Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

RELÁCIE KONGRUENTNOSTI A SLABÁ PROJEKTÍVNOSŤ VO SVÄZOCH

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Došlo dne 31. května 1954.)

DT : 519.4

V práci je definovaný pojem slabej projektívnosti intervalov vo sväze. Vyšetruje sa, ako navzájom súvisia relácie kongruentnosti na diskrétnom sväze a relácie slabej projektívnosti intervalov tohoto sväzu.

Medzi najdôležitejšie pojmy, používané v teorii sväzov, patrí pojem projektívnych intervalov. Umožňuje prehľadne formulovať dôležité výsledky, platné pre niektoré druhy sväzov (napr. pre modulárne sväzy).

Pojem projektívnosti intervalov môžeme zovšeobecniť takto: nech $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sú intervaly sväzu S, nech interval i_k je obsažený ako (vlastná alebo nevlastná) podmnožina v istom intervale i'_k, transponovanom k intervalu i_{k-1} ($k = 2, \ldots, n$). V takomto prípade budeme hovoriť, že interval i_1 je slabo projektívny s intervalom i_n. Cieľom nasledujúcich poznámok je vyšetriť, ako súvisia relácie kongruentnosti na sväze S s reláciami slabej projektívnosti intervalov sväzu S.

L'ahko sa zistí správnosť tvrdenia: ak interval $\langle x, y\rangle$ je slabo projektívny s intervalom $\langle u, v\rangle$, potom pre každú reláciu kongruentnosti R na S platí

$$x \equiv y(R) \Rightarrow u \equiv v(R)\ .$$

Otázka je, do akej miery platí obrátené tvrdenie. Podrobnejšie: či dostaneme reláciu kongruentnosti na S, ak anulujeme všetky intervaly, ktoré sú slabo projektívne ku zvolenému intervalu $\langle x, y\rangle$.

V odseku 1 budeme vyšetrovať obecné sväzy. Dokážeme, že odpoveď na položenú otázku (pri istom spresnení formulácie) je kladná. V odsekoch 2 a 3 sa vyšetrujú diskrétne sväzy. V odseku 2 je pre ne dokázané zovšeobecnenie vety, ktorú odvodil M. FUNAYAMA v práci [2] pre sväzy konečnej dĺžky (viď 1, problém 67).

Označme znakom $\bar{S}$ sväz všetkých vytvorujúcich rozkladov na S. V odseku 3 sú vyjadrené niektoré vlastnosti sväzu $\bar{S}$ pomocou relácie slabej projektívnosti intervalov sväzu S. Jeden z výsledkov znie takto:

Nech S je diskrétny sväz. Sväz $\bar{S}$ je Booleovou algebrou vtedy a len vtedy, keď relácia slabej projektívnosti prvointervalov sväzu S je symetrická (viď [1], problém 72).

Pre úplnosť pripomeňme nasledujúce známe definície (znak S označuje uvažovaný sväz, $a, b, x, y, u, v, \ldots$ sú prvky sväzu S):

Definícia 1. *a) Nech $a \leq b$. Množinu všetkých prvkov $x \in S$, vyhovujúcich nerovnosti $a \leq x \leq b$, budeme nazývať intervalom a označovať $\langle a, b \rangle$. Ak interval $\langle a, b \rangle$ obsahuje len prvky a, b, $a \neq b$ nazývame ho prvointervalom.*

b) Intervaly $\langle x, y \rangle$, $\langle u, v \rangle$ sú transponované, ak platí alebo $y \cap u = x$, $y \cup u = v$, alebo $x \cap v = u$, $x \cup v = y$.

c) Intervaly i, i' sú projektívne, ak existujú intervaly $i_0 = i, i_1, i_2, \ldots, i_n = i'$ také, že intervaly i_{k-1}, i_k sú transponované $(k = 1, \ldots, n)$.

d) Binárna reflexívna, symetrická a tranzitívna relácia R na S je reláciou kongruentnosti na S, ak

$$c \in S,\ x \equiv y(R) \Rightarrow x \cap c \equiv y \cap c(R),\ x \cup c \equiv y \cup c(R)\,.$$

