Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O JEDNÉ ZÁKLADNÍ VĚTĚ MATEMATICKÉ LOGIKY

LADISLAV RIEGER, Praha.

(Došlo dne 26. července 1954.)

DT : 517.11

V práci je především novým, poměrně jednoduchým způsobem dokázána hlavní věta o t. zv. zobecněných Booleových σ-algebrách. Tato věta je algebraickým jádrem známé Lindenbaumovy věty z oblasti matematické logiky. Dále je ukázáno, že věty Gödelova (o úplnosti nižšího predikátového počtu) a Löwenheim-Skolemova jsou důsledkem hlavní věty. Autor se též zmiňuje o možné souvislosti mezi Lindenbaumovou algebrou, Cantorovým diskontinuem a jistým problémem theorie pravděpodobnosti. V závěru jsou srovnány různé dosud známé methody důkazu Gödelovy věty a ostatních zmíněných vět.

1. Úvodní poznámka

Za jednu ze základních vět (klasické) matematické logiky je třeba považovat tuto t. zv. LINDENBAUMOVU větu:[1])

Každá bezesporná teorie,[2]) *vyjadřitelná v symbolech nižšího predikátového počtu, dá se rozšířit v t. zv. úplnou bezespornou teorii, t. j. takovou, že každá její věta mající smysl je buďto dokazatelnou poučkou teorie, nebo je dokazatelnou poučkou teorie její opak.*

Z této věty totiž snadno plyne na př. GÖDELOVA věta o úplnosti nižšího predikátového počtu a SKOLEMOVA-LOWENHEIMOVA věta o existenci spočetného modelu každé elementární (t. j. v symbolech nižšího predikátového počtu vyjadřitelné) bezesporné teorie — a to v nejobecnějším znění.

Za matematické jádro Lindenbaumovy věty je třeba považovat jistou jednoduše znějící poučku z teorie Booleových algeber, kterou v dalším sformulujeme a dokážeme. Obecně matematická důležitost takto formulované Lindenbaumovy poučky je zdůrazněna m. j. i tím, že z ní lze poměrně snadno odvodit obě základní věty z teorie spočetně aditivních Booleových algeber (σ-algeber), totiž:

[1]) Viz na př. práce A. TARSKI [1] a [2]. — ALFRED LINDENBAUM byl mladý nadaný polský matematik a logik, zavražděný nacisty za okupace Polska.

[2]) Pojem „teorie" bude definován níže.

1. t. zv. LOOMISOVU větu o tom, že každá σ-algebra je homomorfním obrazem množinového σ-tělesa, a

2. větu o volnosti σ-tělesa borelovských množin CANTOROVA diskontinua.[3]) [Booleova σ-algebra se nazývá volnou, lze-li ji vytvořit z takové množiny jejích prvků, že platí: Každé zobrazení množiny těchto prvků (t. zv. volných generátorů) do libovolné σ-algebry se dá rozšířit v homomorfní zobrazení (celé této t. zv. volné σ-algebry do dané σ-algebry.)]

Tím spíše, že v monografiích a učebnicích matematické logiky bývá Lindenbaumova věta jakož i Gödelova věta o úplnosti nižšího predikátového počtu dokazována s nepodstatnými (nealgebraickými) komplikacemi, danými symbolikou predikátového počtu[4]) a zbytečnou komplikovaností několikanásobné indukce, nebude snad na škodu podat v této práci poměrně stručný algebraický důkaz. Je třeba ovšem říci, že základní myšlenka induktivní konstrukce v důkazu užité není zcela nová. Její kořeny sahají do metody důkazů t. zv. ε-teoremů HILBERTOVY teorie důkazů;[5]) mnohem později se tato myšlenka objevuje v důkazu Gödelovy věty od L. HENKINA [6].

Budu v dalším užívat označení a pojmů, běžných v teorii svazů, resp. Booleových algeber. K tomu viz na př. kap. X monografie G. BIRKHOFF, *Lattice Theory* (2. vyd.), po př. v ruském překladu (*Těorija struktur*, zkr. [St]).

Definice 1. Říkáme, že Booleova algebra A je *Φ-algebra* (to jest zobecněná σ-algebra vzhledem k rodině Φ posloupností prvků, pro něž jsou definována suprema a infima), jestliže je dána rodina Φ posloupností prvků z A o těchto čtyřech vlastnostech:

(i) *(Pravidlo doplňků):*

Když $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak i $\{a'_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$.

(ii) *(Pravidlo sjednocení):*

Když $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak i $\{a \cup a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ pro každý prvek $a \in A$.

(iii) *(Pravidlo triviálních posloupností):*

Každá posloupnost, jejíž členové od jistého počínajíc jsou stále stejní, patří do Φ.

(iv) *(Pravidlo suprema):* Je-li $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak existuje prvek $\bar{a} = \sup\limits_{k=1,2,\ldots} a_k \in A$ ve smyslu polouspořádání algebry A. Píšeme $\bar{a} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Důsledky definice 1: Je-li $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak existuje ve Φ-algebře A prvek $\underline{a} = \inf\limits_{k=1,2,\ldots} a_k$. — Píšeme $\underline{a} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

[3]) Tuto větu dokázal autor v práci [3]. Jiný důkaz podal nedávno LOOMIS.

[4]) Tak na př. v nedávné monografii [4] zaujímá důkaz Lindenbaumovy věty a Gödelovy věty o úplnosti plných 15 stránek.

[5]) Srov. HILBERT-BERNAYS [5], II. díl.

