reprodukovaných více inversemi se společnými body a přímkami hlavními.

1. Pod pojmem inverse budeme v této práci rozumět vždy jen inversi s třemi body hlavními. Při volbě souřadnicového systému tak, že střed inverse je v bodě O_3 a druhé dva hlavní body v bodech O_1 a O_2, je tato inverse dána rovnicemi

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varrho x_1'x_2' \quad (\varrho \neq 0)\,. \tag{1}$$

Leží-li ještě jednotkový bod na základní kuželosečce inverse, mají rovnice (1) tvar

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : x_1'x_2'\,. \tag{2}$$

Základní kuželosečka těchto inversí má tvar

$$x_3^2 - \varrho x_1x_2 = 0\,, \quad \text{resp.} \quad x_3^2 - x_1x_2 = 0\,. \tag{3a, 3b}$$

Leží-li střed inverse v souř. bodě O_1 (resp. O_2), druhé dva hlavní body v bodech O_2 a O_3 (resp. O_1 a O_3) a jednotkový bod na základní kuželosečce, mají rovnice inverse tvar

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_2'x_3' : x_1'x_2' : x_1'x_3'\,, \tag{4}$$

resp.

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_2' : x_1'x_3' : x_2'x_3'\,. \tag{5}$$

Rovnice sextiky budeme v dalším užívat ve tvaru:

$$\left.\begin{aligned}
x_3^6a_{00} + x_3^5(a_{10}x_1 + a_{11}x_2) + x_3^4(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) +\\
+ x_3^3(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) +\\
+ x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) +\\
+ x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^3x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^3 + a_{54}x_1x_2^4 + a_{55}x_2^5) +\\
+ a_{60}x_1^6 + a_{61}x_1^5x_2 + a_{62}x_1^4x_2^2 + a_{63}x_1^3x_2^3 + a_{64}x_1^2x_2^4 + a_{65}x_1x_2^5 + a_{66}x_2^6 = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Při vyšetřování sextik, reprodukovaných inversí, budeme vycházet z těchto vět:

Věta 1. *Nerozložitelné křivce f stupně n-tého, která má v hlavním bodě O_i bod h_i-násobný ($i = 1, 2, 3$), odpovídá inversí (1) křivka, která obsahuje nerozložitelnou součást F stupně $2n - h - h_2 - h_3$. Pro F je bod O_1 bodem $(n - h_1 - h_3)$-násobným, O_2 bodem $(n - h_2 - h_3)$-násobným a bod O_3 bodem $(n - h^1 - h_2)$-násobným.*

Věta 2. *Tečny inversní křivky ve středu inverse (1) jsou přímky, jimiž se z tohoto bodu promítají průsečíky křivky dané s protilehlou hlavní přímkou; tečny inversní křivky v hlavním bodě O_i ($i = 1, 2$) jsou přímky, které odpovídají přímkám, jimiž se z bodu O_j ($j = 1, 2, i \neq j$) promítají průsečíky křivky dané s protilehlou hlavní přímkou.*

Věta 3. *Leží-li singulární bod křivky mimo hlavní trojstran, odpovídá mu v inversi bod singulární o stejné násobnosti.*

Důkazy všech těchto tří vět dostaneme ihned specialisací obdobných vět pro obecnou kvadratickou transformaci. (Viz na př. Bydžovský: Úvod do algebraické geometrie, str. 618, věty a) až e).)

Věta 4. *Nutná podmínka pro to, aby nerozložitelná křivka stupně n-tého byla invariantní vůči inversi, jest: pro n sudé je střed inverse pro křivku bodem o sudé násobnosti, pro n liché bodem o liché násobnosti a druhé dva hlavní body jsou pro křivku body o stejné násobnosti.*

Důkaz. Mějme nerozložitelnou invariantní křivku n-tého stupně a nechť střed inverse (1) je pro křivku bodem h_3-násobným. Každý paprsek inverse protíná danou křivku ve středu inverse (v násobnosti h_3), v párech odpovídajících si bodů a případně v bodech samodružných, ležících na základní kuželosečce. Kdyby výraz $(n - h_3)$ byl číslo liché znamenalo by to, že na každém paprsku inverse leží jeden samodružný bod inverse, který je zároveň bodem křivky. To by ale znamenalo, že zákl. kuželosečka by měla s křivkou víc než $2n$ bodů společných, a tedy by proti předpokladu byla součástí křivky. Je tedy $(n - h_3)$ číslo sudé.

Druhé tvrzení plyne z věty 1: Je-li bod O_i ($i = 1, 2$) na dané křivce h_i-násobný, je na křivce inversní $(n - h_i - h_3)$-násobný, čili pro invariantní křivku platí:

$$h_i = \tfrac{1}{2}(n - h_3)\,, \quad (i = 1, 2)\,. \tag{7}$$

Už na základě vět 1—4 můžeme říci, že se inversí mohou reprodukovat pouze sextiky

A) s bodem čtyřnásobným ve středu inverse a s obyčejnými body v druhých dvou bodech hlavních (budeme je nazývat sextiky skupiny A),

B) mající ve všech třech bodech hlavních body dvojnásobné (sextiky skupiny B) a

C) sextiky, na nichž střed inverse neleží a v druhých dvou hlavních bodech jsou body trojnásobné (sextiky skupiny C).

2. V tomto odstavci si najdeme podmínky pro koeficienty rovnic invariantních křivek ve všech těchto třech případech.

Věta 5. *Nerozložitelná sextika skupiny* A *se reprodukuje inversí* (2) *tehdy a jen tehdy, když platí:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ a_{00} = a_{10} = a_{11} = a_{20} = a_{21} = a_{21} = a_{30} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{60} = a_{66} = 0 \\ \text{(při čemž alespoň jedno z čísel } a_{4i}\ (i = 1, 2, \ldots, 4) \text{ je různé od nuly)}\,, \end{array}\right\} \quad (8a)$$

$$\text{b)}\ a_{61} = a_{40}\,,\quad a_{62} = a_{41}\,,\quad a_{63} = a_{42}\,,\quad a_{64} = a_{43}\,,\quad a_{65} = a_{44}\,. \qquad (8b)$$

Důkaz. Podmínky (8a) vyjadřují polohu sextiky vzhledem k souř. systému. Rovnice sextiky při této volbě souř. systému tedy zní:

$$\begin{aligned} f \equiv x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) + \\ + x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^3x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^3 + a_{54}x_1x_2^4 + a_{55}x_2^5) + \\ + x_1x_2(a_{61}x_1^4 + a_{62}x_1^3x_2 + a_{63}x_1^2x_2^2 + a_{64}x_1x_2^3 + a_{65}x_2^4) = 0\,. \end{aligned}$$

Provedeme-li na tuto rovnici transformaci (2), dostaneme po vynechání faktoru $x_0x_2x_4^3$ (a po vynechání čárek) rovnici

$$\begin{aligned} F \equiv x_1x_2(x_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) + \\ + x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^3x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^3 + a_{54}x^1x_2^4 + a_{55}x_2^5) + \\ + x_3^2\,(a_{61}x_1^4 + a_{62}x_1^3x_2 + a_{63}x_1^2x_2^2 + a_{64}x_1x_2^3 + a_{64}x_2^4) = 0 \end{aligned}$$

porovnáním koeficientů obou rovnic $f \equiv kF$ dostáváme podmínky reprodukce ve tvaru:

$$\begin{array}{lcl} a_{40} = ka_{61}\,, & & a_{61} = ka_{40}\,, \\ a_{41} = ka_{62}\,, & a_{5i} = ka_{5i}\,, & a_{62} = ka_{41}\,, \\ a_{42} = ka_{63}\,, & (i = 1, 2, \ldots, 5)\,, & a_{63} = ka_{42}\,, \\ a_{43} = ka_{64}\,, & & a_{64} = ka_{43}\,, \\ a_{44} = ka_{65}\,, & & a_{65} = ka_{44} \end{array}$$

a z nich určíme číselný faktor k:

Kdyby všechna $a_{5i} = 0$, pak by existovalo řešení $k = \pm 1$; v tom případě však by sextika byla rozložitelná (faktor $x_3^2 \pm x_1x_2$). Je tedy aspoň jedno z těchto čísel různé od nuly a z této rovnice pak plyne $k = 1$ a tím je dokázána nutnost podmínek (8b).

Postačitelnost podmínek se ukáže přímým obrácením tohoto postupu.

Sextika skupiny A, reprodukovaná inversí (2) má tedy rovnici:

$$\left.\begin{aligned} (x_3^2 + x_1x_2)(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) + \\ + x_3(a_{50}x_1^5 + a_{51}x_1^4x_2 + a_{52}x_1^5x_2^2 + a_{53}x_1^2x_2^2 + a_{54}x_1x_2^4 + a_{55}x_2^5) = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Věta 6. *Nerozložitelná sextika skupiny* B *se reprodukuje inversí* (2) *tehdy a jen tehdy, když platí:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ a_{00} = a_{10} = a_{11} = a_{50} = a_{55} = a_{60} = a_{61} = a_{65} = a_{66} = 0 \\ \text{(při čemž vždy aspoň jedno číslo v každé z trojic} \\ \qquad a_{20}, a_{21}, a_{22};\ a_{40}, a_{51}, a_{62};\ a_{44}, a_{54}, a_{64} \text{ je různé od nuly)}, \end{array}\right\} \quad (10\text{a})$$

$$\text{b)}\ \left.\begin{array}{llll} a_{51} = a_{30}, & a_{53} = a_{32}, & a_{62} = a_{20}, & \\ a_{52} = a_{31}, & a_{54} = a_{33}, & a_{63} = a_{21}, & a_{64} = a_{22}. \end{array}\right\} \quad (10\text{b})$$

Věta 6a. *Nerozložitelná sextika skupiny* B *se reprodukuje inversí* (4) *tehdy a jen tehdy, když platí podmínky* (10a) *a podmínky:*

$$\left.\begin{array}{llll} a_{30} = a_{21}, & a_{41} = a_{32}, & a_{52} = a_{43}, & \\ a_{40} = a_{22}, & a_{51} = a_{33}, & a_{62} = a_{44}, & a_{63} = a_{54}. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Věta 6b. *Nerozložitelná sextika skupiny* B *se reprodukuje inversí* (5) *tehdy a jen tehdy, když platí podmínky* (10a) *a podmínky:*

$$\left.\begin{array}{llll} a_{33} = a_{21}, & a_{44} = a_{20}, & a_{54} = a_{30}, & \\ a_{43} = a_{31}, & a_{53} = a_{41}, & a_{63} = a_{51}, & a_{64} = a_{40}. \end{array}\right\} \quad (12)$$

Věta 7. *Nerozložitelná sextika skupiny* C *se reprodukuje inversí* (2) *tehdy a jen tehdy, když platí:*

$$\text{a)}\ a_{00} \neq 0,\quad a_{40} = a_{44} = a_{50} = a_{51} = a_{54} = a_{55} = a_{60} = a_{61} = a_{62} = \\ = a_{64} = a_{65} = a_{66} = 0, \quad (13\text{a})$$

$$\text{b)}\ \left.\begin{array}{lll} a_{41} = a_{20}, & a_{43} = a_{22}, & a_{53} = a_{11}, \\ a_{42} = a_{21}, & a_{52} = a_{10}, & a_{63} = a_{00}. \end{array}\right\} \quad (13\text{b})$$

Důkazy vět 6, 6a, 6b a 7 jsou analogické důkazu věty 5.

Rovnice sextiky skupiny B, reprodukované inversí (2), má tedy tvar:

$$\left.\begin{array}{l} (x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \\ + x_3(x_3^2 + x_1x_2)(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) + \\ + x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) = 0. \end{array}\right\} \quad (14)$$

Rovnice sextiky skupiny C, invariantní vůči téže inversi, vypadá takto:

$$\left.\begin{array}{l} (x_3^6 + x_1^3x_2^3)\,a_{00} + x_3(x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{10}x_1 + a_{11}x_2) + \\ + x_3^2(x_3^2 + x_1x_2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \\ + x_3^3(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) = 0. \end{array}\right\} \quad (15)$$

3. Zajímejme se nyní o možnost reprodukce sextiky více inversemi se společnými hlavními body. Musíme uvažovat dvě možnosti:

1. inverse mají společný střed inverse a hlavní trojstran, ale mají různé základní kuželosečky;

2. inverse mají sice společný hlavní trojstran, ale středy inversí nejsou totožné (střed jedné inverse leží v některém z druhých dvou hlavních bodů druhé inverse).

Věta 8. *Nerozložitelná sextika skupiny* A *se nereprodukuje víc inversemi s týmž středem inverse a s týmiž klavními body.*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje nerozložitelná sextika skupiny A, invariantní současně vůči inversi (2) a vůči inversi (1), kde předpokládáme $\varrho \neq 0$, $\varrho \neq 1$; provedeme-li na sextiku (9) tuto druhou transformaci, dostaneme porovnáním koeficientů (po vynechání čárek a faktoru $x_1x_2x_3^4$) podmínky:

$$a_{4i} = ka_{4i}\,, \qquad a_{5j} = k\varrho a_{5j}\,, \qquad a_{4i} = k\varrho^2 a_{4i}\,,$$
$$(i = 0, 1, \ldots, 4)\,, \quad (j = 0, 1, \ldots, 5)\,, \quad (i = 0, 1, \ldots, 4)\,.$$

Nemá-li se křivka rozpadnout, jsou tyto podmínky splnitelné pouze tak, že $k = 1$, $\varrho = 1$, což je ale spor s předpokladem.

Věta 9. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* B *byla reprodukována více inversemi se společným středem a společnými body hlavními, jest:*

a) tyto inverse jsou dvě a je-li jedna z nich tvaru:

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : x_1'x_2'\,, \tag{2}$$

je druhá tvaru:

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : -\,x_1'x_2'\,; \tag{16}$$

b) splnění podmínek (10) *a podmínek:*

$$a_{30} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0\,. \tag{17}$$

Důkaz. Sextika skupiny B invariantní vůči (2) má rovnici (14); provedeme-li na tuto rovnici transformaci (1) s předpokladem $\varrho \neq 0$ a $\varrho \neq 1$, dostaneme (po vynechání čárek a faktoru $x_1^2x_2^2x_3^2$) porovnáním koeficientů:

$$a_{2i} = ka_{2i}\,, \qquad a_{3j} = k\varrho a_{3j}\,, \qquad a_{4k} = k\varrho^2 a_{4k}\,,$$
$$a_{2i} = k\varrho^4 a_{2i}\,, \quad a_{3j} = k\varrho^3 a_{3j}\,,$$
$$(i = 0, 1, 2)\,, \quad (j = 0, 1, \ldots, 3)\,, \quad (k = 0, 1, \ldots, 4)\,.$$

Tyto podmínky jsou splnitelné — aniž se křivka rozpadne — pouze tak, že $k = 1$, a buďto je aspoň jedno z čísel a_{3j} různé od nuly a pak nutně $\varrho = 1$, nebo jsou všechna a_{3j} rovna nule a pak také existuje řešení $\varrho = -1$.

Postačitelnost těchto podmínek se ukáže obrácením tohoto postupu.

Některé vlastnosti sextik, reprodukovaných těmito dvěma inversemi budou ukázány v následujícím odstavci.

V dalším budeme ještě potřebovat podmínky, analogické podmínkám věty 9, pro jinou volbu souř. systému:

Věta 9a. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* B *byla reprodukována více inversemi se společným středem a společnými body hlavními, jest:*

a) tyto inverse jsou dvě a je-li jedna z nich tvaru:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \quad x'_2x'_3 : x'_1x'_2 : x'_1x'_3 \,, \tag{4}$$

je druhá tvaru:

$$x_1 : x_2 : x_3 = -\, x'_2x'_3 : x'_1x'_2 : x'_1x'_3 \,; \tag{18}$$

b) splnění podmínek (10a), (11) *a podmínek:*

$$a_{21} = a_{32} = a_{43} = a_{54} = 0 \,. \tag{19}$$

Věta 9b. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* B *byla reprodukována více inversemi se spol. středem inverse a společnými body hlavními, jest:*

a) tyto inverse jsou dvě a je-li jedna z nich inverse (5), *je druhá tvaru:*

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_1x'_2 : -\, x'_1x'_3 : x'_2x'_3 \,; \tag{20}$$

b) splnění podmínek (10a), (12) *a podmínek:*

$$a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{51} = 0 \,. \tag{21}$$

Důkazy vět 9a a 9b jsou naprosto stejné jako důkaz věty 9.

Věta 10. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby nerozložitelná sextika skupiny* C *byla invariantní vůči více inversím se společným středem a společnými body hlavními, jest:*

a) tyto inverse jsou právě tři a je-li jedna z nich inverse (2), *jsou druhé dvě tvaru:*

$$\left.\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= x'_1x'_3 : x'_2x'_3 : \varepsilon x'_1x'_2 \\ x_1 : x_2 : x_3 &= x'_1x'_3 : x'_2x'_3 : \varepsilon^2 x'_1x'_2 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(*kde ε je komplexní hodnota třetí odmocniny z 1*);

b) splnění podmínek (13) *a podmínek:*

$$a_{10} = a_{11} = a_{20} = a_{21} = a_{22} = 0 \,. \tag{23}$$

Důkaz této věty je podobný důkazu věty 9 s tím rozdílem, že vede u nerozložitelné křivky na rovnici $\varrho^3 - 1 = 0$ pro ϱ.

Vlastnosti sextik, reprodukovaných touto trojicí inversí, si ukážeme v odstavci **5**.

Chceme-li se nyní zajímat o sextiky, invariantní vůči dvěma inversím se společným hlavním trojstranem, ale s různými středy, musíme se již omezit pouze na sextiky skupiny B, t. j. mající ve všech třech hlavních bodech body dvojnásobné.

Věta 11. *Nerozložitelná sextika je invariantní současně vůči inversím* (2) *a* (4) *tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny podmínky* (10) *a podmínky:*

$$\left.\begin{aligned} a_{30} = a_{33} = a_{21} \,, \quad a_{32} = a_{41} \,, \quad a_{43} = a_{31} \,, \\ a_{22} = a_{40} \,, \quad a_{44} = a_{20} \,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Důkaz. Proveďme na sextiku (14) transformaci (4); porovnáním koeficientů dostáváme nutné podmínky pro reprodukci:

$$\begin{array}{llll}
a_{20} = ka_{20}\,, & a_{21} = ka_{30}\,, & a_{40} = ka_{22}\,, & a_{31} = ka_{43}\,,\\
a_{31} = ka_{31}\,, & a_{22} = ka_{40}\,, & a_{41} = ka_{32}\,, & a_{33} = ka_{21}\,,\\
a_{42} = ka_{42}\,, & a_{30} = ka_{21}\,, & a_{43} = ka_{31}\,, & a_{20} = ka_{44}\,,\\
a_{32} = ka_{32}\,, & a_{32} = ka_{41}\,, & a_{44} = ka_{20}\,, & a_{21} = ka_{33}\,.\\
a_{22} = ka_{22}\,, & a_{33} = ka_{30}\,, & a_{30} = ka_{33}\,, &
\end{array}$$

Kdyby všechny koeficienty v prvém sloupci byly rovny nule, pak křivka je rozložitelná (faktor $x_1 + x_1x_2$); je tedy aspoň jeden z nich různý od nuly a pak $k = 1$ a tím dostáváme podmínky (24).

Postačitelnost se zase ukáže tak, že křivka, jejíž koeficienty splňují podmínky (10) a (24) se provedením transformací (2) a (4) nemění (až na faktor).

Věta 12. *Sextika, reprodukovaná inversemi (2) a (4) je současně invariantní vůči třetí inversi, která má střed ve zbývajícím vrcholu společného hlavního trojstranu a druhé dva hlavní body ve středech prvých dvou inversí.*

D ů k a z je jednoduchý. Podmínky pro reprodukci sextiky z věty 11 jsou identické s podmínkami věty 6b pro reprodukci sextiky inversí (5).

Sextika, reprodukovaná inversemi (2), (4) a (5) má rovnici:

$$\left.\begin{array}{r}
(x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) +\\
+ x_3(x_3^2 + x_1x_2)(a_{21}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{21}x_2^3) +\\
+ x_3^2(a_{22}x_1^4 + a_{32}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{31}x_1x_2^3 + a_{20}x_2^4) = 0\,.
\end{array}\right\} \qquad (25)$$

Vlastnosti této křivky jsou vyšetřovány v odstavci 6.

Hledáme-li maximální počet inversí se společnými hlavními body reprodukující sextiky, jsou nyní myslitelné kombinace inversí z vět 9 a 12, t. j. ke každé z inversí (2), (4) a (5) může existovat právě jedna inverse další podle věty 9 (resp. 9a, resp. 9b). Extrémní případ reprodukce sextiky šesti inversemi je vyšetřován v posledním odstavci.

4. Ve větě 9 byly odvozeny nutné a postačující podmínky pro reprodukci sextiky dvěma inversemi. Všimněme si nyní blíže tohoto případu.

Věta 13. *Inverse*

$$\begin{array}{l}
\boldsymbol{T}_1 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : x_1'x_2'\\
\boldsymbol{T}_2 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : -x_1'x_2'
\end{array}$$

spolu s kolineací

$$\boldsymbol{K} \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : -x_3' \qquad (26)$$

a spolu s identitou tvoří komutativní grupu.

D ů k a z se provede skládáním těchto transformací a přezkoušením tabulky této grupy:

	J	T_1	T_2	K
J	J	T_1	T_2	K
T_1	T_1	J	K	T_2
T_2	T_2	K	J	T_1
K	K	T_2	T_1	J

(27)

Rovnice sextiky, reprodukované touto grupou transformací, zní:

$$\left.\begin{aligned} &(x_3^4 + x_1^2x_2^2)(a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \\ &+ x_3^2(a_{40}x_1^4 + a_{41}x_1^3x_2 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{43}x_1x_2^3 + a_{44}x_2^4) = 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Věta 14. *Libovolnému bodu M, který neleží na hlavních přímkách a zákl. kuželosečkách obou inversí, přiřazují transformace grupy další tři body (různé navzájem i různé od bodu M). Tato čtyřbodová skupina má tu vlastnost, že kterémukoliv bodu této skupiny odpovídá v kterékoliv transformaci grupy zase bod této skupiny.*

Důkaz. Mějme bod $M(a_1; a_2; a_3)$, pro jehož souřadnice nechť platí $a_1a_2a_3 \neq 0$, $a_3^2 \neq \pm a_1a_2$. V $\mathbf{T}_1$ bodu M odpovídá bod $M_1(a_1a_3; a_2a_3; a_1a_2)$, v $\mathbf{T}_2$ bod $M_2(a_1a_3; a_2a_3; —a_1a_2)$ a v $\mathbf{K}$ bod $M_3(a_1; a_2; —a_3)$. Z tabulky grupy je nyní vidět, že podrobíme-li kterýkoliv bod této čtveřice kterékoliv transformaci grupy, dostaneme zase bod skupiny. Tyto čtyři body leží ovšem v jedné přímce, procházející společným středem obou inversí i kolineace.

Věta 15. *Nechť bod M' leží na zákl. kuželosečce jedné inverse (nikoliv v bodě hlavním). Pak transformace grupy (27) (s výjimkou identity a té inverse, v níž je M' samodružný) přiřazují bodu M' jako bod odpovídající M'_2 druhý průsečík paprsku inverse bodu M' s toutéž základní kuželosečkou. Volba obyčejných dvojnásobných bodů sextiky v dvojici bodů M' a M'_2 je ekvivalentní dvěma lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

Důkaz. Nechť pro souřadnice bodu M' platí $a_1a_2a_3 \neq 0$, $a_3^2 — a_1a_2 = 0$; pak souřadnice bodu M' můžeme psát ve tvaru $M'(a_1^2; a_3^2; a_1a_3)$; podle označení z předchozí věty platí $M' = M'_1$ a $M'_2 = M'_3$, což je právě průsečík paprsku inverse bodu M' s kuželosečkou $x_3^2 — x_1x_2 = 0$. Tento pár bodů mohl by splynout pouze v bodě hlavním a to je předpokladem vyloučeno. Obdobně by se důkaz provedl pro bod na druhé zákl. kuželosečce. Tvrzení o počtu podmínek pro určení křivky se dokáže tak, že dosadíme souřadnice bodu M' do rovnice křivky a do jejích prvých parc. derivací. Dá se pak ukázat, že tato soustava 4 homog. lin. rovnic pro koeficienty křivky má hodnost právě 2. Bod M'_2 musí pak být pro křivku rovněž bodem dvojnásobným podle věty 3.

Na základě těchto dvou pomocných vět můžeme vyslovit větu o singulárních bodech reprodukovaných sextik:

Věta 16. *Nerozložitelné sextiky reprodukované grupou (27) mají pouze body dvojnásobné. Mají-li pouze obyčejné body dvojnásobné, mohou být pouze rodu 7, 5, 3 a 1. U těchto sextik leží všechny body dvojnásobné na zákl. kuželosečkách obou inversí.*

Důkaz. Sextika invariantní vůči grupě (27) má v hlavních bodech body dvojnásobné (a je tedy rodu nejvýše 7). Kdyby tato sextika měla ještě další bod singulární aspoň trojnásobný, musela by mít podle vět 14 a 15 ještě jeden (nebo tři) body sing. o stejné násobnosti, a pak paprsek inverse, na němž tyto body leží, by měl s křivkou nejméně 8 průsečíků společných a tedy by křivka byla rozložitelná. Kdyby měla sextika bod dvojnásobný ve čtveřici bodů z věty 14, měl by zase paprsek inverse 10 průsečíků s křivkou. Mohou tedy u nerozložitelné sextiky další body dvojnásobné tvořit pouze dvojice bodů z věty 15 nebo může ležet jeden bod dvojnásobný na ose kolineace **K**. V tomto případě by však podle věty 2 nebyl ve středu inverse obyčejný bod dvojnásobný.

Přitom u sextiky rodu 1 leží dva páry dvojnásobných bodů (kromě bodů hlavních) na jedné zákl. kuželosečce, kdežto třetí pár leží na zákl. kuželosečce druhé inverse. Přesto však těchto 6 bodů má zvláštní polohu:

Věta 17. *U sextiky rodu 1 z předchozí věty leží 6 bodů dvojnásobných (kromě bodů hlavních) na jisté kuželosečce.*

Důkaz. Nechť dva páry dvojnásobných bodů leží na zákl. kuželosečce $x_3^2 - x_1x_2 = 0$, t. j. jejich souřadnice mají tvar:

$$M(a_1^2;\, a_3^2;\, a_1a_3)\,,\quad M'(a_1^2;\, a_3^2;\, -a_1a_3)\,,\quad (a_1a_3 \neq 0)$$
$$N(b_1^2;\, b_3^2;\, b_1b_3)\,,\quad N'(b_1^2;\, b_3^2;\, -b_1b_3)\,,\quad (b_1b_3 \neq 0)\,;$$

třetí pár bodů nechť leží na druhé zákl. kuželosečce $x_3^2 + x_1x_2 = 0$, takže jejich souřadnice jsou

$$P(c_1^2;\, -c_3^2;\, c_1c_3)\,,\quad P'(a_1^2;\, -c_3^2;\, -c_1c_3)\,,\quad (c_1c_3 \neq 0)\,,$$

při čemž předpokládáme, že P neleží na spojnicích MM', NN'. Pak determinant

$$\begin{vmatrix} a_1^4 & a_3^4 & a_1^2a_3^2 & -a_1^3a_3 & -a_1a_3^3 & a_1^2a_3^2 \\ a_1^4 & a_3^4 & a_1^2a_3^2 & a_1^3a_3 & a_1a_3^3 & a_1^2a_3^2 \\ b_1^4 & b_3^4 & b_1^2b_3^2 & -b_1^3b_3 & -b_1b_3^3 & b_1^2b_3^2 \\ b_1^4 & b_3^4 & b_1^2b_3^2 & b_1^3b_3 & b_1b_3^2 & b_1^2b_3^2 \\ c_1^4 & c_3^4 & c_1^2c_3^2 & c_1^3c_3 & -c_1c_3^3 & -c_1^2c_3^2 \\ c_1^4 & c_3^4 & c_1^2c_3^2 & -c_1^3c_3 & c_1c_3^3 & -c_1^2c_3^2 \end{vmatrix}$$

je nulový, jak se snadno přesvědčíme odečtením sudých řádků od lichých a rozvedením podle prvých tří sloupců pomocí Laplaceovy věty.

Věta 18. *Paprsek inverse protíná reprodukovanou sextiku v bodech po dvou harmonicky sdružených (vzhledem ke středu inverse a průsečíku paprsku inverse s hlavní přímkou, neprocházející středem inverse). Tečny křivky v párech odpovídajících si bodů se protínají na hlavní přímce, neprocházející středem inverse.*

Důkaz této věty plyne ihned z toho, že kolineace (26) je involutorní perspektivní kolineace se středem ve středu obou inversí a s osou kolineace v hlavní přímce, neprocházející středem. Viz na př. J. Vojtěch: Rovinné sextiky invariantní při periodických kolineacích (Věstník Král. české společnosti nauk, 1913).

5. V tomto odstavci si uvedeme věty, obdobné větám předchozího odstavce, pro sextiky skupiny C, reprodukované trojicí inversí (2) a (22). Důkazy nebudeme provádět, protože jsou rovněž obdobné.

Věta 19. *Inverse*

$$T_1 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \ \ x_1'x_2' ,$$
$$T_2 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varepsilon x_1'x_2' ,$$
$$T_3 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \varepsilon^2 x_1'x_2' ,$$

(kde ε, ε^2 jsou kompl. sdružené hodnoty $\sqrt[3]{1}$), spolu s kolineacemi

$$K_1 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : \varepsilon^2 x_3' ,$$
$$K_2 \equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : \varepsilon x_3'$$

a spolu s identitou tvoří grupu.

Tabulka této grupy vypadá takto:

	J	T_1	T_2	T_3	K_1	K_2
J	J	T_1	T_2	T_3	K_1	K_2
T_1	T_1	J	K_1	K_2	T_2	T_3
T_2	T_2	K_2	J	K_1	T_3	T_1
T_3	T_3	K_1	K_2	J	T_1	T_2
K_1	K_1	T_3	T_1	T_2	K_2	J
K_2	K_2	T_2	T_3	T_1	J	K_1

(29)

Rovnice sextiky, reprodukované touto grupou, zní:

$$x_3^6 a_{00} + x_3^3(a_{30}x_1^3 + a_{31}x_1^2x_2 + a_{32}x_1x_2^2 + a_{33}x_2^3) + x_1^3x_2^3a_{00} = 0 . \qquad (30)$$

Věta 20. *Libovolnému bodu M, který neleží na hlavních přímkách a zákl. kuželosečkách inversí, přiřazují transformace grupy* (29) *dalších pět bodů* (*různých navzájem i od bodu M*); *tato šestibodová skupina má tu vlastnost, že kterémukoliv bodu této skupiny odpovídá v kterékoliv transformaci grupy zase bod této skupiny.*

Věta 21. *Nechť bod M leží na zákl. kuželosečce jedné inverse* (*nikoliv v bodě hlavním*). *Pak transformace grupy* (29) (*s výjimkou identity a inverse, v níž je M samodružný*) *přiřazují bodu M jako body odpovídající vždy jeden z průsečíků paprsku inverse bodu M s druhými dvěma zákl. kuželosečkami. Volba obyčejných dvojnásobných bodů sextiky* (30) *v této trojici bodů je ekvivalentní dvěma lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

Věta 22. *Nerozložitelné sextiky invariantní vůči grupě* (29) *mající dva obyčejné body trojnásobné v bodech hlavních* (*nikoliv ve středu inversí*) *mohou být pouze rodu* 4 *nebo* 1. (*V tomto případě další tři body dvojnásobné leží v trojici bodů z předchozí věty.*)

Důkazy vět 20—22 jsou anologické důkazu vět 14—16.

6. Ve větě 12 bylo ukázáno, že existují sextiky, reprodukované třemi inversemi se společným hlavním trojstranem, ale s různými středy inversí. Všimněme si blíže tohoto případu:

Věta 23. *Inverse*

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{T}_1 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : x_1'x_2' \,, \\ \mathsf{T}_2 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_2'x_3' : x_1'x_2' : x_1'x_3' \,, \\ \mathsf{T}_3 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_2' : x_1'x_3' : x_2'x_3' \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

spolu s kolineacemi

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_1 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_3' : x_1' : x_2' \,, \\ \mathsf{K}_2 &\equiv x_1 : x_2 : x_3 = x_2' : x_3' : x_1' \end{aligned}$$

a spolu s identitou tvoří grupu.

Důkaz této věty je stejný jako důkaz analogických vět 13 a 19. Také tabulka této grupy je naprosto stejná jako tabulka grupy z věty 19.

Věta 24. *Libovolnému bodu M, který neleží na žádné z hlavních přímek a na žádné ze základních kuželoseček inversí, přiřazují všechny transformace grupy* (31) *dalších pět bodů (různých navzájem i od bodu M). Volba dvojnásobných bodů invariantní sextiky v této šestibodové skupině je ekvivalentní třem lineárním homog. podmínkám pro určení křivky.*

Věta 25. *Leží-li bod M na jediné základní kuželosečce, pak všechny transformace grupy* (31) *mu přiřazují jako body odpovídající další dva body (různé navzájem i od bodu M). Volba dvojnásobných bodů sextiky v této trojici bodů je ekvivalentní dvěma lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

Důkazy těchto dvou vět jsou naprosto stejné jako důkaz věty 14 a 15.

Věta 26. *Leží-li bod M v průsečíku dvou základních kuželoseček, je také samodružným bodem v třetí inversi. Volba dvojnásobného, resp. trojnásobného, resp. čtyřnásobného bodu v tomto průsečíku všech tří zákl. kuželoseček je ekvivalentní jedné, resp. dvěma, resp. čtyřem lin. homog. podmínkám pro určení křivky.*

Důkaz. Základní kuželosečky mají rovnice:

$$x_3^2 - x_1x_2 = 0\,; \quad x_1^2 - x_2x_3 = 0\,; \quad x_2^2 - x_1x_3 = 0\,;$$

prvé dvě kuželosečky se protínají v bodech:

$$(0, 1, 0)\,; \quad (1, 1, 1)\,; \quad (\varepsilon^2, \varepsilon, 1)\,; \quad (\varepsilon, \varepsilon^2, 1)\,,$$

z nichž první je bod hlavní a zbývající tři leží také na zákl. kuželosečce třetí inverse. Vyjádření počtu podmínek, které potřebuje volba singulárního bodu křivky v průsečíku zákl. kuželoseček, provedeme opět tak, že dosadíme souřadnice tohoto průsečíku do rovnice křivky (25) a do jejích prvých, resp. prvých a druhých, resp. prvých, druhých a třetích parc. derivací této rovnice a určíme hodnost soustavy lin. rovnic, které takto obdržíme.

Na základě pomocných vět 24—26 můžeme říci, že grupou (31) se reprodukují i sextiky s vyššími singularitami. Tak se může reprodukovat sextika s jedním bodem čtyřnásobným (v průsečíku všech tří zákl. kuželoseček) a s třemi body dvojnásobnými (v bodech hlavních), sextika s dvěma body trojnásobnými (v průsečících zákl. kuželoseček) a s třemi body dvojnásobnými (v hlavních bodech), atd.

Nebudeme se zabývat všemi těmito případy a obrátíme se k otázce, nadhozené v závěru odstavce 3, totiž k možnosti reprodukce sextiky grupou (31) a dalšími třemi inversemi z vět 9, 9a a 9b.

7. Věta 27. *Sextika reprodukovaná grupou* (31) *je současně invariantní vůči grupě* (27) *tehdy a jen tehdy, když:*

$$\left.\begin{aligned} a_{00} = a_{10} = a_{11} = a_{21} = a_{30} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{41} = a_{43} = a_{50} = a_{51} = \\ = a_{52} = a_{53} = a_{54} = a_{55} = a_{60} = a_{61} = a_{63} = a_{65} = a_{66} = 0\,, \\ a_{40} = a_{22}\,, \quad a_{44} = a_{20}\,, \quad a_{62} = a_{20}\,; \quad a_{64} = a_{22}\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Jsou-li tyto podmínky splněny, je sextika také invariantní vůči inversím (18) *a* (20).

Důkaz. Nutné a postačující podmínky pro reprodukci sextiky grupou (27) jsou podmínky (10) a (17) z věty 9 a pro reprodukci sextiky grupou (31) podmínky (10) a (24). Spojíme-li oboje tyto podmínky, dostaneme podmínky naší věty. Druhá část věty plyne z toho, že splněním podmínek (32) jsou také splněny nutné a postačující podmínky vět 9a a 9b.

Sextika, reprodukovaná těmito šesti inversemi má rovnici:

$$\left.\begin{aligned} x_3^4(a_{20}x_1^2 + a_{22}x_2^2) + x_3^2(a_{22}x_1^4 + a_{42}x_1^2x_2^2 + a_{20}x_2^4) + \\ + x_1^2x_2^2(a_{20}x_1^2 + a_{22}x_2^2) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Věta 28. *Sextiky sítě* (32) *mají v bodech hlavních obyčejné uzly až na dva svazky sextik, které tam mají dvojnásobné body s jedinou tečnou s dotykem čtyřbodovým.*

Důkaz. Dvojice tečen ve všech hlavních bodech jsou vyjádřeny ryze kvadratickou rovnicí, na př. dvojice tečen v bodě O_3 má tvar: $a_{20}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0$. Splynout tyto dvě přímky mohou jedině tehdy, je-li jeden z koeficientů a_{20}, a_{22} roven nule (kdyby byly oba současně rovny nule pak se křivka rozpadne na dvojnásob počítané hlavní přímky). Pak touto jedinou tečnou je jedna z hlavních přímek, mající v bodě dotyku styk čtyřbodový (druhé dva průsečíky s křivkou jsou v druhém bodě hlavním). Vzhledem k tomu, že tyto dvojice tečen mají ve všech hlavních bodech stejný diskriminant, nastane tento zjev současně ve všech třech hlavních bodech.

Věta 29. *Tři svazky sextik sítě* (32) *s obyčejnými body dvojnásobnými v hlavních bodech mají tu vlastnost, že dvojice tečen v těchto dvojnásobných bodech se dotýkají jediné kuželosečky.*

Důkaz. Determinant, vyjadřující podmínku, aby šest přímek

$$\begin{aligned} &x_1\sqrt{a_{00}} + \mathrm{i}x_2\sqrt{a_{22}} = 0\,, \quad x_2\sqrt{a_{00}} + \mathrm{i}x_3\sqrt{a_{20}} = 0\,, \quad x_1\sqrt{a_{22}} + \mathrm{i}x_3\sqrt{a_{00}} = 0\,, \\ &a_1\sqrt{a_{00}} - \mathrm{i}x_2\sqrt{a_{22}} = 0\,, \quad x_2\sqrt{a_{00}} - \mathrm{i}x_3\sqrt{a_{20}} = 0\,, \quad x_1\sqrt{a_{22}} - \mathrm{i}x_3\sqrt{a_{00}} = 0 \end{aligned}$$

se dotýkalo kuželosečky, má hodnotu $8\mathrm{i}(a_{00}^3 - a_{22}^3)\,.\,\sqrt{a_{00}^3a_{22}^3}$. Je tedy roven nule tehdy a jen tehdy, je-li $a_{00}^3 = a_{22}^3$.