Každá relácia kongruentnosti na S určuje istý rozklad množiny S; tento rozklad budeme nazývať vytvorujúcim rozkladom a označovať rovnakým písmenom ako príslušnú reláciu kongruentnosti. Budeme hovoriť, že interval $\langle a, b \rangle$ sa anuluje vo vytvorujúcom rozklade R, ak platí $a \equiv b(R)$.

e) Podmnožinu sväzu S uvažujeme vždy s rovnakým čiastočným usporiadaním ako v S. Ak $r \subset S$ a ak r je usporiadaná množina, nazývame r reťazcom. Ak reťazec r je konečný, nazývame dĺžkou reťazca r počet jeho prvkov zmenšený o 1. Dĺžku reťazca r budeme označovať $d(r)$. Hovoríme, že sväz S je konečnej dĺžky, ak existuje také číslo n $(n = 0,1,2,\ldots)$, že platí: vo sväze S existuje aspoň jeden reťazec dĺžky n a neexistuje žiaden reťazec dĺžky $n + 1$.

f) Hovoríme, že sväz S je diskrétny, ak každý reťazec, majúci najmenší a najväčší prvok, je konečný.

Poznámka. Zrejme každý konečný sväz je konečnej dĺžky; sväz konečnej dĺžky nemusí byť konečný. Sväz konečnej dĺžky má najmenší a najväčší prvok a je diskrétny. Každý interval diskrétneho sväzu je konečnej dĺžky.

1.

Definícia 2. *Budeme hovoriť že interval i je slabo projektívny s intervalom i', ak existujú intervaly $i_0, i_1, \ldots i_n$, $i_0 = i$, $i_n = i'$ také, že interval i_k je obsažený v istom intervale i'_k, transponovanom k intervalu i_{k-1} $(k = 1, \ldots, n)$. Uvedený vzťah budeme označovať $i \succeq i'$.*

Zrejme platí

Lemma 1. *$i \succeq i'$, $i' \succeq i'' \Rightarrow i \succeq i''$.*

Lemma 2. *Nech* $i \succeq \langle x, y\rangle$, $c \in S$. *Potom platí tiež* $i \succeq \langle x \cup c, y \cup c\rangle$, $i \succeq \succeq \langle x \cap c, y \cap c\rangle$.

Dôkaz. Označme $\langle x \cup c, y \cup c\rangle = i''$, $y \cap (x \cup c) = z$. Zrejme platí $x \leq \leq z \leq y$, teda $i \succeq \langle z, y\rangle$. Keďže interval i'' je transponovaný s intervalom $\langle z, y\rangle$, platí $\langle z, y\rangle \succeq i''$, tedy $i \succeq i''$. Tvrdenie pre $\langle x \cap c, y \cap c\rangle$ sa dokáže duálne.

Definícia 3. *Nech* $\mathfrak{A}$ *je nejaká neprázdna množina intervalov sväzu* S. *Nech* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in S$, $x_0 = x$, $x_n = y$, *nech sú prvky* x_{k-1}, x_k *zrovnateľné; príslušný interval označme* i_k $(k = 1, \ldots, n)$. *Predpokladajme, že ku každému* i_k *existuje interval* $i'_k \in \mathfrak{A}$ *taký, že platí* $i'_k \succeq i_k$. *Usporiadanú množinu intervalov* $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ *budeme volať čiarou typu* $\mathfrak{A}$, *spojujúcou prvky* x, y. *Budeme písať* $x \equiv y(R(\mathfrak{A}))$, *ak existuje čiara typu* $\mathfrak{A}$, *spojujúca prvky* x, y.

Lemma 3. *Nech existuje čiara typu* $\mathfrak{A}$, *spojujúca* x, y. *Potom existuje tiež čiara typu* $\mathfrak{A}$, *spojujúca prvky* $x \cap c$, $y \cap c$, *resp.* $x \cup c$, $y \cup c$.

Dôkaz. Nech $C = \{i_1, \ldots, i_n\}$ je čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca prvky x, y, nech interval i_k je ohraničený prvkami x_{k-1}, x_k $(x_0 = x, x_n = y)$, nech $i'_k \in \mathfrak{A}$ je príslušný interval, pre ktorý platí $i'_k \succeq i_k$. Zostrojme intervaly i''_k, ohraničené prvkami $y_{k-1} = x_{k-1} \cup c$, $y_k = x_k \cup c$. Podľa lemmy 2 a 1 platí $i'_k \succeq i''_k$. Zrejme je $y_0 = x \cup c$, $y_n = y \cup c$, teda $\{i''_1, \ldots, i''_n\}$ je čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca prvky $x \cup c$, $y \cup c$. Tvrdenie pre prenik sa dokáže duálne.