Důkaz plyne z (i) a (iv) a z t. zv. *Morganových identit*

$$(\sup_{k=1,2,\dots} a_k)' = \inf_{k=1,2,\dots} a'_k\,,\quad (\inf_{k=1,2,\dots} a_k)' = \sup_{k=1,2,\dots} a'_k\,,$$

které platí vždy, jakmile jedna strana má smysl (viz [St]).

Je-li $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak $\{a \cap a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ pro každé pevné $a \in A$. — Důkaz plyne z předchozího a z (i) a (ii).

Obecné distributivní identity: Platí vždy

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (a \cup a_k) = a \cup (\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k) \text{ —}$$

a duálně, jakmile jen aspoň jedna strana má smysl. — Důkaz viz [St], X, § 10.

Právě uvedených vět budeme v dalším užívat bez citace.

Zřejmě každá σ-algebra je i Φ-algebrou vzhledem k rodině Φ všech posloupností prvků algebry vůbec. Méně triviálním příkladem Φ-algebry je těleso všech borelovských množin, patřících do tříd konečných indexů libovolného topologického prostoru; zde Φ je rodina všech posloupností množin s ohraničenými indexy tříd (v jedné posloupnosti). V matematické logice je základní důležitosti t. zv. *Lindenbaumova Φ-algebra* nižšího predikátového počtu, která bude definována níže:

Definice 2. *Říkáme, že neprázdná množina I prvků Φ-algebry A je Φ-ideálem, jestliže platí:*

(0) $I \neq A$.

(1) *Jakmile $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi$ a $a_i \in I$ pro každé $i = 1, 2, \dots$, potom $\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i \in I$.*

(2) *Jakmile $a \subseteq b$, $a \in I$, pak $b \in I$.*

Říkáme, že Φ-ideál P je Φ-prvoideálem, jestliže ještě platí:

(3) *Jakmile $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi$ a $\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \in I$, potom je $a_j \in I$ pro vhodné $i = j$.*

Jasné je, že každý Φ-ideál je (obyčejný) ideál a že Φ-prvoideál je (obyčejný) prvoideál. (Srov. [St], X, § 6.) To zaručuje pravidlo (iii) v definici 1.

Snadno dokážeme tuto *větu: Φ-ideál P je Φ-prvoideálem tehdy a jen tehdy, když z každých dvou prvků a a a' algebry jeden* (a ovšem vzhledem k (0), (1), (2) v definici 2 a k (iii) v definici 1 jen jeden) *prvek leží v P.*

Nutnost podmínky je vzhledem k $a \cup a' = 1 \in P$ a k (iii) v definici 1 podle (3) v definici 2 zřejmá.

Postačitelnost:

Nechť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi$ a $\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \in P$. Nechť naše podmínka nepostačuje, t. j. jest a_i non $\in P$ pro $i = 1, 2, \dots$ přesto, že je splněna. Protože z každé dvojice prvků a_i a a'_i jeden patří do P vzhledem k $a_i \cup a_i' = 1 \in P$, je $a'_i \in P$ pro $i = 1, 2, \dots$;

což dává spor s (0), poněvadž $\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i' = (\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i)' \in P$ (podle (1) v definici 2 a (iii) v definici 1).

I této věty v dalším použijeme bez citace.

2. Lindenbaumova věta

Pomocná věta. *Je-li I nějaký Φ-ideál Φ-algebry A, $b \in A$ pevný prvek takový, že není $a \cap b = 0$ ani pro jedno $a \in I$, pak množina $\tilde{I}$ všech $y \in A$, splňujících $a \cap b \subseteq y$ při vhodném $a \in I$ je Φ-ideál v A, obsahující jak daný ideál I tak i prvek b.*

Důkaz. Protože (0) a (2) z definice 2 jsou zřejmě splněny, dokažme (1).

Nechť tedy $\{y_s\}_{s=1}^{\infty} \in \Phi$, $y_s \in \tilde{I}$ pro $s = 1, 2, \ldots$ Pak ke každému členu y_s existuje $a_s \in I$ tak, že je $a_s \cap b \subseteq y_s$. Spojením s prvkem $b' \in A$ na obou stranách dostáváme podle distributivního zákona $a_s \cup b' \subseteq y_s \cup b'$. Protože $a_s \cup b' \in I$, je i $y_s \cup b' \in I$. Tedy je i $\bigcap_{s=1}^{\infty} (y_s \cup b') = b' \cup \bigcap_{s=1}^{\infty} y_s \in I$ — opět podle distributivní identity. Podle definice $\tilde{I}$ bude však

$$b \cap (b' \cup \bigcap_{s=1}^{\infty} y_s) = b \cap \bigcap_{s=1}^{\infty} y_s \in \tilde{I}\,.$$

Tím spíše tedy $\bigcap_{s=1}^{\infty} y_s \in \tilde{I}$, c. b. d.

Hlavní věta. *Budiž A Φ-algebra se spočetnou rodinou Φ. Budiž I daný Φ-ideál v A. — Pak existuje Φ-prvoideál P v A obsahující I.*

Poznámka. Podle (iii) v definici 1 je sama algebra A spočetná.

Předpoklad spočetnosti Φ-algebry může být (za vhodné modifikace definice 1) snadno odstraněn (my to však nepotřebujeme). Naproti tomu předpoklad spočetnosti rodiny Φ odstraněn být nemůže, neboť není těžké udat příklady dokonce spočetných σ-algeber, v nichž věta neplatí.

Důkaz. Označme jako $\{a_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost, sestavenou ze všech posloupností rodiny Φ ($i = 1, 2, \ldots$ je tedy index posloupnosti, $k = 1, 2, \ldots$ index jejího členu). Pro formální zjednodušení můžeme (vzhledem k (iii) v definici 1) předpokládat, že posloupnost samých nul je první.