Věta 30. *V síti (32) existují tři svazky sextik, které mají další čtyři body dvojnásobné.*

Důkaz. Vzhledem k větám (14), (15), (24), (25) a (26) jediné skupiny bodů, které jako celek reprodukují všechny inverse a které mají nejvýš 7 bodů, jsou skupiny, tvořené vždy jedním průsečíkem zákl. kuželoseček inversí grupy (31) a těmi třemi body, které mu přiřadí inverse (16), (18) a (20). Jsou to tyto čtveřice bodů:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{a)}\ (1, 1, 1)\,, & (1, 1, -1)\,, & (1, -1, 1)\,, & (-1, 1, 1)\,; \\ \text{b)}\ (\varepsilon^2, \varepsilon, 1)\,, & (\varepsilon^2, \varepsilon, -1)\,, & (\varepsilon^2, -\varepsilon, 1)\,, & (-\varepsilon^2, \varepsilon, 1)\,; \\ \text{c)}\ (\varepsilon, \varepsilon^2, 1)\,, & (\varepsilon, \varepsilon^2, -1)\,, & (\varepsilon, -\varepsilon^2, 1)\,, & (-\varepsilon, \varepsilon^2, 1)\,. \end{array}\right\} \qquad (33)$$

Volba dvojnásobných bodů sextiky v jedné této čtveřici je ekvivalentní jedné lineární podmínce pro koeficienty křivky.

O sextikách (32) se mluví také v pojednání J. Vojtěch: Konečné grupy kolineací a rovinné sextiky k sobě příslušné (Rozpravy Akademie 1913), kde se ukazuje, že taková sextika je reprodukována grupou kolineací řádu 12; jedna ze 4 cykl. podgrup 3. řádu má invariantní body v trojici průsečíků zákl. kuželoseček inversí grupy (31) a ostatní tři v bodech, které těmto bodům přiřazují ostatní inverse (t. j. trojice bodů vypsané ve sloupcích (33)). Necyklická podgrupa čtvrtého řádu je složena z identity a 3 involutorních persp. kolineací o středech v hlavních bodech a osách vždy v protilehlé hlavní přímce. Platí tedy věta 18 pro sextiky (32) v každém hlavním bodě.

Резюме

СЕКСТИКИ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КВАДРАТИЧЕСКИХ ИНВЕРСИЙ С ТРЕМЯ ГЛАВНЫМИ ТОЧКАМИ

ВЛАДИМИР МАГЕЛ (Vladimír Mahel), Прага.

(Поступило в редакцию 14/I 1955 г.)

В настоящей работе автор занимается исследованием кривых шестой степени, которые воспроизводятся квадратической инверсией с тремя главными точками или несколькими инверсиями, если у этих инверсий имеются общие главные точки и прямые. При воспроизведении несколькими инверсиями возможны два случая:

1. инверсии обладают общим центром,

2. центр одной инверсии лежит во второй главной точке другой инверсии.

В первом случае:

а) в точности двумя инверсиями воспроизводятся секстики, имеющие двойные точки во всех главных точках (и выполняющие дальнейшие условия (10) и (17));

б) в точности тремя инверсиями воспроизводятся секстики, на которых не лежит центр инверсии и которые имеют тройные точки в других главных точках (и выполняют дальнейшие условия (13) и (23)).

Во втором случае воспроизводятся только секстики с двойными точками в главных точках инверсии (и выполняющие дальнейшие условия (10) и (24)); эти кривые инвариантны также и относительно третьей инверсии, центр которой лежит в последней главной точке.

Максимальное число инверсий (с общим главным трехсторонником), сохраняющих кривые шестой степени, равно шести. Этими шестью инверсиями воспроизводится сеть секстик.

Во всех этих случаях указаны некоторые дальнейшие свойства инвариантных кривых; особое внимание автор уделяет возможным положениям дальнейших особых точек.

Zusammenfassung

ÜBER KURVEN SECHSTER ORDNUNG DIE IN KVADRATISCHEN INVERSIONEN MIT EINEM GEMEINSAMEN HAUPTPUNKTDREIECK INVARIANT SIND

VLADIMÍR MAHEL, Praha.

(Eingegangen am 14. Jänner 1955.)

In dieser Arbeit untersucht der Autor die Kurven 6. Ordnung, die durch kvadratische Inversion mit drei Hauptpunkten, resp. durch mehrere Inversionen mit gemeinsamen Hauptpunktdreieck, reproduziert sind. Es gibt zwei Möglichkeiten für die Reproduktion durch mehrere solche Inversionen:

1. Die Inversionen haben ihren Mittelpunkt gemeinsam.

2. Der Mittelpunkt einer Inversion liegt in einem anderen Hauptpunkte der zweiten Inversion.

Im ersten Falle reproduzieren sich

a) nur durch zwei Inversionen diejenige Kurven 6. Ordnung, die in allen Hauptpunkten Doppelpunkte haben (und weitere Bedingungen (10) und (17) erfüllen),

b) nur durch drei Inversionen diejenige Kurven, auf welchen der Mittelpunkt der Inversion nicht liegt und in den anderen Hauptpunkten dreifache Punkte haben (unter Erfüllung weiterer Bedingungen (13) und (23)).

Im zweiten Falle reproduzieren die zwei Inversionen nur solche Kurven, die in Hauptpunkten Doppelpunkte haben (und erfüllen die Bedingungen (10) und (24)). Diese Kurven sind dann auch durch eine dritte Inversion, die ihren Mittelpunkt in dem dritten Hauptpunkt hat, reproduziert.

Die Maximalzahl der Inversionen (mit gemeinsamen Hauptpunktdreieck) ist sechs; in diesen sechs Inversionen ist eine Schar von Kurven 6. Ordnung invariant.

In allen diesen Fällen sind weitere Eigenschaften der invarianten Kurven gezeigt, besonders die Lage weiterer Singularpunkte betreffend.

O JISTÝCH POSLOUPNOSTECH SKUPIN BODŮ NA KRUŽNICI

LADISLAV KOSMÁK, Praha.

(Došlo dne 1. září 1954.) DT:513.183

Tato práce vznikla z podnětu prof. dr KARLA KOUTSKÉHO v jeho semináři elementární geometrie a obsahuje zobecnění výsledků, které uveřejnil dr JOSEF BREJCHA v pojednání „Čtverec jako limita čtyřúhelníků tětivových a tečnových" (Práce Moravskoslezské akademie věd přírodních, 1952).

Úvodem krátce naznačíme obsah Brejchova článku. Nechť je dána libovolná kružnice a nechť posloupnost čtyřúhelníků vepsaných do této kružnice je definována tak, že její první člen je libovolný takový čtyřúhelník a vrcholy každého dalšího jsou ve středech oblouků dané kružnice nad stranami předcházejícího čtyřúhelníka. V Brejchově práci se dokazuje, že posloupnost délek stran těchto čtyřúhelníků konverguje k číslu $r\sqrt{2}$, kde r je poloměr dané kružnice, t. j. že „tvarem" se tyto čtyřúhelníky blíží čtverci o straně $r\sqrt{2}$; tyto limitní čtverce jsou dva, položené tak, že vrcholy jednoho půlí oblouky dané kružnice nad stranami druhého, a v práci je určena poloha těchto čtverců vzhledem k prvnímu čtyřúhelníku posloupnosti. K analogickým výsledkům dr Brejcha dochází při vyšetřování posloupnosti tečnových čtyřúhelníků, kterou definujeme, vycházejíce z libovolného čtyřúhelníka opsaného dané kružnici, tak, aby se každý další čtyřúhelník té posloupnosti dotýkal dané kružnice v jejích průsečících se spojnicemi jejího středu s vrcholy předcházejícího čtyřúhelníka.

Nyní zobecníme uvedené výsledky methodou zcela odlišnou od Brejchova postupu. Nechť na dané kružnici je libovolně dáno n bodů (n přirozené). Pro snazší vyjadřování učiníme bez újmy obecnosti dalších úvah dva předpoklady. Za prvé budeme předpokládat, že daná kružnice je jednotková kružnice v rovině komplexních čísel. Přiřadíme-li každé komplexní jednotce A její amplitudu $\operatorname{Arg} A$, $0 \leqq \operatorname{Arg} A < 2\pi$, je tím zřejmě definováno prosté zobrazení množiny všech bodů jednotkové kružnice na interval $0 \leqq x < 2\pi$. Za druhé předpokládáme, že pro dané body $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ na jednotkové kružnici platí

$$\operatorname{Arg} A_0 \leqq \operatorname{Arg} A_1 \leqq \ldots \leqq \operatorname{Arg} A_{n-1}\,.$$

Definujme nyní posloupnost $\{(A_{in}, A_{in+1}, \ldots, A_{in+n-1})\}_{i=0}^{\infty}$ uspořádaných skupin bodů na jednotkové kružnici takto: pro $i = 0$ skupinu tvoří dané body

$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$; dále za předpokladu, že byla definována skupina $(A_{kn}, A_{kn+1}, \ldots, A_{kn+n-1})$ pro určité celé $k \geqq 0$, nechť pro body skupiny $(A_{(k+1)n}, A_{(k+1)n+1}, \ldots, A_{(k+1)n+n-1})$ je

$$\operatorname{Arg} A_{(k+1)n+l} = \operatorname{Arg} A_{kn+l} + b \,.\, \alpha_{kn+l}\,, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

kde $0 < b < 1$ a α_{kn+l} definujeme takto: položme

$$h(x) = 0 \text{ pro } x \geqq 0\,,$$
$$h(x) = 1 \text{ pro } x < 0\,;$$

pak nechť pro $l = n - 1$

$$\alpha_{kn+l} = \operatorname{Arg} A_{kn} - \operatorname{Arg} A_{kn+l} + 2\pi \,.\, h(\operatorname{Arg} A_{kn} - \operatorname{Arg} A_{kn+l})\,,$$

a pro $0 \leqq l < n - 1$

$$\alpha_{kn+l} = \operatorname{Arg} A_{kn+l+1} - \operatorname{Arg} A_{kn+l} + 2\pi \,.\, h(\operatorname{Arg} A_{kn+l+1} - \operatorname{Arg} A_{kn+l})\,.^{*)}$$

Pak platí:

Věta 1. *Je*

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \frac{2\pi}{n}\,;$$

je-li $b = \dfrac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla, pak posloupnost $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ má právě nq hromadných bodů, které jsou pro $n = 1$, $q = 2$ souměrně sdruženy podle počátku a v ostatních případech leží ve vrcholech jistého pravidelného nq-úhelníka. Je-li b iracionální, pak každý bod jednotkové kružnice je hromadným bodem posloupnosti $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$.

D ů k a z se opírá o další dvě věty, které nyní vyslovíme a dokážeme.

Nechť N je množina všech přirozených, R množina všech reálných čísel; pro $x \in R$ nechť $E(x)$ je Gaussova funkce čísla x („celá část čísla x"). Nechť dále pro libovolné $u \in R$, $v \in R$, $v \neq 0$ je

$$q_v(u) = E\left(\frac{u}{v}\right), \tag{1}$$

$$r_v(u) = u - vq_v(u)\,; \tag{2}$$

tohoto označení budeme stále používat.

Zřejmě platí:

$$vr_v(u) \geqq 0\,, \tag{3}$$

*) Čtenář nechť si uvědomí jednoduchý geometrický význam právě popsané konstrukce: z dané skupiny bodů dostaneme následující skupinu tím, že každý bod dané skupiny pootočíme kolem středu jednotkové kružnice v kladném smyslu o úhel, rovný b-násobku středového úhlu, příslušejícího k tětivě, spojující ten bod s nejbližším sousedním bodem dané skupiny (postupujeme-li po kružnici v kladném smyslu). Čísla α_i vyjadřují právě velikosti těchto středových úhlů a je snadno patrno, že pro ně platí rekurentní vztah (při $i \geqq n$)

$$\alpha_i = (1 - b)\,\alpha_{i-n} + b\alpha_{i-n+1},\ \text{není-li } i + 1 \text{ dělitelno } n\,,$$

a

$$\alpha_i = (1 - b)\,\alpha_{i-n} + b\alpha_{i-2n+1},\ \text{je-li } i + 1 \text{ dělitelno } n\,.$$

a je-li m celé,

$$q_v(u + mv) = q_v(u) + m\,, \tag{4}$$

$$r_v(u + mv) = r_v(u)\,. \tag{5}$$

Pro libovolné $i \in N$, $k \in N$ položme

$$\tau_k(i) = k(q_k(i) - q_k(i - 1))\,; \tag{6}$$

pak platí

$$\tau_k(i) = 0, \text{ když } i \text{ není dělitelno } k\,,$$

$$\tau_k(i) = k, \text{ když } i \text{ je dělitelno } k\,.$$

Nechť $b \in R$, $0 < b < 1$, $n \in N$ a nechť

$$a_i \in R \text{ pro } i = 0, 1, \ldots, n - 1\,.$$

Pro každé $h \in N$ položme

$$a_h = a_{r_n(h)}\,. \tag{7}$$

Definujme posloupnost $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ tak, že

$$p_i = a_i \text{ pro } i = 0, 1, \ldots, n - 1\,,$$

$$p_i = (1 - b)\, p_{i-n} + b p_{i-n+1-\tau_n(i+1)} \quad \text{pro } i \in N,\ i \geqq n\,.$$

Pro $i \in N$, $i \geqq n$ je zřejmě

$$0 \leqq i - n < i,$$

$$i - n + 1 - \tau_n(i + 1) < i;$$

dále je

$$i - n + 1 - \tau_n(i + 1) \geqq 0,$$

neboť

1. není-li i dělitelno n, pak $n > 1$; buďto $\tau_n(i + 1) = 0$, a pak je dokazovaná nerovnost zřejmá, anebo $\tau_n(i + 1) = n$, t. j $i + 1$ je dělitelno n, a pak musí být $i + 1 \geqq 2n$, z čehož plyne naše nerovnost;

2. je-li i dělitelno n, je buďto $n = 1$, a pak dokazovaná nerovnost plyne z nerovnosti $i \geqq n$, anebo $n > 1$, a v tom případě $\tau_n(i + 1) = 0$.

Tím jsme dokázali, že definice posloupnosti $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ je logicky korektní.

Věta 2. *Pro každé celé nezáporné i je*

$$p_i = \sum_{k=0}^{q_n(i)} \binom{q_n(i)}{k} a_{r_n(i)+k} b^k (1 - b)^{q_n(i)-k}\,. \tag{8}$$

Dále je

$$\lim_{i\to\infty} p_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,. \tag{9}$$

Důkaz. Vztah (8) dokážeme úplnou indukcí. Pro $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ je podle (1) a (2) $q_n(i) = 0$, $r_n(i) = i$, takže (8) vskutku platí. Nechť tedy $i \geqq$

$\geqq n - 1$ a předpokládejme, že (8) platí pro všechna nezáporná celá $j \leqq i$. Potom je

$$p_{i+1} = (1 - b)\, p_{i+1-n} + b p_{i+2-n-\tau_n(i+2)} =$$

$$= (1 - b) \sum_{k=0}^{q_n(i+1-n)} \binom{q_n(i + 1 - n)}{k} a_{r_n(i+1-n)+k}\, b^k (1 - b)^{q_n(i+1-n)-k} +$$

$$+ b \sum_{k=0}^{q_n(i+2-n-\tau_n(i+2))} \binom{q_n(i + 2 - n - \tau_n(i + 2))}{k} a_{r_n(i+2-n-\tau_n(i+2))+k} \,.$$

$$. \, b^k (1 - b)^{q_n(i+2-n-\tau_n(i+2))-k} \,.$$

Z (1) až (6) plyne:

$$q_n(i + 1 - n) = q_n(i + 1) - 1 \,,$$

$$r_n(i + 1 - n) = r_n(i + 1) \,,$$

$$q_n(i + 2 - n - \tau_n(i + 2)) = q_n(i + 2) - 1 - \frac{\tau_n(i + 2)}{n} =$$

$$= q_n(i + 2) - 1 - q_n(i + 2) + q_n(i + 1) =$$

$$= q_n(i + 1) - 1 \,,$$

$$r_n(i + 2 - n - \tau_n(i + 2)) = i + 2 - n - \tau_n(i + 2)) -$$

$$- n q_n(i + 2 - n - \tau_n(i + 2)) =$$

$$= i + 2 - n - \tau_n(i + 2) - n q_n(i + 1) + n =$$

$$= i + 1 - n q_n(i + 1) + 1 - \tau_n(i + 2) =$$

$$= r_n(i + 1) + 1 - \tau_n(i + 2) \,,$$

a zároveň

$$r_n(i + 2 - n - \tau_n(i + 2)) = r_n(i + 2) \,,$$

takže

$$r_n(i + 1) + 1 - \tau_n(i + 2) \geqq 0 \,. \tag{10}$$

Užitím těchto vztahů dostáváme:

$$p_{i+1} = \sum_{k=0}^{q_n(i+1)-1} \binom{q_n(i + 1) - 1}{k} a_{r_n(i+1)+k}\, b^k (1 - b)^{q_n(i+1)-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{q_n(i+1)-1} \binom{q_n(i + 1) - 1}{k} a_{r_n(i+1)+1-\tau_n(i+2)+k}\, b^{k+1} (1 - b)^{q_n(i+1)-1-k} \,,$$

a ježto podle (6) a (7) je

$$a_{r_n(i+1)+1-\tau_n(i+2)+k} = a_{r_n(i+1)+1+k} \,,$$

je po jednoduché úpravě

$$p_{i+1} = \sum_{k=0}^{q_n(i+1)-1} \binom{q_n(i + 1) - 1}{k} a_{r_n(i+1)+k}\, b^k (1 - b)^{q_n(i+1)-k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{q_n(i+1)} \binom{q_n(i + 1) - 1}{k - 1} a_{r_n(i+1)+k}\, b^k (1 - b)^{q_n(i+1)-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{q_n(i+1)} \binom{q_n(i+1)}{k} a_{r_n(i+1)+k}\, b^k (1-b)^{q_n(i+1)-k}.$$

Tím je vztah (8) dokázán.

Ze (7) plyne, že (8) lze upravit na tvar

$$p_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{r_n(i)+k} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{q_n(i)}{k+nl} b^{k+nl} (1-b)^{q_n(i)-k-nl} \tag{11}$$

Položme nyní*) $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$; je-li k celé, $0 \leqq k < n$, platí

$$\sum_{m=0}^{n-1} (1-b+b\omega^m)^{q_n(i)}\, \omega^{-km} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{q_n(i)} \binom{q_n(i)}{t} (1-b)^{q_n(i)-t} . b^t \omega^{mt-mk} =$$

$$= \sum_{t=0}^{q_n(i)} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{q_n(i)}{t} (1-b)^{q_n(i)-t}\, b^t \omega^{m(t-k)} =$$

$$= \sum_{t=0}^{q_n(i)} \binom{q_n(i)}{t} (1-b)^{q_n(i)-t}\, b^t \sum_{m=0}^{n-1} \omega^{m(t-k)} =$$

$$= n \sum_{l=0}^{\infty} \binom{q_n(i)}{k+nl} (1-b)^{q_n(i)-k-nl} . b^{k+nl};$$

při celém s je totiž $\sum_{m=0}^{n-1} \omega^{ms} = n$, je-li s celistvý násobek n, jinak $\sum_{m=0}^{n-1} \omega^{ms} = 0$.

Podle (11) tedy

$$p_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_{r_n(i)+k} \sum_{m=0}^{n-1} (1-b+b\omega^m)^{q_n(i)}\, \omega^{-km}$$

a vzhledem k (7)

$$p_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{m=0}^{n-1} (1-b-b\omega^m)^{q_n(i)}\, \omega^{-m(k-r_n(i))}. \tag{12}$$

Pro $m = 0$ platí $|1-b+b\omega^m| = 1$; pro $0 < m < n$, $n > 1$ je

$$|1-b+b\omega^m| = \left|1-b+b\cos\frac{2\pi m}{n} + ib\sin\frac{2\pi m}{n}\right| =$$

$$= \sqrt{\left(1-b+b\cos\frac{2\pi m}{n}\right)^2 + b^2\sin^2\frac{2\pi m}{n}} =$$

$$= \sqrt{1+2b(b-1)\left(1-\cos\frac{2\pi m}{n}\right)}.$$

*) Srovn. *Netto*: Lehrbuch der Kombinatorik, str. 19.

Ježto $0 < m < n$ a $0 < b < 1$, platí

$$0 < 1 - \cos \frac{2\pi m}{n} \leqq 2\,,$$

$$0 < b(1 - b) \leqq \tfrac{1}{4}\,,$$

tudíž

$$0 \leqq 1 + 2b(b - 1)\left(1 - \cos \frac{2\pi m}{n}\right) < 1\,,$$

$$|1 - b + b\omega^m| < 1\,.$$

Z (12) plyne (9) pro $n = 1$; je-li $n > 1$, je podle (12)

$$p_i = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \varrho_i\,,$$

kde

$$\varrho_i = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{m=1}^{n-1} (1 - b + b\omega^m)^{q_n(i)}\, \omega^{-m(k - r_n(i))}\,.$$

Označme μ největší z čísel $|1 - b + b\omega^m|$ pro $m = 1, \ldots, n - 1$, takže $0 \leqq \leqq \mu < 1$; pak

$$|\varrho_i| \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |a|_k \,.\sum_{m=1}^{n-1} |1 - b + b\omega^m|^{\,q_n(i)} \leqq \mu^{q_n(i)} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,, \tag{13}$$

a ježto

$$\lim_{i\to\infty} \mu^{q_n(i)} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = 0\,,$$

je také

$$\lim_{i\to\infty} |\varrho_i| = 0 = \lim_{i\to\infty} \varrho_i\,.$$

Tedy vskutku platí (9).

Věta 3. *Nechť $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ je libovolná konvergentní posloupnost reálných čísel taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d \neq 0\,,$$

a nechť řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (d_n - d)$$

konverguje a má součet σ. Když $c \in R$, $c \neq 0$ a

$$s_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n\,,$$

nechť

$$z_n = r_c(s_n)\,.$$

Budiž Z množina všech hromadných bodů posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ a Z^* množina všech čísel $r_c(z)$ pro $z \in Z$. Pak platí: je-li $\left|\frac{c}{d}\right| = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená *čísla, má Z^* právě p prvků, a sice čísla $r_c(md + \sigma)$, $m = 0, 1, \ldots, p - 1$; je-li $\frac{c}{d}$ iracionální, je Z^* totožná s množinou všech čísel $x \in R$, pro něž platí $0 \leqq x \operatorname{sgn} c < |c|$.*

Důkaz. Je

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} (d_n - d) = \lim_{n \to \infty} (s_n - nd)\,,$$

tedy

$$\lim_{n \to \infty} (s_n - (nd + \sigma)) = 0\,. \tag{14}$$

Nechť za prvé $\left|\frac{c}{d}\right| = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla, a nechť m je libovolné celé číslo takové, že $0 \leqq m < p$. Je-li $r_c(md + \sigma) \neq 0$, označme γ nejmenší z čísel

$$|r_c(md + \sigma)|\,, \quad |c - r_c(md + \sigma)|\,,$$

takže $0 < \gamma < |c|$.

Podle (14) existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$, $n \in N$ je

$$|s_{m+np} - (m + np)\, d - \sigma| < \gamma\,.$$

Potom však zřejmě

$$q_c(s_{m+np}) = q_c((m + np)\, d + \sigma)\,,$$

a tedy pro $n > n_0$, $n \in N$

$$|s_{m+np} - (m + np)\, d - \sigma| = |r_c(s_{m+np}) - r_c(md + \sigma)|\,,$$

takže podle (14)

$$\lim_{n \to \infty} z_{m+np} = r_c(md + \sigma)\,.$$

Je-li $r_c(md + \sigma) = 0$, označme N_1 množinu všech takových $n \in N$, pro něž

$$|r_c(s_{m+np})| < \frac{|c|}{2}\,,$$

$$N_2 = N - N_1\,.$$

Aspoň jedna z množin N_1, N_2 je tedy nekonečná; jestliže je to N_1, pak, ježto

$$||r(s)| - |c|\,.\,|q_c(s_{m+np}) - q_c((m + np)\, d + \sigma)|| \leqq |s_{m+np} - (m + np)\, d - \sigma|\,,$$

je vzhledem k (14) pro skoro všechna $n \in N_1$

$$q_c(s_{m+np}) = q_c((m + np)\, d + \sigma)\,,$$

takže posloupnost $\{z_{m+np}\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadný bod 0.

Je-li množina N_2 nekonečná, dokáže se snadno, že pro skoro všechna $n \in N_2$ je

$$q_c(s_{m+np}) = q_c((m + np)\, d + \sigma) - c\,,$$

tedy posloupnost $\{z_{m+np}\}_{n=1}^{\infty}$ má v tomto případě hromadný bod c.

Uvažme nyní, že když $m_1 < m_2$ jsou celá čísla taková, že $0 \leqq m_1 < p$, $0 \leqq m_2 < p$, pak

$$r_c(m_1 d + \sigma) \neq r_c(m_2 d + \sigma)\,,$$

neboť jinak by číslo

$$\left|\frac{d}{c}(m_1 - m_2)\right| = \frac{q(m_2 - m_1)}{p}$$

bylo celé, což není možné. Existuje tedy nejvýš jedno celé číslo m takové, že $0 \leqq m < p$ a že $r_c(md + \sigma) = 0$.

Dále je zřejmé, že posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá jiných hromadných bodů než hromadné body posloupností $\{z_{m+np}\}_{n=1}^{\infty}$, $m = 0, 1, \ldots, p-1$. Množina Z^* tedy obsahuje právě p prvků, a to čísla

$$r_c(md + \sigma) \text{ pro } m = 0, 1, \ldots, p-1\,.$$

Nechť za druhé $\frac{c}{d}$ je iracionální. Pak množina všech čísel $r_c(\sigma + nd)$ pro $n \in N$ je hustá v intervalu mezi čísly $0, c$ (viz na př. JARNÍK, Diferenciální počet, str. 71, cvič. 5) a z toho podle (14) snadno plyne tvrzení věty 3 pro iracionální $\frac{c}{d}$.

Vraťme se k důkazu věty 1. Ježto pro členy posloupnosti $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ platí při $i \geqq n$ rekurentní vztah

$$\alpha_i = (1 - b)\,\alpha_{i-n} + b\alpha_{i-n+1-r_n(i+1)}$$

(viz poznámku pod čarou na str. 300), je podle věty 2

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k = \frac{2\pi}{n}\,.$$

Dále pro každé celé nezáporné k je

$$\operatorname{Arg} A_{kn+1} = r_{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{k} b\alpha_{l+in}\right), \quad l = 0, 1, \ldots, n-1$$

a tedy podle (13) řada $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\alpha_i - \frac{2\pi}{n}\right)$ absolutně konverguje.

Podle věty 3 tedy platí: je-li $b = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla, má posloupnost $\{\operatorname{Arg}(A_{kn+c})\}_{k=0}^{\infty}$ $\frac{nq}{D(n, p)}$ hromadných bodů, při čemž $D(n, p)$ značí největší společný dělitel čísel n, p.

Všimněme si nyní, že vepíšeme-li do kružnice opsané pravidelnému n_1-úhelníku pravidelné n_2-úhelníky tak, aby každý vrchol n_1-úhelníka byl vrcholem některého z těchto n_2-úhelníků, pak počet různých vrcholů, které tak na kružnici dostaneme, je roven nejmenšímu společnému násobku čísel n_1, n_2, a tyto body jsou na kružnici pravidelně rozloženy. Posloupnost $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ má tedy pro $b = \frac{p}{q}$ (p, q nesoudělná přirozená čísla)

$$\frac{nq}{D(n, p)} \cdot \frac{nq}{D\left(\frac{n}{D(n, p)}, n\right)} = \frac{nq}{D(n, p)} \cdot D(n, p) = nq$$

hromadných bodů; v případě iracionálního b je každý bod jednotkové kružnice hromadným bodem posloupnosti $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Věty, obsažené v této práci, lze ještě dále v několika směrech zobecnit. Část výsledků je možno krátce dokázat jinou methodou; o tom pojedná ing. dr Jaroslav Hájek v poznámce, jíž naváže na tento článek.

O PLOCHÁCH KLÍNOVÝCH II

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 11. října 1954.) DT:513.62

Autor vyšetřuje nejprve kubickou zborcenou plochu, určenou dvěma řídicími přímkami a řídicí parabolou, která má s dvojnásobnou řídicí přímkou společný nevlastní bod. Vhodnou substitucí přejde tato plocha v klínovou plochu se systémem parabol, jež obsahuje ještě další systém rovinných křivek. Tento druhý systém se promítá do souřadnicové roviny do systému křivek, navzájem perspektivně afinních, při čemž osou afinity je jedna souřadnicová osa a směrem afinity je druhá souřadnicová osa.

V druhé části článku nahrazuje autor zmíněný systém parabol systémem parabol stupně n a zobecňuje předešlé výsledky i pro tento případ.

§ 1. Pomocná zborcená plocha třetího stupně.

Úmluva 1. Nechť a, b, c, d jsou konstanty. Definujme funkci $F(x, y, z) = (ax + b) y^2 + (cx - z + d) . x^2$; plochu o rovnici $F(x, y, z) = 0$ označme μ.

Pro parciální derivace funkce F platí $F_x = ay^2 + x(3cx - 2z + 2d)$, $F_y = 2(ax + b) y$, $F_z = - x^2$, $F_{xx} = 2 . (3cx - z + d)$, $F_{xy} = 2ay$, $F_{xz} = - 2x$. $F_{yy} = 2(ax + b)$, $F_{yz} = F_{zz} = 0$.

Všecky první parciální derivace bodu $(x_0, y_0, z_0) \in \mu$ se rovnají nule, právě když platí $x_0 = y_0 = 0$. Pro druhé parciální derivace v bodě $(0, 0, z_0)$ platí $F_{xx} = 2(d - z_0)$, $F_{yy} = 2b$, $F_{xy} = F_{xz} = F_{yz} = F_{zz} = 0$.

Pro kuželovou plochu tečen, jdoucích bodem $(0, 0, z_0)$ dostáváme rovnici $(d - z_0) x^2 + by^2 = 0$; její diskriminant je

$$\begin{vmatrix} d - z_0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} .$$

Z toho plyne okamžitě:

Bod $(0, 0, z_0)$ je biplanární, právě když platí $b \neq 0$, $d \neq z_0$.
Bod $(0, 0, z_0)$ je uniplanární, právě když platí buďto $b = 0$, $d \neq z_0$ anebo $b \neq 0$, $d = z_0$. (1)

Všecky druhé parciální derivace bodu $(x_0, y_0, z_0) \in \mu$ se anulují, právě když platí $x_0 = y_0 = b = 0$, $d = z_0$.

Předpokládejme, že platí $b = 0$. Funkci F lze pak přepsat do tvaru $x(ay^2 + (cx - z + d) . x)$. Pro nenulové a rozpadá se tedy plocha μ v rovinu $(x = 0)$ a kvadriku $(ay^2 + (cx - z + d) . x = 0)$. Je-li $a = 0$, pak plocha μ rozpadá ve dvojnásobnou rovinu $(x = 0)$ a v rovinu $(z = cx + d)$. Dosavadní výsledky nyní shrneme:

Poučka 1,1. *Plocha μ z úmluvy 1 má své singulární body na ose z; platí pro ně tvrzení* (1). *Je-li splněna rovnice $b = 0$, pak se plocha μ rozpadá.*

Předpokládejme dále, že platí $b \neq 0$ a že se plocha μ rozpadá. Potom lze funkci F přepsat do tvaru $(Ax + By + Cz + D)(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + a_{22}y^2 + 2a_{24}y)$.

a) Platí-li $B \neq 0$, pak jest $a_{13} = a_{14} = a_{22} = 0$. Je-li dále $C = 0$, pak F neobsahuje člen x^2z, a to je spor. Je-li $C \neq 0$, pak F neobsahuje člen z, a to je též spor.

b) Je-li $B = 0$, potom platí $a_{12} = a_{24} = 0$. Je-li dále $C \neq 0$, pak je též $a_{13} = a_{22} = 0$. Pak ale F neobsahuje y^2, a to není možné. Je-li $C = 0$, pak platí $F(x, y, z) = (Ax + D)(a_{11}x^2 + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + a_{22}y^2)$, při čemž $A \neq 0$, $Da_{13} = Da_{14} = 0$. Je-li $D = 0$, pak dostáváme spor s nerovností $b \neq 0$. Je-li $D \neq 0$, pak je $a_{13} = 0$; F opět neobsahuje x^2z. Ve spojení s poučkou 1,1 dostáváme tedy tento výsledek:

Poučka 1,2. *V úmluvě 1 platí $b \neq 0$, právě když je plocha μ nerozložitelná.*

Pro každé k zaveďme označení

$$\alpha_k = (y = kx),\ \beta_k = ((ak^2 + c)\, x - z + bk^2 + d = 0)\,.$$

Pak platí inkluse $\alpha_k \cap \beta_k \subset \mu$. Je-li $k \neq 0$, pak označme

$$\gamma_k = \left((ak^2 + c)\,\frac{y}{k} - z + bk^2 + d = 0\right).$$

Pak platí též $\alpha_k \cap \gamma_k \subset \mu$. (2)

Důkaz tvrzení (2) je snadný. Toto tvrzení budeme potřebovat v příštím paragrafu.

Pro nenulová x lze rovnici plochy přepsat do explicitního tvaru

$$z = \frac{ax + b}{x^2}\, y^2 + cx + d = f(x, y)\,.$$

Pro parciální derivace této funkce platí

$$f_x = -\frac{ax + 2b}{x^3}\, y^2 + c\,,\quad f_y = 2y\,\frac{ax + b}{x^2}\,,\quad f_{xx} = \frac{2(ax + 3b)}{x^4}\, y^2\,,$$

$$f_{xy} = -\frac{2(ax + 2b)}{x^3}\, y\,,\quad f_{yy} = 2\,\frac{ax + b}{x^2}\,.$$

Dosadíme-li podle těchto rovnic do výrazu $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, dostaneme po krátké úpravě zlomek $\dfrac{-4b^2y^2}{x^3}$. Z toho ihned plyne další tvrzení:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Bod } (x, y, z) \in \mu \text{ je hyperbolický, právě když platí } x \neq 0 \neq y\,. \\ \text{Bod } (x, y, z) \in \mu \text{ je parabolický, právě když platí } x \neq 0 = y\,.\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Je-li tedy plocha μ nerozložitelná, pak je to zborcená plocha s torsální přímkou v rovině $(y = 0)$. Rozpadá-li se plocha v rovinu a v nerozložitelnou kvadriku, pak rovnice této kvadriky je $F_1(x, y, z) = ay^2 + (cx - z + d)\,x = 0$. Pro parciální derivace funkce F_1 platí rovnice $F_{1x} = 2cx + d - z$, $F_{1y} = 2ay$, $F_{1z} = -x$.

Tyto parciální derivace se rovnají nule pouze pro bod $V = (0, 0, d)$. Kvadrika je kuželovou plochou o vrcholu V.

Poučka 2. *Je-li plocha μ z úmluvy 1 nerozložitelná, pak je zborcená. Rozpadá-li se v rovinu a v nerozložitelnou kvadriku, pak tato kvadrika je kuželovou plochou o vrcholu* $(0, 0, d)$.

Z vyšetřovaného prostoru Π dostaneme homogenisací prostor Π^*. Plocha μ přejde tak v jistou plochu μ^*. Poněvadž μ^* je zborcená plocha třetího stupně, lze na ní najít v Π^* řídicí kuželosečku, dvojnásobnou řídicí přímku (mající s řídicí kuželosečkou právě jeden společný bod) a jednoduchou řídicí přímku.

Řídicí kuželosečka je kterákoliv parabola k^*, pro niž platí $k = \mu \cap (x = x_0)$, kde $x_0 \neq 0$. Dvojnásobná řídicí přímka d^* je osa z a její nevlastní bod. Pro jednoduchou přímku řídicí j^* odvodíme z rovnice pro β_k (tvrzení (2)) vztah $j = (ax + b = 0) \cap (z = cx + d)$ v případě, že $a \neq 0$; je-li $a = 0$, pak j^* je společná nevlastní přímka rovin β_k (plocha je v tomto případě konoidem). (4)

Tedy přímka $(y = 0) \cap (z = cx + d)$ je jediná torsální přímka plochy a počátek je jediný kuspidální bod.

Poučka 3. *Nerozložitelná plocha μ z úmluvy 1 je zborcená kubická plocha, určená řídicími křivkami k^*, j^*, d^* podle tvrzení* (4).

§ 2. Parabolické klínové plochy.

Úmluva 2. Předpokládejme, že $G(X)$ je nikoliv konstantní funkce, mající druhou derivaci všude na jistém intervalu J. Je-li F funkce z úmluvy 1, pak proveďme substituci tak, aby přešla ve funkci

$$F(G(X), y, z)\,. \tag{5}$$

Anulováním této funkce vzniklá rovnice určuje plochu, kterou označíme $\varkappa$.

Pro parciální derivace funkce (5) platí

$$F_x = G'(X)[ay^2 - (3cG(X) - 2z + 2d)\, G(X)],\ F_y = 2y[aG(X) + b]\,,$$
$$F_z = -G^2(X),\ F_{xx} = G''(X)[(ay^2 + 3cG(X) - 2z + 2d)\, G(X)] - 2G'^2(X)\,.$$
$$.\,[3cG(X) - z + d],\ F_{xy} = 2ayG'(H),\ F_{xz} = -2G(X)\, G'(X),\ F_{yz} = F_{zz} = 0\,.$$

Funkce (5) má v bodě (X_0, y_0, z_0) všecky první parciální derivace nulové, právě když platí $G(X_0) = y_0 = 0$. Vyšetřujme takové body. Pro odpovídající druhé parciální derivace platí $F_{xx} = 2m^2G'^2(X_0)(d - z_0)$, $F_{yy} = 2b$, $F_{xy} = F_{xz} = F_{yz} = F_{zz} = 0$. Tedy kuželová plocha tečen, jdoucích bodem $(X_0, 0, z_0)$, má rovnici $(d - z_0)\, G'^2(X_0)\, X^2 - by^2 = 0$; její diskriminant je

$$\begin{vmatrix} (d - z_0)\, G'^2(X)_0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Z toho ihned plyne další tvrzení (připomeňme, že platí $G(X_0) = 0$):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Bod } (X_0, 0, z_0) \in \varkappa \text{ je biplanární, právě když platí } d \neq z_0,\ G'(X_0) \neq 0 \neq b. \\ \text{Bod } (X_0, 0, z_0) \in \varkappa \text{ je uniplanární, právě když platí buďto } b = 0,\ d \neq z_0, \\ G'(X_0) \neq 0 \text{ anebo jeden z případů } b \neq 0,\ d = z_0, \text{ resp. } b \neq 0,\ G'(X_0) = 0. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Z poučky 1,1 vyplývá, že se plocha v případě $b = 0$ rozpadá v rovinu $(x = 0)$ a další plochu. Z tvrzení (2) vyplývá tento důležitý důsledek:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Plocha obsahuje pro každé nenulové } k \text{ křivku } \gamma_k \cap (y = k\,.\,G(x)), \\ \text{při čemž } \gamma_k \text{ je definováno v tvrzení (2). Průměty těchto křivek do ro-} \\ \text{viny } (z = 0) \text{ jsou perspektivně afinní pro osu afinity v ose } X \text{ a směr} \\ \text{afinity v ose } y. \end{array}\right\} \quad (6^*)$$

Poučka 4. *Plocha $\varkappa$ nechť je dána podle úmluvy 2. Její bod (X_0, y_0, z_0) je singulární, právě když platí $G(X_0) = y_0 = 0$. Pro tyto singulární body platí tvrzení* (6). *Pro plochu $\varkappa$ platí dále tvrzení* (6*).