Poznámka. Nech C je čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca prvky x, y. Čiaru typu $\mathfrak{A}$, spojujúcu prvky $x \cup c$, $y \cup c$, zostrojenú z čiary C ako v predošlom dôkaze, budeme označovať $C \cup c$, analogický význam bude mať $C \cap c$.

Veta 1. *Relácia* $R(\mathfrak{A})$ *je reláciou kongruentnosti na* S.

Dôkaz. Nech $\langle z_1, z_2\rangle \in \mathfrak{A}$. L'ahko sa zistí, že interval $\langle x, x\rangle$ je projektívny s intervalom $\langle z_1, z_1\rangle$, teda $x \equiv x(R(\mathfrak{A}))$. Ďalej, ak $\{i_1, \ldots, i_n\}$ je čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca prvky x, y je zrejme $\{i_n, \ldots, i_1\}$ čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca prvky y, x. Z toho plynie symetričnosť relácie $R(\mathfrak{A})$. Jej tranzitívnosť je zrejmá. Ďalšia časť dôkazu plynie z lemmy 3.

Poznámky. 1. Nech C je čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca x, y. Bez ujmy všeobecnosti môžeme predpokladať, že všetky intervaly čiary C ležia v intervale $\langle x \cap y, x \cup y\rangle$. (Ak by neležali, zostrojili by sme čiary $C' = C \cup (x \cap y)$, $C'' = C' \cap (x \cup y)$. Čiara C'' zrejme vyhovuje vysloveným podmienkam).

2. Ľahko sa zistí, že vytvorujúci rozklad $R(\mathfrak{A})$ je najmenší zo všetkých vytvorujúcich rozkladov, v ktorých sa anulujú všetky intervaly množiny $\mathfrak{A}$.

3. Nech $\langle a, b\rangle$ je prvointerval vo sväze S. Zrejme platí $a \equiv b(R(\mathfrak{A}))$ vtedy a len vtedy, keď existuje interval $i \in \mathfrak{A}$, ktorý je slabo projektívny s prvointervalom $\langle a, b\rangle$.

4. Nech R je vytvorujúci rozklad na S, nech $\mathfrak{A}$ je množina všetkých intervalov sväzu S, ktoré sa anulujú v rozklade R. Zrejme platí $R(\mathfrak{A}) = R$.

2.

V tomto odseku budeme predpokladať, že uvažovaný sväz S je diskrétny.

Definícia 4. *Nech $\bar{S}$ je množina všetkých vytvorujúcich rozkladov sväzu S. Ak $R_1, R_2 \in \bar{S}$, položme $R_1 \leq R_2$ vtedy a len vtedy, keď*

$$x \equiv y(R_1) \Rightarrow x \equiv y(R_2)\,.$$

Definícia 5. *Nech $\mathfrak{S}$ je množina všetkých prvointervalov sväzu S, kvaziusporiadaná pomocou relácie $\succeq$ (viď def. 2). Ak $p \in \mathfrak{S}$, označme znakom $\bar{p}$ množinu všetkých prvkov $p' \in \mathfrak{S}$, pre ktoré platí súčasne $p \succeq p'$, $p' \succeq p$. Množina $\mathfrak{S}$ sa tým rozpadne na dizjunktné triedy; množinu týchto tried označme X. Pre $\bar{p}, \bar{q} \in X$ položme $\bar{p} \geq \bar{q}$ vtedy a len vtedy, keď $p \succeq q$. (Zrejme je potom pre každé $p' \in \bar{p}$, $q' \in \bar{q}$, $p' \succeq q'$. Viď* [1], *hlava I, § 4.)*

Definícia 6. *Nech Y je množina všetkých funkcií, definovaných na množine X, nadobudajúcich len hodnoty 1 alebo 2, pre ktoré platí*

$$\bar{p} \leq \bar{q} \Rightarrow f(\bar{p}) \leq f(\bar{q})\,.$$

Ak $f_1, f_2 \in Y$, položíme $f_1 \leq f_2$, ak pre každé $\bar{p} \in X$ platí $f_1(\bar{p}) \leq f_2(\bar{p})$.