Sestrojme induktivně stoupající řetězec Φ-ideálů

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$$

vesměs obsahujících daný Φ-ideál I tak, že Φ-ideál I_n splňuje tuto podmínku (p, n):

Je-li $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^i \in I_n$ a $i \leq n$, potom je již i $a_j^i \in I_n$ pro vhodné přirozené číslo j.

Položme $I_1 = I$; pak podmínka $(p, 1)$ pro I_1 je splněna triviálně, protože $a_k^1 = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$

Nechť je již udán r-tý člen řetězce $\{I_n\}$, splňující (p, r).

Pak existenci I_{r+1} zaručíme takto:

V případě **A**), že ku I_r neexistuje Φ-nadideál, který by obsahoval prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1} \in A$, položme $I_r = I_{r+1}$; pak ovšem I_{r+1} splňuje $(p, r+1)$. V opačném případě **A'**), že totiž existuje Φ-ideál obsahující jak prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1}$, tak i ideál I_r, dokažme, že pak již existuje i Φ-ideál I_{r+1}, který obsahuje I_r a vhodný prvek a_j^{r+1} (člen posloupnosti $\{a_k^{r+1}\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$).

Dejme tomu, že by naopak takový Φ-ideál I_{r+1} neexistoval. To dle naší shora uvedené pomocné věty znamená, že ke každému prvku a_k^{r+1} $(k = 1, 2, \ldots)$ musí existovat prvek $b_k \in I_r$ takový, že je $a_k^{r+1} \cap b_k = 0$. Ale pak je $b_k \subseteq (a_k^{r+1})'$ pro každé $k = 1, 2, \ldots$, t. j. $(a_k^{r+1})' \in I_r$ pro každé $k = 1, 2, \ldots$ Tedy — protože I_r je Φ-ideál —je $\bigcap_{k=1}^{\infty} (a_k^{r+1})' = (\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1})' \in I_r$. To však je ve sporu s předpokládanou rozšiřitelností Φ-ideálu I_r ve Φ-nadideál, obsahující prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1}$ (případ **A'**)). Tím je pokračování našeho řetězce Φ-ideálů zaručeno. Není totiž těžké si ověřit splnění vlastnosti $(p, r+1)$ pro kterýkoli Φ-ideál I_{r+1} právě vyznačený případem **A'**).

Neboť je-li $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^i \in I_{r+1}$ pro nějaké $i \leqq r$, potom to znamená, že v i-tém kroku konstrukce našeho řetězce nastal případ **A'**), takže je $a_j^i \in I_i \subseteq I_{r+1}$ při vhodném j; pro $i = r + 1$ jsme však potřebné právě zařídili.

Utvořme nyní množinové sjednocení $P = \sum_{r=1}^{\infty} I_r$.

Dokážeme, že P je hledaným Φ-prvoideálem nad I.

Snadno nejprve nahlížíme, že P je (obyčejný) ideál, zvláště pak že neobsahuje nulu (požadavek (0) definice 2, a požadavek (2) definice 2).

Z konstrukce však bezprostředně plyne, že je splněn i požadavek (3) definice 2, neboť je-li $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^j \in P$, pak je $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^j \in I_n$ při vhodném n. Poněvadž tedy v j-tém kroku konstrukce nastal případ **A'**),[5]) bude $a_s^i \in I_j$ při vhodném s, tedy $a_s^j \in P$.

Dokažme konečně, že P má i vlastnost (1) z definice 2.

Kdyby tomu tak nebylo, měli bychom posloupnost $\{a_k^i\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ při vhodném i takovou, že by sice bylo $a_k^i \in P$ pro každé $k = 1, 2, \ldots$, ale prvek $\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i$ by neležel v P.

---

[5]) I_n je Φ-ideál!

Protože však je — jak vlastně již víme — P obyčejným prvoideálem, patřil by následkem $(\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i) \cup (\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i)' = 1 \in P$ prvek $(\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i)' = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^i)'$ do P.

Tedy prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^i)'$ patří i do jistého I_r. Avšak poněvadž I_r je Φ-ideál a protože (dle vlastnosti (i) v definici 1) je $\{a_k^j\}_{k=1}^{\infty} = \{(a_k^i)'\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ při vhodném j, je již také následkem naší konstrukce $(a_k^i)' \in I_j$ pro toto j a pro vhodné k. Tedy je i $(a_k^i)' \in P$. To však je ve sporu s předpokládaným $a_k^i \in P$.

Tím je naše hlavní věta úplně dokázána.

Poznámky k důkazu. Existence nadprvoideálu k danému ideálu se v abstraktní algebře — pokud jde o obyčejné konečné operace — dokazuje zpravidla takto: Postupně se rozšiřuje daný ideál přidáváním prvků a sjednocováním přes stoupající řetězec nadideálů se obdrží maximální ideál, který je hledaným nadprvoideálem. (Odvoláme-li se na t. zv. ZORNOVO lemma, nemusíme ani tuto běžnou konstrukci provádět.) Takovým způsobem se postupuje na př. v teorii okruhů, v teorii svazů a v teorii pologrup.

Tato prostá metoda zde selhává, neboť sjednocení přes nekonečný řetězec stoupajících Φ-ideálů již nemusí být Φ-ideál a při případném doplňování ve Φ-ideál narazíme na nulu.