Omezíme se nyní na regulární body plochy $\varkappa$. Rovnici plochy lze pak přepsat do tvaru

$$z = \frac{aG(X) + b}{G^2(X)}\, y^2 + cG(X) + d\,.$$

Stanovením druhých parciálních derivací odvodili bychom i zde podmínky pro to, aby regulární bod byl hyperbolický, parabolický nebo eliptický. To již nebudeme provádět.

§ 3. Přímková plocha, vedoucí na klínové plochy s parabolami vyšších stupňů.

Úmluva 3. Nechť f, g, g_1, h, A, B jsou funkce jedné proměnné, které mají pro každou hodnotu argumentu spojitou derivaci. Označme $\varkappa$ plochu o rovnici

$f(y)\, g_1(x) + [h(x) - z]\, g(x) = 0$; pro každé k označme α_k rovinu o rovnici $y = kx$, β_k rovinu o rovnici $z = A(k)\, y + B(k)$; pro každé nenulové k označme γ_k rovinu o rovnici $z = A(k) \dfrac{y}{k} + B(k)$. Ta x, která (ne)anulují $g(x)$, budeme značit $x_2(x_1)$.

Poučka 7. *Platí-li úmluva 3 a podmínka*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f(kx_1)}{g(x_1)}\, g_1(x_1) + h(x_1) = A(k)\, x_1 + B(k) \textit{ pro každé } x_1 \textit{ a pro každé } k\,, \\ &f(kx_2) = 0 \textit{ pro každé } x_2 \textit{ a každé } k\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

pak platí též

$$\alpha_k \cap \beta_k \subset \varkappa \textit{ pro každé } k\,. \tag{8}$$

Platí-li úmluva 3, *podmínka* (8) *a neobsahuje-li* $\varkappa$ *žádnou rovinu, pak platí též* (7).

Důkaz. Nechť platí (7). Pro společné body (x_1, y, z) rovin α_k, β_k platí tedy $\dfrac{f(y)}{g(x_1)}\, g_1(x_1) + h(x_1) = z$. Pro body $(x_2, y, z) \in \varkappa$ platí rovnice $f(y)\, g_1(x_2) = 0$. Tato rovnice je splněna i pro $y = kx_2$ (nezávisle na z). Tedy platí (8).

Nechť platí (8). Platnost první rovnice v (7) je zřejmá. Pro body $(x_2, y, z) \in \in \alpha_k \cap \beta_k$ platí podle (8) $f(kx_2)\, g_1(x_2) = 0$. Je-li $g_1(x_2) \neq 0$, pak je též $f(kx_2) = 0$. Je-li $g_1(x_2) = 0$, pak platí $(x = x_2) \subset \varkappa$, což je ve sporu s předpokladem. Tento případ tedy nemůže nastat. Podmínka (7) je dokázána.

Poučka 8. *Platí-li úmluva 3, pak z* (8) *plyne též* $\alpha_k \cap \gamma_k \subset \varkappa$ *pro každé nenulové* k.

Důkaz je zřejmý.

Důsledek. *Substitucí* $x = F(X)$ (*kde* $F(X)$ *má pro každé* X *z jistého intervalu* I *spojitou derivaci*) *přejde plocha* $\varkappa$ *z úmluvy 3 v plochu* $\varkappa_X$. *Platí-li dále* (8), *pak dostáváme výsledek: Plocha* $\varkappa_X$ *obsahuje systém rovinných křivek* $(y = k\, G(X)) \cap \cap \gamma_k$ *pro každé nenulové* k. *Průměty těchto křivek* (*směrem rovnoběžným s osou* z) *do roviny* $(z = 0)$ *jsou navzájem perspektivně afinní pro osu afinity v ose* x *a směr afinity v ose* y.

Tento důsledek je vlastně nejdůležitějším poznatkem celého článku.

Poučka 9. *Předpokládejme platnost úmluvy 3 a podmínky* (7), *při čemž dále jest* $f(x) = g(x) = x^n$ *pro jisté přirozené číslo* n. *Jsou-li funkce* g_1, h *analytické, pak jsou nejvýše lineární.*

Důkaz. První rovnici z podmínky (7) lze přepsat do tvaru $k^n g_1(x_1) + h(x_1) = A(k)\, x_1 + B(k)$. Rozvedeme-li funkce g_1, h v Maclaurinovy řady, dostaneme srovnáním koeficientů žádaný výsledek.

Poučka 10. *Předpoklady: Platí úmluva 3, při čemž* $g_1(x) = ax + b$, $h(x) = cx + d$ *pro jisté konstanty* a, b, c, d; *existuje funkce* $\varphi(k)$ *tak, že* $a\varphi(k) +$

$+ c = A(k)$, $b\,\varphi(k) + d = B(k)$; *je-li* $a \neq 0$, *pak* $\varkappa$ *neobsahuje rovinnou součást. Tvrzení: Potom podmínka* (8) *je ekvivalentní s podmínkou*

$$f(kx) = \varphi(k)\, g(x) \tag{9}$$

identicky v k, x.

Důkaz. Nechť platí (8). Po snadném výpočtu dostaneme pro souřadnice bodů z $\alpha_k \cap \beta_k$ rovnici $(ax_1 + b)\left(\frac{f(kx_1)}{g(x_1)} - \varphi(k)\right) = 0$. Dále platí též $f(kx_2)$ . . $(ax_2 + b) = 0$. Je-li $a = 0 \neq b$, pak platí (9) identicky v x. Nechť platí $a \neq 0$. Případ $\left(-\frac{b}{a}, y, z\right) \in \varkappa$ nemůže nastat, neboť plocha $\varkappa$ by obsahovala rovinu $\left(z = -\frac{cb}{a} + d\right)$. Celkem tedy platí (9).

Nechť platí (9). Pro společné body rovin α_k, β_k platí po substituci z (9) a po eliminaci $\varphi(k)$ rovnice $z = \frac{f(y)}{g(x_1)}(ax_1 + b) + cx_1 + d$. Poněvadž ale dále platí $(x = x_2) \cap (y = kx) \subset \varkappa$ pro každé x_2, jest tím platnost podmínky (8) prokázána.

Poučka 11. *Platí-li pro analytické funkce* f, g, φ *identita* (9), *pak platí* $g(x) = c_1x^n$, $\varphi(k) = c_2k^n$ *pro jisté konstanty* c_1, c_2.

Důkaz. Označme $f^{(i)}(0) = f_i$, $g^{(i)}(0) = g_i$, $\varphi^{(i)}(0) = \varphi_i$. Podle předpokladu platí

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \frac{x^i}{i!}, \quad g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \frac{x^i}{i!}, \quad \varphi(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \frac{k^i}{i!}.$$

Není-li f identicky nula, pak existují celá nezáporná čísla i_1, j_1 tak, že g_{i_1}, φ_{j_1} jsou nenulová čísla. Z rovnice (9) plynou však vztahy:

$$g_i\varphi_j = 0 \text{ pro } i \neq j, \tag{10,1}$$

$$g_i\varphi_i = f_i. \tag{10,2}$$

Tedy podle (10,1) jest $i_1 = j_1$. Z obou rovnic (10) plyne dále, $g_i = \varphi_i = 0$ pro každé $i \neq i_1$. Z toho již plyne žádaný výsledek.

Poučka 12. *Nechť* a, b, c, d, n *jsou konstanty, z nichž* n *je přirozené číslo. Pak polynom* $(ax + b)\, y^n + (cx - z + d)\, x^n$ *je reducibilní, právě když platí* $b = 0$.

Důkaz. Je-li $b = 0$, Pak zřejmě polynom je reducibilní. Je-li $b \neq 0$ a je-li polynom reducibilní, pak jej lze přepsat do tvaru $(z + \Sigma a_{ij}x^{\alpha_i}y^{\beta_j})(\Sigma a'_{ij}x^{\alpha_i'}y^{\beta_j'})$. Vzhledem k členu $-xz$ musí být polynom v druhé závorce roven $-x^n$. Existence členu $(ax + b)\, y^n$ vede nyní ihned ke sporu, neboť tento člen by se musel vyskytovat v polynomu $\Sigma a_{ij}x^{\alpha_i}y^{\beta_i}$ a výsledek by obsahoval člen $(ax + + b)\, y^nx^n$. A to není možné. Poučka je dokázána.

Poučka 13. *Je-li v předpokladech poučky* 10 $b \neq 0$ *a platí-li* $\varphi(k) = k^n$ *pro jisté přirozené číslo* n, *pak roviny* γ_k *neobsahují tutéž přímku.*

Důkaz. Platí $\gamma_0 \cap \gamma_1 = (y = 0) \cap (z = b + d)$. Pro body $(x, 0, b + d)$ platí rovnice $bk(k^n - 1) = 0$, což je identita v k, právě když $b = 0$.

Poznámka. Vzhledem k ploše $\varkappa_x$ z důsledku poučky 2 obalují tedy roviny γ_k jistou válcovou plochu, jejíž povrchové přímky jsou rovnoběžné s osou x. Je-li $\varphi(k) = k^n$, pak její rovnici dostaneme eliminací parametru k z rovnic

$$bk^{n+1} + ayk^n + (d - z)\,k + cy = 0,\ (n + 1)\,bk^n + anyk^{n-1} + d - z = 0\,.$$

Nerozřešena je otázka, jakou podmínkou jsou vázány funkce z úmluvy 3, jsou-li analytické a platí-li pro ně (7). Podmínce (7) vyhovují ovšem funkce $F(x) = g(x) = x^n$, $g_1(x) = ax + b$, $h(x) = cx + d$; otázka je, vyhovují-li jí ještě nějaké jiné funkce. Zdá se pravděpodobné, že tomu tak není.

§ 4. Geometrická interpretace.

Definice 1. Nechť A, n jsou konstanty, z nichž n je přirozené číslo. Parabolou stupně n budeme rozumět rovinnou křivku, která má při vhodné volbě souřadnicového systému rovnici $y = Ax^n$. Osu y pak nazveme osou, počátek vrcholem této paraboly.

Poučka 14. *Parabola stupně n je v rovině s daným systémem souřadnicovým jednoznačně určena osou,*) vrcholem (ležícím na ose) a bodem (neležícím na ose).* Důkaz je zřejmý.

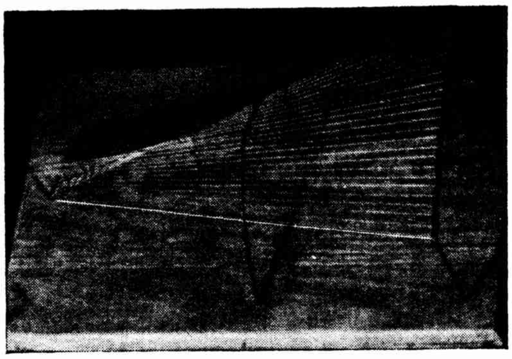
Definice 2. Nechť k je křivka v rovině $\gamma = (y = 0)$, k_{I} křivka v rovině ϱ rovnoběžné s osou x a různé od ν. Nechť pro přímku s roviny $(x = 0)$ platí $\nu \not\parallel s \not\parallel \varrho$. Křivka k_{I} nechť se promítá směrem s do roviny ν na křivku k'_{I} buďto perspektivně afinní s k podle osy rovnoběžné s osou x a směru v ose z anebo posunutou vzhledem ke k. Složením této projekce a perspektivní afinity dostaneme zobrazení mezi k_{I}, k; odpovídající body v tomto zobrazení označme A_{I}, A. Pro každé A_{I} non $\in \gamma \cap k_{\mathrm{I}}$ sestrojme parabolu p_A stupně n o ose rovnoběžné s osou z, o vrcholu A a bodu $A_{\mathrm{I}} \in p_A$. Pro každé $A_{\mathrm{I}} \in \nu \cap k$ sestrojme p_A jakožto bodem A_{I} jdoucí rovnoběžku s osou z. Plochu $\bigcup_{A_{\mathrm{I}} \in k_{\mathrm{I}}} p_A$ označme μ.

Podle důsledku z poučky 7 a podle pouček 10, 11 lze vyslovit tuto poučku:

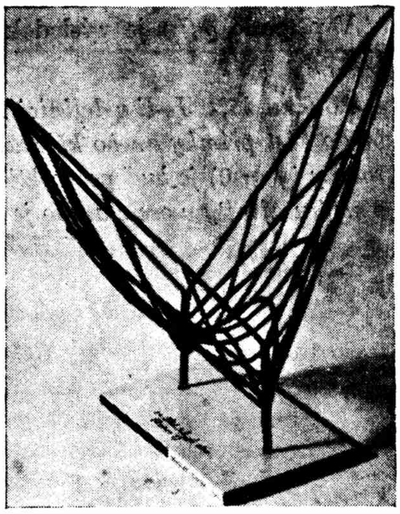
Poučka 15,1. *Je-li v definici 2 $\varrho \not\parallel \nu$, pak plocha μ obsahuje systém rovinných křivek k_t (pro každé nenulové t), které lze sestrojit takto: Promítneme k_{I} rovnoběžně s osou z do roviny $(z = 0)$; dostaneme tak křivku k_{I}^+. Pro každé nenulové t sestrojíme v rovině $(z = 0)$ křivku k_t^+ perspektivně afinní s k_{I}^+ pro osu afinity v ose x, pro směr afinity v ose y a pro charakteristiku t. Pak válcová plocha o řídicí křivce k_t^+ a povrchových přímkách rovnoběžných s osou z proniká plochu μ v rovinné křivce k_t.*

---

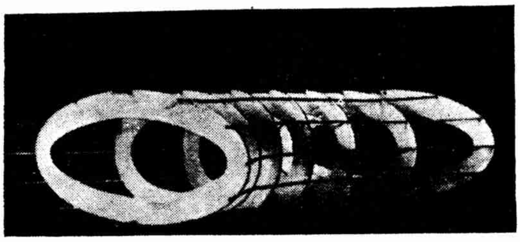
*) Rozumí se orientovanou osou.



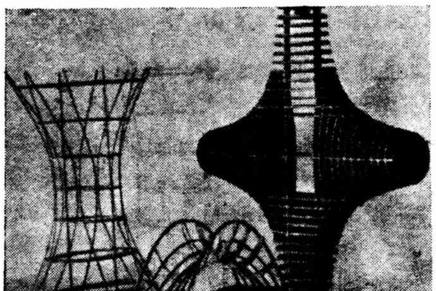
Model části pomocné zborcené plochy z § 1.



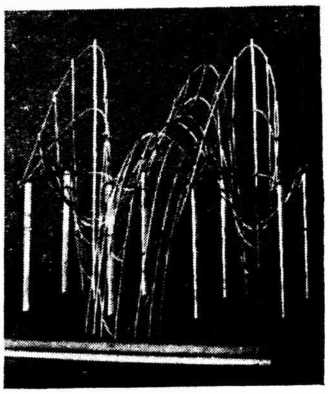
Model části parabolické klínové plochy se systémem sinusoid.



Model části parabolické klínové plochy se systémem elips.



Skupina modelů, zobrazujících části kuželosečkových klínových ploch.



Model části zobecněné parabolické plochy (paraboly jsou kubické) se systémem sinusoid.

Modely vypracovali posluchači fakulty inženýrského stavitelství v Praze.

V případě $\varrho \parallel \nu$ je výsledek obdobný (snadno bychom jej odvodili analyticky):

Poučka 15,2. *Je-li v definici 2 $\varrho \parallel \nu$, pak pro každé y_0 je průnik $(y = y_0) \cap \mu$ buďto část přímky anebo křivka, jejíž průmět (směrem rovnoběžným s osou y) do roviny $(y = 0)$ je buď perspektivně afinní s k o ose afinity rovnoběžné s osou x a o směru afinity v ose z anebo je posunutý vzhledem ke k.*

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

PLÁŠTĚ KONGRUENCE KOULÍ

ZDENĚK VANČURA, Praha.

(Došlo dne 13. října 1954.)

DT:513.717

Tato práce jedná o pláštích kongruence koulí. Vedle odvození rovnic těchto plášťů uvádí a dokazuje tuto jejich vlastnost: Je-li plášť kongruence koulí plocha, jest tečná rovina této plochy v ohnisku F příslušná ohnisková rovina f.

I. Úvahy přípravné.

Uvažujme kongruenci L-koulí

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}}), \tag{1}$$

kde $\mathbf{p}$ označuje L-kouli o hexasférických souřadnicích $p_1(u), p_2(u), \ldots, p_6(u)$.

Buď $u^a = u^a(t)$ $(a = \mathrm{I}, \mathrm{II})$ libovolná kanálová plocha v kongruenci (1). Potom množina společných plošných elementů pevné L-koule $t = t_0$ a L-koulí $\mathbf{r}$, pro něž $\mathbf{v}(t_0) \,.\, \mathbf{r} = 0$, kde $\mathbf{v} = v^a \mathbf{p}_a = \dfrac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t}\, \mathbf{p}_a$, je Ch-korelace kanálové plochy $\dfrac{\mathrm{d}u^{\mathrm{I}}}{v^{\mathrm{I}}} = \dfrac{\mathrm{d}u^{\mathrm{II}}}{v^{\mathrm{II}}} = \mathrm{d}t$ na zkoumané L-kouli $t = t_0$. Tuto Ch-korelaci budeme nazývati *elementární plochou* dané kanálové plochy v kongruenci (1) a značiti $\mathbf{v}$ nebo v^a.

Roviny elementárních ploch na pevné kouli $\mathbf{p}$ kongruence (1) tvoří svazek (projektivní se svazkem elementárních ploch), jehož osa má s koulí $\mathbf{p}$ dva reálné různé body společné právě tehdy, když

$$A_2 > 0, \; (A_2 = a_{\mathrm{I\,I}} a_{\mathrm{II\,II}} - a_{\mathrm{I\,II}}^2, \quad a_{ij} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^j} = \mathbf{p}_i \,.\, \mathbf{p}_j) \,. \tag*{[1]}$$

Předpokládejme $A_2 > 0$ a uvažujme kongruenci (1) jen v takové oblasti, kde $p_5 \,.\, p_6 \neq 0$. Jelikož používáme homogenních souřadnic, můžeme položiti $p_5 = 1$. Tedy v uvažované oblasti (definiční) bude kongruence (1) obsahovati pouze reálné koule.[1])

[1]) Všude dále uvažujeme kongruenci (1) jen v té oblasti, ve které jsou splněny uvedené předpoklady. Mluvíme potom stručně o kongruenci koulí (1). (Pouze ve větě II nepožadujeme nutně $p_5 = 1$.)

Definice 1. *Všechny elementární plochy podél koule $\boldsymbol{p}$ (dané kongruence koulí) mají společné právě dva reálné plošné elementy. Body (roviny), které jsou součástí zmíněných plošných elementů, budeme označovati jako ohniska F_h (ohniskové roviny f_h) ($h = 1, 2$) koule $\boldsymbol{p}$ (dané kongruence koulí).* [2][2])

Platí věty:

I. *Buď $\boldsymbol{p}$ koule kongruence koulí (1). Potom všechny kanálové plochy v kongruenci (1), proložené koulí $\boldsymbol{p}$, mají v ohnisku F_h koule $\boldsymbol{p}$ společnou tečnou rovinu f_h.* [2][3])

Důkaz. Kanálová plocha (proložená koulí $\boldsymbol{p}$ kongruence (1)) jest obálkou jednoparametrického množství koulí $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$. Kružnice, tvořená body Ch-korelace (uvažované kanálové plochy) na kouli $\boldsymbol{p}$ je identická s hlavní křivkou uvažované kanálové plochy (na kouli $\boldsymbol{p}$). Roviny Ch-korelace jsou tečné roviny uvažované kanálové plochy v bodech zmíněné hlavní křivky. Tedy všechny kanálové plochy v kongruenci (1), proložené koulí $\boldsymbol{p}$, mají v bodě F_h společnou tečnou rovinu f_h.

II. Buď $\boldsymbol{p}$ koule kongruence koulí (1). Potom rovina libovolné elementární plochy v^c v kongruenci (1) má v pravoúhlých kartézských souřadnicích x_1, x_2, x_3 (ve kterých má kongruence koulí rovnice (1)) rovnici

$$\begin{vmatrix} p_1, & v_1 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} p_2, & v_2 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} p_3, & v_3 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_3 + 2^{-1} \begin{vmatrix} p_4, & v_4 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} = 0 \,, \tag{2}$$

kde

$$v_i = v^c \frac{\partial p_i}{\partial u^c} \,. \qquad [2]^4)$$

Důkaz. Jelikož $\boldsymbol{p}$ je koule (kongruence (1)), jest $p_5 \neq 0$. Buďtež (L-koule) $\boldsymbol{r}$ body Ch-korelace plochy $\boldsymbol{v} = v^a \boldsymbol{p}_a$ na kouli $\boldsymbol{p}$. Potom platí:

$$\boldsymbol{r} \,.\, \boldsymbol{r} = 0 \,, \quad r_6 = 0 \,, \quad \boldsymbol{r} \,.\, \boldsymbol{p} = 0 \,, \quad \boldsymbol{r} \,.\, \boldsymbol{v} = 0 \,.$$

Položme $r_5 = 1$ (což zřejmě můžeme učiniti). Rozepsáním třetí a čtvrté rovnice (z předešlého řádku) dostáváme:

$$r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3 + 2^{-1}(r_4 p_5 + p_4) = 0 \,,$$
$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + 2^{-1}(r_4 v_5 + v_4) = 0 \,.$$

Vynásobme prvou rovnici výrazem v_5, druhou výrazem $-p_5$ a rovnice takto vzniklé sečtěme. Jelikož pro pravoúhlé kartézské souřadnice x_1, x_2, x_3 bodu $\boldsymbol{r}$ $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)$ platí, vzhledem k předpokladu $r_5 = 1$, $x_i = r_i$ $(i = 1, 2, 3)$, dostáváme výše zmíněným sečtením pro rovinu elementární plochy $\boldsymbol{v} = v^a \boldsymbol{p}_a$ rovnici:

$$\begin{vmatrix} p_1, & v_1 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} p_2, & v_2 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} p_3, & v_3 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} x_3 + 2^{-1} \begin{vmatrix} p_4, & v_4 \\ p_5, & v_5 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

[2]) Rozlišení ohnisek (na první a druhá) viz poznámka 1 za důkazem věty 1.

[3]) [4]) Jelikož důkazy těchto dvou vět nejsou v práci [2] otištěny, uvádíme je zde.

Definice 2. *Geometrické místo ohnisek F_h $(h = 1, 2)$ koulí kongruence* (1) *se nazývá h-tý plášť kongruence* (1). [2]

II. Pláště kongruence koulí.

Buďtež x, y, z pravoúhlé kartézské souřadnice, x_1, x_2, x_3, x_4 příslušné homogenní kartézské souřadnice. Uvažujme h-tý plášť kongruence koulí $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ (rovnice vztažené k soustavě souřadnicové x, y, z) v takové oblasti, v níž body

$$A = (d_{24}, -d_{14}, 0, 2d_{12}), \; B = (d_{23}, -d_{13}, d_{12}, 0)\,, \tag{3}$$

kde

$$d_{ij} = 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{I}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{I}}} \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{II}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{II}}} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

existují a jsou od sebe různé. Buď dále

$$k(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - p_4 x_4^2 - 2p_1 x_1 x_4 - 2p_2 x_2 x_4 - 2p_3 x_3 x_4\,. \tag{5}$$

Potom platí:

Věta 1. *h-tý plášť $(h = 1, 2)$ kongruence koulí $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ má v homogenních kartézských souřadnicích x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ rovnice*

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_h d_{24} + \mu_h d_{23}\,, & x_2 &= -\lambda_h d_{14} - \mu_h d_{13}\,, \\ x_3 &= \mu_h d_{12}\,, & x_4 &= 2\lambda_h d_{12}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

při čemž pro λ_h, μ_h platí

$$k(\lambda_h A + \mu_h B) = 0\,, \quad \mu_1 : \lambda_1 \neq \mu_2 : \lambda_2\,. \tag{7}$$

Důkaz. Ohniska F_h $(h = 1, 2)$ koule $\mathbf{p}$ (dané kongruence) jsou průsečné body osy svazku rovin všech elementárních ploch (podél koule $\mathbf{p}$) s koulí $\mathbf{p}$. Tuto osu stanovíme jako průsečnici rovin elementárních ploch $v^c = (1, 0)$ a $'v^c = (0, 1)$. Potom vzhledem k větě II odstavce I jest osa svazku určena těmito rovnicemi:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{I}}} x_1 + 2\frac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{I}}} x_2 + 2\frac{\partial p_3}{\partial u^{\mathrm{I}}} x_3 + \frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} x_4 = 0\,, \\ 2\frac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{II}}} x_1 + 2\frac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{II}}} x_2 + 2\frac{\partial p_3}{\partial u^{\mathrm{II}}} x_3 + \frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{II}}} x_4 = 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Potom, vzhledem k předpokladům uvedeným před větou 1 a vzhledem k rovnicím (8), má osa svazku s rovinou $x_3 = 0$ právě jeden společný bod A a s nevlastní rovinou $x_4 = 0$ právě jeden společný bod B (viz (3)), při čemž $A \neq B$. Můžeme tedy ohniska F_h $(h = 1, 2)$ vyjádřiti ve tvaru

$$F_h = \lambda_h A + \mu_h B\,, \tag{9}$$

při čemž pro λ_h, μ_h platí (7), je-li $k(X) = 0$ rovnice koule $\mathbf{p}$ (v souřadnicích x_1, x_2, x_3, x_4). Jak snadno plyne z definice hexasférických souřadnic koule $\mathbf{p}$ [1], jest $k(X) = 0$, kde $k(X)$ je definováno v (5), rovnice koule $\mathfrak{p}$. Rozepíšeme-li symbolickou rovnici (9) (používajíce (3)), dostaneme na základě poznámky 1*) rovnice (6).

Poznámka 1. Ohnisko, přiřazené (nezávisle na $u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}}$) jednomu kořenu rovnice (7), označujeme jako první ohnisko F_1; ohnisko, přiřazené zbývajícímu kořenu rovnice (7), označujeme jako druhé ohnisko F_2. Vzhledem k předpokladům jest $\mu_1 : \lambda_1 \neq \mu_2 : \lambda_2$.

Poznámka 2. Rovnici (7) můžeme rozepsati takto:

$$k(A)\,\lambda_h^2 + k(B)\,\mu_h^2 + k(AB)\,\lambda_h\mu_h = 0\,, \tag{10}$$

kde $k(A)$ resp. $k(B)$ dostaneme z $k(X)$, položíme-li $X = A$ resp. $X = B$. Je-li $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, jest $k(AB) = 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - - p_4a_4b_4 - p_1(a_1b_4 + a_4b_1) - p_2(a_2b_4 + a_4b_2) - p_3(a_3b_4 + a_4b_3))$.

Dále platí:

Věta 2. *Je-li h-tý plášť ($h = 1, 2$) kongruence koulí plocha, jest tečná rovina této plochy v ohnisku F_h příslušná ohnisková rovina f_h.*

Důkaz. Buď h-tý plášť kongruence koulí (1) plocha (v jisté oblasti). Buď F_h libovolný regulární bod této plochy; buď to h-té ohnisko koule $\mathfrak{p}(u)$ kongruence (1). Potom $S = (p_1, p_2, p_3)$ je střed koule $\mathfrak{p}(u)$. Umístěme nyní pravoúhlou kartézskou soustavu souřadnicovou (v E_3) tak, že její počátek splyne s ohniskem F_h a osa z s přímkou F_hS. Potom $A = F_h$, a tedy (jelikož $d_{12}(u)$ je spojitá funkce $u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}}$)$d_{12}(u) \neq 0$ nejen na kouli $\mathfrak{p}(u)$, nýbrž i v jistém jejím okolí. Tedy v bodě F_h a v jistém jeho okolí má h-tý plášť kongruence koulí (1) rovnice (6), při čemž

$$d_{12}(u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}}) \neq 0\,. \tag{11}$$

Mimo to, jelikož ohnisko F_h jest vždy vlastní bod, jest v rovnicích (6)

$$\lambda_h(u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}}) \neq 0\,. \tag{12}$$

Vzhledem k (11) a (12) můžeme tedy rovnice h-tého pláště kongruence (1) (v bodě F_h a v jistém jeho okolí) vyjádřiti v nehomogenních kartézských souřadnicích x, y, z takto:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{d_{24}}{d_{12}} + \frac{\mu_h}{\lambda_h}\frac{d_{23}}{d_{12}}\right), \quad y = \frac{-1}{2}\left(\frac{d_{14}}{d_{12}} + \frac{\mu_h}{\lambda_h}\frac{d_{13}}{d_{12}}\right), \quad z = \frac{1}{2}\frac{\mu_h}{\lambda_h}\,. \tag{13}$$

Máme nyní dokázati, že tečná rovina plochy (13) v bodě $F_h = (0, 0, 0)$ je příslušná ohnisková rovina f_h, t. j. rovina jdoucí bodem F_h kolmo k přímce F_hS.

*) Následuje za důkazem.

Zřejmě platí: Tečná rovina plochy (13) v bodě F_h je příslušná ohnisková rovina f_h právě tehdy, když přímka F_hS je kolmá na tečny obou parametrických křivek plochy (13) v bodě F_h.

Dokážeme tedy, že přímka F_hS je kolmá na tečny obou parametrických křivek plochy (13) v bodě F_h.

Provedeme důkaz této věty pro $h = 1$ (pro $h = 2$ se provede, jak uvidíme, úplně stejně).

K vůli stručnosti napíšeme rovnice plochy (13) takto:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{d_{24}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{d_{23}}{d_{12}}\right), \quad y = \frac{-1}{2}\left(\frac{d_{14}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{d_{13}}{d_{12}}\right), \tag{14}$$
$$z = \frac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda}.$$

Je-li potom

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$$

vektor o souřadnicích

$$u_1 = \frac{\partial x}{\partial u^{\mathrm{I}}}, \quad u_2 = \frac{\partial y}{\partial u^{\mathrm{I}}}, \quad u_3 = \frac{\partial z}{\partial u^{\mathrm{I}}}$$

resp. vektor o souřadnicích

$$v_1 = \frac{\partial x}{\partial u^{\mathrm{II}}}, \quad v_2 = \frac{\partial y}{\partial u^{\mathrm{II}}}, \quad v_3 = \frac{\partial z}{\partial u^{\mathrm{II}}}$$

a $\mathbf{W} = (w_1, w_2, w_3)$ vektor, jehož umístění jest dvojice bodů S, F_h, máme dokázat, že (v F_h) jest:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{W} = 0\,; \tag{15}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = 0\,. \tag{16}$$

Provedeme nejdříve důkaz (15). Vzhledem k výše popsanému umístění pravoúhlé kartézské soustavy souřadnicové jest v F_h:

$$w_1 = w_2 = 0\,, \quad w_3 \neq 0\,. \tag{17}$$

Tedy dokázat (15) znamená dokázat, že v bodě $F_h = (0, 0, 0)$ ($h = 1$) jest

$$u_3 = \frac{\partial z}{\partial u^{\mathrm{I}}} = 0\,. \tag{18}$$

Podle definice $\mathbf{W}$ jest

$$w_1 = x - p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{d_{24}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{d_{23}}{d_{12}} - 2p_1\right) = \frac{1}{2d_{12}}\left(d_{24} + \frac{\mu}{\lambda}d_{23} - 2d_{12}p_1\right),$$

$$w_2 = y - p_2 = \frac{-1}{2}\left(\frac{d_{14}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{d_{13}}{d_{12}} + 2p_2\right) = \frac{-1}{2d_{12}}\left(d_{14} + \frac{\mu}{\lambda}d_{13} + 2d_{12}p_2\right),$$

$$w_3 = z - p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda} - 2p_3\right) = \frac{1}{2d_{12}}\left(\frac{\mu}{\lambda}d_{12} - 2d_{12}p_3\right).$$

V bodě $F_\lambda = (0, 0, 0)$ jest tedy vzhledem k (17):

$$d_{24} + \frac{\mu}{\lambda} d_{23} - 2d_{12}p_1 = 0\,; \tag{19}$$

$$d_{14} + \frac{\mu}{\lambda} d_{13} + 2d_{12}p_2 = 0\,. \tag{20}$$

Vzhledem ke (14) jest

$$u_3 = \frac{\partial z}{\partial u^{\mathrm{I}}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{I}}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right), \tag{21}$$

kde vzhledem k (10) a (12) pro $\frac{\mu}{\lambda}$ platí

$$k(B) \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + k(AB) \frac{\mu}{\lambda} + k(A) = 0\,. \tag{22}$$

Parciální derivací rovnice (22) podle u^{I} dostáváme:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial k(B)}{\partial u^{\mathrm{I}}} + 2k(B) \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{I}}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial k(AB)}{\partial u^{\mathrm{I}}} + k(AB) \frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{I}}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}} = 0\,,$$

$$\left[2k(B) \frac{\mu}{\lambda} + k(AB)\right] \frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{I}}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial k(B)}{\partial u^{\mathrm{I}}} - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\partial k(AB)}{\partial u^{\mathrm{I}}} - \frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}}\,,$$

z čehož, za předpokladu

$$2k(B) \frac{\mu}{\lambda} + k(AB) \neq 0\,, \tag{23}$$

dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{I}}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial k(B)}{\partial u^{\mathrm{I}}} - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\partial k(AB)}{\partial u^{\mathrm{I}}} - \frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}}}{2k(B) \frac{\mu}{\lambda} + k(AB)}\,. \tag{24}$$

Vzhledem k poznámce 2 za důkazem věty 1 jest:

$$\begin{aligned} k(A) &= d_{24}^2 + d_{14}^2 - 4p_4 d_{12}^2 - 4p_1 d_{12} d_{24} + 4p_2 d_{12} d_{14}\,, \\ k(B) &= d_{23}^2 + d_{13}^2 + d_{12}^2\,, \\ k(AB) &= 2d_{23}d_{24} + 2d_{13}d_{14} - 4p_1 d_{12} d_{13} + 4p_2 d_{12} d_{13} - 4p_3 d_{12}^2\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li ze (24) do (21), dostáváme:

$$u_3 = -\frac{1}{2} \frac{1}{2k(B) \frac{\mu}{\lambda} + k(AB)} \left[\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial k(B)}{\partial u^{\mathrm{I}}} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\partial k(AB)}{\partial u^{\mathrm{I}}} + \frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}}\right]. \tag{25}$$

V uvažovaném ohnisku $F_\lambda = (0, 0, 0)$ platí (vzhledem ke (14)):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d_{24}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{d_{23}}{d_{12}}\right) = 0\,, \quad \frac{-1}{2} \left(\frac{d_{14}}{d_{12}} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{d_{13}}{d_{12}}\right) = 0\,, \quad \frac{1}{2} \frac{\mu}{\lambda} = 0\,,$$

z čehož plyne:

$$\mu = 0\,, \quad d_{14} = 0\,, \quad d_{24} = 0\,. \tag{26}$$

Vzhledem k (11), (19), (20) dostáváme:

$$p_1 = 0\,, \quad p_2 = 0\,. \tag{27}$$

V ohnisku $F_h = (0, 0, 0)$ jest, vzhledem k (17), (26) a vzhledem k vyjádření w_3, $p_3 \neq 0$, a tedy, vzhledem k (26), (27), (11) a k vyjádření $k(AB)$, splněn předpoklad (23). Jest tedy u_3 v ohnisku $F_h = (0, 0, 0)$ dáno rovnicí (25).

Derivujeme-li parciálně $k(A)$ podle u^{I}, dostaneme:

$$\frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}} = 2d_{24}\frac{\partial d_{24}}{\partial u^{\mathrm{I}}} + 2d_{14}\frac{\partial d_{14}}{\partial u^{\mathrm{I}}} - 4d_{12}^2\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} - 8p_4\frac{\partial d_{12}}{\partial u^{\mathrm{I}}} -$$

$$- 4d_{12}d_{24}\frac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{I}}} - 4p_1 d_{24}\frac{\partial d_{12}}{\partial u^{\mathrm{I}}} - 4p_1 d_{12}\frac{\partial d_{24}}{\partial u^{\mathrm{I}}} +$$

$$+ 4d_{12}d_{14}\frac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{I}}} + 4p_2 d_{14}\frac{\partial d_{12}}{\partial u^{\mathrm{I}}} + 4p_2 d_{12}\frac{\partial d_{14}}{\partial u^{\mathrm{I}}}\,.$$

V ohnisku $F_h = (0, 0, 0)$ jest vzhledem k (26) a (27)

$$\frac{\partial k(A)}{\partial u^{\mathrm{I}}} = - 4d_{12}^2\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} - 8p_4\frac{\partial d_{12}}{\partial u^{\mathrm{I}}}\,, \tag{28}$$

a tedy vzhledem k (25), (26) a (28):

$$u_3 = \frac{1}{-2p_3 d_{12}^2}\left(d_{12}^2\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} + 2p_4\frac{\partial d_{12}}{\partial u^{\mathrm{I}}}\right). \tag{29}$$

V ohnisku $F_h = (0, 0, 0)$ platí dále vzhledem k (26), (27), (22) a (11):

$$k(A) = -4p_4 d_{12}^2 = 0\,,$$

t. j. (vzhledem k (11))

$$p_4 = 0\,. \tag{30}$$

Vzhledem k (4) a (26) jest v $F_h = (0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{I}}}\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{II}}} - \frac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{II}}}\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} &= 0\,, \\ \frac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{I}}}\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{II}}} - \frac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{II}}}\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} &= 0\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Jelikož (podle (4) a vzhledem k (11))

$$-\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{I}}}, & \dfrac{\partial p_1}{\partial u^{\mathrm{II}}} \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{I}}}, & \dfrac{\partial p_2}{\partial u^{\mathrm{II}}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}d_{12} \neq 0\,,$$

jest vzhledem k (31):

$$\frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{I}}} = 0\,, \quad \frac{\partial p_4}{\partial u^{\mathrm{II}}} = 0\,. \tag{32}$$

Z (29), (30) a (32) tedy plyne, že v ohnisku $F_h = (0, 0, 0)$ $(h = 1)$ platí

$$u_3 = 0 , \tag{33}$$

a tedy také (15).