Poznámky. 1. V terminológii, používanej v [1], je $Y = 2^X$.

2. Ak $R \in \bar{S}$, $p \in \mathfrak{S}$ a ak sa prvointerval p anuluje v rozklade R, potom sa zrejme každý prvointerval $p' \in \bar{p}$ anuluje v rozklade R. Budeme hovoriť, že prvok $\bar{p} \in X$ sa anuluje v rozklade R.

Veta 2. *Čiastočne usporiadané systémy $\bar{S}$, Y sú duálne izomorfné.*

Dôkaz. Nech $R \in \bar{S}$, nech $\mathfrak{A}$ je množina tých prvkov z množiny X, ktoré sa anulujú v rozklade R. Definujme na X funkciu f takto: ak $\bar{p} \in \mathfrak{A}$, nech $f(\bar{p}) = 1$; ak $\bar{p} \,\bar{\in}\, \mathfrak{A}$, nech $f(\bar{p}) = 2$. Ak $\bar{p} \geq \bar{q}$, zrejme platí $f(\bar{p}) = 1 \Rightarrow f(\bar{q}) = 1$, teda $\bar{p} \geq \bar{q} \Rightarrow f(\bar{p}) \geq f(\bar{q})$, t. j. $f \in Y$. Prvku $R \in \bar{S}$ priraďme prvok $f \in Y$ (symbolicky $R \to f$). Dostávame zobrazenie množiny $\bar{S}$ do množiny Y.

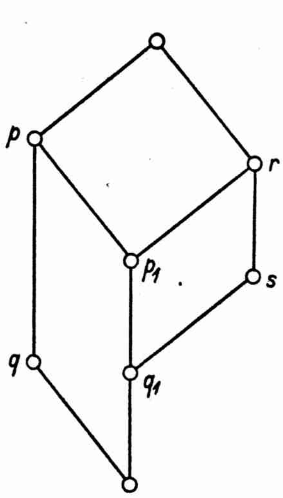
Uvažované zobrazenie je prosté. Nech je totiž $R_1, R_2 \in \bar{S}$, $R_1 \neq R_2$, $R_1 \to f_1$, $R_2 \to f_2$. Potom existuje prvointerval p, ktorý sa anuluje v jednom z rozkladov R_1, R_2, a neanuluje sa v druhom z týchto rozkladov. Platí teda $f_1(\bar{p}) \neq f_2(\bar{p})$.

Nech $f \in Y$. Nech $\mathfrak{A}$ je množina tých prvkov $\bar{p} \in X$, pre ktoré platí $f(\bar{p}) = 1$. Nech $\mathfrak{A} = \bigcup_{\bar{p} \in \mathfrak{A}} \bar{p}$. Utvorme vytvorujúci rozklad $R = R(\mathfrak{A})$. (Viď def. 3 a vetu 1.) L'ahko sa zistí, že platí $R \to f$. Teda uvažované zobrazenie je zobrazením množiny $\bar{S}$ na množinu Y.

Nech $R_1 \leq R_2$, $R_1 \to f_1$, $R_2 \to f_2$, $\bar{p} \in X$, $f_1(\bar{p}) = 1$. Teda sa $\bar{p}$ anuluje v rozklade R_1. Zo vzťahu $R_1 \leq R_2$ dostávame, že sa $\bar{p}$ anuluje tiež v rozklade R_2, takže $f_2(\bar{p}) = 1$. Z toho vyplýva, že pre každé $\bar{p} \in X$ platí $f_1(\bar{p}) \geq f_2(\bar{p})$. Tým je tvrdenie vety dokázané.

Poznámky. 1. Predošlá veta zovšeobecňuje výsledok, ktorý dokázal M. Funayama pre sväzy konečnej dĺžky v práci [2]. (Táto práca, vyšlá počas vojny, je pre mňa nedostupná a poznám ju len z referátu v *Mathematical Reviews* a z poznámky v práci [1], str. 205). To, že sa v spomínanej práci vyslovuje (pre sväzy konečnej dĺžky) izomorfismus a nie duálny izomorfizmus sväzov $\bar{S}$, Y, je odôvodnené tým, že autor práce [2] uvažuje pre vytvorujúce rozklady na S čiastočné usporiadanie duálne k tomu, ktoré je zavedené v definícii 4.