Dá se však ukázat, že obyčejné prvoideály ve Φ-algebře, které by nebyly Φ-prvoideály, jsou „poměrně vzácné" v tomto smyslu: Považujeme-li prvoideály dané Φ-algebry za body STONEOVA[6]) representujícího prostoru, pak naše algebra je (ve smyslu konečných operací) isomorfní s množinovým tělesem obojetných (t. j. současně otevřených i uzavřených) množin tohoto prostoru. Ukazuje se, že množina všech prvoideálů, obsahujících daný ideál, představuje ve Stoneově representujícím prostoru otevřenou bodovou množinu. Naproti tomu množina všech prvoideálů, které nejsou Φ-prvoideály, tvoří v tomto prostoru množinu první kategorie. Protože ve Stoneově prostoru jakožto v bikompaktním nuladimensionálním prostoru platí BAIREOVA věta o kategorii, nemohou všechny nadprvoideály k danému Φ-ideálu nebýt Φ-prvoideály.

Na tom lze založit jak „topologický" důkaz Lindenbaumovy věty (a Gödelovy věty o úplnosti jakož i věty Skolemovy-Löwenheimovy) tak i důkaz Loomisovy věty; to učinili Sikorski v práci [7] a RASIOWA a SIKORSKI v práci [8].

3. Lindenbaumova algebra.

Přistupme nyní k aplikacím naší hlavní věty na matematickou logiku; mějme přitom pro určitost na mysli systém predikátového počtu HILBERTA-ACKERMANNA (viz [9]). — Popišme povšechně tento systém.

[6]) Viz [St] XI, § 3.

T. zv. *základními výrazy* predikátového počtu jsou výrazy $P(x)$, $Q(y)$, ..., $R(x, y)$, ..., $S(x, y, z)$, ... (ve spočetném počtu). Zde písmena $x, y, z, \ldots$ po případě s indexy jsou t. zv. *individuové proměnné* a mohou nabýt významu libovolných prvků libovolně předepsané množiny (t. zv. oboru individuí). $P(.)$, $Q(.)$, ..., $R(r)$ ... jsou t. zv. *predikátové proměnné*, které pak již nabývají významu libovolných (případně ovšem i pevných) vlastností individuí a dvojčlenných a obecně n-členných relací mezi nimi.[7])

Pojem (větného) *výrazu* vůbec je pak definován induktivně za pomoci *logických částic* $\vee$ (nebo, vel), $\sim$ (nikoli), $\exists$ (existuje, malý kvantor), ( ) (každý, velký kvantor) takto:

a) základní výrazy jsou výrazy;

b) jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ výrazy, pak výrazy tvaru $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\sim \mathfrak{A}$, $\exists\, x\, \mathfrak{A}$, $\exists\, y\, \mathfrak{B}, \ldots$; $(x)\, \mathfrak{A}$, $(y)\, \mathfrak{B}, \ldots$ (t. j. přesněji naznačené trojice, dvojice a trojice výrazů) jsou také výrazy. — Ve výrazech posledního druhu je — jak se říká — individuová proměnná $x, y, \ldots$ vázána; jinak je volná.[8])

Je jasné, že jestliže každý ze základních výrazů tvaru $T_k(x_l, x_m, \ldots, x_t)$ obdržel význam jednoduché věty, pravící, že mezi individui $x_l, x_m, \ldots, x_t$ je příslušný, k-tou n-člennou predikátovou proměnnou označený n-členný vztah, potom i složené výrazy obdrží jednoznačně význam odpovídajících složených vět. (Symbolika predikátového počtu byla totiž právě tak zvolena, aby přesný a „normovaným" způsobem vystihovala logické kombinování jednodušších vět a výstavbu složených vět.[9]))

Vlastním smyslem predikátového počtu je — jak známo — rekurentně sestrojit zvláštní třídu výrazů, totiž t. zv. *formulí* predikátového počtu; to musí být toliko výrazy, které v každém myslitelném významu budou pravdivými větami, to jest větami pravdivými z „ryze logických důvodů"[10]) (má-li totiž

---

[7]) Striktně vzato lze výrazy $P(x)$, ..., $S(x, y, z)$, ... samotné (bez ohledu na jejich užití čili interpretaci) prostě považovat za $n + 1$-tice přirozených čísel, kde na prvních n místech jsou čísla předem jednou pro vždy očíslovaných individuových proměnných tak, jak v základním výrazu jdou za sebou, na posledním $n + 1$-tém místě je číslo n-členné ve výrazu figurující predikátové proměnné — opět vzhledem k pevnému předem danému očíslování všech n-členných predikátových proměnných. Můžeme však zavést: (spočetně mnoho) t. zv. *individuových konstant* (na př. číslovek) za příslušné modifikace odvozovacích pravidel. — Pak můžeme (ale nemusíme) v předpokladech i tvrzení *Lindenbaumovy věty* nahradit *bezespornost* silnější t. zv. ω — *bezespornosti* (viz [5]) — beze změny matematického substrátu.

[8]) Nevyskytuje-li se individuová proměnná, na př. x, v $\mathfrak{A}$ vůbec nebo je-li tam již vázána, jde ve výraze $\exists\, x\, \mathfrak{A}$ či $(x)\, \mathfrak{A}$ o t. zv. fiktivní vazbu.

[9]) Že tomu tak skutečně je, to se ovšem nedá dokázat, nýbrž jen ověřit.