Píšeme-li v právě provedeném důkaze (33) všude u^{II} místo u^{I} (vyjma v (31) a (32)) a v_3 místo u_3, dostáváme

$$v_3 = 0 , \tag{34}$$

a tedy také (16).

Tím jsme provedli důkaz věty 2 pro $h = 1$. Jak ihned patrno, jest tento důkaz zároveň důkazem věty 2 pro $h = 2$.

Poznámka 3. Jako příklad kongruence koulí, jejíž oba pláště jsou plochy, uvádíme kongruenci

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\left(x, y, \frac{x^2}{2}, -x^2 - y^2, 1, \frac{x^2}{2}\right), \quad x > 0,\ y > 0 ,$$

kde x, y, z jsou pravoúhlé kartézské souřadnice (viz [2]).

LITERATURA

[1] *V. Hlavatý*: Zur Lie'schen Kugelgeometrie: I. Kanalflächen. Věstník Král. čes. společnosti nauk, Praha 1941.

K Lieově kulové geometrii: II. Kongruence (Elementární vlastnosti). Rozpravy II. třídy České akademie, roč. LI, č. 33.

[2] *Z. Vančura*: Les congruences de Lie-sphères (*L*-sphères). Spisy přírod. fakulty Karlovy university, č. *194*, str. 20—28, Praha 1950.

Резюме

ФОКАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КОНГРУЭНЦИЙ СФЕР

ЗДЕНЕК ВАНЧУРА (Zdeněk Vančura), Прага.

(Поступило в редакцию 13/X 1954 г.)

Под элементарной поверхностью $\boldsymbol{v} = v^a \boldsymbol{p}_a = \dfrac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u^a}$ каналовой поверхности $u^a = u^a(t)$ в конгруэнции сфер $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}})$ вдоль фиксированной сферы $t = t_0$ мы понимаем множество поверхностных элементов, общих фиксированной L-сфере $t = t_0$ и L-сферам $\boldsymbol{r}$, для которых имеет место

$\mathbf{v}(t_0) \, . \, \mathbf{r} = 0$. Рассмотрим конгруэнцию сфер $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ в такой области, где $A_2 > 0$ ($A_2 = a_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}} - a^2_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}}$, $a_{ij} = \mathfrak{p}_i \, . \, \mathfrak{p}_j$) [1] и дадим такое определение:

Определение 1. *Все элементарные поверхности вдоль сферы $\mathfrak{p}$ конгруэнции сфер $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ имеют в точности два общих (действительных) поверхностных элемента. Точки (плоскости), из которых состоят эти поверхностные элементы, мы назовем фокусами (фокальными плоскостями) сферы $\mathfrak{p}$ конгруэнции сфер $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ и обозначим символами F_k (f_k), где $k = 1, 2$.* [2]

Определение 2. *Геометрическое место фокусов F_k ($k = 1, 2$) сфер конгруэнции $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ называется k-той фокальной поверхностью конгруэнции сфер $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$.* [2]

В работе, во-первых, выводятся уравнения фокальных поверхностей конгруэнции сфер $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ (см. теорему 1), во-вторых, рассматривается и доказывается важное геометрическое свойство фокальных поверхностей конгруэнции сфер $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ (см. теорему 2).

Рассмотрим k-тую фокальную поверхность ($k = 1, 2$) конгруэнции сфер $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ в области, в которой существуют две несовпадающие точки

$$A = (d_{24}, \; - d_{14}, \; 0, \; 2d_{12}), \quad B = (d_{23}, \; - d_{13}, \; d_{12}, \; 0) \, ,$$

где

$$d_{ij} = 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{I}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{I}}} \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{II}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{II}}} \end{vmatrix} .$$

Пусть далее

$$s(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - p_4 x_4^2 - 2p_1 x_1 x_4 - 2p_2 x_2 x_4 - 2p_3 x_3 x_4 \, .$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *k-тая фокальная поверхность ($k = 1, 2$) конгруэнции сфер $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ выражается в однородных декартовых координатах x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) уравнениями*

$$x_1 = \lambda_k d_{24} + \mu_k d_{23} \, , \qquad x_2 = - (\lambda_k d_{14} + \mu_k d_{13}) \, ,$$
$$x_3 = \mu_k d_{12} \, , \qquad x_4 = 2\lambda_k d_{12} \, ,$$

причем для λ_k, μ_k имеет место

$$s(\lambda_k A + \mu_k B) = 0 \, , \qquad \mu_1 : \lambda_1 \neq \mu_2 : \lambda_2 \, .$$

Теорема 2. *Если k-тая фокальная поверхность ($k = 1, 2$) конгруэнции сфер не вырождается в кривую линию (является действительно поверхностью), то фокальная плоскость f_k касается этой поверхности в фокусе F_k.*

Résumé

LES SURFACES FOCALES DES CONGRUENCES DE SPHÈRES

ZDENĚK VANČURA, Praha.

(Venu le 13 octobre 1954.)

La surface élémentaire $\mathbf{v} = v^a \mathbf{p}_a = \dfrac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^a}$ d'une surface enveloppe de sphères $u^a = u^a(t)$ de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}})$ le long de la sphère $t = t_0$ est par définition l'ensemble des couples focaux, communs à la L-sphère $t = t_0$ et aux L-sphères $\mathbf{r}$, où $\mathbf{v}(t_0) \,.\, \mathbf{r} = 0$. On définit (en supposant $A_2 > 0$, $A_2 = a_{\mathrm{I\,I}} a_{\mathrm{II\,II}} - a^2_{\mathrm{I\,II}}$, $a_{ij} = \mathbf{p}_i \,.\, \mathbf{p}_j$) [1]:

Définition 1. *Toutes les surfaces élémentaires le long de la sphère $\mathbf{p}$ d'une congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ ont en commun deux couples focaux. Les éléments des couples focaux sont le point et le plan. On désigne ce point (ce plan) par $F_k(f_k)$ $(k = 1, 2)$ et on l'appelle le foyer (le plan focal) de la sphère $\mathbf{p}$ de la congruence $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$.* [2]

Définition 2. *Le lieu géométrique des foyers F_k $(k = 1, 2)$ des sphères de la congruence $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ s'appelle la $k^{\text{ième}}$ surface focale de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$.* [2]

Ce travail traite des surfaces focales de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$. D'une part on y déduit les équations des surfaces focales de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ (vois théorème 1); d'autre part on y démontre un théorème, concernant une propriété géométrique des surfaces focales de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ (vois théorème 2).

Supposons maintenant la $k^{\text{ième}}$ surface focale $(k = 1, 2)$ de la congruence $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ dans un tel domaine, où $A = (d_{24}, -d_{14}, 0, 2d_{12})$, $B = (d_{23}, -d_{13}, d_{12}, 0)$ sont deux points distincts, où $d_{ij} = 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{I}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{I}}} \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial u^{\mathrm{II}}}, & \dfrac{\partial p_j}{\partial u^{\mathrm{II}}} \end{vmatrix}$.

Soit

$$s(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - p_4 x_4^2 - 2p_1 x_1 x_4 - 2p_2 x_2 x_4 - 2p_3 x_3 x_4 \,.$$

On obtient ensuite les théorèmes suivants:

Théorème 1. *La $k^{\text{ième}}$ surface focale $(k = 1, 2)$ de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ a, en coordonnées homogènes cartésiennes x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, les équations suivantes:*

$$x_1 = \lambda_k d_{24} + \mu_k d_{23}\,, \quad x_2 = -(\lambda_k d_{14} + \mu_k d_{13})\,,$$
$$x_3 = \mu_k d_{12}, \quad x_4 = 2\lambda_k d_{12}\,,$$

où λ_k, μ_k satisfont à l'équation

$$s(\lambda_k A + \mu_k B) = 0\ , \quad \mu_1 : \lambda_1 \neq \mu_2 : \lambda_2\ .$$

Théorème 2. *Si la $k^{\text{ième}}$ surface focale ($k = 1, 2$) de la congruence de sphères $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ est une surface, elle touche le plan focal f_k au foyer F_k.*

O JEDNÉ VĚTĚ KADEŘÁVKOVĚ

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 10. července 1954.) DT:513.517

Autor odvozuje analytickými prostředky větu, která úzce souvisí s tímto Kadeřávkovým zobecněním věty Dandelinovy: Buďte μ_1, μ_2 různé kulové plochy, vepsané rotační kuželové ploše $\varkappa$ tak, že jejich průnik s nevrcholovou rovinou ϱ není prázdný. Pak platí $X \in \varrho \cap \varkappa$, právě když součet anebo absolutní hodnota rozdílu délek tečen z X vzhledem k $\mu_1 \cap \varrho$, $\mu_2 \cap \varrho$ je konstantní, při čemž tato konstanta je délka úsečky, kterou vytínají na povrchové přímce plochy $\varkappa$ kružnice $\mu_1 \cap \varkappa$, $\mu_2 \cap \varkappa$.

V jedné své práci[1]) zabýval se prof. KADEŘÁVEK zobecněním některých ohniskových vlastností kuželoseček. Ve větě 6 zmíněné práce zobecňuje přirozeným způsobem větu Dandelinovu. Nejprve zavedeme pomocné označení a pak budeme větu formulovat.

Úmluva 1. *Buď k kružnice v rovině ϱ, B bod roviny ϱ, který neleží uvnitř k a konečně T bod dotyku na tečně, vedené z B ke k. Pak označme $\overline{Bk} = \overline{BT}$.*

Věta 1. *Buďte dány: rotační kuželová plocha $\varkappa$, nevrcholová rovina ϱ a různé kulové plochy μ_1, μ_2, vepsané ploše $\varkappa$ tak, že $k_i = \mu_i \cap \varrho \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$. Označme dále c délku úsečky, kterou vytínají obě kružnice $\varkappa \cap \mu_1$, $\varkappa \cap \mu_2$ na povrchové přímce plochy $\varkappa$. Pak bod X patří do průniku $\varkappa \cap \varrho$, právě když platí některá z rovnic*

$$|\overline{Xk_1} \pm \overline{Xk_2}| = c\,. \tag{1}$$

Argumentace při důkazu nutné podmínky je obdobná jako při větě Dandelinově. V práci[1]) není výslovně dokázána postačující podmínka:

Je-li $X \in \varrho$ a platí-li některá z rovnic (1), pak $X \in \varkappa \cap \varrho$. Buď tedy X bod roviny ϱ, pro nějž platí některá z rovnic (1). Pak $\overline{Xk_i}$ je délka tečny z X k μ_i $(i = 1, 2)$. Sestrojíme-li rovinu σ, obsahující osu plochy $\varkappa$ a bod X, pak platí

$$|\overline{X(\mu_1 \cap \sigma)} \pm \overline{X(\mu_2 \cap \sigma)}| = c\,.$$

Průnik $\varkappa \cap \sigma$ tvoří povrchové přímky t_1, t_2. Zřejmě platí

$$c = \overline{(\mu_1 \cap t_1)\,(\mu_2 \cap t_1)}\,,$$

[1]) O fokálních kružnicích kuželoseček, Čas. pěst. mat. fys. XLVI (1917).

a tedy při vhodném označení je $X \in t_1$. (Připomeňme, že délka vnější společné tečny je různá od délky vnitřní společné tečny dvou kružnic.) Podmínka je dokázána.

Úmluva 2. *Buďte dány kladné konstanty c, m a nezáporné konstanty r_1, r_2. Označme*[2] $k_1 = (x^2 + y^2 = r_1^2)$, $k_2 = ((x - m)^2 + y^2 = r_2^2)$. *Dále buď* $X = (x, y)$ *bod a* v *nezáporný parametr; při tom nechť platí*

$$\overline{Xk_1} = v\,, \quad \overline{Xk_2} = |c \pm v|\,.$$

Nechť je splněna úmluva. Potom platí rovnice

$$x^2 + y^2 = r_1^2 + v^2\,, \quad (x - m)^2 + y^2 = r_2^2 + (c \pm v)^2\,. \tag{2}$$

Budeme eliminovati parametr v. Odečtením odvodíme rovnici $2mx = m^2 - c^2 + r_1^2 - r_2^2 \pm 2vc$. Dále zavedeme z důvodů stručnosti označení

$$d = m^2 - c^2 + r_1^2 - r_2^2\,. \tag{3}$$

Dostaneme tak rovnici $v^2 = \left(\dfrac{2mx - d}{2c}\right)^2$. Po dosazení do první z rovnic (2) a po úpravě vychází

$$4(c^2 - m^2)\,x^2 + 4dmx + 4c^2y^2 - 4c^2r_1^2 - d^2 = 0\,. \tag{4}$$

Postup lze obrátit; z rovnic (3), (4) vyplývají tak rovnice (2). Rovnice (4) má diskriminant

$$A = \begin{vmatrix} 4(c^2 - m^2) & 0 & 4dm \\ 0 & 4c^2 & 0 \\ 4dm & 0 & -4c^2r_1^2 - d^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -16(c^2 - m^2)\,c^2(4c^2r_1^2 + d^2) - 16c^2d^2m^2 = -16c^4(4r_1^2(c^2 - m^2) + d^2)\,.$$

Výraz $a = 4r_1^2(c^2 - m^2) + d^2$ lze ještě dále upravit podle (3):

$$a = (c^2 - m^2)^2 + 2(r_1^2 + r_2^2)(c^2 - m^2) + (r_1^2 - r_2^2)^2\,. \tag{5}$$

Po snadném výpočtu plyne, že rovnice $a = 0$ je ekvivalentní s některou z rovnic

$$(c^2 - m^2)_{1,2} = -(r_1 \pm r_2)^2\,, \tag{6}$$

které mají smysl ovšem jen pro $c \leqq m$. Subdeterminant A_{33} je roven výrazu $16c^2(c^2 - m^2)$. Z těchto fakt vyplývá věta, kterou nyní vyslovíme:

Věta 2. *Množina bodů X z úmluvy 2 je kuželosečka k o rovnici (4). Je singulární, právě když platí některá z rovnic (6). Geometrický význam toho jest, že c je délka společné tečny kružnic k_1, k_2. Je-li k jednoduchá, pak je hyperbolou, parabolou anebo elipsou podle toho, zda platí $c < m$, $c = m$ anebo $c > m$.*

Věnujme se nyní středové kuželosečce k z předešlé věty. Její osy jsou přímky $(y = 0)$, $\left(x = -\dfrac{dm}{2(c^2 - m^2)}\right)$. Po snadném výpočtu odvodíme, že body

[2]) Závorkou označujeme bodovou množinu, charakterisovanou danou rovnicí.

$\left(\dfrac{-dm \pm c\sqrt{a}}{2(c^2 - m^2)}, 0\right)$, $\left(-\dfrac{dm}{2(c^2 - m^2)}, \pm \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{c^2 - m^2}}\right)$ jsou vrcholy. Z toho odvodíme délky poloos: $\dfrac{c \cdot \sqrt{a}}{2(c^2 - m^2)}, \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{c^2 - m^2}}$. Je-li $c > m$, pak $a > 0$ a z nerovností $\dfrac{c^2}{(c^2 - m^2)^2} > \dfrac{1}{c^2 - m^2} \Leftrightarrow m^2 > 0$ vyplývá, že $(y = 0)$ je hlavní osou elipsy k. Nechť tedy platí $c < m$. Nerovnost $a < 0$ platí pak, právě když $(y = 0)$ je hlavní osou. Nerovnost $a > 0$ je ekvivalentní s incidencí

$$m^2 - c^2 \in (\min ((r_1 + r_2)^2, (r_1 - r_2)^2), \max ((r_1 + r_2)^2, (r_1 - r_2)^2)) . \tag{7}$$

Dosadíme-li $y^2 = r_1^2 - x^2$ (resp. $y^2 = r_2^2 - (x - m)^2$) do rovnice (4), dostaneme po úpravě rovnici $(2x - d)^2 = 0$ (resp. $(2mx - d - 2c)^2 = 0$), která má dvojnásobný kořen. Z toho plyne, že k_i je buď dvojnásob dotyčná kružnice anebo ohnisko vzhledem ke k $(i = 1, 2)$. Shrneme výsledky:

Věta 3. *Kuželosečka k z věty 2 má osu $(y = 0)$, je-li středová, pak má další osu $\left(x = -\dfrac{dm}{2(c^2 - m^2)}\right)$. Je-li elipsou, pak $(y = 0)$ je hlavní osa. Je-li hyperbolou, pak $(y = 0)$ je hlavní osou právě tehdy, když neplatí (7). Množina k_i je ohnisko, právě když $r_i = 0$; jinak je kružnicí, která má střed na $(y = 0)$ a dvakrát se dotýká kuželosečky k $(i = 1, 2)$.*

Překvapením je, že přímka $(y = 0)$ může být také vedlejší osou hyperboly k.[3]) Tento výsledek nelze totiž odvoditi z věty 1.

---

[3]) V tomto smyslu je nutno doplnit větu 6 z pojednání[1]).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1950)

O ŘEŠENÍ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC METODOU SÍTÍ

I. BABUŠKA, Praha a L. MEJZLÍK, Brno.

(Došlo dne 10. února 1955.) DT:517.944

Metoda sítí se dnes stává jednou z nejužívanějších metod numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic. Velká část nejdůležitějších technických problémů vedoucích na parciální dif. rovnice je dnes řešena touto metodou. Užití velkých matematických strojů staví metodu sítí ještě více do popředí. V tomto článku bychom chtěli shrnout nejzávažnější práce tohoto oboru a upozornit praktiky na rozsáhlou theoretickou matematickou problematiku souvisící s touto metodou.

Obsah

I. Úvod

1. Hlavní myšlenka metody sítí. Hlavní myšlenka metody sítí je ve své podstatě velmi prostá. Při řešení diferenciální rovnice nahradíme derivace diferencemi a řešíme potom soustavu takto vzniklých algebraických lineárních diferenčních rovnic. Řešíme je metodami pro řešení soustavy lineárních rovnic. (Theorie diferenčních rovnic zde však nenachází aplikace.)

Hledané řešení diferenciální rovnice má rozmanitý fysikální význam. Může popisovat na př. rozdělení tepla nebo napětí v tělese, šíření vln v prostoru atd.

Na základě dosažených výsledků usuzuje technik dále o chování konstrukce a provádí dimensování atp. Veškeré tyto závěry jsou ovlivněny řadou technických okolností, které nejsou přesně zachyceny ve výpočtu. Jsou ovlivněny tím, že některé závislosti a vztahy zjednodušujeme třeba i na úkor správnosti, aby bylo vůbec možno přijít k nějakým numerickým závěrům. Není proto výjimkou, že i přesné theoretické řešení se od skutečnosti poměrně dost liší (o 10—20—30 %). Pak ovšem je zbytečné provádět výpočet s přehnanými nároky na přesnost, ale je velmi užitečné znát odhad chyby, které se dopustíme při výpočtu prováděném určitým způsobem, aby výpočet nebyl zbytečně pracný. (Jde na př. o to, abychom nevolili zbytečně hustou síť, neprováděli příliš mnoho iteračních kroků a pod.)

Hlavní myšlenku metody sítí lze v jednotlivých případech interpretovat i fysikálně (myšlenka převedení na rošty a pod.). Srv. na př. Marcus [1]. Intuitivně má pěkně rozvinutou myšlenku převodu diferenciálních rovnic na diferenční také Southwell [6], [9].

2. Rozsah použitelnosti, výhody a nevýhody metody sítí. a) Z hlavní myšlenky metody sítí jest patrno, že metoda je použitelná u celkem libovolných typů parciálních diferenciálních rovnic. Zatím se jí však většinou používá jen u lineárních diferenciálních rovnic, neboť po nahrazení derivací dostaneme soustavu lineárních rovnic, na jejichž řešení máme vypracovánu řadu metod. U nelineárních rovnic naproti tomu narážíme na potíže jak technického rázu, tak na některé nevyjasněné otázky rázu theoretického (konvergenční otázky a pod.). Pro řešení nelineárních diferenčních rovnic užil metody sítí Fox [4].

b) Dále je celkem patrno, že metoda sítí je tím vhodnější, čím hladší jsou funkce a derivace, které vyjadřujeme diferenčním způsobem. Řada otázek souvisící s problémy různých nespojitostí není dnes ani prakticky ani theoreticky uspokojivě řešena. Na štěstí se v technické praxi podobné problémy vyskytují zřídka. Viz Motz [2].

c) Důležitou a prakticky významnou otázkou je problém nekonečných definičních oblastí, které se v praxi poměrně často vyskytují. Takovou oblastí může být na př. polorovina nebo rovina s výřezem a pod. Síť, která by konečnými oky pokryla celou oblast, by měla nekonečně (spočetně) mnoho ok a tím bychom dostali soustavu o nekonečně mnoha neznámých. Naopak, abychom zachovali konečný počet rovnic, museli bychom se uchýlit k okům o nekonečné velikosti, čím se však z celkem pochopitelných důvodů značně sníží přesnost. Zdá se nám, že není ani praktického ani theoretického důvodu k tomu, abychom užívali nekonečných ok. Doporučujeme proto užívat v podstatně systému nekonečně mnoha rovnic, které se řeší metodou redukované soustavy (srv. Kantorovič a Krylov [1], kde je také uvedena příslušná literatura), která spočívá v tom, že položíme rovny nule všechny neznámé s výjimkou vybraného konečného počtu. (Viz ještě dále technickou intepretaci.)

Někdy se však postupuje tak, že nějakou jinou metodou než metodou sítí určíme chování hledané funkce v okolí nekonečna, čehož potom užijeme v kombinaci s metodou sítí. Jinými slovy to lze vyjádřit také tak, že místo nekonečné oblasti uvažujeme definiční oblast konečnou a okrajové podmínky předepíšeme přibližně. Uvedeme technický případ laminárního permanentního proudění podzemní vody pod vodní stavbou. Problém vede na parciální diferenciální rovnici druhého řádu v polorovině. Z theoretických úvah i praktických zkušeností plyne, že voda je v dostatečné hloubce v klidu. Proto můžeme zavést jakousi „fiktivní" hranici, na níž bude okrajová podmínka vyjadřovat tu skutečnost, že voda je v klidu. V daném příkladě můžeme postupovat také jinak: V dostatečné vzdálenosti budou proudnice prakticky kružnicemi, jak plyne z analysy vyjádření funkce v okolí nekonečna, a tak můžeme „fiktivní" hranici vytvořit ve tvaru kružnice s předepsaným rovnoměrným spádem potenciálu.

d) Použitelnost metody sítí je dnes omezena také možností řešit velké soustavy lineárních (diferenčních) rovnic.[1]) V literatuře se udává maximální zvládnutelný počet uzlových bodů sítě (který je totožný s počtem lineárních rovnic) pro řešení Dirichletova problému relaxační metodou kolem 4000. Pro řešení biharmonického problému se udává tento počet asi na 400. Je třeba, aby řešitel těchto velkých sítí měl značnou praxi a zkušenost, aby vůbec mohl tento problém zvládnout; ještě vhodnější je, aby se práce zúčastnila celá skupina počtářů.

Autoři tohoto článku mají větší zkušenosti pouze s přímými metodami řešení. Přímé řešení rovnic o 150 neznámých pro problém Laplaceovy rovnice se podařilo provést jednomu z autorů bez zvláštních potíží asi během 100 pracovních hodin při naprosto dostatečné přesnosti.

Byl řešen rovněž biharmonický problém převedený na 65 diferenčních rovnic.[2])

Domníváme se, že by bylo možno řešit přímými metodami v přijatelném čase systém asi o 300 až 400 neznámých pro Laplaceovou rovnici a do 150 neznámých při biharmonickém problému. Při tak velkých systémech rovnic je důležitý účinný systém kontroly. (Viz dále kapitolu o řešení diferenčních rovnic.) S hlediska omezených možností řešit rozsáhlé systémy rovnic je dnes metoda sítí prakticky, při nejmenším u nás, omezena na problémy rovinné.

e) Velkou předností oproti druhým metodám je nezávislost způsobu užití metody sítí vzhledem k tvaru definiční oblasti a okrajovým podmínkám.

f) Další výhodou je velká jednoduchost metody sítí, která je velmi málo náročná na odbornou kvalifikaci řešitele. Vyšší kvalifikace v podstatě vyžaduje jedině návrh sítě, převod diferenciální rovnice na diferenční a odhad chyby

[1]) Zatím nemají autoři zkušenosti s použitím samočinných počitačů. Proto veškeré úvahy se týkají možností daných obyčejnými kalkulačními stroji.

[2]) Výpočet byl proveden na stroji Rheinmetall-SASL.

(pokud je proveditelný). Zbytek je prací více méně mechanickou a pouze při relaxacích rozsáhlejších systémů je třeba větší zkušenosti — ne však vyšší kvalifikace.

Návrh sítě a sestavení rovnic je také prací nepříliš složitou a zvládne ji každý vysokoškolsky vzdělaný technik. Pouze při analyse přesnosti je třeba větších matematických znalostí.

Uvedená přednost je pro praxi velmi značná a metoda sítí poměrně zatlačuje jiné metody pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic, a to i tehdy, když by snad jiné analytické metody byly numericky výhodnější.

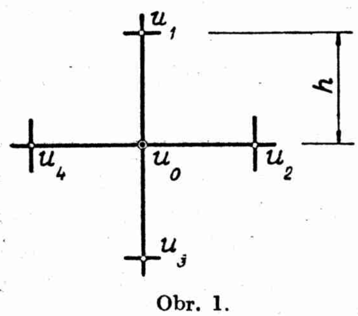
g) Nevýhody metody sítí jsou však dodnes také velké. Je to především množství počtářských prací. Jako příklad uveďme, že pro vyřešení parciální diferenciální rovnice druhého řádu dvou proměnných pomocí sítí o 100 uzlech přímými metodami je třeba asi 10 000 početních výkonů.

Theoreticky je metoda sítí málo propracována. Řada zásadních otázek je dodnes buď vůbec neřešena, nebo řešena naprosto neuspokojivě.

Přesto jsme však přesvědčeni, že pokrok ve stavbě samočinných počitačů zvětší ještě význam metody sítí.

II. Způsob převodu na diferenční rovnice

Převedení derivací na diference může být provedeno několika způsoby. Nejobvyklejší metodou je interpolační vyjádření derivací. Tato metoda záleží v tom, že několika body sítě se proloží interpolační polynom a počítá se derivace tohoto polynomu.



Obr. 1.

Derivaci dané funkce lze takto vyjádřit pomocí diferencí a nějakého zbytku, který závisí na derivacích uvažované funkce. Tak na př. pro Laplaceův operátor platí (obr. 1):

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{h^2}[u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0] + R_0$$

a

$$R_0 = \frac{2h^2}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \frac{2h^4}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right) + \dots.$$

Uvedený zbytek pak zanedbáme a dostáváme diferenční vyjádření Laplaceova operátoru. (Podrobnější výklad viz na př. Kantorovič - Krylov [1].) Laplaceův operátor jsme zde vyjádřili diferenčním způsobem pomocí pěti bodů, při čemž chyba je řádu h^2. Užijeme-li více bodů, můžeme zvýšit řád chyby, což zpravidla znamená její zmenšení. (Srv. práce Š. E. Mikeladzeho [1], [2], [10],

[12].) Jak zvýšiti přesnost tímto způsobem, ukazuje také Southwell [11]. Odhady zbytků viz také COLLATZ [2].

O zavedení zbytků do výpočtu se pokusil Fox [4]. Podobným způsobem odvozují vzorce také PANOV [5], BICKLEY [2], [3], VARVAK [14]a jiní.

Druhý způsob odvození diferenčních vzorců může být takový, že hledáme jednotlivé koeficienty v diferenčních výrazech tak, aby výraz byl přesný pro nejširší třídu funkcí.

Z dalších způsobů se někdy vyskytuje i odvození fysikální a pod.

ALBRECHT [1] užívá pro nahrazení operátoru Δu a $\Delta\Delta u$ Taylorova rozvoje ve zvlášť přehledném tvaru a podává vzorce různé přesnosti pro různé typy sítí.

Ve většině knih a učebnic jsou udávány diferenční vzorce pro pravidelné sítě. Vzorec pro nepravidelné sítě viz na př. MEJZLÍK [1] a Varvak [14].

III. O typech sítí

A) **Dvojdimensionální sítě.** Metoda sítí zde našla největší uplatnění a proto pojednáme o tomto případu podrobněji. Tvar sítě je ovlivněn několika okolnostmi. Je to tvar integrační oblasti, druh diferenciální rovnice a okolnosti, nutící nás ke změně hustoty uzlových bodů.

1. Pravoúhlé sítě. Pravoúhlé sítě patří k nejdéle užívaným druhům sítě a dnes se používají nejčastěji. Můžeme je dělit na

α) nepravidelné (obr. 2a, 2b),

β) obdélníkové,

γ) čtvercové.

α) Nepravidelné sítě. Tento druh sítě je používán velmi zřídka. Může mít však velké přednosti ve dvou případech:

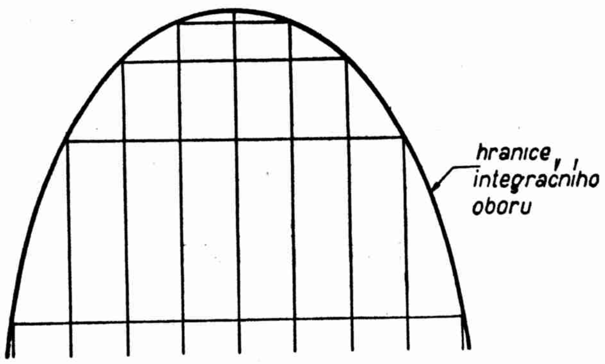
(1) Nepravidelnou sítí dosáhneme toho, že uzly sítě leží na hranici a okrajové podmínky jsou v souhlase s volbou této sítě (viz obr. 2a),

(2) můžeme touto sítí provádět zhušťování (viz obr. 2b).

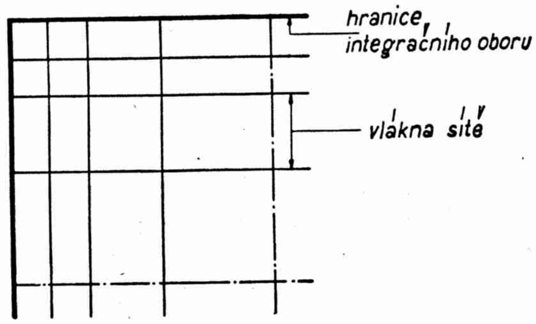
Nepravidelné sítě najdeme v literatuře poměrně zřídka. (Srv. na př. REKTORYS [1].) Za jediný případ můžeme považovat nepravidelnou síť vzniklou nepravidelnými oky při hranici (viz obr. 2c), kde body označené čísly 1 až 6 můžeme považovat za nepravidelné. Ve snaze zjednodušit relaxace omezuje se někdy jistá přesnost v těchto okrajových bodech a uvažují se pro tyto body diferenční rovnice jako pro body pravidelné. (Srv. BRILLA [1], Southwell [9], ALLEN [2]). Různé způsoby jiných úprav při okrajích uvádí ve svých pracích Panov [6], GILLES [1], Fox [1], [7], Fox - GOODWIN [1], Fox, HUSKEY, WILKINSON [1], Fox, Southwell [1], [2]. Poznamenejme, že největší komplikace nastávají při těch okrajových podmínkách, v nichž se vyskytují parciální derivace (na př. Neumannův a biharmonický problém).

β) Obdélníkové sítě. Tyto sítě nenašly velkého uplatnění. Užívá se jich však ve speciálních případech. Uveďme na př. rovnici

$$k_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 ,$$



Obr. 2a.



Obr. 2b.

kde k_2 a k_1 jsou kladné konstanty. Zde zvolíme obdélníkovou síť tak, abychom zajistili jednak největší možnou přesnost a mimo to, abychom dostali jednoduchý tvar (stejné koeficienty) diferenčního vzorce.

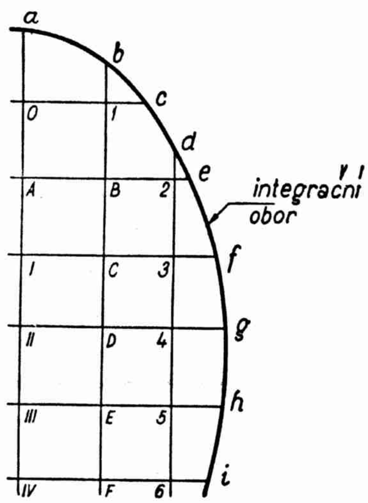
γ) Čtvercové sítě. Tyto sítě nalezly velmi široké uplatnění. Odhadujeme, že 90 % všech řešených problémů je řešeno pomocí čtvercové sítě. Výhoda čtvercové sítě spočívá v jednoduchých tvarech diferenčních vzorců pro nejčastěji užívané diferenciální rovnice.

Upozorněme zde zvláště na práce: Bickley [3], Albrecht [1], Varvak [14], Panov [5].

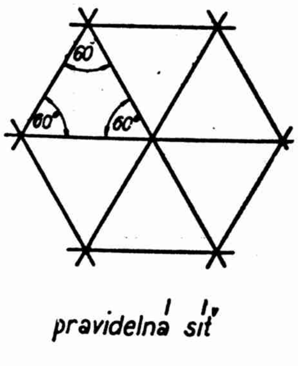
V případě čtvercových sítí se snažili někteří autoři (Southwell [9], Bickley [2] a jiní) zvýšit přesnost v některých speciálních případech (rovnice $\Delta\Delta u = f$ a $\Delta u = f$) různými jednoduchými způsoby.

2. Rovnoběžníkové sítě. Tyto sítě jsou zobecněním pravoúhlých sítí. V obecném pojetí se zabývá těmito sítěmi na př. LJUSTERNIK [4]. Zvláštní význam zde mají sítě trojúhelníkové a to pravidelné (viz obr. 3a) a nepravidelné (viz obr. 3b). Nepravidelné sítě se používají zřídka. Častější jsou sítě pravidelné. (Srv. na př. Southwell [10], Albrecht [1], JUŠKOV [1].) V diferečních výrazech se vyskytuje více bodů a proto se získává větší přesnost.

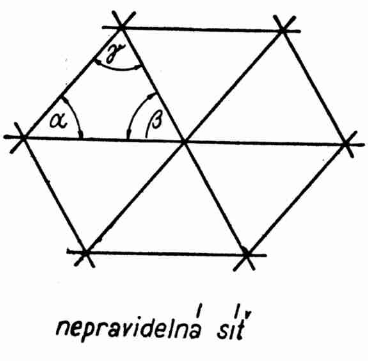
3. Šestiúhelníkové sítě. Zde opět přicházejí v úvahu sítě pravidelné a nepravidelné. Pokud je nám známo, nepravidelné sítě nebyly prakticky použity.



Obr. 2c.



Obr. 3a.

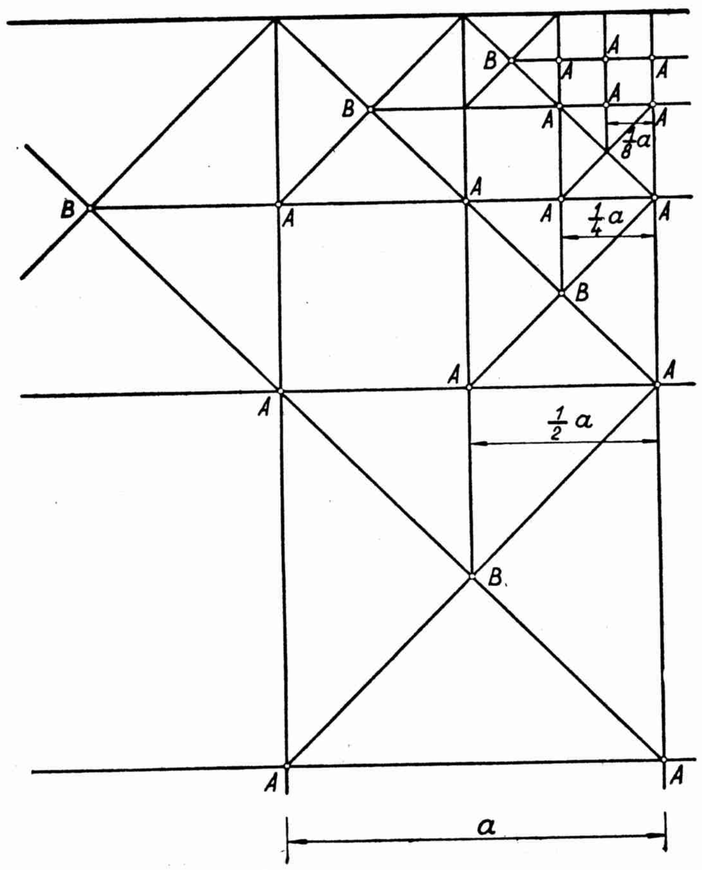


Obr. 3b.

Pravidelné šestiúhelníkové sítě mohou vzniknout z pravidelné trojúhelníkové sítě, což je jistou výhodou, neboť můžeme postupovat tak, že najdeme nejprve při relaxačních metodách přibližný průběh hledané funkce užitím šestiúhelníkové sítě, který potom dále zpřesníme pomocí trojúhelníkové sítě.

Další výhodou je, že se v diferenčních výrazech vyskytuje málo členů. Na druhé straně je to nevýhoda, neboť se tím snižuje přesnost.

4. Polární sítě. V polárních sítích bylo vyřešeno jen velmi málo problémů. Mohou být však vhodné pro některé speciální oblasti, jako je výseč, mezikruží a pod. Diferenční vzorce základních diferenciálních operátorů jsou poměrně složité. (Srv. na př. Varvak [14], Mejzlík [1].)



Obr. 4.

5. Nepravidelné sítě. MacNeal [1] na základě analogie s elektrickým obvodem odvodil vztahy, podle kterých se dají řešit analogicky některé typy diferenciálních rovnic.

Nepravidelné sítě se užívají prakticky na stycích integračních oborů, kde se mění tvar diferenciální rovnice. Jiným případem jsou sítě o problémech s předepsanými derivacemi na hranici. Docílíme-li, že je síť kolmá na hranici, můžeme někdy zjednodušit numerický výpočet. V takovém případě ovšem navazuje tato nepravidelná síť uvnitř na síť pravidelnou, většinou čtvercovou.

6. Dvojité sítě. Gilles [1] navrhoval pro některé speciální problémy metodu dvojité sítě, která spočívá v tom, že se problém vedoucí na rovnici jistého řádu s jednou neznámou funkcí převádí na problém popsaný soustavou rovnic nižších řádů s několika neznámými funkcemi a pro každou hledanou funkci se užívá zvláštní sítě.