[10]) Je třeba zdůraznit, že úkolem matematické logiky není samo zkoumání pojmu pravdivosti matematických pouček, což patří do filosofie matematiky. (Filosofie matematiky musí ovšem respektovat výsledky matematické logiky.) V matematické logice může jít toliko o známá pravidla, dle nichž je určena pravdivost, resp. nepravdivost složené věty, jestliže je známa pravdivost a nepravdivost vět jednodušších. Pouze v tomto smyslu se hovoří o „ryze logicky pravdivých" výrazech jako o složených výrazech, které se stávají „identicky pravdivými" bez ohledu na pravdivost jejich součástí.

predikátový počet dát to co chceme). Jestliže pak třída formulí je totožná s třídou vždy pravdivých výrazů, říkáme, že predikátový počet je *úplný*.

Sestrojení třídy formulí se děje v zásadě takto:[11])

Jisté konkretní výrazy, po případě celá třída výrazů přesně popsaného tvaru se prohlásí za t. zv. *axiomy*, čili *výchozí formule*. (Na př. $\sim \mathfrak{A} \vee \exists\, x\, \mathfrak{A}$.)

Dále se udají (pouhým popisem tvaru zúčastněných výrazů) jistá pravidla, dle nichž z toho, že jisté výrazy byly již zařazeny mezi formule, již plyne, že jiné třeba rovněž zařadit mezi formule. (Typickým a skoro ve všech systémech vystupujícím pravidlem tohoto druhu t. zv. *modus ponens*, t. j. pravidlo pravící, že když $\mathfrak{A}$ i $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ jsou formule, potom i $\mathfrak{B}$ musí být formule.)

Majíce takto induktivně definovanou třídu formulí zaveďme nyní takovýto vztah mezi všechny výrazy:

$$\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \quad (\mathfrak{A} \text{ je } \textit{ekvivalentní} \text{ s } \mathfrak{B}),$$

jestliže výrazy $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ jakož i $\sim \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$ jsou formule.

Není těžké dokázat (viz Hilbert-Ackermann [9], nebo Hilbert-BERNAYS [5]) především, že relace $\Leftrightarrow$ mezi výrazy je rovnost.

Dále ze známých základních pouček teorie predikátového počtu snadno plyne, že třídy $[\mathfrak{A}], [\mathfrak{B}], [\mathfrak{C}], \ldots$ vzájemně rovných výrazů tvoří Booleovu algebru ve smyslu těchto definic:

$$[\mathfrak{A}] \cup [\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}],$$
$$[\mathfrak{A}] \cap [\mathfrak{B}] = \sim [(\sim \mathfrak{A} \vee \sim \mathfrak{B})],$$
$$[\mathfrak{A}]' = [\sim \mathfrak{A}],$$
$$1 = [\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}], \quad 0 = [\sim (\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A})].$$

Platí pak, že výraz $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ je formulí tehdy a jen tehdy, když je $[\mathfrak{A}] \subseteq [\mathfrak{B}]$ v této algebře — a že $[\mathfrak{F}] = 1$ tehdy a jen tehdy, když výraz $\mathfrak{F}$ je formule

Tato t. zv. *Lindenbaumova algebra* nižšího predikátového počtu je však i Φ-algebrou v následujícím smyslu:

Rodina posloupností Φ je — vedle triviálních posloupností (viz (iii) v definici 1) — tvořena posloupnostmi tvaru

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{[\mathfrak{A}^*(x_k)]\}_{k=1}^{\infty},$$

kde výraz $\mathfrak{A}(x_k)$ vzniká z výrazu $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(x_1)$ (v němž vystupuje volná individuová proměnná, označená jako x_1) náhradou volné x_1 libovolnou volnou individuovou proměnnou, označenou jako x_k pro $k = 1, 2, \ldots$ (V $\mathfrak{A}$ mohou ovšem vystupovat i další volné, nebo vázané individuové proměnné.)

Hvězdička pak naznačuje, že je po případě potřebí před popsanou náhradou (bez újmy rovnosti) provést vhodné „přejmenování" vázaných proměnných v $\mathfrak{A}$ tak, aby se takto x_k nestala vázanou proměnnou.

[11]) Nebudeme zde vypisovat podrobnosti, k tomu viz HILBERT-ACKERMANN [9]. Popíšeme raději obecné zásady, společné pro všechny systémy predikátového počtu, jichž je celá řada.

Potom je (jak se snadno dokáže, srov. [9])

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k = [\exists\, x_1\, \mathfrak{A}]$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k = [(x_1)\, \mathfrak{A}]$$

(Není-li individuová proměnná x_1 ve výrazu $\mathfrak{A}$ přítomna, anebo je tam jen vázána, pak klademe formálně $a_k = [\mathfrak{A}]$ pro každé $k = 1, 2, \ldots$ a $[\exists\, x_1\, \mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}]$, $[(x_1)\, \mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}]$ (fiktivní kvantifikace).)

Z induktivní definice pojmu výraz a z axiomů e), f) a z odvozovacích pravidel γ_1) a γ_2) systému Hilberta-Ackermanna snadno plyne, že jsou splněny všechny požadavky definice 1.

Je tedy *Lindenbaumova algebra* nižšího predikátového počtu[12]) *Φ-algebra se zřejmě spočetnou rodinou posloupností Φ*. Nyní můžeme teprve podat přesnou definici pojmu (symbolisované) elementární matematické teorie.

Definice 3. *Elementární* (t. j. v symbolech nižšího predikátového počtu vyjadřitelná) *bezesporná teorie je Φ-ideál Lindenbaumovy algebry; při tom výrazy, jejichž třídy tvoří takový Φ-ideál, jsou* (v symbolech predikátového počtu vyjádřené) *poučky teorie.*

Úplná bezesporná elementární teorie je pak *Φ-prvoideál Lindenbaumovy algebry.*

Touto definicí (která v podstatě pochází od TARSKÉHO, viz pozn. [1])) je vyjádřeno předně, že teorii jakožto deduktivně uzavřený systém je třeba považovat za takový systém matematických vět, který splňuje toto:

a) Je-li $\mathfrak{A}(y)$ (kde y je libovolné individuum) poučkou teorie, pak je poučkou teorie i věta tvaru $(x)\, \mathfrak{A}(x)$ (pro všechna x platí $\mathfrak{A}(x)$). — To odpovídá požadavku (1) v definici 2.

b) Je-li $\mathfrak{A}$ poučkou teorie a $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ (což je zkratka za $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$) je logicky zaručeno (vzniklo interpretací formule), potom $\mathfrak{B}$ je poučkou teorie. — To odpovídá požadavku (2) definice 2.

c) Pokud je teorie bezesporná (a jiné ovšem neuvažujeme), nejsou všechny výrazy jejími poučkami. — To odpovídá požadavku (0) definice 2.

Za druhé — pokud jde o úplné teorie — definice 3 vyjadřuje vzhledem k tvrzení, dokázanému za definicí 2 právě toto:

Protože $[\mathfrak{A} \vee \sim \mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}] \cup [\mathfrak{A}]' = 1$ patří do každého ideálu, musí být jeden (a jen jeden) z obou výrazů $\mathfrak{A}$, $\sim \mathfrak{A}$ poučkou úplné teorie — a obráceně.

---

[12]) Můžeme hovořit o *Lindenbaumově algebře* nižšího predikátového počtu vůbec, protože všechny analogicky sestrojené Φ-algebry pro různé úplné systémy nižšího predikátového počtu jsou si isomorfní. Právě jejich typ isomorfismu, který lze charakterisovat jako jistou volnou Φ-algebru, je vlastní matematickou strukturou nižší predikátové logiky. (To provedl autor v práci [10].)

Nyní je matematické jádro na počátku uvedené Lindenbaumovy věty jasné.

Než přejdeme ke Gödelově větě o úplnosti nižšího predikátového počtu jako snadnému důsledky věty Lindenbaumovy, upozorněme ještě na jednu zajímavou *souvislost s teorií pravděpodobnosti.*

Je známo (viz práci autora [3]), že Lindenbaumova algebra může být isomorfně (ve smyslu všech v ní definovaných suprem a infim) representována borelovskými množinami Cantorova diskontinua. S druhé strany je z teorie míry[13]) známo, že libovolná nezáporná množinová funkce, nepřekračující co do hodnot jedničku, definovaná na množinách reálných čísel, které v trojkovém rozvinutí mají na pevném místě nulu (v Cantorově diskontinuu), dá se jednoznačně rozšířit v σ-aditivní funkci na borelovských množinách Cantorova diskontinua. Takovéto základní obojetné množiny Cantorova diskontinua však ve zmíněné representaci můžeme nechat odpovídat prvkům Lindenbaumovy algebry tvaru $[T_k(x_l, x_m, \ldots, x_t)]$. To znamená, že řečená množinová funkce může být považována za jakési „pravděpodobnostní" ohodnocení predikátových (ovšem i kvantifikovaných) výrazů, určené udanými pravděpodobnostmi, že individua $x_l, x_m, \ldots, x_t$ jsou ve vztahu $T_k(x_l, x_m, \ldots, x_t)$.

To by pro teorii pravděpodobnosti — alespoň v případě spočetných pravděpodobnostních polí (t. j. oborů individuí) — mohlo m. j. znamenat bezesporný způsob, jakým lze bez obav „logicky volně" (t. j. bez dalších pravděpodobnostních předpokladů) kombinovat výroky, týkající se různých pravděpodobnostních, spolu nesouvisících polí. (Jak známo, při neopatrném takovém kombinování snadno obdržíme logické spory.)

4. Důsledky Lindenbaumovy věty.

Obraťme se konečně k důkazu Gödelovy věty o úplnosti jakožto důsledku věty Lindenbaumovy.

Vyslovíme tuto *Gödelovu větu* v silnějším znění, než je obvyklé, takto: *Není-li výraz $\mathfrak{A}$ nižšího predikátového počtu formulí, pak lze každé predikátové proměnné dát význam určité* (obecně n-členné) *relace mezi přirozenými čísly a libovolně*[14]) *označit všechna přirozená čísla pomocí individuových proměnných tak, že výraz $\mathfrak{A}$ po případném dosazení vhodných čísel za jeho volné individuové proměnné* (pokud v $\mathfrak{A}$ nějaké jsou) *obdrží význam chybného tvrzení o přirozených číslech.*

Důkaz. Mějme v Lindenbaumově algebře systém všech jejích prvků $[\mathfrak{B}]$, které splňují vztah $[\mathfrak{A}]' \subseteq [\mathfrak{B}]$.

Protože $\mathfrak{A}$ není formule, t. j. je $[\mathfrak{A}] \neq 1$, je též $[\mathfrak{A}]' = [\sim \mathfrak{A}] \neq 0$.

---

[13]) Srov. n. př. HALMOS, *Measure Theory*, po př. v ruském překladu (*Těorija mery*, kap. II a III).

[14]) V tom je právě zesílení oproti obvyklému znění.