7. Zhušťování sítí. Již dříve jsme se zmínili o tom, že hustota uzlů sítě má vliv na přesnost řešení, a také o tom, jak roste množství potřebné numerické práce v závislosti na množství bodů sítě. Proto je výhodné zhušťovat sítě pouze v místech, kde nám na přesnosti více záleží. Zhuštění provedeme nejsnáze vložením pruhu nepravidelné sítě. To má ovšem své nevýhody, neboť se v obecném případě komplikují diferenční rovnice.

Nejsnadněji se změní hustota při čtvercové síti. Zhuštění můžeme provést na př. užitím diagonální sítě, jak navrhuje Allen a DENIS [3]. Příklad je na obr. 4.

B) **Problémy trojdimensionální a vícedimensionální.** Aplikace metody sítí na problémy trojdimensionální je po stránce theoretické stejná jako v případě dvojdimensionálním. V případě eliptické rovnice narůstá však počet uzlových bodů do nezvládnutelného počtu. Proto zde nenalezla metoda sítí zatím většího uplatnění.

Některé zmínky o trojdimensionálních problémech jsou v pracích Varvaka [16], Allena a Dennise [2]. Případ parabolických rovnic (dva argumenty polohy a jeden času) je však naopak dobře řešitelný. V tomto případě hrají totiž jednotlivé časové intervaly podobnou úlohu jako jednotlivé iterační kroky dvojdimensionálního problému.

Technicky lze tyto parabolické rovnice interpretovat na př. jako popis nepermanentního laminárního rovinného pohybu tekutin nebo proudění tepla v rovinných tělesech a pod. Čtenáře zde odkazujeme na práce autorů: DUSSINBERE [1], [2], EMMONS [1], MILNE [1], Allen, SEVERN [1], Rektorys [1], Milne-THOMSON [1] atd.

IV. Zavádění okrajových podmínek

Okrajové podmínky se zavádějí různým způsobem v závislosti na druhu okrajového problému. Omezíme se zde pouze na podrobnější popis postupu pro případ Dirichletova problému.

COURANT, FRIEDRICHS a LEWY [2] navrhují formulovat okrajové podmínky tak, že se užije pouze pravidelných bodů sítě. V těch se předepíše hodnota, kterou by v nich nabývala pevná, celkem však libovolná spojitá funkce definovaná v celém oboru a nabývající na hranici předepsaných hodnot. Podobným způsobem postupuje i Ljusternik [4].

Tento způsob je prakticky nevýhodný a obyčejně se užívá nepravidelné sítě v okolí hranice, jak jsme se o tom zmínili v odstavci o nepravidelných pravoúhlých sítích, s případným dalším zjednodušením, o němž jsme se již také zmínili.

Podobným celkem jednoduchým způsobem se zavádějí okrajové podmínky ve všech případech diferenciálních rovnic.

V. Konvergenční otázky metody sítí

Konvergenční otázky metody sítí nejsou dosud prostudovány tak, jak by si zasloužily. Studium se omezilo zejména na speciální typy rovnic. Jedině případ Dirichletova problému je poměrně dobře prostudován.

Konvergenčními otázkami se zabývají na př. Courant, Friedrichs, a Lewy ve své práci [2]. Vycházejí v podstatě z variačních principů, a proto na př. pro případ Dirichletova problému předpokládají konečný Dirichletův integrál $\iint_\Omega \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) \mathrm{d}\Omega$. Poněkud jiným způsobem provádí důkaz v případě Dirichletova problému Philips a Wiener [1]. Ljusternik [7] ve své práci dokazuje existenci řešení Dirichletova problému právě tím, že dokáže konvergenci přibližných řešení nalezených metodou sítí při postupném zhušťování sítě k přesnému řešení.

Petrovskij [3] předložil velmi obecný důkaz konvergence. Dokázal, že z posloupnosti síťových funkcí, t. j. hodnot přibližných řešení, možno vybrat posloupnost, která konverguje stejnoměrně k harmonické funkci, jež vyhovuje okrajové podmínce v každém regulárním bodě ve smyslu existence superharmonického barieru. Jestliže se hranice skládá jedině z regulárních bodů v uvedeném smyslu, potom celá posloupnost konverguje k řešení Dirichletova problému.

Uvedené práce se zabývají problémem Dirichletovým pro celkem obecné oblasti. Případ čtverce, resp. obdélníku byl studován značně podrobněji vzhledem k tomu, že lze napsat explicite jak řešení přesné, tak i diferenční pomocí Fourierových řad (srv. Le Roux [1].[3]) V poslední době bylo zde dosaženo jistých výsledků. Tak Walsh a Young [3] studovali rychlost konvergence v závislosti na okrajových podmínkách. Přišli k závěru, že pro jisté (spojité) okrajové podmínky je konvergence pomalejší než h^α ($\alpha > 0$ libovolně pevné).

Naopak, má-li okrajová podmínka dvě spojité derivace, konvergence má rychlost h^2. Pro některé smíšené okrajové problémy eliptických rovnic dokazuje konvergenci Batschelet [1]. Předpokládá však omezenost čtvrtých derivací hledané funkce. Konvergenčními otázkami pro parabolické rovnice se

[3]) Tyto vzorce formálně poněkud v jiném tvaru udává Hyman [1].

zabývá KAMYNIN [1], [2]. Jistou konvergenční otázku souvisící s rovnicí vedení tepla řešil také Rektorys [1]. Viz také Petrovskij [2].

VI. Problém odhadu chyby

Problém odhadu chyby je jednou z velmi důležitých matematických otázek. Uspokojivý odhad není dodnes znám. V praxi často užívaný odhad Rungeho — odhad metodou dvojnásobného kroku — je naprosto nedostatečně matematicky fundován a jeho platnost je problematická. (Odvození tohoto vzorce viz na př: Panov [6].)

Pravděpodobně theoreticky jedině fundovaný vzorec pro obecné oblasti je odhad GERŠGORINŮV [1], (srv. také Kantorovič - Krylov [1]). Největší vadou tohoto vzorce je však to, že je nutno znát horní odhad parciálních derivací až do 4. řádu. Collatz doporučil odhadnouti tyto derivace prakticky pomocí diferencí síťového řešení. Problematičnost tohoto postupu vynikne z toho, že i v naprosto „rozumných" a technicky důležitých problémech je čtvrtá derivace neomezená.

Podobným způsobem jako Geršgorin postupuje i Batschelet [1] v případě eliptické diferenciální rovnice.

Pro speciální oblast čtverce, díky vzorcům Le Rouxe, lze provést odhad chyby důkladněji. Těmito problémy se zabývali Walsch a Young [1] a WASSON [1]. Odhadem chyby v tomto případě se zabývá ROSENBLOOM [1].

VII. Řešení diferenčních rovnic

Způsob řešení velké soustavy lineárních rovnic ovlivňuje do velké míry praktickou použitelnost metody sítí.

V zásadě můžeme dělit způsoby řešení systémů lineárních rovnic na metody přímé a nepřímé. Přímými metodami rozumíme metody charakteru eliminačního, nepřímými metodami metody charakteru iteračního. Přímých metod se užívá tam, kde systém rovnic počítáme pro více pravých stran, nebo v těch případech, při nichž iterační řešení pomalu konverguje. Podrobnější rozbor, kdy jsou výhodnější metody přímé (ve smyslu pracnosti) než metody nepřímé a naopak, není autorům znám. Ve většině prací je rozhodující subjektivní stanovisko.

O řešení lineárních rovnic viz práce FORSYTHE [1] s rozsáhlým seznamem literatury (srv. také FADĚJEVA [1]).

1. Přímé metody. Tyto metody mají eliminační charakter a je možno je provádět prakticky různými způsoby, na př. převodem na trojúhelníkovou matici, orthonormalisací, skupinovými eliminacemi, Milneho metodou (srv.

Milne [2]) a pod. Podstatnou úlohu zde hraje soustava kontrol. Výhodou je, že numerické práce dají se velmi zmechanisovat, takže je mohou provádět méně kvalifikované síly.

Do přímých metod můžeme zahrnout i metody, které jsou blízké eliminačním metodám a které jsou speciálně vypracovány pro rovnice odpovídající metodě sítí. Viz na př. Hyman [1] neb Runge [1]. Pro speciální rovnici Dirichletovu a speciální oblasti (obdélník) byly vypracovány některé rychlé metody, při nichž se užívá jistých hodnot předem vypočítaných (srv. Moskowitz [1]).

2. Nepřímé metody. Nepřímé metody můžeme rozdělit na dvě skupiny: metody iterační, které jsou charakterisovány pevným iteračním postupem (iterace Ritzova a Gauss - Seidlova a p.), a metody relaxační, charakterisované tak, že při iteračním postupu bereme v úvahu již nalezené výsledky (na př. metoda největšího spádu a pod.).

a) Metody iterační. Iterační metody byly kdysi velmi oblíbeny (srv. na př. Panov [6], Wolf [1], Liebmann [1], Richardson [1]). Můžeme je dělit na iterace prosté a skupinové. U iterací prostých měníme při jednom kroku hodnotu jediné neznámé, u iterací skupinových měníme hodnoty celé skupiny neznámých.

V konvergenčních otázkách u většiny metod hraje podstatnou úlohu positivní definitnost matice soustavy. Konvergenční otázky speciálně pro Dirichletův problém řeší Diaz a Roberts [1]. Liebmannova iterační metoda je v theorii lineárních rovnic známa pod názvem Seidlova metoda, Richardsonova metoda pak je metoda, která v theorii numerického řešení lineárních rovnic je známa pod názvem metody Ritzovy.

Ze skupinových metod zde uvedeme způsob, který navrhuje Shortly a Weller [1]. U této práce je třeba ovšem podotknout, že se zde řeší v podstatě skupinově celý Dirichletův problém, což se odrazí při sestavení diferenčních rovnic, které nejsou potom identické s normálním systémem rovnic pro Dirichletův problém. U iteračních metod, díky jejich pravidelnosti, může být alespoň částečně studována rychlost konvergence. Pro obdélník tak činí Frankel [1] a pro skupinové iterace studují rychlost konvergence Shortly a Weller [1].

Někteří autoři navrhují různé úpravy, aby byla zvýšena rychlost konvergence. Uvedeme zde práci Ljusternika [8].

b) Relaxace. Pojem relaxace zavedl Southwell v díle [8] a [12], kde šlo o řešení rámových a prutových konstrukcí uvolňováním styčníků a vyrovnáváním přebytků momentů. Velmi příbuznou metodou při řešení rámů je metoda Crossova.

Podstata relaxační metody matematicky spočívá v minimalisaci kvadratické formy příslušné k soustavě diferenčních rovnic. Iteruje se vždy na souřadnice, kterým odpovídá největší residuum, a píší se pouze změny v neznámých a residuích způsobených těmito iteracemi. (Residuum se nazývá zbytek na pravé straně soustav; při přesném řešení je zde nulový člen.) Relaxační metoda je dost příbuzná metodě „největšího spádu", neboť geometricky řečeno, iteraci provádíme ve směru jedné ze souřadnicových os, která svírá nejmenší úhel s gradientem příslušné kvadratické formy. S geometrického hlediska se relaxační metodou zabýval na př. Synge [1]. Postupem času přešlo se od jednobodových relaxací k relaxacím složitějším, t. zv. relaxacím blokovým, deskovým a pod., které urychlují konvergenci. Stručný přehled o těchto metodách viz Stiefel [1], který také navrhuje jistou metodu, která je zlepšením metody největšího spádu. Na poněkud jiném principu je založena t. zv. skupinová relaxace (viz o tom na př. práce Woodse [1]). Účelem tohoto způsobu je odstranit jedno residuum, aniž by se residua bezprostředně sousední změnila. Stiefel ve své práci [2] řeší otázku různých možností relaxací. Dnes je relaxační technika vypracována značně podrobně, zejména po stránce praktické, a to jak si uspořádat výsledky, jak je psát a pod. Souborněji o relaxačních metodách viz na př. Fox [1], Allen [2], Southwell [9] a j. V těchto a podobných pracích se často slučují otázky vlastní relaxace (řešení systému rovnic) a otázky souvisící s řešením parciálních rovnic pomocí sítí. Srovnej také práci Nikolajevy [1].

VIII. O přesnosti řešení lineárních rovnic

Otázka chyby řešení soustavy lineárních rovnic prakticky úzce souvisí s chybou způsobenou metodou sítí. Jde o to, aby přesnost řešení soustavy rovnic nebyla zbytečně velká vzhledem k přesnosti, s níž diferenční rovnice aproximují diferenciální rovnici, neboť numerická práce roste rychle s požadovanou přesností. Je však jeden podstatný rozdíl mezi oběma druhy chyb. Chyba při řešení lineárních rovnic má do jisté míry charakter nahodilosti, způsobené v podstatě zaokrouhlováním, na rozdíl od chyby, způsobené metodou sítě, kde charakter nahodilosti se vůbec nevyskytuje. Odhad chyby při řešení lineárních rovnic je důležitý, neboť poměrně malá residua mohou způsobit velkou chybu. Touto otázkou se theoreticky pro Dirichletův problém zabývá Ajzenštat [1].

Vzhledem k jisté nahodilosti je však theoretický horní odhad příliš nadhodnocen, a proto po stránce praktické lépe vyhovuje statistický odhad chyby, kde zaokrouhlovací chyby se považují za náhodné veličiny. Třebaže předpoklad o nahodilosti zaokrouhlovacích chyb není theoreticky dobře fundován a může se s ním dospět k absurdním výsledkům, přece statistický odhad dává pro praxi cenné výsledky. Metoda statistického odhadu chyb není ještě dostatečně propracována a přesnější výsledky jsou známy pouze pro případ Dirichletova problému pro čtverec. Uvedeme z této problematiky práce Abramova [2] a Ljusternika [5] a Šury - Bury [1]. Jistý statistický odhad udává na př. také Stiefel [1].

IX. Řešení problému vlastních čísel pomocí metody sítí

Pomocí diferenčních rovnic možno určovat také vlastní číslo problému. Podobně jako v minulých problémech vznikají i zde dva druhy otázek. Prvý druh souvisí s problémy konvergence vlastních hodnot soustavy diferenčních rovnic k vlastnímu číslu parciální rovnice.

Druhý druh otázek souvisí s výpočtem vlastních hodnot diferenčních rovnic. Z řady prací zabývajících se problematikou vlastních čísel uveďme na př. CRANDALA [1], Nikolajevu [1] a Ljusternika [4].

SAULEV [1] ve své práci studuje asymptotickou rychlost konvergence diferečních vlastních hodnot k vlastní hodnotě parciální rovnice. Pro případ Dirichletova problému viz také práci Ljusternika [4].

X. Problémy souvisící s otázkami zvýšení přesnosti

Přesnost metody sítí závisí na řadě faktorů. Jsou to zejména

a) druh diferenciální rovnice,

b) druh diferenční aproximace difereciální rovnice a druh sítě,

c) hustota sítě,

d) okrajové podmínky a tvar integračního oboru,

e) přesnost řešení soustavy diferenčních rovnic.

Těmito jednotlivými otázkami se již zabývala řada autorů, jak již bylo poznamenáno na patřičném místě. Není nám však zatím známa žádná práce, která by posuzovala alespoň částečně uvedené faktory ve vzájemné souvislosti s cílem pochopit přesnost řešení parciální rovnice jako celku.

Všeobecně je možno říci asi toto:

a) Rovnice nižšího řádu lze řešit (se stejnou sítí) většinou přesněji než rovnice řádů vyšších,

b) Nemusí být vždy pravidlem, že aproximační diferenční vzorce vyšších řádů dávají přesnější výsledky než vzorce jednodušší nižších řádů. V praktických případech však dávají převážně vzorce vyšších řádů lepší výsledky. Pravidelnými sítěmi dojdeme obvykle k přesnějším výsledkům než sítěmi nepravidelnými;

c) Se vzrůstající hustotou sítě se zvyšuje přesnost. Nemusí to však býti v případech velmi „rozumných" s rychlostí úměrnou řádu diferenčního vzorce.

d) Okrajové podmínky v souvislosti s integračním oborem jsou rozhodujícím činitelem. V zásadě případy, kdy má řešení dostatečný počet omezených parciálních derivací, možno počítat metodou sítí přesněji než v případě, kdy jsou derivace neomezené.

e) Přesnost řešení rovnic může být důležitým činitelem a je nutno posuzovat ji v souvislosti s přesností metody sítí.

Zpřesňování výsledků získaných metodou sítí se dnes dociluje postupným zhušťováním sítě anebo postupným zvyšováním řádů diferenčních aproximací, které zavedl Fox [4]. Tato metoda spočívá v tom, že se nejprve řeší problém s jednoduchými diferenčními vzorci a výsledky se potom zpřesní přechodem ke vzorcům složitějším, vyšších řádů.

XI. Současné tendence rozvoje a nejzávažnější problematika metody sítí

Metoda sítí je v současné době ve velkém rozvoji. Stále se objevují nové a nové články a publikace, podávající zprávy o nových výsledcích a aplikacích. Dnes se pak studují zejména otázky souvisící s převodem na diferenční rovnice, některé konvergenční otázky a problém chyby. Je snaha užívat sítě i na problémy nelineární. Rovněž se začíná usilovně pracovat na otázkách použití matematických strojů k řešení diferenčních rovnic.

Zmíníme se zde ještě o nejnaléhavějších otázkách theoretických.

1. Bylo by vhodno studovat konvergenční otázky dalších speciálních tvarů diferenciálních rovnic než je Laplaceova rovnice a dospět k výsledkům v podobné šíři, jako je tomu dnes při problému Dirichletově.

2. Studium rychlosti konvergence v závislosti na integračním oboru a okrajových podmínkách by přineslo nezbytné pochopení vnitřní struktury metody sítí.

3. Odhad chyby v uspokojivém tvaru (jak po stránce pracnosti tak i nadhodnocení) je nejnaléhavějším problémem. Studium možného použití metody dvojnásobného kroku je jednou ze speciálních otázek této problematiky.

4. Pro praktické počítání je důležité studium metod řešení soustav lineárních rovnic. Statistické pojetí dává dnes asi nejhodnotnější výsledky při odhadu chyb. Při metodách přímých je otevřena otázka statistického pojetí splnění kontrol, t. j. rozhodnutí, kdy nesouhlas v kontrolách může být způsoben nakupením zaokrouhlovacích chyb a kdy je způsoben chybou ve výpočtu.

Při metodách nepřímých by měla být v popředí zájmu otázka rychlosti konvergence a otázka vhodné kombinace jednotlivých metod.

XII. SEZNAM LITERATURY

Abramov (*Абрамов*): [1] Исследование устойчивости и сложного изгиба пластин, стержневых наборов и оболочек разностными уравнениями. Судпромгиз, Москва (1951).

[2] О влиянии ошибок округления при решении уравнения Лапласа. Вычислительная математика и вычислителная техника. Сборник I. Изд. Акад. Наук, Москва (1953), 37—40.

Albrecht: [1] Taylor-Entwicklungen und finite Ausdrücke für Δu und $\Delta\Delta u$. Zeitschr. angew. Math. Mech. *33* (1953), 41—48.

Allen: [1] Compléments pour l'application de la méthode de libération. Extrait du Colloque Méthodes de Calcul. Marseille, 1947, 18–34.
[2] La Méthode de libération des liaisons et les problèmes de charpentes. Extrait du Colloque Méthodes de Calcul. Marseille, 1947, 11–15.
[3] Relaxation Methods. Mc Graw-Hill Book Comp. Inc., New York, Toronto, London, 1954.

Allen, Dennis: [1] The application of relaxation methods to the solution of differential equations in three dimensions I. Boundary value potential problems. Quart. J. Mech. Appl. Math. *4* (1951), 199–208.
[2] The application of relaxation methods to the solution of differential equations in three dimensions II. Potential flow around aerofoils. Quart. J. Mech. Appl. Math. *6* (1953), 81–100.
[3] Gradet nets in harmonic and biharmonic relaxation. Quart. J. Mech. Appl. Math. *5* (1953), 439–443.

Allen, Fox, Motz, Southwell: [1] Free transverse vibrations of membranes with an application (by analogy) to two — dimensional oscillations in an electromagnetic system. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1945).

Allen, Fox, Southwell: [1] Stress distributions in elastic solids of revolution. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1945).

Allen, Severn: [1] The application of relaxation methods to the solution of non-elliptic partial differential equations I. The heat — conduction equation. Quart. J. Mech. Appl. Math. *4* (1951), 209–222.
[2] The application of relaxation methods to the solution of non-elliptic partial differential equations II. The solidification of liquids. Quart. J. Mech. Appl. Math. *5* (1952), 447–454.

Allen, Southwell: [1] The graphical representation of stress. Proc. Roy. Soc. London, (A) *183* (1944), 125–134.
[2] Relaxation methods applied to engineering problems. Plastic strainign in two dimensional stress systems. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *242* (1950), 379–414.

Allen, Southwell, Vaisey: [1] Relaxation methods applied to engineering problems XI. Problems governed by the „quasi-plane potential equation". Proc. Roy. Soc. London, (A) *183* (1945), 253–283.

Ajzenštat (*Айзенштат*): [1] Об оценке ошибки при приближном решении конечноразностного уравнения Пуассона. Матем. сборник, *31* (1952), 485—490.

Archangelskij (*Архангельский*): [1] Расчеты одноразмерного неустановившегося движения грунтовых вод методом конечных разностей. Инж. сборник, *10* (1953), 203—210.

Atkinson, Southwell: [1] On the problem of stifftened bridges and its treatment by relaxation methods. Journ. Inst. Civ. Eng. 1939.

Atkinson, Bradfield, Southwell: [1] Relaxation methods applied to a bar of variable section, deflected by transverse loading combined with end thrust or tension. Aero. Res. Cttee R. and M. (1937); No. 1822.

Babuška, Mejzlík: [1] Napätia v gravitačných priehradách na mäkkých podložiach. Vodní hospodářství, *4* (1954), 231–236, 258–264.

Batchelet: [1] Über die numerische Auflösung von Randwerproblemen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen. Zeitschr. ang. Math. Phys. *3* (1952), 165–193.

Bay: [1] Der statisch-unbestimmt gelagerte wandartige Träger, Bauingenieur, 1951.
[2] Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetonwänden. K. Withwer, Stuttgart, 1931.

Bennett, Milne, Batemann: [1] Numerical integration of differential equations. Bull. Mat. Res. Conn. U. S. *92* (1933), 51–87.

Bickley: [1] A simple method for the numerical solution of differential equations. Phil. Mag. *13* (1932), 1006–1114.
[2] Finite difference formulae for the square lattice. Quart. J. Mech. Appl. Math. *1* (1948), 35–42.
[3] Formulae for numerical differentiation. Math. Gaz. *25* (1941), 19–26.
[4] Formulae for numerical integration, Math. Gaz. *23* (1939), 352–359.

Birkhoff, Young: [1] Numerical quadrature of analytic and harmonic functions. J. Math. Phys. *29* (1950), 217–221.

Black: [1] Approximate methods of solving normal equations. Empire Surv. Rev. *7* (1944), 242–245.

Black, Southwell: [1] Relaxation methods applied to engineering problems II. Basic theory, with applications to surveying and to electrical networks and an extension to gyrostatic systems. Proc. Roy. Soc. London, (A) *164* (1938), 447–467.
[2] The method of systematic relaxation applied to survey problems. Empire Surv. Rev. *4* (1938).

Blansch: [1] On the numerical solution of parabolic partial differential equations. J. Res. Nat. Bur. Stand. *50* (1953), 343–356.

Boelter, Tribus: [1] Numerical solutions for thermal systems. MacMillan, (In honour of H. Cross), New York, 1949, 86–103.

Bortsch: [1] Die Ermittlung der Spannungen in beliebig begränzten Scheiben. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl., S.-B. Va *138* (1929), 63.

Bowie: [1] A least square application to relaxation methods. Journ. Appl. Phys. *18* (1947), 830–833.

Bradfield, Southwell: [1] The deflexion of beams under transverse loading. Proc. Roy. Soc. London, (A) *161* (1937), 155–181.

O'Brien, Morton, Kaplan: [1] A study of the numerical solution of partial differential equations. J. Math. Phys. *29* (1951), 223–251.

Brilla: [1] Relaxačná metóda. Stavebnícky časopis (1954).

Bruwier: [1] Sur une équation aux dérivées et aux différences mélées. Mathesis *47* (1933), 103–104.

Burgerhout: [1] On the numerical solution of partial differential equations of the elliptic type. J. Appl. Sci. Res. B. *4*: 3 (1954), 161–173.

Collin, Newmark: [1] A numerical solution for the torsion of hollow sections. J. Appl. Mech. *14* (1947), A 313–A 315.

Collatz: [1] Bermerkungen zur Fehlerabschätzung für das Differenzverfahren bei partiellen Diffenrentialgleichungen. Zeitschr. angew. Math. Mech. *13* (1933), 56–57.
[2] Das Differenzenverfahren mit höherer Approximation für lineare Differentialgleichungen. Schriften des math. Seminars und Inst. angew. Math. der Universität Berlin, *341* (1935).
[3] Das Mehrstellenverfahren bei Plattenaufgaben. Zeitschr. Math. Mech. *30* (1950), 385–388.

[4] Differenzenverfahren zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Zeitschr. angew. Math. Mech. *29* (1949), 199—209.

[5] Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig, 1949.

[6] Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig, 1945.

[7] Eine Verallgemeinerung des Differenzenverfahrens für Differentialgleichungen. Zeitschr. angew. Math. Mech. *14* (1934), 350—351.

[8] Einige neuere Forschungen über numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Zeitschr. angew. Math. Mech. *31* (1951), 234—236.

[9] Über das Differenzenverfahren bei Anfangsproblemen partieller Differentialgleichungen. Zeitsch. angew. Math. Mech. *16* (1936), 239—247.

[10] Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin, 1951.

Cooper: [1] The solution of natural frequency equations by relaxation methods. Quart. Appl. Math. *6* (1948), 179—183.

Courant: [1] Über partielle Differentialgleichungen. Congresso Internazionale dei Matematici, Atti Bologna, *3* (1930), 83—89.

[2] Über Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen. Zeitschr. angew. Math. Mech. *6* (1926), 322—325.

Courant, Lax: [1] On nonlinear partial differential equations with two independent variables. Comm. Pure Appl. Math. *2* (1949), 255—273.

Courant, Friedrichs, Lewy: (*Курант, Фридрихс, Леви*)*:* [1] О разностных уравнениях математической физики. УМН. Вып. VIII, 1940.

[2] Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann. *100* (1928), 37—74.

Crandall: [1] Iterative procedures related to relaxation methods for eigenvalue problems. Proc. Roy. Soc. London, (A) *207* (1951), 416—423.

[2] On a relaxation method for eigenvalue problems. J. Math. Phys. *30* (1951), 140—145.

Crank, Nicholson: [1] A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of heat—conduction type. Proc. Cambr. Phil. Soc. *43* (1947), 50—67.

Dalton, Shaw: [1] Note on the calculation of vibration frequencies for an aero engine installation. Aero Res. Cttee R. and M. No. *1917* (1940).

Dalton, Shaw, Southwell: [1] Natural frequencies of vibration for a wing carrying engines. Aero. Res. Cttee R. and M. No. *1918* (1940).

Diaz, Roberts: [1] On the numerical solution of the Dirichlet problem for Laplace's difference equation. Quart. J. Appl. Math. *9*: 4 (1952), 355—361.

[2] Upper and lower bounds of the numerical solution of the Dirichlet difference boundary problem. J. Math. Phys. *31* (1952), 184—191.

Dlugač (*Длугач*)*:* [1] Розвязания змішаних задач теорії пружності методом сіток. Доповиди АНУРСР 1953, № 6, 451—455.

Douglas: [1] A method of numerical solution of the problem of Plateau. Ann. of Math. *29*, 180—188.

Duffin: [1] Discrete potential theory. Duke Math. Journ. (1953), 233—251.

Dussinbere: [1] Numerical analysis of heat flow. New York, Toronto, London, 1949.

[2] Numerical methods for transient heat flow. Trans. ASME, 1945.

Eddy, Shaw: [1] Numerical solution of elastoplastic torsion of a shaft of rotational symmetry. Journ. Appl. Mech. *16* (1949), 139—148.

Egres: [1] The calculation of variable heat flow in solids. Trans. Roy. Soc. London, (A) *240* (1946), 1—57.

Ejdus (*Эйдус*): [1] О решении краевых задач методом конечных разностей, ДАН *82*: 2 (1952), 191—194.

Emmons: [1] The numerical solution of heat-conduction problems. Trans. ASME, *65* (1943), 607—612.

[2] The numerical solution of partial differential equations. Quart. Appl. Math. *1* (1944), 173—195.

Fadějeva (*Фаддеева*): [1] Вычислительные методы линейной алгебры, Москва, 1950.

Falkner: [1] A method of numerical solution of differential equations. Phil. Mag. *21* (1936), 624—640.

Forsythe: [1] Solving linear algebraic equations can be interesting. Bull. Amer. Math. Soc. *59* (1953), 299—329.

Fowler: [1] Analysis of numerical solutions of transient heat-flow problems. Quart. Appl. Math. *3* (1946).

[2] Symmetry as a factor in finite difference approximations. J. Appl. Phys. *25* (1954), 293—294.

Fox: [1] A short account of relaxation methods. Quart. Mech. Appl. Math. *1* (1948), 253—280.

[2] Mixed boundary conditions in the relaxational treatment of biharmonic problems (plane strain or stress). Proc. Roy. Soc. London, (A) *189* (1947), 535—543.

[3] Solution by relaxation methods of plane potential problems with mixed boundary conditions. Quart. Appl. Math. *2* (1944), 251—257.

[4] Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations. Proc. Roy. Soc. London, (A) *190* (1947), 31—59.

[5] The numerical solution of elliptic differential equations when the boundary condition involves a derivation. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *242* (1950), 345—378.

[6] The solution by relaxation methods of ordinary differential equations. Proc. Cambr. Phil. Soc. *45* (1949), 50—68.

[7] The use of large intervals in finite-difference equations. Math. Tabl. Aids C. *7* (1953), 14—18.

Fox, Goodwin: [1] Some new methods for the numerical integration of ordinary equations. Proc. Camb. Phil. Soc. *45* (1949), 373—388.

Fox, Huskey, Wilkinson: [1] Notes on the solution of algebraic linear simultaneous equations. Quart. Math. Appl. Mech. *1* (1948), 149—173.

Fox, Southwell: [1] On the stresses in hooks and their determination by relaxation methods. Journ. Inst. Mech. Eng. *155* (1946), 1—19.

[2] Biharmonic analysis as applied to the flexure and extension of flat elastic plates. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1945), 419—460.

Frankel: [1] Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. Math. Tabl. Aids C. *4* (1950), 65—75.

Frankel, Aleksejeva (*Франкел, Алексеева*): [1] Две краевые задачи из теории гиперболических уравнений в частных производных с приложением к сверхзвуковым газовым течениям. Матем. сб. *41* (1934), 483—502.

Frocht: [1] A rational approach to the numerical solution of Laplace's equations. J. appl. Phys. *12* (1941), 596—604.

[2] Photoelasticity. Willey, 1948.

[3] The numerical solution of Laplace's equations in composite rectangular areas. J. Appl. Phys. *17* (1946), 730—742.

Fung: [1] Bending of thin elastic plates of variable thickness. J. Aeronaut. Sci. *20* (1953), 455—468.

Gandy, Southwell: [1] Conformal transformation of a region in plane space. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *238* (1940).

Gavrilov: (*Гаврилов*): [1] Приближенное численное интегрирование телеграфного уравнения. Известия Военно-электротехнической академии РККА, *9* (1934), 3—17.

[2] Приближенное численное интегрирование телеграфного уравнения для составной линии. Известия Военно-электротехнической академии РККА, *10* (1935), 115 до 127.

[3] Применение характеристик к приближенному численному интегрированию линейных уравнений с частными производными второго порядка гиперболического типа. (Волковое уравнения.) Научно-тех. сб. электротех. ин-та связи, *1* (1933), 5—15.

[4] Применение характеристик к приближенному численному интегрированию линейных уравнений с частными производными второго порядка гиперболического типа. Научно-тех. сб. электротех. ин-та связи, *4—5* (1934), 147—150.

[5] Применение характеристик к приближенному численному интегрированию уравнений в частных производных второго порядка линейных с постоянными коэффициентами гиперболического типа. Труды второго Всесоюзн. матем. съезда, *2* (1936), 393—397.

Gerschgorin: [1] Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Zeitschr. angew. Math. Mech. *10* (1930), 373—382.

Geršgorin: (*Гершгорин*): [1] О приближенной интегрировании Дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона. Изв. политех. инст. *30* (1927), 75—95.

Gilles: [1] The use of interlacing nets for the application of relaxation methods to problems involving two dependent variables. Proc. Roy. Soc. London, (A) *193* (1948), 407—433.

Girkmann: [1] Flächentragwerke. Springer, Wien 1948, 104—106.

Green, Southwell: [1] High-speed flow of compressible fluid through a two-dimensional nozzle. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1944).

[2] Problems relating to large transverse displacements of thin elastic plates. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1945).

Heilbron: [1] On discrete harmonic functions. Proc. Cambr. Phil. Soc. *45* (1949), 194—206.

Hensky: [1] Die numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in Technik. Zeitschr. angew. Math. Mech. *2* (1922), 58—66.

Higgins: [1] A survey of the approximate solutions of two-dimensional physical problems by variational methods and finite difference procedures. MacMillan (In honour of H. Cross). New York (1949), 169—198.

Holl: [1] Analysis of plate examples by difference methods and the superposition principle. J. appl. Math. ASME, *58* (1936), A 81.

Hopkins: [1] The solution of continuous girders by the relaxation method. Engineering *143* (1937).

Hyman, Morton: [1] Non-iterative numerical solution of boundary-value problems. Appl. Sci. Res. (B) *2* (1952), 325—351.

[2] On the numerical solution of partial differential equations. Thesis Technisch Hogeschool te Delft, 1953.

Huskey: [1] On the precision of a certain procedure of numerical integration. J. Res. Mat. Bur. Stand. *42* (1949), 57—62.

Christopherson: [1] Relaxation methods applied to grid frameworks. Aero Res. Ctte R. and M., No. *1824* (1937).
[2] A new mathematical method for the solution of film lubrication problems. Proc. Inst. Mech. Engrs. *146* (1941), 126–135.
[3] A theoretical investigation of plastic torsion in an I-beam. Amer. J. Appl. Mech. *7* (1940).

Christopherson, Southwell: [1] Relaxation methods applied to engineering problems III. Problems involving two independent variables. Proc. Roy. Soc. London, (A) *168* (1938), 317–350.

Christopherson, Fox, Green, Shaw, Southwell: [1] The elastic stability of plane frameworks and flat plating. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1945).

Inoue: [1] Discrete boundary value problems (v jap.). Reports of the Fac. of Sci. Kyusyu Imp. Univ. S. Math. *1* (1945).
[2] Discrete Neumann problem. Journ. of the Institute of Polytechnics. Osaka City University, *5* (1954), No. 2.
[3] Sur les fonctions de noeud et leurs application à l'integration numérique des équations aux dérivées partielles. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. *4* (1949).

Jacobs: [1] Relaxation methods applied to problems of plastic flow. I. Notched bar under tension. Phil. Mag. *41* (1950), 349–361.
[2] Relaxation methods applied to problems of plastic flow. II. Phil. Mag. *41* (1950), 458–467.

John: [1] On integration of parabolic equations by difference methods. Comm. Pure Appl. Math. *5* (1952), 155–211.

Juncosa, Young: [1] On the convergence of a solution of a difference equation to a solution of the equation of diffusion. Proc. Amer. Math. Soc. *5* (1954), 168–174.
[2] On the order of convergence of solutions of a difference equation to a solution of the diffusion equation. J. Soc. Indust. Appl. Math. *1* (1953) 111–135.

Juškov (*Юшков*)*:* [1] О применении треугольных сеток для численного решения уравнения теплопроводности. Прикл. матем. и мех. *12* (1948), 223—226.
[2] О точности некоторых формул численного интегрирования уравнения теплопроводности. Тр. Ленинград. ин-та холодильной и молочной пром-сти, *4* (1953), 117—121.

Kamynin (*Камынин*)*:* [1] О применимости метода конечных разностей к решению уравнения теплопроводности. Единственность решения системы конечно-разностных уравнений. Изв. Ак. Наук, сер. матем *17* (1953), 163—180.
[2] О применимости метода разностей к решению уравнения теплопроводности. Сходимость конечноразностного процесса для уравнения теплопроводности. Изв. Акад. Наук, сер. матем. *17* (1953), 249—268.

Kantorovič-Krylov (*Канторович-Крилов*)*:* [1] Приближенные методы высшего анализа, Москва, 1952.

Kettelborough: [1] The stepped thrust bearing. A solution by relaxation methods. J. appl. Mech. *21* (1954), 19–25.

Kormes: [1] Numerical solution of the boundary value problem for the potential equation by means of punched cards. Rev. Sci. Instr. *14* (1943).

Ladyževskaja (*Ладыжевская*)*:* [1] О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши гиперболических систем. ДАН СССР, *88:* 4 (1953), 607—610.

Lewy: [1] On the convergence of solutions of difference equations. (Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th birthday) New York, 1948, 211–214.

Lewy, Baggot: [1] Numerical studies in differential equations. London 1934.

Liebmann: [1] Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen. Sitzgsber. Bayr. Akad. Wiss. Math. Phys. Kl. 1918, 385–416.

Litvinov (*Литвинов*): [1] Решение плоской задачи теории упругости для бесконечной полосы методом конечных разностей. Доповиди АН УРСР (1953), 117—121.

Ljusternik (*Люстерник*): [1] Об общих сеточных аппроксимациях оператора Лапласа. ДАН СССР *91* (1953), 1367—1369.

[2] О конечно-разностных аппроксимациях оператора Лапласа I (Аннотация к докладу в ММО, от 9. XII, 1952) УМН *8*: 3 (1953), 152—153.

[3] О конечно-разностных аппроксимациях оператора Лапласа II (Аннотация к докладу прочитанному в ММД в 1953 г.) УМН *9*: 1 (1954), 131—133.

[4] О разностных аппроксимациях оператора Лапласа. УМН *9*: 2 (1954), 2—66.

[5] О сходимости при случайных начальных данных и накоплении ошибок итерационного процесса решения системы алгебраических уравнений. Вычислительная математика и вычислительная техника. Сборник I, Москва (1953), 41—45.

[6] О собственных значениях конечно-разностных аппроксимаций оператора Лапласа, ДАН СССР *89* (1953), 613—616.

[7] Проблема Дирихле. УМН *8* (1941), 115—125.

[8] Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток. Труды матем. ин-та им. Стеклова, № 20 (1947), 49—64.

Mac Neal: [1] An asymmetrical finite difference network. Quart. appl. Math. *10* (1953), 295–310.

Marcus: [1] Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten (2. Aufl.). Berlin, 1932.

Marshall: [1] The application of relaxation methods to freely suported flat slabs. Engineering, *170* (1950), 239–242.

Mc Newn, En-Jun-Hsu, Chia-Shun-Jih: [1] Application of the relaxation technique in fluid mechanics. Proc. Amer. Soc. Civ. Engnrs. *223*, 1–24.

Mejman (*Мейман*): [1] К теории уравнений в частных производных. ДАН СССР *98*: 4 (1954), 99.

[2] Об уравнении теплопроводности. ДАН СССР, *99*: 2 (1954).

Mejzlík. [1] Metóda sietí. Stavebnícky časopis. *2* (1954), 1–20.

[2] Účinnosť drénov v základovej škáre hydrocentrály. Vodní hospodářství, *4* (1954), seš. 3.

[3] Vplyv plošnej injektáže na vztlak a priesak. Vodní hospodářství, *5* (1955).

Mikeladze (*Микеладзе*): [1] Численные методы интегрирования уравнений с частными производными. Москва 1936.

[2] К вопросу численного интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными при помощи сеток. Тбилиси, Сообщ. Гр. фил. АН *1* (1940), 249—254.

[3] Численые методы математического анализа. Гос. изд. тех. теор. лит. Москва, 1953.

[4] К вопросу о решении краевых задач разностным методом. ДАН СССР *28*: 5 (1940).

[5] К вопросу продольного изгиба прямолинейных стержней в пределах упругости. Труды Тбилисского матем. ин-та, *12* (1943), 175—123.

[6] Новые формулы для численного интегрирования дифференциальных уравнений. ДАН СССР *61* (1948), 789—790.
[7] Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений и их приложение к задачам теории упругости. Москва, 1951.
[8] О численном интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными. ИАН СССР, сер. физ.-мат. (1934), 819—842.
[9] Об интегрировании дифференциальных уравнений разностным методом. ИАН СССР, сер. матем. (1939), 627—642.
[10] О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов. ИАН СССР, сер. матем. *5* (1941), 57—74.
[11] О численном интегрировании уравнений Лапласа и Пуассона. ДАН СССР *14* (1937), 181—182.
[12] О численном решении дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона. ИАН СССР (1938), 271—293.

Milne: [1] Numerical solution of differential equations. New York, 1953.
[2] Numerical calculus, 1949, (též ruský překlad z r. 1951).

Mitchell: [1] Round-off errors in relaxational solution of Poisson's equation. Appl. Sci. Ress., (B) *3* (1954), 456—464.
[2] Round-off errors in the solution of the heat conduction equation by relaxation methods. Appl. Sci. Research, (A) *4* (1953), 109—119.

Mitchell, Rutherford: [1] Application of relaxation methods to compressible flow past a double wedge. Proc. Roy. Soc. Edinbourgh, (A) *63* (1951), 139—154.
[2] On the theory of relaxation. Proc. Glasgow Math. Assoc. *1* (1953), 101—110.

Moskovitz: [1] The numerical solution od Laplace's and Poisson's equations. Quart. Appl. Math. *2* (1944), 148—163.

Motz: [1] Calculation of the electromagnetic field frequency and circuit parameters of high frequency resonator cavities. Journ. Inst. Electr. Engrs. *93* (1946), 335—343.
[2] The treatment of singularities of partial differential equations by relaxation methods. Quart. Appl. Math. *4* (1947), 371—377.

Motz, Worthy: [1] Calculation of the magnetic field in dynamo-electric machines by Southwell's relaxation method. Journ. Inst. Electr. Engrs. *92* (1945), 522—528.

Negoro: [1] Torsion of a square bar with axial circular hole. Trans. Soc. Mech. Eng., Tokio, *5* (1939), 142—153.

Neményi: [1] Lösung des Torsionsproblems für Stäbe mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt. Zeitschr. angew. Math. Mech. *1* (1921), 364—367.

von Neumann, Rychtmayer: [1] A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocs. J. appl. phys. *21* (1950), 232—237.

Newing: [1] Determination of shearing stress in axially symmetric shafts under torsion by finite difference method. Phil. Mag. *32* (1941), 33—49.

Newmark: [1] Bounds and convergence of relaxation and iteration procedures. Proc. of the first U. S. National Congress of Appl. Mech., Chicago, 1951, The Amer. Soc. of Mechanical Engrs., New York, 1952, 9—14.
[2] Numerical methods of analysis of bars, plates and elastic bodies. Mac Millan (In honour of H. Cross), New York (1949), 138—168.

Nikolajeva (Николаева): [1] О релаксационном методе Саусвелла (критический обзор). Труды матем. ин-та им. Стеклова, АН СССР, вып. *28* (1949), 160—182.

Nyström: [1] Über die numerische Integration von Differentialgleichnugen. Acta Soc. Sci. Fennicae, *50* (1926), 56.
[2] Zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben bei gewöhlichen Differentialgleichungen. Acta Math. *76* (1945), 158—184.
[3] Zur praktischen Integration von linearen Differentialgleichungen. Soc. Sci. Fennicae, Com. Phys. Math. *14* (1943), 14.

Orr: [1] Several cases of non-circular torsion solved by analysis and direct test. Aero. Res. Cttee R. and M. 1939 (1930).

Panov (*Панов*): [1] Численное решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. УМН *4* (1937), 23—33.
[2] О приближенном численном решении уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$. Матем. сб. *40* (1933), 38 73—393.
[3] Приближенное графическое решение краевых задач уравнения Лапласа. Труды ЦАГИ 169 (1934), 3—24.
[4] Решение систем линейных уравнений. Добавление к книге Д. Скарборо, Численные методы математического анализа, Москва, Ленинград, 1934.
[5] Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Гос. Изд. тех.-теор. лит., Москва, 1938.
[6] Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Гостехиздат, 1949.
[7] Über die angenährte numerische Lösung des Problems der Wärmeleitung. Zeitschr. angew. Math. Mach. *12,* (1932), 185—188.

Parme: [1] Solution of difficult structural problems by finite differences. J. Am. Concr. Inst. *22* (1950), 3.

Pellew, Southwell: [1] The natural frequencies of systems having restricted freedom. Proc. Roy. Soc. London, (A) *175* (1940).

Petrovskij (*Петровский*): [1] Einige Bemerkungen zu den Arbeiten von H. O. Perron und L. Ljusternik über das Dirichletsche Problem. Матем. сб. *35*, (1928), 105—110.
[2] Лекции по уравнениям с частными производными. Москва, 1953.
[3] Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей. УМН *8* (1941), 161—170.

Phillips, Wiener: [1] Nets and the Dirichetl problem. J. Math. Phys. *2* (1923), 105—124.

Poritsky: [1] Graphical and numerical methods of solving partial differential equations, Grown, Univ. 1941.

Raběnskij (*Рабеньский*): [1] О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши. ДАН *86* (1953), 1071—1074.

Rektorys: [1] Výpočet teploty v přehradě při uvažování vnitřních zdrojů tepla. Vyjde v Rozpravách ČSAV.

Richards: [1] Stress-determination for a three dimensional rigid-jointed frameworks of the method of systematic relaxation of constraints. Journ. Inst. Civ. Engr. (1937), No. 4.

Richardson R. G. D.: [1] A new method in boundary problems for differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. *18* (1917), 439—491.

Richardson L. F.: [1] How to solve differential equations approximately by arithmetics. Math. Gaz. *12* (1925), 415—442.
[2] The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stress a masonry dam. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *210* (1911), 308—357.

Rosenbloom: [1] On the difference equation method for solving the Dirichlet problem. Construction and application of conformal maps. NBS AMS *18* (1951), 231.

le Roux: [1] Sur le problème de Dirichlet. J. Math. *10* (1914), 189—320.

Runge: [1] Über eine Methode die partielle Differentialgleichung Δu = Constans, numerisch zu integrieren. Z. Math. Phys. *96* (1908), 225—232.

Salvadori: [1] Extrapolation formulae in linear difference operators. Proc. of the first U.S. National Congress of Appl. Mechanics, Chicago, 1951. The Amer. Soc. of Mech. Engnrs, New York, 1952, 15—18.

Saulev (*Саулев*): [1] О нахождении собственных значений методом сеток. ДАН СССР, *94*: 6 (1954), 1003—1006.

Scarborough: [1] Numerical mathematical analysis. J. Hopkins, Baltimore, 1950.

Sekia, Tsuyoshi, Tsutsui Saburo: [1] On the approximate solution of the boundary-value problem for the plane biharmonic equation. J. Osaka Inst. Sci. Tech. Part. II, *3* (1951), 43—67.

Shaw: [1] An introduction to relaxation methods. Dover Publications, Inc. New York, 1953.
[2] Numerical solution of boundary value problems by relaxation methods, Mac Millan, New York. (In honour of H. Cross), 1949, 49—65.
[3] The approximate numerical solution of the non-homogenous linear Fredholm integral equation by relaxation methods. Quart. Appl. Math. *6* (1948), 69—76.
[4] The torsion of solid and hollow prism in the elastic and plastic range by relaxation methods. Australian Council Aeronaut Report, *11* (1944).

Shaw, Perrone: [1] A numerical solution for the nonlinear deflections of membranes. J. appl. Mech. *21* (1954), 117—129.

Shaw, Southwell: [1] Problems relating to the percolation of fluids through porous materials. Proc. Roy. Soc. London, (A) *178*, (1941).

Shinomiya: [1] Solution of arbitrary plate by influence surface method. Proc. 2nd. Jap. Congr. appl. mech. 1952. Sci Counc. Jap. 1953, 125—130.

Shortley, Weller: [1] The numerical solution of Laplace equation. J. appl. Phys. *9* (1938), 334—344.

Shortley, Weller, Darby, Camble: [1] Numerical solution of axisymmetrical problems with applications to electrostatics and torsion. J. Appl. Phys. *18* (1947), 116—129.

Shortley, Weller, Fried: [1] Numerical solution of Laplaces and Poissons equations with applications to photoelasticity and torsion. Ohio State University, Studies Engineering Ser. Bull. 1942, No. 107.

Schmidt: [1] Das Differenzverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen der nichtstationären Wärmeleitung, Diffusion und Impulsausbreitung. (Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurswesen.) *13* (1925).
[2] Über die Auswendung der Differenzenrechnug auf technische Anheiz-und Abkühlungsprobleme. Berlin, 1924.

Schultz: [1] A slight improvement of Southwell's method for the approximative computation of the lowest frequency of a homogenous membrane. App. Sci. Res. (A) *2* (1950), 93—96.

Schwarz: [1] Numerische Lösung des Randwertproblems der Potentialgleichung mit Hilfe von Lochkarten. Zeitschr. Angw. Math. Mech. *34* (1954), 237—240.

Southwell: [1] New pathways in aeronautical theory. Journ. Aeronaut Sci. *9* (1942), 77 až 89.
[2] On relaxation methods. A mathematics for engineering science. Proc. Roy. Soc. London, (A) *184* (1945), 253—288.
[3] On the computation of strain and displacement in a prism plastically strained by torsion. Quart. J. Mech. Appl. Math. *2* (1949), 385—397.
[4] Relaxation methods. British Science News *3*, 113—117.
[5] Relaxation methods. A mathematics for the engineer. Trans. Inst. Chem. Engnrs. *25* (1947), 1—25.
[6] Relaxation methods. An engineering approach to computation. Journ. Inst. Civil Engnrs. 1948, 351—378.
[7] Relaxation methods as applied to structure. The structural Engineer, *26* (1948), 463—506.
[8] Relaxation methods in engineering science. Oxford University Press (1940).
[9] Relaxation methods in theoretical physics. Oxford University Press (1946).
[10] The flexure and extension of perforated elastic plates. Proc. Roy. Soc. London, (A) *193* (1948), 147—171.
[11] The quest for accuracy in computations using finite differences. Mac Millan. (In honour of H. Crass.) New York, 1949, 66—74.
[12] Stress-calculation in frameworks by the method of „systematic relaxation" of constraints. Proc. Roy. Soc. London, (A) *151* (1935), 56—95; *153* (1935), 41—76.

Southwell, Vaisey: [1] Relaxation methods applied to engineering problems. XII. Fluid motions characterized by free stream-lines. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *240* (1946), 117—161.
[2] Plane potential problems involving specified normal gradients. Proc. Roy. Soc. London, (A) *182* (1943).

Spirin (Спирин): [1] Исследование влияния сгущения сетьки при решении плоской задачи теории упругости методом конечных разностей. АН СССР. Расчеты и исследования по гидравлике и прочности гидрот. сооружений. Киев, 1954.

Srinath, Lakshminarayana: [1] Evaluation of stresses in a circular ring by the relaxation method. Appl. Sci. Res., (A) *3* (1953).

Stiefel: [1] Über einige Methoden der Relaxationsrechnung. Zeitschr. Angw. Math. Phys. *3* (1952), 1—33.
[2] Relaxationsmethoden bester Strategie zur Lösung linearer Gleichungsysteme. Comm. math. Helv. *29*: 2,3 (1955), 157.

Sunatani, Negoro: [1] On a method of approximate solution of a plane harmonic function. Tohoku Imp. univ. Tech. Rep. *12* (1938), 339—360.

Synge: [1] A geometrical interpretation of the relaxation method. Quart. Appl. Math. *2* (1944), 87—89.

Šura-Bura (Шура-Бура): [1] О решении конечно-разностного уравнения апроксимирующего задачу Дирихле для уравнения Лапласа по электрических сетьках. Вычислительная математика и техника вычислительная. Сборник 1, 1953, 46—56.

Taylor: [1] Torsional stresses in cylinder; a convenient approximate method with numerical examples. Aircraft Engn. *10* (1938), 375—377.

Temple: [1] The general theory of relaxation methods applied to linear systems. Proc. Roy. Soc. London, (A) *169* (1939), 476—500.

Thom: [1] An investigation of fluid flow in two dimensions. Aero. Res. Cttee R. and M. *1194* (1928).

[2] Arithmetical solution of equations of the type $\Delta''\psi =$ const. Aero. Res. Cttee R. and M. *1604* (1939).

[3] Arithmetical solutions of problems in steady viscous flow. Aero. Res. Cttee R. and M. *1475* (1932).

[4] The aritmetic of field equations. Aeronaut. Quart. *4* (1953), 205–320.

[5] The flow past circular cylinders at low speeds. Proc. Roy. Soc. London, (A) *141* (1933), 651–669.

[6] Treatment of the stagnation point in arithmetical methods. Aero. Res. Cttee R. and M. *2807* (1951).

Thom, Klaufer: [1] The method of influence factors in arithmetical solutions of certain field problems. Aero. Res. Cttee R. and M. *2440* (1946).

[2] Tunnel wall effect of an aerofoil at subsonic speeds. Aero. Res. Cttee R. and M. *2851* (1951).

Thomas: [1] Stability of solution of partial differential equations. Symp. on theor. compressible flow., Naval Ord Lah. White Dak. Md. Rep. (1949).

Tranter: [1] The combined use of relaxation methods and Fourier transform in the solution of some three dimensional boundary value problems. Quart. Mech. Appl. Math. *1* (1948), 281–286.

Varvak (*Варвак*)*:* [1] Бигармоническая задача для прямоуголника. Сборник ИСМ. Киев 1948, ВЫП. 8.

[2] Бигармоническая задача в косоуглых сетьках. Сборник ИСМ. Киев, 1948, ВЫП. 8.

[3] Изгибная жесткость высокой балки. Сборник ИСМ. Киев, 1948, ВЫП. 8.

[4] Колебания мембран и пластинок. Сборник ИСМ. Киев, ВЫП. 7.

[5] К расчету высоких балок. Сборник строительного института. Киев, 1936.

[6] Напряженное состояние от собственного веса. ДАН УССР, *1* (1948).

[7] Некоторые формулы пространственной решетки. Сборник ИНМ. Киев, 1948, ВЫП. 8.

[8] Некоторые итерационные приемы решения плоской задачи. ДАН УССР, *5* (1948).

[9] Некоторые соотношения в конечных разностях. Доклады АН УССР, *4* (1947).

[10] Плоская ортотропная задача. Сборник ,,Вопросы строит. механики''. ИСМ. Киев, 1940.

[11] Плоская задача для пластинки линейно-переменной толштики. Сборник ИСМ. *12* (1949).

[12] Распределение напражений при сжатии прямоугольной пластинки. Доклады АН УССР, *2* (1948).

[13] Расчет трапезоидальных плит свободно опертых по контуру (с А. М. Дубницким). Харков, 1939, Бюлетен Харковского строит. ин-та, *16*.

[14] Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Киев, 1949.

[15] Таблицы для расчета пластинок конечной жесткости. Журн. ,,Речной транспорт'', *1—2* (1944).

[16] Внутренная задача Дирихле в числах влияния. Сборник ИСМ. Киев, 1946, ВЫП. 8.

[17] Устойность квадратной пластинки. Сборник ИСМ. Киев 1946, ВЫП. 7.

Vašakidze (*Вашакидзе*)*:* [1] О численном решении бигармонического уравнения. Тбилиси, Труды матем. ин-та, АН Гр. ССР, *9* (1941), 61—74.

Vaughan: [1] Relaxation methods. A three dimensional mechanical analogy. Quart. J. Mech. Math. *5* (1952), 462–465.

Vaszonyi: [1] A numerical method of the theory of vibration. J. Appl. Phys. *15* (1944).

Volkov (Волков): [1] Оценки ошибки при решении методом сеток задачи Дирихле для уравнения Лапласа. ДАН СССР *96:* 5 (1954), 897—899.

Walsh, Young: [1] On the accura y of the numerical solution of the Dirichlet problem by finite differences. Bull. Am. Math. Soc. *57* (1952), 478.

[2] On the accuracy of the numerical solution of the Dirichlet problem of finite differences. J. Res. nat. Bur. Stands. *51* (1953), 343—363.

[3] On the degree of convergence of solution of equations to the solution of the Dirichlet problem. J. Math. Phys. *33* (1954), 80—93.

Walton: [1] Numerical solution of the equations for a discrete model of a spherical blast. Phys. Rev. *87* (1952).

Wang Chi Teh: [1] Applied elasticity. Mc Graw Hill Book Co. 1953, 9—357.

Wassow: [1] On the truncation error in the solution of Laplace's equation by finite differences. J. Research NBS, *48* (1952), 345—348.

Weigand: [1] Die angenährte Berechnung rotationssymmetrischen Potentialfelder mit Hilfe des Differenzenverfahrens. VFB—Technik, Berlin 1953.

Whittrick, Howard: [1] Relaxation methods applied to two problems of two-dimensional stress distribution involving mixed boundary conditions. Australian Journ. Sci. Research, (A) *1* (1948), 135—160.

Witting: [1] Über die Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Zeitschr. angew. Math. Mech. *33* (1953), 314.

[2] Verbesserung des Differenzenverfahrens von H. Görtler zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Zeitschr. angw. Math. Phys. *4* (1953), 376—397.

Wolf: [1] Über die angenährte numerische Berechnung harmonischer und biharmonischer Funktionen. Zeitschr. angew. Math. *6* (1926), 118—150.

Wood: [1] A special type of group displacement for use in the relaxation technique. Quart. Journ. Mech. Appl. Math. *4* (1951), 432—438.

Woods, Woorlow-Davies: [1] On the aplication to tabular frameworks of the method of systematic relaxation of constraints. Aero. Res. Cttee R. and M. *1764* (1937).

Woods: [1] A new relaxation treatment of flow with axial symmetry. Quart. J. Mech. Appl. Math. *4* (1951), 358—370.

[2] A relaxation treatment of shock wawes. Aero. Res. Council Current Papers *134* (1953), 1—7.

[3] Improvements to the accurracy of arithmetical solutions to certain two dimensional field problems. Quart. J. Mech. Appl. Math. *3* (1950), 349—363.

[4] The numerical solution of fourth order differential equations. A. R. C. *601* (1952).

[5] The numerical solution of two-dimensional fluid motion in the neighbourhood of stagnation points and sharp corners. Aero. Res. Cttee. R. and M. *2726* (1949).

[6] The relaxation treatment of singular points in Poisson's equation. Quart. J. Mech. Appl. Math. *6* (1953), 163—185.

Wright: [1] The use of relaxation methods in engineering. Engn *48* (1953), 435—539, 563.

Wünsch: [1] Statika predpätého betónu (v tisku).

[2] Železobetonové deskové mosty. Věd.-techn. vyd. Praha, 1951.

Young: [1] Iterative methods for solving partial difference equation of elliptic type. Quart. J. Appl. Math. *11* (1954), 92—111.

Zienkiewicz: [1] The stess-distribution in gravity dams. Journ. Inst. Civil Engnrs. *27* (1947), 244—271.

REFERÁTY

O STABILITĚ POHYBU

(Referát o přednášce JAROSLAVA KURZWEILA, přednesené v matematické obci dne 14. III. 1955.)

Dr Kurzweil zaměřil přednášku k obrácení hlavních vět o stabilitě. Nejprve podal Ljapunovovu definici stability nulového řešení $x_1 = x_2 \dots x_n = 0$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i\,(t, x_1, \dots, x_n),\ i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

kde o funkcích $X_i\,(t, x_1, \dots, x_n)$ předpokládáme, že jsou definované a spojité v oblasti G bodů $[t, x_1, \dots, x_n]$ vzniklé kartézským součinem oblasti bodů $[x_1, \dots, x_n]$ obsahující počátek a polopřímky $t \geqq 0$. Přitom ještě předpokládáme jednoznačnost řešení v oblasti G a $X_i\,(t, 0, \dots, 0) \equiv 0$.

Definice stability. *Řešení $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ systému diferenciálních rovnic nazýváme stabilní, jestliže k libovotnému $\varepsilon > 0$ exisluje $\sigma > 0$, že pro každé řešení $x_i\,(t)$, pro které je $\sum_{i=1}^{n} |x_i(0)|^2 < \sigma^2$, platí $\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|^2 < \varepsilon^2$ pro všechna $t \geqq 0$.*

Přednášející ještě použil pojmů asymptotické, stejnoměrné a silné stability.

Definice asymptotické stability. *Řešení $x_1 = \dots = x_n = 0$ systému diferenciálních rovnic nazýváme asymptoticky stabilní, je-li stabilní a jestliže existuje $\eta > 0$, že pro řešení $x_i(t)$, pro které je $\sum_{i=1}^{n} |x_i(0)|^2 < \eta^2$, platí $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$.*

Definice stejnoměrné stability. *Řešení $x_1 = \dots = x_n = 0$ nazýváme stejnoměrně stabilní, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ můžeme nalézti $\delta > 0$ (pouze v závislosti na ε), že k libovolnému $t_0 \geqq 0$ a řešení $x_i(t)$, pro něž platí $\sum_{i=1}^{n} |x_i(t_0)|^2 < \delta^2$, je $\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|^2 < \varepsilon^2$ pro všechna $t \geqq t_0$.*

Definice silné stability. *Řešení $x_1 = \dots = x_n = 0$ nazýváme silně stabilní, jestliže je stejnoměrně stabilní a existuje-li spojitá, monotonní funkce $\psi(t) > 0$, $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$ taková, že můžeme nalézt $\delta > 0$, aby pro libovolné $t_0 \geqq 0$ a řešení $x_i(t)$, pro které platí $\sum_{i=1}^{n} |x_i(t_0)|^2 < \delta^2$, bylo splněno $\sum |x_i(t)|^2 < \psi^2(t - t_0)$ pro všechna $t \geqq t_0$.*

V Ljapunových větách se používají funkce $V(t, x_1, \dots, x_n)$, o kterých budeme předpokládat, že jsou definovány, spojité a mají spojité parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ v oblasti G.

Funkci $V(t, x_1 \dots, x_n)$ nazveme *positivně definitní*, jestliže existuje funkce $W(x_1, \dots, x_n)$, že platí $V(t, x_1, \dots, x_n) \geqq W(x_1, \dots x_n)$ pro všechna $t \geqq t_0$ a $V(t, 0, \dots, 0) = W(0, \dots, 0)$, při čemž $W(x_1, \dots, x_n)$ je definitní v obvyklém smyslu.

Funkci $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ nazveme *stejnoměrně malou* v oblasti G, existuje-li positivně definitní funkce $Z(x_1, \ldots, x_n)$ tak, že platí

$$|V(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq Z(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{pro} \quad [t, x_1, \ldots, x_n] \in G .$$

Ljapunovova věta I: *Jestliže pro diferenciální rovnice (1) lze nalézti positivně definitní funkci $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, jejíž derivace podle pole vzhledem k systému diferenciálních rovnic (1), t. j. výraz*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i$$

je nekladný, pak řešení $x_1 = \ldots = x_n = 0$ je stabilní.

V tomto případě ukázal Perzidskij, že za předpokladu existence a spojitosti parciálních derivací $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t, x_1, \ldots, x_n)$ lze v případě stability sestrojit zobecněnou funkci $V(t, x_1, \ldots, x_n)$. Při vyšetřování stability často nastává případ, že pravé strany diferenciálních rovnic X_i nezávisí explicitně na t. Systém diferenciálních rovnic má pak tvar:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i'(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n . \tag{2}$$

Takový systém nazveme autonomní a Ljapunovova věta zní:

Ljapunovova věta I′: *Jestliže pro autonomní systém (2) existuje positivně definitní funkce $V(x_1, \ldots, x_n)$, jejíž derivace vzhledem k diferenciálním rovnicím (2), t. j. výraz:*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i'$$

je nekladný, pak řešení $x_1 = \ldots = x_n = 0$ je stabilní.

Problém obrácení této věty jest odlišný od předešlého problému, poněvadž nyní hledáme funkci $V(x_1, \ldots, x_n)$ nezávislou na t, kdežto dříve jsme měli k disposici širší třídu funkcí $V(t, x_1, \ldots, x_n)$. V tomto případě ukázal Malkin, že větu I′ nelze obrátit.

Asymptotickou stabilitu nám zaručuje II. věta Ljapunovova.

Ljapunovova věta II. *Jestliže pro systém diferenciálních rovnic (1) existuje funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, která je positivně definitní, stejnoměrně malá a jejíž derivace vzhledem k soustavě (1) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i$ je negativně definitní, potom řešení $x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) = 0$ jest asymptoticky stabilní.*

Tuto větu za předpokladu, že $X_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ jsou periodické a mají spojité parciální derivace, obrátil Massera. Funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, kterou sestrojil, byla periodickou funkcí t a v případě autonomním nezávisela na t. Později Malkin dokázal, že tvrzení II. Ljapunovovy věty lze zesílit, a to, že řešení $x_1 = \ldots = x_n = 0$ jest silně stabilní. K obracení této věty Malkin rozvinul Masserovu methodu a dokázal, že jsou-li parciální derivace $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t, x_1, \ldots, x_n)$ spojité a omezené v oblasti G, pak za předpokladu, že řešení $x_1 = \ldots = x_n = 0$ je silně stabilní, existuje funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ splňující požadavky II. věty.

Nyní přednášející uvedl vlastní výsledek, který určuje podmínky stejnoměrné stability:

Věta. *Nulové řešení $x_1 = \ldots = x_n = 0$ soustavy diferenciálních rovnic (1) je stejnoměrně stabilní tehdy a jen tehdy, jestliže existuje funkce $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, která je positivně definitní a stejnoměrně malá, má spojité parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ a platí*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i \leqq 0$$

pro $[t, x_1, \ldots, x_n] \in G$.

V theorii stability jsou potřebné také věty o nestabilitě a to věta Ljapunovova a věta Četajevova.

Ljapunovova věta III: *Nechť pro systém diferenciálních rovnic (1) existuje omezená funkce* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ *v oblasti* G *taková, že její derivace vzhledem k systému diferenciálních rovnic (1) splňuje vztah*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \lambda V + W,$$

kde λ *je kladná konstanta a funkce* $W(t, x_1, \ldots, x_n)$ *je nezáporná. Jestliže k libovolně malému* $\eta > 0$ *existuje bod* $(t, x_1, \ldots, x_n)$, $t \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 < \eta^2$, *že platí* $V(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$, *potom řešení* $x_1 = \ldots = x_n = 0$ *jest nestabilní.*

Věta Četajevova. *Nechť pro systém diferenciálních rovnic (1) existuje spojitá, omezená a nezáporná funkce* $V(t, x_1 ,,, x_n)$ *v oblasti* G *o těchto vlastnostech:*

1. Budiž P *oblast bodů* $[t, x_1, \ldots, x_n]$ *pro něž* $V(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$. *Potom* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ *má spojité parciální derivace* $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ *v oblasti* P.

2. K libovolnému $\alpha > 0$ *existuje* $\beta > 0$, *že pro všechny body* $[t, x_1, \ldots x_n]$, *pro něž platí* $V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqq \alpha > 0$, *platí* $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i \geqq \beta > 0$.

3. K libovolnému $\eta > 0$ *existuje bod* $[x_1, \ldots, x_n]$ *splňující* $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 < \eta^2$, *při čemž* $V(0, x_1, \ldots, x_n) > 0$.

Potom triviální řešení soustavy (1) jest nestabilní.

Obě věty v případě autonomním obrátil Krasovskij a v případě neautonomním Vrkoč.

Ivo Vrkoč, Praha.

O POUŽITÍ HAUSDORFFOVY MÍRY V ARITMETICE

(Referát o přednášce akademika Vojtěcha Jarníka, přednesené v matematické obci pražské dne 28. III. 1955.)

Přednášející se zabýval použitím Hausdorffovy míry na množiny čísel, která splňují jisté aproximační podmínky. Nejprve definoval vnější Hausdorffovu míru v prostoru $E_s (s = 1, 2, 3, \ldots)$:

Budiž M podmnožina v E_s a nechť $f(d)$ je funkce monotonně klesající k nule pro $d \to 0$. Zvolme číslo $\varrho > 0$ a pokryjme množinu M posloupností s-rozměrných krychlí $J_1, J_2, J_3, \ldots$, jejichž hrany $|J_1|, |J_2|, |J_3|$ nepřesahují ϱ.

Položme

$$L_\varrho = \inf \sum_{i=1}^{\infty} f(|J_i|),$$

kde infimum bereme pro všechna možná pokrytí splňující uvedené předpoklady. Klesá-li ϱ k nule, potom L_ϱ neroste a definujeme

$$\mu(M, f) = \lim_{\varrho \to 0} L_\varrho .$$

$\mu(M, f)$ nazýváme *vnější Hausdorffovou měrou* — pro stručnost Hausdorffovou měrou — množiny M a snadno lze ukázat, že $\mu(M, f)$ je vnější míra ve smyslu Carathéodoryově.

Zřejmě platí:

Nechť $\dfrac{f_1(d)}{f_2(d)} \to 0$ *pro* $d \to 0$.

Jestliže $\mu(M, f_1) > 0$, *pak* $\mu(M, f_2) = \infty$,
jestliže $\mu(M, f_2) < \infty$, *pak* $\mu(M, f_1) = 0$.

Odtud speciálně plyne, že $\mu(M, f) = 0$, jestliže množina M má konečnou Lebesgueovu míru a jestliže $\dfrac{f(d)}{d^s} \to 0$ pro $d \to 0$, neboť $\mu(M, d^s)$ je Lebesgueova míra množiny M.

Hausdorffovou dimensí dané množiny M — označme ji $\dim M$ — nazveme infimum takových čísel $\lambda(\lambda > 0)$, že $\mu(M, d^\lambda) = 0$.

Přistupme nyní k použití Hausdorffovy míry. Nechť $\omega(q)$ je kladná funkce definovaná pro $q > 0$ a nechť $(x_1, \ldots, x_s)$ je daná soustava reálných čísel. Říkáme, že soustava $(x_1, \ldots, x_s)$ připouští aproximaci $\omega(q)$, jestliže ke každému $Q > 0$ existuje řešení soustavy nerovností

$$\left| x_1 - \frac{p_1}{q} \right| < \omega(q) ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left| x_s - \frac{p_s}{q} \right| < \omega(q) ,$$

kde $p_1, \ldots, p_s, q$ jsou celá čísla, $q > Q$. Jak známo, každá soustava čísel $x_1, \ldots, x_s$ připouští aproximaci $\dfrac{1}{q^{1+\frac{1}{s}}}$.

Označme $A(\omega)$ ($B(\omega)$) množinu těch soustav $(x_1, \ldots, x_s)$, které připouštějí (nepřipouštějí) aproximaci $\omega(q)$ a pro něž platí $0 \leqq x_1 < 1, \ldots, 0 \leqq x_s < 1$. Základní význam má tento výsledek CHINČINŮV (1926):

Nechť $\omega^s(q) \cdot q^{s+1} \to 0$ monotonně $(q \to \infty)$.

Jestliže $\int_1^\infty q^s \omega^s(q) \, dq < \infty$, potom Lebesqueova míra množiny $A(\omega)$ je 0;

jestliže $\int_1^\infty q^s \omega^s(q) \, dq = \infty$, potom Lebesqueova míra množiny $A(\omega)$ je rovna 1.

Jestliže tedy je $\int_1^\infty q^s \omega^s(q) \, dq < \infty$, potom je účelné vyšetřovat množinu $A(\omega)$ pomocí Hausdorffovy míry. Tomuto tematu věnoval akademik Jarník řadu prací.

Nejobecnějšího výsledku dosáhl akademik Jarník touto větou (1931):

Nechť funkce $f(2\omega(q))$ *je monotonní*, $\int_1^\infty q^s \omega^s(q) \, dq < \infty$.

Jestliže $\int\limits_1^\infty f(2\omega(q))\, q^s\, \mathrm{d}q < \infty$, *pak* $\mu(A(\omega), f) = 0$;

jestliže $\int\limits_1^\infty f(2\omega(q))\, q^s\, \mathrm{d}q = \infty$, *pak* $\mu(A(\omega), f) = \infty$.

Odtud snadno plyne, že $\dim A\left(\frac{1}{q^\alpha}\right) = \frac{s+1}{\alpha}$ pro $\alpha > 1 + \frac{1}{s}$ a že množina $A(\omega_1) - B(\omega_2)$, $\frac{\omega_2(q)}{\omega_1(q)} \to 0$, je za jistých předpokladů neprázdná.

Jestliže $\int\limits_1^\infty q^s \omega^s(q)\, \mathrm{d}q = \infty$, potom podle Chinčinovy věty je Lebesqueova míra množiny $B(\omega)$ rovna nule a tak je možné studovat pomocí Hausdorffovy míry množinu $B(\omega)$. Prozatím byl vyšetřován pouze případ $s = 1$, neboť při důkazech se nelze obejít bez řetězových zlomků. Touto úlohou se zabýval akademik Jarník okolo r. 1930.

Pak uvedl výsledek KURZWEILŮV z r. 1951:

Nechť $\int\limits_1^\infty \omega(q) \,.\, q\, \mathrm{d}q = \infty$. *Položme* $\omega(q) = \frac{1}{q^2 g(q)}$ *a předpokládejme* $g(q) \to \infty$ *a* $\frac{g(qg(q))}{g(q)} \to 1$ *pro* $q \to \infty$.

Definujme funkci $f(d)$:

$$f(d) = \mathrm{d} \exp\left\{\frac{2}{3}\int\limits_1^{\frac{1}{\sqrt{d}}} \frac{\mathrm{d}t}{t \,.\, g(t)}\right\}.$$

Potom platí:

$$\mu\left(B\left(\frac{1}{q^2 g(q)}\right), f\right) = 0\,,$$

$$\mu\left(B\left(\frac{1}{3q^2 g(q)}\right), f\right) = \infty\,.$$

Dokázat obdobnou větu pro $s > 1$ je stále otevřený problém a rozřešení tohoto problému je jedna z možných cest, jak dokázat, že existují soustavy čísel, které připouštějí aproximaci $\omega_1(q)$ a nepřipouštějí aproximaci $\omega_2(q)$, jestliže $\frac{\omega_1(q)}{\omega_2(q)} \to \infty$, $\int\limits_1^\infty q^s \omega_2^s(q)\, \mathrm{d}q = \infty$.

Konečně akademik Jarník hovořil o některých zajímavých výsledcích EGGLESTONEOVÝCH:

Budiž dána posloupnost přirozených čísel $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$. Je-li u přirozené číslo, nechť $n(u)$ je počet čísel q_i, která splňují nerovnost $q_i \leqq u$. Budiž $\alpha > 1 + \frac{1}{s}$. Nechť Z znamená množinu takových soustav $(z_1, \ldots, z_s)$, že pro každé $Q > 0$ soustava nerovností

$$\left|z_1 - \frac{p_1}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha}\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left|z_s - \frac{p_s}{q}\right| < \frac{1}{q^\alpha}$$

má řešení, při čemž p_i jsou celá čísla, q je některé číslo z dané posloupnosti $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $q > Q$.
Nyní platí:

Je-li $\inf\limits_{x \geq 1} \dfrac{n(x)}{x} > 0$, *pak* $\dim Z = \dfrac{s+1}{\alpha} \left(= \dim A\left(\dfrac{1}{q^{\alpha}}\right)\right)$, *je-li* $\dfrac{q_{n+1}}{q_n} > l(l > 1,$ konst.), *potom* $\dim Z = \dfrac{s}{\alpha}$.

Nechť $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$ je stále pevně daná posloupnost přirozených čísel. Nechť $\{v\}$ je t. zv. lomená část čísla v. HARDY a LITTLEWOOD dokázali, že pro skoro všechna čísla x množina čísel $\{q_i x\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, je hustá v intervalu $(0,1)$.

Pro $0 < \alpha < 1$ nechť M_α je množina takových čísel x, pro něž je $\lim\limits_{i \to \infty} \{q_i x\} = \alpha$.

Platí:

Je-li $\dfrac{q_{i+1}}{q_i} < K$, *pak množina* M_α *je nejvýše spočetná, jestliže* $\dfrac{q_{i+1}}{q_i} \to \infty$ *pro* $i \to \infty$, *pak* $\dim M_\alpha = 1$.

Jaroslav Kurzweil, Praha.

RECENSE

Eduard Čech: **Čísla a početní výkony.** Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1954, stran 248, náklad 3200, cena Kčs 21,40.

Autor praví v předmluvě, že kniha vznikla z popudu jiného jím chystaného spisu, totiž díla o vyšší matematice, které by přístupně a přesně vyložilo základní věci těm, pro něž je matematika jenom prostředkem, nikoliv cílem. Při provádění tohoto plánu došel autor k závěru, že lze takové věci i takovým čtenářům jenom tehdy vyložit vědecky uspokojivě, jestliže se jejich školské vědění z elementární matematiky postaví na solidní základ. A tak vznikla tato kniha. Je podle autorových slov „psána pro širokou a mnohotvárnou obec všech těch, kdo z toho či onoho důvodu si přejí plně porozumět pracovním metodám matematika, jeho způsobu vyjadřování, pochopit smysl jeho symbolů, seznámit se s procesem tvoření matematických pojmů, naučit se spojovat abstraktní úvahu s názornou představou".

Obsah knihy se rozpadá na dvě části. Prvá část vede čtenáře ve třech kapitolách (I. Celá čísla, II. Racionální čísla, III. Reálná čísla) geneticky od přirozených čísel až k pojmu reálného čísla, k početním výkonům s reálnými čísly, k posloupnostem reálných čísel a k odmocninám reálných čísel. To je kulminační bod. A k této systematické a uzavřené části, podle níž je kniha nazvána, se volněji připojuje část druhá, obsahující kapitoly IV a V. Z nich kapitola IV obsahuje základy dělitelnosti a kombinatoriky a důležité poznatky o mnohočlenech. Kapitola V obsahuje především výklad o počátcích analytické geometrie a je podle slov autora „už přímou přípravou ke studiu vyšší matematiky" a „do značné míry na předcházejících nezávislá".