To znamená, že řečené třídy [$\mathfrak{B}$] tvoří t. zv. hlavní Φ-ideál I vytvořený prvkem [$\sim \mathfrak{A}$]. (Hlavní ideál Lindenbaumovy algebry je právě tím, čemu se říká konečně axiomatisovatelná teorie.) Budiž nyní Π podle Lindenbaumovy věty existující Φ-nadprvoideál k I. Definujme (ke každému k a n přirozenému) n-člennou relaci ϱ_n^k mezi přirozenými čísly takto:

Čísla $l, m, \ldots, t$ (v udaném pořadí a v počtu n) jsou v relaci ϱ_n^k tehdy a jen tehdy, když je

$$[T_k(x_l, x_m, \ldots, x_t)] \in \Pi ,$$

kde $T_k(\ , \ , \ldots)$ označuje k-tou n-člennou predikátovou proměnnou. (Některé, po případě i všechny tyto relace mohou být prázdné; to neškodí — prázdné relace nevylučujeme.)

Nechme nyní k-tou n-člennou predikátovou proměnnou, označenou jako $T_k(\ , \ , \ldots)$, právě znamenat tuto relaci ϱ_n^k. (To tedy znamená na př. toto: mezi čísly, označenými třebas znaky x_3, x_1, x_2, x_5 máme relaci $T_2(\ , \ , \ ) = \varrho_4^2$ — čili je pravda, že $T_2(x_3, x_1, x_2, x_5)$ — tehdy a jen tehdy, je-li $[T_2(x_{x_3}, x_{x_1}, x_{x_2}, x_{x_5})] \in \Pi$; je-li tedy na př. $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, $x_5 = 3$, pak čísla 8, 2, 8, 3 jsou v relaci ϱ_4^2 jestliže je $[T_2(x_8, x_2, x_8, x_3)] \in \Pi$. Zde je třeba si uvědomit, že definice relace ϱ_n^k a tedy i stanovení významu k-té n-členné predikátové proměnné nezávisí na libovolném současném konkretním významu jednotlivých individuových proměnných jako znaků pro čísla, nýbrž závisí jen na předem jednou provždy provedeném očíslování jednotlivých individuových proměnných. Při tom máme ovšem stále na mysli, že v daném současném významu individuových proměnných bylo každé číslo alespoň jednou označeno.)

Tím jsme však ve smyslu induktivního vybudování výrazů predikátového počtu postupně dali každému výrazu význam věty o ~~přirozených číslech~~, jakmile jsme jen fixovali číselný význam individuových proměnných.

Dokažme konečně, že libovolný výraz $\mathfrak{C}$ obdrží takto význam pravdivé věty tehdy a jen tehdy, když platí $[{}^*\mathfrak{C}] \in \Pi$, kde výraz ${}^*\mathfrak{C}$ vzniknul z výrazu $\mathfrak{C}$ tímto (právě shora na zvláštním případě naznačeným) způsobem:

Každá v $\mathfrak{C}$ volná individuová proměnná se nahradí tou individuovou proměnnou, jejíž číslo (t. j. hodnotu indexu) ona sama právě označuje; před tím se po případě — aby se z volné takto nestala vázaná proměnná — vhodně přejmenují vázané individuové proměnné v $\mathfrak{C}$, což jistě vzhledem k jejich konečnému počtu lze.

Důkaz tohoto tvrzení veďme indukcí podle složitosti výrazu.

a) Pro základní výrazy jsme potřebné právě zařídili.

b) Protože následkem prvoideálové vlastnosti ideálu Π je $[{}^* \sim \mathfrak{C}] \in \Pi$ tehdy a jen tehdy, když není $[{}^*\mathfrak{C}] \in \Pi$, přenáší se naše tvrzení zřejmě z výrazů tvaru $\mathfrak{C}$ na výrazy tvaru $\sim \mathfrak{C}$, neboť je očividně ${}^* \sim \mathfrak{C} = \sim {}^*\mathfrak{C}$.

Protože Π je Φ-ideál, platí $[{}^*\mathfrak{C}\,(x_r)] \in \Pi$ pro každé $r = 1, 2, \ldots$ tehdy a jen tehdy, je-li $[{}^*(x_i)\,\mathfrak{C}] \in \Pi$ pro jisté vhodné i (na př. pro první i větší, než jsou indexy individuových proměnných v $\mathfrak{C}$ a v $*\mathfrak{C}$). (K tomu si stačí jen uvědomit, že každé přirozené číslo bylo označeno a připomenout si definici infima v Lindenbaumově algebře.)

To však vzhledem k zřejmému vztahu $*(x_i)\,\mathfrak{C} = (x_i)\,*\mathfrak{C}$ znamená, že se naše tvrzení přenáší z výrazů tvaru $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(x_r)$ na výrazy tvaru $(x_i)\,\mathfrak{C}$. Konečně protože Π je Φ-prvoideál, je $[*\exists\, x_i\, \mathfrak{C}] \in \Pi$ tehdy a jen tehdy, když alespoň pro jedno $r = 1, 2, \ldots$ je $[*\mathfrak{C}(x_r)] \in \Pi$.

To však vzhledem k tomu, že každé přirozené číslo bylo označeno, vzhledem k definici suprema v Lindenbaumově algebře a vzhledem k zřejmé rovnosti $*\exists\, x_i\, \mathfrak{C} = \exists\, x_i\, *\mathfrak{C}$ znamená, že se naše tvrzení přenáší z výrazů tvaru $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(x_r)$ na výrazy tvaru $\exists\, x_i\, \mathfrak{C}$. — Tím je naše tvrzení — a tedy i Gödelova věta dokázána; neboť jsou-li $x_r, x_s, \ldots, x_u$ po řadě v $\mathfrak{A}$ případně vystupující volné individuové proměnné, což pišme jako $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(x_r, x_s, \ldots, x_u)$, pak následkem $[\sim \mathfrak{A}(x_r, x_s, \ldots, x_u)] \in \Pi$ přechází $\sim \mathfrak{A}$ v pravdivou větu, jestliže $x_r, x_s, \ldots, x_u$ byla po řadě nahrazena individuovými proměnnými, na př. $x_a, x_b, \ldots, x_h$, značícími po řadě čísla $r, s, \ldots, u$. To jest, $\mathfrak{A}$ přechází takto v nepravdivou vědu, c. b. d.