Tato nová kniha našeho velkého matematika EDUARDA ČECHA se mně jeví opět jako událost základního významu ve vývoji naší původní učebnicové matematické literatury vědeckého zaměření. V čem spatřuji toho důvody?

Už jsem řekl, že se neobrací jenom k těm, jimž je matematika cílem. A právě v původních učebnicích s takto rozšířeným určením jsme dnes na tom špatně. My prostě nemáme původní české učebnice vyšší matematiky pro širší publikum a přitom přesné. Ani tato kniha jí není, ale je k ní aspoň úvodem.

Za druhé, i když vezmeme v úvahu veškerou naši knižní literaturu, ve které se vykládá theorie reálných čísel, je toto teprve třetí monografie, začínající ab ovo, totiž od čísel přirozených: Prvou byla látkou i pojetím zcela mimořádná knížka B. POSPÍŠILA *Nekonečno v matematice*, vydaná posmrtně Jednotou československých matematiků v r. 1949 a opatřená pietní předmluvou právě z pera Čechova; druhou je záslužná kniha K. HRUŠI *Elementární aritmetika* (Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1953).[1])

---

[1]) Aby mi bylo rozumět: Mluvím o těch českých monografiích, v nichž je současně obojí, a to jak theorie čísel racionálních, tak theorie čísel irracionálních.

Za třetí však je Čechova kniha prvním českým zpracováním té theorie reálných čísel, jež pochází od zakladatele theorie množin G. CANTORA.[2])

Než přistoupím k obsahu jednotlivých kapitol, uvedu, v čem spatřuji osobitý způsob, jak autor látku vykládá:

Předně se autor nikde nestaví k čtenáři odpudivě, ať už tím, že by odkazoval jeho školské vědění do nepotřebného haraburdí, nebo tím, že by bez psychologického zřetele k různé obtížnosti a překvapivosti látky postupoval se stále stejně vyhlazenou a studenou rytmikou: definice, věta, důkaz. Staví na číselné představě získané ve škole a teprve jejím rozborem dochází k pojmové formulaci. S tím souvisí, že vlastnímu výkladu o aritmetice čísel celých, racionálních a reálných předchází vždy paragraf intuitivního obsahu, ve kterém se čtenáři na základě jeho zkušenosti výstižně popíše význam a potřeba příslušné číselné kategorie.

Za druhé nestaví autor na odiv maximální stručnost, ale na místech theoreticky choulostivých napomáhá pochopení raději výborně volenými příklady než obšírnou formulací abstraktní situace.

Za třetí od prvních stránek nutí čtenáře, aby nečetl ani povrchně ani pasivně, nýbrž aby si zvykal dávat pozor na každé slovo a aby si řadu věcí samostatně zdůvodňoval, aby měl sám živou starostlivost o to, zda ta a ta věc je vskutku v pořádku. To se ale neděje tak, že by se v důkazech ponechávaly mezery, nýbrž tak, že se vědomě důkaz vynechá a výslovně přenechá čtenáři. Tak se kniha stává ihned při četbě současně bohatou sbírkou úloh ryze myšlenkových. Autor je z počátku ochoten vysvětlit svému nerutinovanému čtenáři i takové věci, jako je význam spojky „nebo" nebo spojení „právě tehdy, jestliže", ale pak požadavky na myšlenkovou soustředěnost, důslednost a aktivitu rapidně stoupají. S tím souvisí, že v protikladu k názornému východisku učí záhy přísně dedukovat. Co tím myslím, popíši na následujícím příkladě:

Autor má už pro nezáporná celá čísla pojem součinu, jakož i věty

$$0a = 0 = a0 \tag{1}$$

a

$$a \neq 0 \neq b \Rightarrow ab \neq 0 \tag{2}$$

a definuje součin $a_1 a_2 \ldots a_n$ libovolných celých čísel jako $|a_1|\,|a_2| \ldots |a_n|$ nebo $-(|a_1|\,|a_2| \ldots |a_n|)$ podle toho, zda počet záporných z činitelů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je sudý či lichý; načež důkaz věty „*součin dvou čísel je roven nule, je-li aspoň jeden činitel roven nule; je kladný, jsou-li oba činitelé kladní nebo oba záporní; je záporný, je-li jeden činitel kladný a druhý záporný*" pro libovolná celá čísla zní prostě takto:

Protože $-0 = 0$, je první část důsledek věty (1); ostatek je důsledek věty (2), neboť 0 a 2 jsou čísla sudá, 1 je číslo liché.

Citací vět, vzorců, poznámek a příkladů je velmi a velmi mnoho. Doporučuji čtenáři, aby si na zvláštní arch vypsal z první kapitoly alespoň následující věty (s označením jejich čísla):

2,1 až 2,9; 3,1 až 3,14; 3,16; 3,17; 5,1; 5,2; 5,4 až 5,9; 6,1; 6,4 až 6,6; 7,4; 7,5; 7,9; 8,1; 8,2; 8,4; 9,1; 9,3; 9,4; 9,7

---

[2]) Sotva by dnešní matematik v stručném nástinu prvního paragrafu Cantorova článku *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Math. Ann. 5 (1872)) spatřoval jádro toho, čemu dnes říkáme Cantorova theorie reálných čísel a co se stalo později (1914) F. HAUSDORFFOVI vzorem pro konstrukci t. zv. úplného obalu libovolného metrického prostoru (srv. E. ČECH, *Bodové množiny*, Praha 1936, str. 82 n).

a vzorce:

(3,14), (7,2) až (7,4), (9,1) až (9,3),

aby aspoň poněkud omezil nutné listování.

Za čtvrté autor zvolí sice určitý způsob definice součtu $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, součinu $a_1 a_2 \ldots a_n$ a mocniny a^n, a to způsob definice přímo pro jakékoliv přirozené číslo n, ale jako červená nit se vine všemi třemi prvními kapitolami upozorňování, že lze postupovat také rekurentně. A tak, i když vede svého čtenáře cestou naprosto odlišnou od postupu PEANOVA, ukáže mu zcela zřetelně roli jeho indukčního axiomu. A dále: probírá sice theorii reálných čísel, vycházející z myšlenky Cantorovy, ale dá čtenáři v doplňkových paragrafech o pojmu uspořádání a o Dedekindových řezech vše potřebné, aby pochopil základní myšlenku R. DEDEKINDA pro zcela jiné vybudování theorie reálných čísel. V tom vidím snahu autorovu nenavykat na pěstování výlučnosti, nýbrž vést k širokému rozhledu.

Za páté nelze u knihy pominout pozoruhodně přirozenou, plynulou a korektní češtinu s pečlivým terminologickým zřetelem.

Nyní přihlédnu blíže k zpracování jednotlivých kapitol:

První kapitola jedná o číslech celých. Taková látka je podle mého mínění zkušebním kamenem pedagogického umění. Zde se rozhodne, zda čtenáři otevřeme oči pro potřebu abstrakce či zda jej proti ní zatvrdíme. A tu myslím, že autor s tak obrovskou erudicí, který tak vášnivě rád získává zájem lidí pro matematiku, správně vyhmátl, co je a co není možné a že ukázal cestu správnou. Rozumí se správnou vzhledem k cíli, který kniha sleduje. Jak se vyřídí logicky správně aritmetika racionálních (kladných) čísel na 42 stránkách, ukázal před čtvrt stoletím E. LANDAU svými *Grundlagen der Analysis* (Lipsko, 1930). Ale v Čechově knize nejde jen o logickou správnost.

Vycházeje od představy celých nezáporných čísel, vznikajících od nuly počínaje přidáváním jedničky, od představy konečné množiny a jejího čítání, tedy od počtu prvků konečné množiny, definuje součet a součin nezáporných čísel na základě sjednocení a kartézského součinu konečných množin. Přitom rozlišuje případ dvou a případ n sčítanců (činitelů), pečlivě dbaje případu $n = 1$ a toho, aby si čtenář navykl vždy také tento případ mít na zřeteli. Z příkladů, jimiž ilustruje základní aritmetické zákony, uvádím tento: Z 5 dam a 4 pánů lze vybrat taneční dvojici týmž počtem způsobů jako ze 4 dam a 5 pánů.

Za větou 3,11, kterou si má čtenář sám dokázat, postrádám upozornění, že důkaz nalezne v důkazu věty 3,15. Autor rozeznává *zobecněný* distributivní zákon

$$\Sigma a_r \Sigma b_s = \Sigma a_r b_s$$

od *nejobecnějšího* distributivního zákona

$$\prod_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} = \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_m} a_{1s_1} a_{2s_2} \ldots a_{ms_m}$$

(ale symbolů Σ a Π užívá až v kapitole IV).

S neaxiomatickým pojetím nezáporných celých čísel souvisí názorné pojetí rekurentní definice a důkazu indukcí, názorné pojetí vztahů „menší“, „větší“ a názorné odůvodnění důležité implikace o nezáporných celých číslech: $m > n \Rightarrow m \geqq n + 1$.

Velmi vhodně volený příklad rekurentní definice, totiž definice sudého a lichého čísla, mlčky předpokládá, že žádné nezáporné celé číslo není současně sudé i liché.

Do výkladu o obratu „*V* platí právě tehdy, jestliže platí *W*“ by byla dobře zapadla též formulace „*V* znamená totéž co *W*“, v knize užívaná. Analogickou poznámku možno učinit o spojení „pouze tehdy“.

Myslím, že značnou práci dá čtenáři přesné chápání rozdílu $b - a$, probíraného ve třech etapách: 1) $0 \leqq a \leqq b$; 2) $0 \leqq b < a$; 3) a, b jsou libovolná celá čísla. A dále tu naráží čtenář na typickou metodickou potíž, známou ze školské didaktiky, od kterého okamžiku a proč začít chápat rozdíl $b - a$ jako součet čísel $b, -a$. Myslím, že by zřetelnosti bylo bývalo na prospěch, kdyby za definicí součtu $c_1 + c_2$ dvou celých čísel byla následovala poznámka tato: *Jsou-li a, b čísla nezáporná a je-li $a > b$, je $a - b$ součtem čísel $a, -b$.*

Typickou potíží při geneticky budované theorii reálných čísel je trpělivé prokazování permanence. Autor trpělivost měl. Jeho důkazy permanence jsou přes krajní stručnost naprosto přesné a metodicky obratné. Jde jen o to, nalezne-li v té trpělivosti zalíbení také čtenář. A tu myslím, že autor na svých prvních 46 stránkách učinil všecko možné, aby jeho čtenář na str. 47, kde je prvý důkaz permanence, už cítil potřebu permanenci prokazovat. A dále myslím, že byl-li jednou takto získán, je naděje, že to v některých případech vydrží až do str. 122, kde si má sám provést důkaz, že základní věty o posloupnostech s racionálními členy zůstanou v platnosti i v oboru čísel reálných.

První kapitola končí výkladem o nerovnostech v oboru celých čísel, který je pozoruhodný tím, jak autor začne názornou pomůckou číselné osy, ale potom čtenáře navyká na formulaci abstraktní. To je konkrétní ukázka Čechova zásadně vlídného postoje ke čtenářovým potížím, který ale nakonec z vědecké pravdy slevovat nemíní.

Druhá kapitola jedná o číslech racionálních. Základní úlohou této kapitoly je vyložit konstrukci podílového tělesa k oboru celých čísel tak, aby se základní myšlenky o *pravidlu ekvivalence* (obecné rovnosti) pro danou množinu neboli o jejím *roztřídění* dalo mutatis mutandis použít i pro pochopení Cantorova způsobu zavedení iracionálních čísel. O to se autor pokusil, a to po mém názoru mistrně, tím, že pojetí množinové (třída ekvivalentních prvků) doprovází až zatlačuje pojetím logickým (konkretní vyjádření abstraktního pojmu). Vyslovím se konkretněji takto: Autor řekne, že „elementární zlomek“ $\frac{a}{b}$ (a, b celá, $b \neq 0$) „určuje“ racionální číslo $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ a že $\frac{a}{b}$ je „vyjádřením“ pro $\left\{\frac{a}{b}\right\}$, a už čtenáře nedráždí pojetím, že $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ je množinou všech $\frac{x}{y}$ (x, y celá, $y \neq 0$) takových, že je $\frac{x}{y} \sim \frac{a}{b}$. Rozhodně je takto blíž čtenářově číselné zkušenosti, tím spíš, že ekvivalenci $\frac{x}{y} \sim \frac{a}{b}$ definuje tím, že elementární zlomky $\frac{x}{y}$ a $\frac{a}{b}$ mají „společné rozšíření“, t. j. že při vhodných přirozených h, k je $xh = ak$ a $yh = bk$. Ale současně má čtenáře připraveného na Cantorův pojem reálného čísla: „Konvergentní“ (t. j. Cauchyova) posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ racionálních čísel je (konkretním) vyjádřením určitého reálného čísla $\lim_{n \to \infty} a_n$. Nikdo nepopře, že na tomto místě v analyse je z obou shora uvedených pojetí to, jež jsem označil jako logické, vskutku živější.

S choulostivým bodem pověstné identifikace $\left\{\frac{a}{1}\right\} = a$ se autor nijak nepiplá,[3]) nýbrž raději podrobně ukáže, že po provedené identifikaci není $\{\frac{1}{2}\}$ celým číslem.

Z ostatku této kapitoly imponuje stručný důkaz zákona $\alpha^{m+n} = \alpha^m \alpha^n$ a osobitá formulace t. zv. Bernoulliovy nerovnosti, totiž $t^n \geqq 1 + n(t - 1)$ (t racionální, $t > 0$, n přirozené), připravená k bezprostřední aplikaci. K delikátnímu bodu, kdy se

[3]) Neboť zřejmě nemíní se šířit o isomorfii.

místo $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ začne psát prostě $\frac{a}{b}$ ve významu řešení rovnice $bx = a$, podotýkám: Autor se jím netrápí jistě u vědomí toho, že potíži lze uniknout jenom tak, že se až do tohoto bodu elementární zlomky $\frac{a}{b}$ (páry celých čísel) píší důsledně ve formě $[a, b]$ — a to zase odtrhává čtenáře od jeho školského návyku. Tedy ze dvou potíží se volí snad ta menší.

Třetí kapitola je ústřední kapitolou knihy a obsahuje Cantorovu theorii reálných čísel. Dominantním pojmem této theorie je *posloupnost*. Posloupnost (jakýchkoli věcí) $A_1, A_2, \ldots$ se, jak známo, značí stručněji znakem $\{A_n\}$. Autor, který musí v téže knize mluvit i o třídách $\{\alpha\}$ prvků s nějakým prvkem α ekvivalentních i o posloupnostech, měl by vlastně být na rozpacích stran závorek $\{\}$. Autor je dalek formálních nechutností a krátce závorek $\{\}$ ve smyslu ekvivalence přestane včas užívat, takže je má uvolněny pro stručné označování posloupností.

Prvým úkolem této kapitoly je podat z nauky o racionálních posloupnostech, t. j. o posloupnostech s racionálními členy, tolik, kolik je zapotřebí pro zavedení pojmu reálného čísla. Všechny sem spadající pojmy musí tedy prozatím zůstat v oboru racionálních čísel: proto se racionální posloupnost nazve *omezená*, když existuje takové racionální M, že ..., nazve se *nulová*, když ke každému racionálnímu $\varepsilon > 0$ lze udat přirozené N tak, že ... a zejména nazve se *konvergentní*, když ke každému racionálnímu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené N, že při $m > N, n > N$ je $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Pokud jde i v této nejobtížnější kapitole o cíl knihy, tu ani autor sám si nečiní ilusí; praví v předmluvě, že ani čtenář, který důkladně prostuduje první dvě kapitoly, nebude asi ještě schopen plně si promyslit celý dosah probrané látky (třetí kapitoly). A tak nalézáme před vlastními epsilonovými důkazy vět o racionálních posloupnostech intuitivní nástiny, které mají pomáhat otvírat oči překvapenému začátečníku. Jistě i odborníka tu zaujme důkaz poslední věty před zavedením pojmu reálného čísla, totiž, že *každá omezená monotonní posloupnost je konvergentní.*

Pojem reálného čísla se v této theorii zavede takto: V množině všech konvergentních racionálních posloupností se definuje pravidlo ekvivalence $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ tím, že $\{a_n - a'_n\}$ je nulová a příslušné třídy mezi sebou ekvivalentních (konvergentních racionálních) posloupností, čili příslušné nové abstraktní pojmy, se nazvou *reálná čísla* — s identifikací, že to reálné číslo, jež obsahuje racionální posloupnost $\alpha, \alpha, \ldots$, čili jehož konkretním vyjádřením je taková posloupnost, ztotožníme s racionálním číslem α.[4])

Teď tedy každá konvergentní (racionální) posloupnost $\{a_n\}$ „určuje" reálné číslo a toto číslo se značí znakem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Další, čím dál obtížnější obsah třetí kapitoly je takový: Způsobem, kterého užil v r. 1908 G. Kowalewski ve svých proslulých *Grundzüge der Differenzial- und Integralrechnung*, se definuje součet, součin a podíl reálných čísel, kdežto způsobem ryze cantorovským se zavede nerovnost mezi reálnými čísly takto: Autor nazve racionální $\{a_n\}$ *výrazně kladnou*, když lze udat racionální $v > 0$ tak, že je $a_n > v$ pro skoro všechna n. Pak za kladné se prohlásí takové reálné číslo, jež je limitou výrazně kladné posloupnosti a dále se definuje nerovnost $\alpha > \beta$ mezi reálnými čísly tím, že reálné $\alpha - \beta$ je kladné. Tím padá posled-

[4]) Je totiž evidentní, že taková racionální posloupnost je nejvýš jedna. Komu je tento poslední krok proti mysli, ten může použít tohoto obratu. Je-li a reálné číslo, položím $a^* = \alpha$ nebo $a^* = a$ podle toho, zda racionální posloupnost $\alpha, \alpha, \ldots$ je či není konkretním vyjádřením reálného čísla a (srv. V. Jarník, *Úvod do počtu diferenciálního*, Praha 1946, str. 49). A pak místo množiny všech a vezmu množinu všech a^*.

ní bariéra mezi tradičním pojetím a touto theorií a je otevřena cesta k větě o hustotě racionálních čísel v množině reálných čísel, tím k epsilontice s reálným ε a k definicím nulové a konvergentní posloupnosti reálných čísel. Posledním krokem je definice limity posloupnosti reálných čísel a vrchol celé theorie, totiž věta, že *posloupnost reálných čísel je konvergentní právě tehdy, jestliže má limitu.* Přitom říkáme, že reálné α je limitou posloupnosti $\{\alpha_n\}$ reálných čísel, když $\{\alpha_n - \alpha\}$ je nulová. Považoval jsem za svou povinnost naznačit postup Cantorovy theorie, aby se při zběžném listování v Čechově knize neshledávalo podivným, že ona vrcholná věta je až na str. 123 přesto, že pro neinformovaného je její obsah banální.

Konec kapitoly obsahuje nyní v rychlém sledu obvyklou řadu vět o reálných posloupnostech a vedle toho dva velmi pozoruhodné důkazy pro existenci odmocniny z kladného reálného čísla. Jistě i odborníka budou zajímat důkazy jdoucí k cíli bez věty o infimu a bez Bolzanovy věty o spojité funkci.

Péči o permanenci, která se koncem kapitoly už hodně zaplétá, splnil autor naprosto korektně (i když bez formální okázalosti). Jenom dvě drobná nedopatření mu lze vytknout: O větách II 6,2 (t. j. věta 6,2 v kap. II) a II 6,3 nebylo výslovně dokázáno, že platí i v oboru reálných čísel, ač se jich v této šíři užije v důkaze věty III 5,16; a také nebylo o větě II 6,17 poznamenáno, že platí i pro reálná u, v, ač se jí v této šíři užije dvakrát na počátku prvního důkazu věty III 6,3.

Budiž mi prominuto, že se o obsahu kapitol IV a V vyjádřím už jenom stručně.

V té části kapitoly IV, jež pojednává o dělitelnosti, upoutá svérázný postup, který vychází od pojmu násobku a nikoli dělitele, jakož i pozoruhodná formulace fundamentální věty o kanonickém rozkladu. V té části, jež zavádí symboly Σ a Π, jistě i odborníka zaujme, jak se na třech řádkách spočítá, že v kanonickém rozkladu faktoriely 2100! se prvočíslo 7 vyskytuje v mocnině 7^{348}. Ve dvou paragrafech se probírá kombinatorika, partie, o kterou měl vždy živý metodický zájem autor, který po 15 let hlásal ústřední důležitost synthetického soudu a slovních úloh ve školské matematice. V paragrafu o mnohočlenu se čtenář naučí jak Ruffiniově pravidlu, tak Hornerově schematu.

Kapitola V by se před dvěma lety ani snad nebyla hodila do knihy, jejíž první tři kapitoly jsou tak principiálně významné. Dnes se však na výběrových školách přestalo učit analytické geometrii. A tu je poučení o ní z pera tak zkušeného rádce, jakým je autor knihy, jistě velmi vítanou kapitolou.

Co říci nyní na závěr k tomu, zda kniha splní své poslání, zda, jak praví autor v předmluvě, „čtenář, který knihu prostuduje, bude se dívat novým způsobem na to vše, o čem si snad myslil, že už zná, ztratí bázeň před matematikou, přijde na chuť abstraktnímu myšlení, s daleko větší nadějí na úspěch bude moci studovat ty partie vyšší matematiky, o které má zájem“. Po mnohaleté učitelské zkušenosti s různým žactvem nejrůznějšího věku všech tří školských stupňů soudím, že své poslání splní. Ne proto, že už je rozebrána. Ale proto, že tomu, kdo má o znalost matematiky opravdový zájem a komu nebylo lehkomyslně vykládáno o jalovosti theoretických poznatků v matematice, je theoretické prohloubení a ozřejmění vždycky radostným překvapením, úlevou a pomocí.

Poznámka. Prosím čtenáře, aby si v knize provedl následující opravy drobných nedopatření:[5])

26_{15} místo § 1 čti § 3, 30_3 místo § 8 čti § 7, 40^{10} místo 3,6 čti 3,7, 40^{15} místo „vět 2,7 a 6,1“ čti „vět 2,7 a 6,2“, 41_{13} místo „podle (6,2)“ čti „podle (6,10)“, 50_{13} místo „nezáporné“ čti „kladné“, 54^{12} místo 9,6 čti 9,4, 78_3 místo I 9,6 čti I 9,7, 79_{10} místo α čti $\alpha \neq 0$, 81^8

[5]) 26_{15} značí: stránka 26, řádek 15 zdola. Obdobně 40^{10}.

místo „věty 6,7“ čti „věty 6,9“, 92^9 místo 8,2 čti 7,2, 111^7 místo α'_n čti a'_n, 116_4 místo „větu 2,7“ čti „příklad 2,1“, 120^2 místo I 9,6 čti I 9,7, 122_9 místo 2,18 čti 2,17, 123^{10} místo α_n čti a_n, 134_9 místo „reálných“ čti „racionálních“, 144_8 místo V_3 čti V_4, 146^{10} místo „číslo“ čti „číslo > 1“.

Mimo to doporučuji na str. 27 v řádku 20 zdola za slovo „přímo“ vložit „(pro jakékoli přirozené číslo n)“ a zato v řádcích 17—19 zdola vynechat„; potom pojem obecného ... obecnější čísla“; dále před čtením důkazu věty 4,5 na str. 29 se poučit o významu spojení právě tehdy z poznámek 5,16 a 5,17 na str. 35 a 36; konečně v důkazu věty 4,3 na str. 119, řádky 8 a 9 zdola, čísti „je správná věta I 5,4“ a vynechati „z věty 4,1“.

Miloš Neubauer, Praha.

E. Kraemer, K. Rakušan, J. Vyšín: **Branné prvky v matematice.** Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1954, 167 stran, 120 obrázků, cena 12.50 Kčs.

Recensovaná knížka je určena jako pomůcka pro učitele jedenáctiletek a odborných učilišť. Je to první práce v naší literatuře, která se zabývá aplikacemi školské matematiky na brannou a předvojenskou výchovu. Proto bude nepochybně vřele přijata jak školskými pracovníky, tak i vedoucími pionýrských oddílů a pracovníky ČSM, a to tím spíše, že je velmi zdařile zpracována.

V Úvodu se autoři zabývají otázkou, co lze očekávat od vyučování matematice pro brannou výchovu. Zdůrazňují právem, že výuka v matematice může a má plnit v branné výchově širší úkol než jen poskytnout vědomosti nutné pro aplikace v topografii, balistice a pod. Vyučování matematice totiž vede k přesnému, stručnému a jasnému vyjadřování, vytváří a formuje volní charakterové vlastnosti žáků, učí pracovní kázni a přesnosti, vede k důslednosti a samostatnosti v práci, k překonávání překážek a iniciativnosti, nutí k promýšlení problémů a užívání vtipných obratů, které mnohdy obtížné problémy převádějí na jednoduché. Rozvíjí se tedy při vyučování matematice právě ty schopnosti, které jsou pro brannost velice důležité.

Předmětem knížky jsou aplikace partií školské matematiky na dvě vojenské disciplíny: na topografii a střeleckou přípravu.

Topografii je věnováno více místa (devět kapitol, jež zabírají skoro tři čtvrtiny knihy), ježto poskytuje velice mnoho příležitosti k aplikacím, zvláště v trigonometrii a planimetrii. Po stručném seznámení s pomůckami pro topografické práce (jako na př. jsou výtyčky, záměrné kříže, měřické pásmo, úhloměrné přístroje, měřické stoly, libela, modely pro přípravné práce a pod.) následuje výklad o jednoduchých pracích v terénu, jako jsou odhady, měření a určování vzdáleností, vytyčování přímek a úhlů a výpočty obsahů a objemů různých objektů. Pro úhlovou míru je v knížce vedle stupně zaveden také dílec. Je podána jeho přesná definice i vysvětleno praktické jeho použití. Dále je popsána práce s měřicím stolkem a úhloměrným přístrojem a vyloženy methody rayonování, protínání vpřed a protínání vzad. Velká pozornost je věnována také úlohám souvisícím s kartografickým zobrazováním. Jednak jsou to úlohy, jež se dají řešit metodou profilů, úloha zvukoměřická (určení polohy děla, známe-li přesně okamžiky, v nichž bylo na různých místech slyšet výstřel, po případě ještě vidět záblesk při výstřelu), jednak úlohy z vlastní kartografie. Jsou zde vyloženy zásady zobrazení ekvidistantního, konformního a ekvivalentního a zavedeny pojmy orthodromy a loxodromy a vyložen jejich praktický význam.

O použití matematiky ve střelecké přípravě je pojednáno ve třech kapitolách. První se týká určení palebného vějíře, druhá jedná o rozptylu při střelbě a o výpočtu spotřeby střeliva (na základě počtu pravděpodobnosti), třetí kapitola se zabývá elementárními pojmy z vnější balistiky, jako je maximální dostřel, polohový úhel cíle a řeší úlohy pohybu střely ve vakuu.

V textu je kromě výkladu látka ještě ilustrována řadou řešených **příkladů** a u každé partie jsou zařazena **cvičení**. Pro potřebu učitelů je v knížce uvedeno v přehledu rozdělení hesel z branné výchovy podle toho, jak připadají na jednotlivé ročníky výuky v matematice, a uveden přehled cvičení z učebnic matematiky, rýsování a deskriptivní geometrie, která jsou cenná s hlediska branné a předvojenské výchovy.

Upozorňujeme čtenáře na některá **nedopatření**:

str. 7, ř. 4 zdola má být „měly" místo „měli";

str. 47, ř. 7 pod obr. 34 má být „na něj" místo „na něho";

str. 56, odstavec 3 zdola: souvětí v tomto odstavci je gramaticky nesprávné;

str. 68: označení severu zeměpisného s_z v obr. 50 nesouhlasí s označením s_g v textu;

str. 105: z předpokladu, že hlaveň děla není ani v poloze vodorovné ani svislé, ještě neplyne, že jde o vrh šikmý *vzhůru*.

Kromě toho najdeme v knížce ještě další jazykové chyby. — Po stránce didaktické by lepšího zpracování vyžadoval odstavec o protínání zpět. Větší péče měla být věnována některým obrázkům (zejména obr. 44).

Závěrem dlužno říci, že autoři se v recensované knížce zhostili úspěšně svého úkolu. Zajímavě a s náležitou přesností zpracovali ty partie matematiky, jež se dají ve škole úspěšně aplikovat na brannou výchovu. Současně knížka rozhojňuje příkladový materiál a v tom je klad i pro výuku v matematice samé.

Jan Pavlíček a *Ladislav Kosmák*, Praha.

V. A. Ditkin - P. I. Kuzněcov: **Příručka operátorového počtu.** Vydalo Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1954. Stran 340, obrázků 8. Cena brožovaného výtisku Kčs 24.

Překladem knihy od V. A. Ditkina a P. I. Kuzněcova „Příručka operátorového počtu" se dostává do rukou našim čtenářům, a to z řad matematiků, inženýrů a všech těch, kteří přijdou do styku s operátorovým počtem, důležitá pomůcka. Operátorového počtu jakož i matematických základů jako — Laplaceovy nebo Laplace-Carsonovy transformace se užívá se zdarem v elektrotechnice, ale také ve všech oborech, kde se setkáváme s obyčejnými nebo parciálními diferenciálními rovnicemi nebo tam, kde je výhodnější pracovat v prostoru obrazů místo originálů, jako to činíme na příklad v počtu pravděpodobnosti.

Z hlediska čistě matematického představují zmíněné transformace velmi zajímavý objekt studia a bádání, takže dobrý překlad dobré knihy o těchto transformacích je více než vítaný. Můžeme říci, že obě tyto podmínky jsou překladem knihy Kuzněcova a Ditkina Oldřichem Koníčkem splněny. Kniha má tím větší cenu, že je vlastně první větší monografií v české literatuře, která se věnuje tomuto thematu. Nadto více než polovinu knihy tvoří velmi rozsáhlé tabulky operátorů, které samy o sobě jsou velmi cennou částí přeložené příručky.

Po úvodu v § 1 autoři podávají přehled Laplaceovy transformace v § 2. Je zde řečeno téměř vše podstatné, a co je nutno zdůraznit, autoři vycházejí z pojmu Lebesgueova integrálu, čímž dodávají pojmu originálu i obrazu solidní základ. § 3 je věnován definici operátoru, definičního oboru operátoru a operacím s operátory. § 4 se zabývá Duhamelovým integrálem, který vyplývá z věty o konvoluci, a je pozoruhodný větou, jež praví, že operátory splňující některé přijatelné požadavky všecky spadají pod uvedenou definici. § 5, 6, 7, jsou věnovány realisaci operátorů a jsou zde uvedeny věty, na nichž se zakládá realisace operátorů jako na př. známá věta o rozkladu operátoru. V § 9 se zabývají autoři operátory závislými na parametru, s kterými se mimo jiné nejčastěji setkáváme při užití Laplaceovy transformace na řešení parciálních diferenciálních rovnic.

§ 8 je věnován Efrosově transformaci, která je velmi důležitou pomůckou při realisaci operátorů. V § 10 jsou spočítány některé příklady na parciální diferenciální rovnice matematické fysiky: kmitání membrány, teplota tyče, teplota poloprostoru zahřívaného nekonečným válcem, průběh koncentrace plynu. Theoretická část příručky končí dodatkem překladatele, který instruuje čtenáře jak pracovat se slovníkem a gramatikou operátorového počtu. Zvláštní pozornost je zde věnována Efrosově transformaci.

Tabulky operátorů začínají přehledem označení speciálních funkcí. Potom následuje gramatika operátorového počtu a nakonec jsou vlastní tabulky operátorů. Jsou seřazeny podle obrazů. Začíná se racionálními funkcemi, potom následují: irracionální funkce, exponenciální funkce, goniometrické a hyperbolické funkce, logaritmické, cyklometrické a hyperbolometrické funkce, gamma funkce, integrální funkce, sigulární hypergeometrické funkce, Besselovy funkce, kulové funkce, eliptické funkce, theta funkce, Mathieuovy funkce, hypergeometrické funkce a posléze různé.

Vyzdvihněme ještě jednou dva základní klady Ditkin-Kuzněcovovy příručky: bohatost materiálu a poměrně moderní, přesná výstavba theoretické části.

Závěrem je nutno poukázat na některé n e d o s t a t k y českého překladu příručky, které byly způsobeny jednak chybami v originálu, jednak přehlédnutími v překladu. Na stránce 22 v poznámce 1 má být místo nespr. $\sigma < \sigma_c$ spr. $\sigma_0 > \sigma_c$, na str. 43 v poznámce má být místo nespr. $F(D)f = \bar{F}(D)f(D)\,\eta$ spr. $F(D)f = F(D)\,\overline{f(D)}\,\eta$, na str. 46 ve výrazu $\frac{h(t)}{D^3}$ má být místo nespr. $f_2(n)$ spr. $f_1(n)$, na str. 51 ve výrazu $F(D)f$ má být místo nespr.

$$\sum_{k=3}^{1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{a_k\, f(p)}{p^{k+1}}\, e^{pt}\, dp \text{ spr. } \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{a_k\, f(p)}{p^{k+1}}\, e^{pt}\, dp,$$ na str. 52 na konci stránky

patří místo nespr. $\frac{D}{D-a}\, f$ spr. $\frac{1}{D-a}$, na str. 62 ve výrazu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c e^{-\sqrt{t^2-\xi^2}\left(\frac{w}{2}\sqrt{\frac{i+\xi}{i-\xi}} - \frac{1}{2w}\sqrt{\frac{t-\xi}{t+\xi}}\right)} \frac{dw}{w}$$

má být místo nespr. i spr. t, na str. 74 má být:

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{F(\omega(p))}{p^2}\, e^{pt}\, dp = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2}\, dp\, \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \omega(p)}\, d\zeta,$$

na str. 82 má být místo nespr. φ_n spr. ψ_n.

Dodatek překladatele je vlastně podrobnější návod jak užívat tabulek operátorů. Pro lepší orientaci v gramatice operátorového počtu je znovu citována Efrosova věta pro Laplaceovu a Laplace-Carsonovu transformaci. Jsou uvedeny některé postačující podmínky, aby byla zaručena její platnost. Formulace věty, jak je uvedena v dodatku, je poněkud nesrozumitelná a nevystihuje podstatu věci. Abychom měli jasno, uvedeme Efrosovu větu ve třech různých formulacích.

Věta. *Nechť* $L(f(t)) = \varphi(p)$, $L(g(\xi, t)) = \omega(p) e^{-\xi\psi(p)}$ pro skoro všecka $\xi \epsilon \langle o, p)$, *kde* $w(p)$ *a* $\psi(p)$ *jsou funkce nabývající komplexních hodnot proměnné p. Nechť konverguje ve smyslu Lebesgueově integrál* $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sigma t}\, g(\xi, t)\, f(\xi)\, d\xi$ *pro nějaké reálné* σ. *Potom platí:*

$$L\left(\int_0^\infty g(\xi, t)\, f(\xi)\, d\xi\right) = \omega(p)\, \varphi(\psi(p)) \text{ pro } \operatorname{Re} p \geqq \sigma.$$

Důkaz se provede snadno užitím Fubiniovy věty. Větu můžeme ovšem též vyslovit vycházejíce z pojmu Riemannova integrálu. Potom až na jeden dodatečný předpoklad bude věta znít ve shodě s dodatkem:

Věta. *Nechť* $f(\xi)$ *je po částech spojitá, a to pro* $\xi \geqq 0$, $g(\xi, t)$ *je spojitá v intervalu* $\xi \geqq 0$, $t \geq 0$, $\int_0^\infty f(\xi)\, g(\xi, t)\, \mathrm{d}\xi$ *konverguje stejnoměrně vzhledem k proměnné* $t \geqq 0$ *z libovolného konečného intervalu,* $\int_0^\infty e^{-pt} g(\xi, t)\, \mathrm{d}t$ $\mathrm{Re}\, p \geqq \sigma$ *konverguje stejnoměrně vzhledem k proměnné* $\xi \geqq 0$ *z libovolného konečného intervalu, nechť alespoň jeden z integrálů* $\int_0^\infty e^{-\sigma t}\, \mathrm{d}t \int_0^\infty |g(\xi, t)|\, |f(\xi)|\, \mathrm{d}\xi$, $\int_0^\infty |f(\xi)|\, \mathrm{d}\xi \int_0^\infty e^{-\sigma t}\, |g(\xi, t)|\, \mathrm{d}t$ *konverguje pro reál.* σ. *Potom je splněno výše uvedené tvrzení.*

Je vidět, že za předpokladů silnějších dostáváme totéž. Je možno ovšem zaručit platnost našeho tvrzení, i když nebude konvergovat uvedený dvojný integrál.

Věta. $f(\xi)$ *a* $g(\xi, t)$ *buďte stejné jako v předchozí větě. Nechť* $\int_0^\infty f(\xi)\, g(\xi, t)\, \mathrm{d}\xi$ *konverguje stejnoměrně pro* $t \geqq 0$, $\int_0^\infty e^{-\sigma t}\, \mathrm{d}t \int_0^\infty f(\xi)\, g(\xi, t)\, \mathrm{d}\xi$ *konverguje pro* $\sigma > 0$. *Potom platí naše tvrzení.*

Jindřich Nečas, Praha.

ZPRÁVY

SEDMDESÁT LET PROF. ING. DR FRANTIŠKA KADEŘÁVKA

Dne 26. června tohoto roku dožil se sedmdesáti let plodného života profesor deskriptivní geometrie na fakultě inženýrského stavitelství v Praze, Ing. dr FRANTIŠEK KADEŘÁVEK. Narodil se v roce 1885 v Praze II, jako syn manželů VÁCLAVA a MARIE KADEŘÁVKOVÝCH. Otec prof. Kadeřávka, vyučený kovář, zámečník a truhlář byl zaměstnán jako sluha na české chirurgické klinice profesora WEISE a syn František rád chodil tatínkovi pomáhat navíjet obínadla, čistit operační nástroje a podobně. Tak se dostal po prvé František Kadeřávek na vysokoškolskou půdu, která se stala později jeho životním pracovištěm. Sympatie k lékařství, které si odtud Kadeřávek odnesl, odrazily se později v určitém úseku jeho bohaté činnosti.

Protože byl František nadaný hoch, dal ho otec studovat na první českou reálku v Praze v Ječné ulici, kde byl tehdy ředitelem náš známý geometr VINCENC JAROLÍMEK. Jako většina chudých a nadaných studentů, byl i František Kadeřávek nucen již na reálce přivydělávat si kondicemi. V roce 1902 složil maturitní zkoušku s vyznamenáním a stal se posluchačem techniky, kde studoval strojní obor. I zde byl Kadeřávek jedním z nejlepších studentů.

Velmi mnoho by se toho dalo napsat z bohatých vzpomínek profesora Kadeřávka, zejména o líčení národnostního boje z dob jeho studií na reálce a pak na technice v éře mocnářství Rakousko-Uherského.

Na podzim 1905 složil Kadeřávek úspěšně první státní zkoušku. Vědychtivému duchu studenta Kadeřávka to však nestačilo. Mimo předměty státní zkoušky studoval ruštinu a angličtinu u básníka SLÁDKA, elektrodynamiku u ZENGERA, stereotomii u ŠOLÍNA, dále geodesii, technické kreslení, počet pravděpodobnosti a elektrotechniku. Jeho oblíbenými obory však byla deskriptivní geometrie a matematika. Proto v létech 1905—1907 navštěvoval filosofickou fakultu, tehdy ještě Karlo-Ferdinandovy university, kde jeho učiteli matematiky byli profesor PETR a SOBOTKA. Deskriptivní geometrie se na universitě tehdy ještě nepřednášela. Kromě toho studoval pedagogiku, ethiku, školskou hygienu, českou literaturu, německou konversaci a historii německé literatury. Dne 25. června 1908 složil státní zkoušky předepsané pro profesory středních škol z matematiky a deskriptivní geometrie a dosáhl v těchto předmětech aprobace.

Jako student, zajímal se František Kadeřávek o práce našeho velikého geometra, profesora PELZE. Výsledkem toho bylo, že na jaře 1906 napsal svoji první práci z oboru geometrie „Zcela elementární důkaz Pelzova rozšíření Dandelinovy věty", kterou odevzdal profesoru Petrovi. Touto prací na sebe upozornil profesora Pelze, který poznal značné schopnosti mladého Kadeřávka a navrhl ho od 1. října 1906 za asistenta vysoké školy technické.

Nebylo snad spolku nebo studentského podniku, kde by Kadeřávek chyběl. Jako asistent zúčastnil se Kadeřávek jako člen „volného sdružení asistentů českých vysokých škol" urputného boje za zvýšení platů asistentů, za zvětšení počtu asistentských míst na vysokých školách technických, za přidělení přednáškových místností a vůbec za zvýšení existenční úrovně české techniky. V rámci těchto akcí dosáhl asistent Kadeřávek i toho, že na české technice byly zavedeny přednášky „Vybrané stati z projektivní geometrie" a „Vybrané stati z deskriptivní geometrie" které byly povinné pro posluchače učitelství na středních školách. Tyto přednášky zahájil pak profesor Jarolímek. Zásluhou Kadeřávkovou bylo, že vybrané stati z deskriptivní geometrie byly za přispění profesora Sobotky povoleny a zavedeny i na filosofické fakultě Karlo-Ferdinandovy university v Praze. Jako asistent vypracoval Kadeřávek veškeré obrázky do přednášek profesora Jarolímka a profesora Procházky vydávaných tiskem a rovněž tak obrázky do učebnice deskriptivní geometrie pro techniky od obou zmíněných profesorů. Od roku 1909 až do 31. března 1917 suploval Kadeřávek Jarolímkovy přednášky z deskriptivní geometrie. Za Jarolímka pak i zkoušel jak na technice, tak i v komisi pro profesory kreslení.

V říjnu 1910 byl Kadeřávek promován na doktora věd technických a v roce 1910—1911 zastupoval v přednáškách profesora Procházku, který byl tehdy rektorem. V témž roce vstoupil prof. Kadeřávek do Pražské tělocvičné jednoty Sokol a trochu později do Umělecké Besedy. V květnu 1912 se habilitoval pro obor synthetické geometrie a konal od té doby povinné docentské přednášky z deskriptivní geometrie.

Posilu v boji proti německým snahám za Rakouska-Uherska hledal prof. Kadeřávek i ve sblížení slovanských studentů pražských. Proto usiloval organisováním oblíbených slovanských večerů v Sokole, aby Slovinci, Rusové, Bulhaři, Chorvaté, Poláci, Srbové, Lužičtí Srbové a Slováci si uvědomili, že jsou členy veliké slovanské rodiny, která musí spolu držet a bojovat proti tehdy sílícímu tlaku germanisace.

Když vypukla první světová válka, měl prof. Kadeřávek jako člen výboru Jednoty a jako člen sboru pro postavení Husova pomníku časté policejní prohlídky a konečně jako politicky podezřelý byl odveden a poslán do Chomutova. Vrátil se však na štěstí odtud právě před odchodem na frontu, protože se podařilo uvolnit jej pro přednášky na technice s povinností pomáhat v ústavu pro zmrzačelé, který tehdy založil prof. R. JEDLIČKA. Na technice konal přednášky pro studenty-vojáky na dovolené. V roce 1917 byl Kadeřávek jmenován mimořádným profesorem ad personam s nejmenším platem a s povinností vykonávat práce asistentské. Jak říká prof. Kadeřávek, dělal si asistenta sám u sebe.

Po válce pomáhal prof. Kadeřávek zahladit stopy války. Přednášel proto deskriptivní geometrii všude, kde toho bylo třeba na vysokých školách technických (na inženýrském stavitelství, architektuře, lesním inženýrství), na Akademii výtvarných umění a později na vysoké škole pedagogických studií. Až do roku 1937 přednášel deskriptivní geometrii a matematiku pro kandidáty profesury kreslení. Od 1. ledna 1921 byl jmenován řádným profesorem deskriptivní geometrie na technice a v letech 1921—1924 členem komise pro kandidáty učitelství na středních lesních školách; roku 1923 byl jmenován členem zkušební komise pro kandidáty učitelství na středních školách, kde pracoval až do roku 1945. V roce 1923 byl poctěn členstvím v Královské české společnosti nauk.

Od roku 1920 až do dnešních dob s výjimkou let okupace, kdy byly české vysoké školy uzavřeny, vypisuje prof. Kadeřávek každoročně ceny za nejlepší rysy a modely posluchačů, ceny, které hradí ze svého. V ústavu deskriptivní geometrie a stereotomie prof. Kadeřávka nebyla v letech první repupliky nikdy nouze o domenstrátory a pomocné vědecké síly a to proto, že tyto zaměstnance částečně honoroval profesor Kadeřávek ze svého. Činil to ovšem tak, že jeho domenstrátoři neměli ani tušení, že jejich měsíční odměna za práci nepochází z rektorátu.

Přišel rok 1939 a s ním hrozná léta okupace a druhé světové války. Prof. Kadeřávek je trnem v očích nepřátel. Nasvědčuje tomu skutečnost, že byl dán do t. zv. příkaznosti, že mu byla vyměřena minimální pense a že byl podrobován častým prohlídkám gestapa. Dobu okupace snášel prof. Kadeřávek těžce na zdraví. Přesto ale neohroženě pomáhal svým bývalým studentům a budoucím vysokoškolákům, aby se připravili k rychlému dostudování po válce. Je dnes dobře známa tehdejší činnost prof. Kadeřávka ve Studentském zdravotním ústavě, kde pracoval již od února 1921 jako pokladník. Za okupace se v tomto ústavu podporovali tajně příslušníci persekvovaných rodin. Když někteří klesali na mysli, našli vždy v prof. Kadeřávkovi odvážného optimistu.

Po válce v r. 1945 stojí prof. Kadeřávek v čele pracovníků, kteří měli za úkol otevřít v nejkratší době české vysoké školy pražské. Prof. Kadeřávek splnil s elánem tento úkol za tři týdny. Bohužel však brzy nato vzala jej choroba z víru vysokých škol, takže nemohl zastávat ani úřad rektora Českého vysokého učení technického a trvalo přes rok, než se jeho otřesené zdraví zlepšilo. Ale již v roce 1947 opět přednáší, organisuje oslavu dvousetletého výročí zakladatele deskriptivní geometrie Gasparda Monge, stará se iniciativně o dar Karlově universitě atd. Ze všech svých sil pomáhal prof. Kadeřávek odstraňovat následky války a převést školy do klidného prostředí.

Veliká většina našich deskriptivářů prošla Kadeřávkovými přednáškami a skládala u něj státní zkoušky. Mnoho set našich inženýrů poznalo profesora Kadeřávka jako znamenitého učitele, vychovatele a člověka s dobrým srdcem. Vždyť péče o svěřenou mládež nekončila u prof. Kadeřávka nikdy v posluchárně. Staral se vždy o studenty a hmotně je podporoval, rozprávěl s nimi o jejich starostech a radil jim. V tom právě jevila se jeho hlavní činnost jako dlouholetého člena správního výboru Hlávkových kolejí. Studenti mají prof. Kadeřávka rádi, protože u něho nacházeli vždy oporu ve svých těžkých chvílích. Proto dnes při jeho sedmdesátých narozeninách, vzpomínají na něj srdečně a přejí mu upřímně do dalších let mnoho zdraví a dalších úspěchů na poli jeho bohaté činnosti.

Vědecká činnost profesora Kadeřávka je charakterisována těmito směry: práce v synthetické geometrii, aplikace geometrie ve výtvarném umění, studie o význačných představitelích české geometrie a našeho veřejného života.

Synthetická geometrie s jejími methodami užitými na problémy deskriptivní geometrie nebo na vyšetřování vlastností křivek a ploch je vlastním oborem studia prof. Kadeřávka. S opravdovým zájmem o podstatu věci přistupoval ke každé úloze a s velikým úsilím hledal a našel jednoduché intuitivní prostředky k odvození hlavního výsledku. Zřetel k názornému a jednoduchému vytváření složitých útvarů jeví se zejména v pracích o součtových křivkách a plochách a o plochách klínových, které jsou jeho objevem v posledních letech a které mají velký význam v theorii skořepin. Dalším důležitým rysem geometrických prací profesora Kadeřávka je zřetel k potřebám praxe. Všimneme-li si thematiky jeho publikací, vidíme, že ve většině studované látky dával důraz na řešení takových úkolů, které potřebovala technická nebo lékařská praxe nebo které vyžadovaly výklady deskriptivní geometrie konané pro studenty vysokých škol technických a pro studenty učitelství deskriptivní geometrie na středních školách. Vzácné porozumění pro potřeby inženýrské praxe a školy dávalo prof. Kadeřávkovi vhodnou problematiku a cenné výsledky praxi. V oboru synthetické geometrie publikoval prof. Kadeřávek řadu hodnotných prací. V těchto pracích se zabýval jednak theorií křivek a pak hlavně specielními plochami, jejichž vlastnosti odhaloval v rámci synthetické geometrie elegantními a zcela původními methodami. Spolu s profesorem Klímou a Kounovským publikoval obsáhlou učebnici deskriptivní geometrie (ve dvou dílech), která je skutečným kompendiem tohoto oboru v mezinárodním měřítku. Z mnoha partií této učebnice, které zpracoval prof. Kadeřávek, vyniká svojí originálností hlavně část jednající o stereotomii. Celé toto dílo má charakter monografie a nemá pro šíři své látky i methodu zpracování obdoby.

Profesor Kadeřávek našel velikou zálibu ve výtvarném umění. Tato záliba harmonisovala jeho geometrické zájmy, nebyla však nikterak pohodlná. Nespokojila se pouze přijímáním kladných hodnot výtvarného umění, ale vedla ke kritickému rozboru výtvarných prací, k jejich geometrické abstrakci a také ke snaze pomoci výtvarníkům pochopit hlouběji způsoby zobrazovací, kterých užívají, a seznámit je s abstrakcí útvarů, s kterými pracují a které nacházejí v prostoru, ve světě. Proto přednášel prof. Kadeřávek na Akademii výtvarných umění a proto vznikly jeho knihy pro malíře, sochaře, architekty a přátele umění. Jsou to knihy: *Perspektiva, Relief, Geometrie a umění v dobách minulých, Prostorová perspektiva a reliefy* (spolu s B. Keprem). V posledně jmenované knížce je mimo jiné prof. Kadeřávkem velmi zdůrazněna i starost o vzhled Václavského náměstí, poškozeného bombardováním a snaha, aby úprava byla správná a odpovídala starým krásným vzorům, jako na př. náměstí Capitolu od Michel-Angela v Římě. Geometrická látka všech těchto knih je proložena studiemi historickými a dokumentována řadou výtvarných prací umělců všech dob a národů. Na nich ilustruje prof. Kadeřávek užití vykládaných method v malířství, sochařství a v architektuře nebo oprávněnost svých myšlenek; současně sleduje historický vývoj zobrazovacích method v umění. Knihy jsou vypraveny vzorně obrazovými přílohami, které prof. Kadeřávek opatřil na svých četných studijních cestách po Evropě a v Turecku. Těmito knihami vyplnil prof. Kadeřávek jedinečným způsobem citelnou mezeru v naší literatuře a ukázal tak široké umělecké veřejnosti podstatu zobrazovacích method a jejich užití v umění. Nesmírně se tak zasloužil o theoretickou výuku našich výtvarníků a poskytl rovněž našim učitelům deskriptivní geometrie na školách vhodnou látkou k aplikaci. Všude ve svých publikacích klade prof. Kadeřávek velký důraz na názornost výkladu.

Třetí druh publikací prof. Kadeřávka jsou jeho články a knížky z historie jednotlivců našeho národního života. Prof. Kadeřávek, jako vzdělavatel Sokola Pražského měl příležitost zamýšlet se nad osudy mnohých našich velkých lidí, nad jejich činností a úspěchy i nezdary. Ukazoval při tom v Sokole bojovnost význačných představitelů českého národa mladým lidem a rozněcoval tak v nich národní uvědomění a hrdost. Tak vznikly články o Fügnerovi, Tyršovi, Mánesovi, o geometru Skuherském atd. a v poslední době knížka *Úvod do dějin rýsování a zobrazovacích method.*

Velikou zásluhou prof. Kadeřávka je, že se stal průkopníkem technicky pojímané deskriptivní geometrie v přednáškách pro České vysoké učení technické, což byl zásah téměř převratný, zejména když před ním se dostávala deskriptivní geometrie na technice pochybnou filosofií Tilšerovou bezmála na zcestí. Schopnost prof. Kadeřávka aplikovat geometrii na technickou praxi je zcela jedinečná, o čemž svědčí na př. nedávná jeho knížka o geometrii v lékařské prothetice (kterou napsal s doc. dr K. Havlíčkem). V poslední době stále pracuje dál v úzkém styku s Klokenerovým výzkumným ústavem (nyní pracovištěm Akademie) v oblíbených plochách stavebně inženýrské praxe, o kterých napsal rovněž knížku, a s odb. asist. dr Procházkou z katedry Geodesie se namáhá, aby staroměstský orloj, o němž říkali staří, že je „klínotem“ města, byl celý opět uveden v chod; podal již příslušný návrh na pohyb staročeské části t. zv. čtyřiadvacítníku, který se dnes nepohybuje.

S mladými spolupracovníky diskutuje prof. Kadeřávek o svých problémech a myšlenkách. Starostlivý o denní život a o práci svých mladších spolupracovníků, dovede jim dávat do budoucí práce víru a optimismus v úspěch a vede je tak dál svojí pečlivou rukou. Můžeme proto říci, že prof. Kadeřávek se dožívá významného jubilea životní práce opravdu milován svými žáky a spolupracovníky zejména pro své dobré vlastnosti lidské.

Bořivoj Kepr, Praha.

SEZNAM PRACÍ PROF. ING. DR FR. KADEŘÁVKA

A. Knihy.

1. Perspektiva, příručka pro architekty, malíře a přátele umění, Praha 1922 (Štenc), stran 109, obr. 96, tab. XXXI.
2. Relief, příručka pro sochaře a architekty, Praha 1925 (Štenc), stran 95, obr. 70.
3. Deskriptivní geometrie, I. díl, Praha, 1929 (JČMF), stran 420, obr. 491. (Společně s *J. Klímou* a *J. Kounovským*); 3. vyd. 1954 (ČSAV).
4. Deskriptivní geometrie, II. díl, Praha, 1932 (JČMF), stran 563, obr. 388. (Společně s *J. Klímou* a *J. Kounovským*); 2. vyd. 1954 (ČSAV).
5. Geometrie a umění v dobách minulých, Praha, 1935 (Štenc), stran 87, obr. 70.
6. Dodatek a úprava II. vydání knihy *J. Klíma* a *K. Šimek*, Kamenořez, Praha, 1950 (Cesta k vědění, sv. 29), stran 100, obr. 82.
7. Technické osvětlení, Praha, 1950, (Cesta k vědění, sv. 55), stran 52, obr. 77.
8. Plochy stavebně inženýrské praxe, Praha, 1950, (Cesta k vědění sv. 58), stran 110, obr. 57, příloh XX.
9. Technická geometrie v lékařství a strojní prothetice. Praha, 1952, (Přírodovědecké nakladatelství), stran 84, obr. 64 (z nich XVI příloh), (společně s *K. Havlíčkem*).
10. Prostorová perspektiva a reliefy, Praha, 1954, (ČSAV), (spolu s *B. Keprem*), stran 74, obr. 81.
11. Úvod do dějin rýsování a zobrazovacích nauk, Praha, 1954, (ČSAV), stran 52, obr. 35.

B. Geometrická pojednání.

1. Zcela elementární důkaz Pelzova rozšíření Dandelinovy věty. Časopis *36* (1907), 44—48.
2. Příspěvek k rotačním plochám druhého stupně, Časopis *39* (1910), 255—258.
3. O zvláštní ploše zborcené, Časopis *40*, (1911), 21—29, 156—162.
4. Stanovení oskulačních hyperbolidů zborcených ploch třetího a čtvrtého stupně, jež lze jim daným bodem vésti. Časopis *40*, (1911), 570—574.
5. O mezi stínu vlastního zborcených ploch šroubových, osvětlených paprsky rovnoběžnými, Rozpravy*), *20* (1911), č. 33, 1—4.

*) Rozpravy II. třídy České akademie věd a umění.

6. Stanovení úvratů eliptické ekvidistanty, Časopis *41*, (1912), 33—35.
7. Příspěvek k sestrojení společné obalové plochy rozvinutelné dvou obecných ploch druhého stupně, Rozpravy *21*, (1912), č. 2, 1—11. (Společně s *B. Procházkou*); německý překlad této práce vyšel v Bulletinu Akademie *21* (1912).
8. Sestrojení kružnic za daných podmínek, Časopis *41*, (1912), 231—234.
9. O ploše rotační vzniklé rotací šroubovice, Časopis, *41*, (1912), 374—379.
10. O isofotách ploch rotačních druhého stupně, Časopis, *42* (1913), 558—560.
11. O ploše vytvořené šroubovicí, vykonávající pohyb šroubový, Časopis, *43*, (1914), 34—38.
12. O isofengách ploch osvětlených geometrálně nebo středově a zobrazených v průmětech rovnoběžných nebo centrálných, Časopis *43*, (1914), 169—181.
13. Příspěvek k theorii hyperboly rovnoosé, Časopis *44*, (1915), 411—415.
14. O kuželosečkových plochách translačních, Časopis *46*, (1917), 32—38, 170—178.
15. O fokálních kružnicích kuželoseček, Časopis *46*, (1917), 65—71.
16. O křivkách čtvrtého stupně rodu I. třídy 8., jakož i jejich reciprokých. Časopis *51*, (1922), 165—167.
17. Dvě drobnosti z úloh deskriptivní geometrie, Časopis *52*, (1923), 56—59.
18. Stanovení kuželoseček, daných vrcholem nebo tečnou vrcholovou, Věstník**) (1931) č. 18, 1—3.
19. O křivosti křivek součtových, Věstník (1937) č. 6, 1—3.
20. Příspěvek ke Steinerově ploše římské, Věstník (1938) č. 21.
21. Zevšeobecnění rotačních ploch, Věstník (1939) č. 17.
22. Příspěvek k ploše vlnovko-vlnovkovité, Věstník (1939) č. 24, 1—3.
23. O součtových plochách čtvrtého stupně, Věstník (1948) č. 4, 1—10.
24. Příspěvek k řešení oválu, Časopis *74*, (1949), D 70— D 72.
25. Příspěvek k nepřímkovým plochám čtvrtého stupně, Věstník (1949) č. 14, 1—6.
26. Příspěvek k normálám kuželoseček a ploch druhého stupně, Časopis *73*, (1948), D 46 až D49.
27. O skupinách ploch, které mají společné charakteristické vlastnosti. Časopis *75*, (1951), 277—282.
28. O Aimondově báni, Časopis *76*, (1951), 195—198.
29. O inversní ploše plochy kruhovo-kruhové a Scheffersovy báně, Věstník (1952) č. 6, 1—6.
30. O plochách se snadno stanovitelnými křivkami největšího spádu vzhledem k dané rovině, Časopis 78, (1953), 341—346.
31. Jednoduchý důkaz vět spojených s větou Pelcovou, Časopis *79*, (1954), 249—251.

C. Ostatní publikace.

1. Jan Sobotka, profesor matematiky na Karlově universitě šedesátníkem, Časopis *51*, (1922).
2. Jindřich Fügner, 1822—1922. K stým narozeninám prvého starosty Pražské tělocvičné Jednoty Sokol. Sborník vydaný maticí Sokola Pražského, 1922. (Spolu s *V. Minaříkem* a *St. Kafkou*).
3. Relief, Časopis Dílo, 1923.
4. Čtvercové sítě a malířství, Cesta k umění roč. I, (1929).
5. Přístroje k sestrojování perspektiv, Cesta k umění roč. II, (1930).

**) Věstník Královské české společnosti nauk, tř. II.

6. O píli starých mistrů, Časopis Dílo, 1930.
7. Neobvyklé perspektivy, Cesta k umění roč. II (1931).
8. Dr Miroslav Tyrš, 1832—1932. K stým narozeninám zakladatele Sokolstva, Československá obec sokolská 1932. (Spolu s *V. Minaříkem* a *St. Kafkou*.)
9. V kolébce Sokolstva, průvodce budovou Sokola Pražského, I. vydání k IX. sletu. (Spolu se *Zd. Bažantem*.)
10. Profesor Rudolf Skuherský. Sokol, časopis pro tělesnou a mravní výchovu, 1933.
11. Profesor Rudolf Skuherský, vzpomínka k sedmdesátému výročí úmrtí. Seznam osob Českého vysokého učení technického v Praze (1933).
12. Náčrt dějin způsobů zobrazovacích, 2. sjezd matematiků zemí slovanských (1934).
13. Daniel Schwenter, autor některých spisů rosekruciánských, Věstník (1935).
14. Kinematické vyšetřování pohybů kloubních, Věstník (1937).
15. Josef Mánes u kolébky Sokolstva. Sokol, časopis pro tělesnou a mravní výchovu (1940).
16. Příspěvek k dějinám knihtisku, Věstník (1941).
17. Úvodní slovo do časopisu Národního musea (1946).
18. V kolébce Sokolstva, 2. značně rozšířené vydání, 1947, k XI. sletu a na paměť 85. výročí založení Jednoty. (Společně se *Zd. Bažantem*.)
19. Významní geometři našeho ústavu, Almanach reálného gymnasia v Praze v Ječné ulici (1948).
20. Příspěvek k národním dějinám deskriptivní geometrie v českých zemích, Věstník (1949).
21. In memoriam Techn. Dr Josefa Kounovského, Časopis 79 (1950).
22. Padesát let práce Pavly Fialové pro Matici Českou, Časopis Národního musea (1953).
23. Rudolf Skuherský jako vysokoškolský učitel. Nejedlého sborník Čs. Akademie věd (1953).

D. Práce neotištěné.

1. Stanovení tečny ke křivce strikční obecné zborcené plochy — 1911, příloha k žádosti o disertaci.
2. Torso článku: Čeští pracovníci v deskriptivní geometrii, pro Tobolkův Das böhmische Volk (1916).

Bořivoj Kepr, Praha.

NÁVŠTĚVY HOSTŮ Z CIZINY

Dne 8. února 1955 přijeli k měsíčnímu studijnímu pobytu do Československa dva vynikající maďarští matematici, členi korespondenti Maďarské akademie věd a doktoři fysikálně matematických věd Ladislaus Rédei a Otto Varga. Jejich návštěva byla uskutečněna v rámci kulturní dohody československo-maďarské. Laureát Kossuthovy ceny L. Rédei je profesorem matematiky na universitě v Segedu (Szeged). Jeho pracovním oborem je theorie čísel a algebra. V matematické obci pražské přednášel dvakrát, a to v pondělí dne 14. února na thema: Nový důkaz Hájosovy věty a v pondělí dne 7. března o zeta funkci v algebře; kromě toho přednášel v úzkém kruhu odborníků o holomorfech okruhů.

Laureát Kossuthovy ceny O. Varga je profesorem matematiky na universitě v Debreceně (Debrecen). Napsal 33 vědeckých prací z oboru geometrie, zabývá se theorií Finslerových prostorů a studiem vlastností Riemannových prostorů. V matematické obci pražské měl dvě přednášky: Základy Riemannovské geometrie (14. února) a O Riemannových prostorech konstantní křivosti (21. února). Na schůzce s odborníky specialisty přednášel o míře křivosti měrné plochy (Eichfläche) Minkovského prostoru.

Oba vědci navštívili také matematiky v Brně a v Bratislavě, kde přednesli vědecké referáty.

Za jejich pobytu byly navázány četné osobní styky a přátelství; oba maďarští hosté se seznámili s prací našich matematiků, poznali řadu mladých pracovníků i prostředí, v kterém působí. Byla jim dána také příležitost poznat kulturní život v našich zemích. Sami se účastnili diskusí a vědeckých rozhovorů v menších kroužcích specialistů, kde došlo k bohaté výměně zkušeností. To přineslo užitek zejména našim mladším vědeckým pracovníkům.

Jejich návštěva znamená posílení vzájemných styků mezi matematiky československými a maďarskými.

Obsah přednášek prof. L. Rédeie a prof. O. Vargy, které přednesli v Československu, přineseme v příštím čísle Časopisu. *J. N.*

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

21. 2. 1955: *Otto Varga,* O Riemannových prostorech konstantní křivosti.

23. 2. 1955: *Antonín Špaček,* Referát o druhé konferenci o stochastických procesech, konané ve dnech 28. až 30. XII. 1954 ve Wroclavi.

5. 3. 1955: *László Rédei,* Theorie holomorfu pro okruhy.

7. 3. 1955: *László Rédei,* O ζ-funkci v algebře.

14. 3. 1955: *Jaroslav Kurzweil,* O stabilitě pohybu. Viz referát na str. 359.

21. 3. 1955: *Eduard Čech,* Guido Fubini a projektivní diferenciální geometrie.

28. 3. 1955: *Vojtěch Jarník,* O použití Hausdorffovy míry v aritmetice. Viz referát na str. 361.

6. 4. 1955: *Václav Dupač,* Numerické metody početní založené na počtu pravděpodobnosti.

18. 4. 1955: *Miroslav Fiedler,* Numerické řešení algebraických rovnic.

25. 4. 1955: Slavnostní schůze věnovaná 200. výročí založení Lomonosovovy university. Přednášeli: *Eduard Čech, Miroslav Katětov, Vladimír Kořínek* a *Vojtěch Jarník.*

Redakce.

ČINNOST BRNĚNSKÉHO ODBORU JČMF

Brněnský odbor JČMF pokračoval ve své činnosti pravidelnými čtvrtečními přednáškami a diskusemi.

Konaly se tyto přednášky:

9. 12. 1954: *K. Koutský,* Několik pohledů na vývoj sovětské matematiky.
1. 3. 1955: *O. Varga,* O diferenciálních invariantech theorie ploch.
17. 3. 1955: *M. Novotný,* O Banachových prostorech.
7. 4. 1955: *F. Nožička,* Užití theorie polyedrů na problém minimální sítě.

V rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků", které se konají pravidelně každý čtvrtek, byly předneseny tyto referáty:

2. 12. 1954: *M. Zlámal,* O charakteristickém determinantu okrajových problémů.
9. 12. 1954: *M. Novotný,* Poznámky o representaci částečně uspořádaných množin.

16. 12. 1954: *F. Šik*, Polarita a její užití v theorii grup.

10. 2. 1955: *M. Ráb*, Asymptotické vlastnosti integrálů dif. lin. rovnice 3. řádu.

24. 2. 1955: *V. Kudláček*, O svazově uspořádaných grupoidech.

10. 3. 1955: *K. Svoboda*, O jistých plochách v pětirozměrném prostoru.

17. 3. 1955: *J. Kopřiva*, Fareyovy zlomky v theorii čísel.

24. 3. 1955: *M. Sekanina*, Skoroperiodické funkce a representace grup.

31. 3. 1955: *K. Opluštil*, Množiny s dvěma algebraickými operacemi charakterisujícími sčítání a násobení transfinitních ordinálních čísel.

7. 4. 1955: *E. Barvínek*, Odhad chyby při výpočtu úplného eliptického integrálu prvního druhu.

14. 4. 1955: *V. Horák*, O jedné metodě užívané při výpočtu hodnot komplexních kořenů algebraické rovnice.

M. Zlámal, Brno

OBĚŽNÍK VÝBORU JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

Jednota československých matematiků a fysiků rozesílá svým členům a zájemcům tento oběžník:

Vážení soudruzi, obracíme se ke všem dosavadním členům jakož i k ostatním vědeckým a odborným pracovníkům v oborech matematiky, fysiky a věd příbuzných, abychom podali stručnou zprávu o činnosti *Jednoty československých matematiků a fysiků* v uplynulém období a o plánech na její další práci v rámci nového organisačního začlenění v kulturním životě naší republiky.

Jak známo byla JČMF v dřívějších dobách a zejména za první republiky významnou odbornou společností s velmi starou tradicí (založena r. 1862), která sdružovala vědecké pracovníky a učitele a studenty středních a vysokých škol, aby se hlavně methodami svépomoci starala o rozvoj věd matematických a fysikálních a o dobrou úroveň jejich vyučování. Pro plnění tohoto úkolu podařilo se postupně vybudovat vlastní hospodářskou základnu, kterou v posledních předválečných letech tvořilo zejména nakladatelství JČMF, které vydávalo středoškolské a vysokoškolské učebnice, vědecké monografie a popularisační literaturu, a dílna pro výrobu vědeckých pomůcek pod názvem Fysma. Finanční prostředky plynoucí z této hospodářské činnosti nebyly ziskem jednotlivců, nýbrž JČMF. JČMF je použila na konkretní plnění svého úkolu v několika směrech.

Tak vydávala Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, který nejen že důstojně representoval naši vědu na mezinárodním foru, ale byl též velmi významným činitelem v domácím vědeckém životě a ve vyučování. Vedle toho JČMF vydávala Rozhledy matematicko-přírodovědecké, které zejména zvyšovaly zájem žáků středních škol o matematiku a fysiku a pomáhaly vyučování na středních školách. Nízká prodejní cena těchto časopisů byla tehdy nutnou podmínkou jejich rozšíření a byla právě umožněna tím, že JČMF užívala uvedených finančních prostředků na krytí schodku časopisů.

Neméně důležité pro rozvoj naší vědy a vyučování bylo vydávání speciálních vědeckých děl našich vědeckých pracovníků v českém jazyce, což vzhledem k poměrně malému okruhu zájemců vyžadovalo rovněž subvencování z vlastních prostředků JČMF.

Vedle toho mohla JČMF vybudovat i významné odborné vědecké knihovny zejména v Praze (přes 10 000 svazků) a v Brně, které byly velkou pomocí při vědecké a pedagogické práci jejich členů.

Za okupace zůstala JČMF organisačním střediskem všech vlasteneckých matematiků a fysiků a na její půdě byla tajně organisována na př. studijní pomoc studentům zavřených vysokých škol a práce na přípravě vysokých škol pro období po skončení války.

Po osvobození naší vlasti Rudou armádou a tím umožněné změny kapitalistického státního zřízení ve zřízení lidově demokratické, jehož cílem je vybudování socialismu, počala se měnit i úloha JČMF v našem kulturním životě. Řadu funkcí zajišťovaných dosud svépomocně JČMF přejímal na sebe stát a socialistický výrobní sektor našeho nového národního hospodářství. Tak i nakladatelství JČMF bylo nejdříve změněno na Přírodovědecké nakladatelství s širším publikačním programem a konečně v r. 1953 se stalo jednou z hlavních složek, z nichž bylo utvořeno nakladatelství nové vrcholné vědecké instituce naší republiky, Československé akademie věd. Rovněž výrobny Fysmy vplynuly do příslušných národních podniků.

JČMF věrna svým pokrokovým tradicím, nejen že tyto změny podporovala a usnadňovala, ale usnesením své valné schůze ze dne 11. dubna 1951 věnovala svůj domovní majetek v Praze II, Žitná 25 státu pro účely tehdy připravované Československé akademie věd a zvláště pro potřeby jejího Matematického ústavu a rovněž svou pražskou knihovnu věnovala Matematickému ústavu ČSAV s tím, že členové JČMF jí budou moci dále užívat a že též ve věnovaném domě budou JČMF poskytnuty místnosti potřebné pro její činnost.

Zřízením ČSAV dostalo se dříve netušeným perspektivám rozvoje vědecké práce konkretní organisační základny a stalo se jasným, že další činnost JČMF bude vhodné rozvíjet právě v úzké součinnosti s ČSAV, která mezitím přejala plnění některých dřívějších úkolů na úseku věd, o něž dosud pečovala hlavně JČMF.

Tak zejména dřívější Časopis pro pěstování matematiky a fysiky se stal časopisem ČSAV a se zvětšením jeho rozsahu bylo nutno řešit otázku jeho rozdělení. Dnes tedy vychází *Čechoslovackij matematičeskij žurnal*, jako časopis mezinárodní, a domácí *Časopis pro pěstování matematiky*. Obdobně vycházejí dva fysikální časopisy, mezinárodní *Čechoslovackij fisičeskij žurnal* a domácí *Časopis pro fysiku*, jež všechny jsou pokračováním starého časopisu. Rovněž další vydávání *Rozhledů matematicko-přírodovědeckých* převzalo nakladatelství ČSAV.

Základní důležitost vědy při budování socialismu a zvlášť závažná úloha matematiky a fysiky s vědami příbuznými pro rozvoj technických věd a techniky vůbec nyní vyžaduje, aby tyto vědy byly dále co nejvíce rozvíjeny, aby se jejich vyučování stalo jednou z nejdůležitějších a nejúčinnějších složek výchovy nových generací a aby se nové vědecké poznatky stávaly co nejrychleji majetkem širokých kruhů pracovníků a s jejich pomocí pak nejen základem zvyšování techniky, ale i rozkvětu kultury.

V rámci těchto velkých úkolů stává se i další činnost JČMF, jakožto dobrovolné nestavovské organisace, sdružující vědecké a odborné pracovníky, učitele a vyspělejší žáky, nejen ještě mnohem potřebnější než dříve, nýbrž zcela nutnou. Právě nyní, zbavena podstatné části hospodářsko-organisačních starostí, bude se moci JČMF lépe soustředit na plnění uvedených hlavních úkolů v harmonické součinnosti s ostatními organisacemi a orgány k tomu povolanými.

Nové postavení JČMF je charakterisováno též tím, že se stává vědeckou výběrovou společností přidruženou k ČSAV, která bude nadále sdružovat vědecké a odborné pracovníky v oborech matematiky, fysiky, astronomie, geofysiky, meteorologie, geodesie, fotogrammetrie, vědecké fotografie a v oborech příbuzných věd užitých, ať již pracují ve vědeckovýzkumných ústavech nebo ve vývojových či zkušebních zařízeních výrobních, ať na školách vysokých nebo na jedenáctiletkách, či jsou studenty těchto oborů.

V současné době se jedná o změnu dosavadních stanov JČMF tak, aby její nový organisační řád byl dobrou základnou pro uskutečnění aktivní účasti pracovníků nejen ve velikých městských centrech, ale i na všech ostatních pracovištích. Připravuje se též valná schůze JČMF, která též určí konkretnější úkoly a směrnice pro nejbližší dobu.

Následkem toho, že řídící orgány JČMF byly v poslední době zaujaty hlavně prováděním shora uvedených hlubokých změn ve struktuře a činnosti JČMF, došlo k přechodnému zeslabení spolkové organisační a odborné práce a styku s členstvem, jehož řady nebyly též po jistou dobu doplňovány. Po provedení změn a po vyjasnění další perspektivy činnosti JČMF nastala nyní doba, kdy je třeba organisační a odbornou činnost JČMF nejen opět obnoviti, ale ještě bohatěji rozvinouti.

Dosavadní výbor JČMF, jemuž připadá úkol připraviti pracovní plán, jenž by byl přijat jako nový program JČMF, obrací se tedy touto cestou na své členy a na všechny vědecké a odborné pracovníky ve shora uvedených oborech, kteří se chtějí práce v JČMF zúčastniti s výzvou, aby pomohli při přípravě tohoto pracovního plánu svými návrhy a podněty.

Domníváme se, že hlavními úseky odborné práce, jimž má JČMF svými organisačními opatřeními pomáhat, jsou za současné situace stejně tvůrčí vědecká práce jako práce pedagogická.

Poměry v jednotlivých speciálních oborech a na různých pracovištích jsou však dost rozmanité. JČMF by tedy měla svou práci přizpůsobit co nejvíce různým potřebám z těchto poměrů vyplývajícím. Proto bude pro vypracování co nejlepšího a nejreálnějšího plánu práce užitečné, když nám sdělíte také své konkretní potřeby jak ve vyučování tak ve vědecko-výzkumné práci, jež by JČMF mohla aspoň z části uspokojit.

Jde tu zejména o pořádání vědeckých přednášek, diskusí a pracovních konferencí v určitých vědních oborech nebo k určitým závažným otázkám, o organisaci pomoci učitelům na školách ve spolupráci se školskými úřady a s institucemi, na př. realisováním seminářů o nových učebních osnovách a učebnicích na osmiletých a jedenáctiletých středních školách, aby se usnadnilo správné vyučování podle nich, o seznamování učitelů a jiných odborných pracovníků s nejnovějšími vědeckými poznatky a názory, o vydávání kritických přehledů současně vydávané odborné literatury a pod. Jsme dále přesvědčeni, že bude třeba vydávat spolkový Věstník pro informaci členů, že JČMF by se měla postarati, aby na př. Rozhledy se opět staly časopisem pro podněcování zájmu pro fysiku a matematiku mezi žactvem a pod. Budeme rádi, když se předběžně vyslovíte i k takovým otázkám a navrhnete další vhodná opatření.

Jsme přesvědčeni, že s Vaší pomocí se nám podaří vytvořit z JČMF středisko živé vědecké a pedagogické práce, jež bude spojovat nejvyšší náš vědecký orgán, Československou akademii věd, se všemi vědeckými, pedagogickými a odbornými pracovníky v matematice, fysice a vědách příbuzných a bude tak podstatně napomáhat rozvoji vědy a jejího spojení s praxí v zájmu účinné účasti na úsilí československého pracujícího lidu o socialistickou výstavbu republiky.

Výbor Jednoty československých matematiků a fysiků.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova 40, telefon 246241-8. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. Novinové výplatné povoleno Okrskovým poštovním úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Vyšlo dne 31. VIII. 1955.
D-00647.