Uveďme ještě větu *Skolemovu-Löwenheimovu* v tomto nejsilnějším znění: *Každá bezesporná teorie, symbolisovatelná výrazy nižšího predikátového počtu, může být považována za teorii jistých relací mezi přirozenými čísly.*

Důkaz se ve smyslu definice 3 provede doslova stejně, jako odvození Gödelovy věty o úplnosti, právě podané; jen na místo hlavního Φ-ideálu I, daného prvkem $[\sim \mathfrak{A}]$, nastoupí libovolný Φ-ideál — t. j. daná teorie.

K větě Skolemově-Löwenheimově (kterou lze jednodušeji odvodit i přímo) neškodí poznamenat toto: Tato věta byla svého času považována za jedno ze „sensačních" tvrzení matematické logiky. Ukazuje se totiž, že axiomaticky pojatá teorie množin může být formulována v symbolech nižšího predikátového počtu; to však dle Skolemovy-Löwenheimovy věty znamená, že ačkoli se v axiomatické teorii množin hovoří o nespočetných mohutnostech „libovolně velikých" a o „libovolných ordinálních číslech," přece možno tuto teorii považovat i za teorii jisté (ovšem velmi složité) dvojčlenné relace mezi přirozenými čísly, representující relaci náležení „$\in$" (mezi množinami).

Z této okolnosti netřeba ovšem nijak činit ten závěr, který činí pod vlivem idealistických filosofických názorů někteří orthodoxní zastánci t. zv. matematického intuicionismu, že totiž nespočetné mohutnosti a nespočetná ordinální čísla jsou „matematické iluse". Spíše je třeba právě naopak soudit, že výrazové a důkazové prostředky nižšího predikátového počtu jsou příliš chudé, než aby mohly plně vyjádřit tak složitý pojem, jako je vztah náležení.

Nehledě k této okolnosti je však třeba zdůraznit i to, že spočetný číselný model celé axiomatické teorie množin, který dle věty Skolemovy-Löwenheimovy existuje, nebyl explicitně ještě udán. Jsou dokonce přesvědčivé důvody pro to, že to ani není možné provést „efektivními,“ „konstruktivními“ prostředky — alespoň pokud pod nimi rozumíme rekursivní prostředky aritmetiky, neboť by to v podstatě znamenalo podat důkaz bezespornosti nejen celé teorie množin, ale (tím spíše) v ní obsažené aritmetiky přirozených čísel; a to je dle známých Gödelových vět o nerozhodnutelnosti formalisované aritmetiky nemožné.

Na závěr několik poznámek k Lindenbaumově větě, a k ní — jak se dá ukázat — ekvivalentní Gödelově větě o úplnosti:

V poslední době bylo publikováno několik nových důkazů těchto vět. Bylo by zajímavé hlouběji porovnat různé důkazové metody a formulovat jejich společné jádro. Udáme některé z těchto metod.

a) Původní důkaz Gödelův. — Tento původní důkaz se opírá o dvě věci: předně o t. zv. Skolemovu normální formu výrazu. Podle Skolema (viz Hilbert-Ackermann [9]), ke každému výrazu predikátového počtu možno efektivně udat jiný výraz, který je formulí tehdy a jen tehdy, je-li formulí daný výraz, a který má při tom ten jednoduchý tvar, že všechny malé kvantifikace jsou provedeny před všemi velkými kvantifikacemi, obojí na počátku výrazu. Není-li formulí příslušná Skolemova forma, sestrojuje se pak systém číselných relací, splňujících opak této Skolemovy normální formy. Tento postup má však, tak jak je podán v učebnici Hilberta-Ackermanna [9], mezeru. Protože totiž Skolemova normální forma není nijak ekvivalentní (ve smyslu námi shora uvedené rovnosti $\Leftrightarrow$ mezi výrazy) s původně daným výrazem, je třeba ještě dokázat, že ze splnění negace Skolemovy normální formy se dá odvodit i číselné splnění negace původního výrazu. To je sice možné, avšak značně to prodlouží původní důkaz.

Jinak po matematické stránce splnění opaku Skolemovy normální formy výrazu, který není formulí, je v podstatě založeno na kompaktnosti Cantorova diskontinua, t. j. na okolnosti, že průnik přes klesající řetězce uzavřených neprázdných množin je neprázdný. Podobným způsobem, ale bez okliky přes Skolemovu normální formu je proveden důkaz Gödelovy věty v učebnici A. Mostowského [11].

b) Na podobné, poněkud rozšířené myšlence je založena metoda důkazu Gödelovy (a Lindenbaumovy) věty, implicite obsažená již v práci sovětského algebraika Malceva [12], který jí užil k dokazování t. zv. globálních teoremů abstraktní algebry (především teorie grup) z lokálních předpokladů; tato metoda byla propracována později jednak s hlediska matematické logiky abstraktní algebry v monografii [4], jednak v samotné teorii grup (bez užití termínů matematické logiky) v učebnici Kurošově [13]. (Je pozoruhodné, že autor [4] se o Malcevovi vůbec nezmiňuje.)

Tato stránka Lindenbaumovy a Gödelovy věty patří k matematicky nejplodnějším obratům, které se zrodily na půdě matematické logiky. Jejich abstraktní jádro bylo znovu objasněno v práci [14], ukazující, že podstatou