2. Ak by sme na množine všetkých prvointervalov sväzu S konečnej dĺžky definovali reláciu $\geq$ položiac (pre prvointervaly $\langle q, p\rangle$, $\langle s, r\rangle$) $\langle q, p\rangle \geq \geq \langle s, r\rangle$ vtedy a len vtedy, keď platí $u \geq r > s \geq v$ pre niektorý interval $\langle v, u\rangle$, projektívny k intervalu $\langle q, p\rangle$, potom by relácia $\geq$ vo všeobecnosti nebola kvaziusporiadaním.



Obr. 1.

Príklad: pri takejto definícii vzťahu $\geq$ platí vo sväze S na obr. 1 $\langle q, p\rangle \geq \langle q_1, p_1\rangle$, $\langle q_1, p_1\rangle \geq \langle s, r\rangle$, neplatí však $\langle q, p\rangle \geq \langle s, r\rangle$. Vzťah $\geq$ je teda nie tranzitívny, takže je nie kvaziusporiadaním. Z toho vyplýva, že úlohu 3, str. 205, [1] by bolo vhodné formulovať presnejšie.

3. Veta 2 všeobecne neplatí pre sväzy, splňujúce podmienku klesajúcich reťazcov. Príklad. Nech $S = \{1, 2, 3, \ldots, \omega\}$, s obvyklým usporiadaním. Podmienka klesajúcich reťazcov je zrejme splnená. Nech $\mathfrak{S}$ je množina prvointer valov sväzu S, nech znaky $\succeq$, X majú rovnaký význam ako v definícii 5. Zrejme v našom prípade platí $p \succeq q$ vtedy a len vtedy, keď $p = q$. Každá trieda $\bar{p} \in X$ obsahuje teda jediný prvok. Z toho plynie, že každá funkcia, definovaná na X, nadobúdajúca len hodnoty 1 alebo 2, patrí do množiny Y. L'ahko sa zistí, že Y je v tomto prípade komplementárny sväz.

Uvažujme rozklad $R = \{\{1, 2, 3, \ldots\}, \{\omega\}\}$ množiny S. Rozklad R je zrejme vytvorujúci na S. L'ahko sa zistí, že tento rozklad nemá komplement v $\bar{S}$.[1]) Teda sväzy $\bar{S}$, Y sú nie duálne izomorfné.

Duálnou úvahou sa zistí, že veta 2 neplatí všeobecne pre sväzy, splňujúce podmienku rastúcich reťazcov.

3.

G. Birkhoff položil problém ([1], problém 72):

Nájsť nutné a postačujúce podmienky pre sväz S, aby jeho vytvorujúce rozklady tvorili Booleovu algebru.

---

[1]) Ak by totiž R' bol komplement rozkladu R v $\bar{S}$, nemohol by v rozklade R' prvok ω tvoriť osobitnú triedu. Existoval by teda prvok $n \neq \omega$, $n \equiv \omega(R')$. Potom by platilo $n \equiv n + 1(R')$, $n \equiv n + 1(R)$, čo je spor s predpokladom.

V špeciálnom prípade, keď sväz S je diskrétny, môžeme hľadané podmienky vyjadriť jednoduchým spôsobom pomocou pojmu slabej projektívnosti prvointervalov.

Veta 3. *Vytvorujúce rozklady diskrétneho sväzu S tvoria Booleovu algebru vtedy a len vtedy, keď vzťah slabej projektívnosti prvointervalov sväzu S je symetrický.*

Dôkaz. Nech S je diskrétny sväz, nech $\overline{S}$ je sväz vytvorujúcich rozkladov na S (viď def. 4). Sväz $\overline{S}$ je zrejme distributívny a má najmenší a najväčší prvok. Z toho plynie, že nutná a postačujúca podmienka, aby $\overline{S}$ bol Booleovou algebrou je, aby sväz $\overline{S}$ bol komplementárny.

1. Nech sväz $\overline{S}$ je komplementárny. Potom vzťah slabej projektívnosti prvointervalov sväzu S je symetrický.

Dôkaz: Nech p, q sú prvointervaly v S, nech p je slabo projektívny s intervalom q. Označme $\mathfrak{A} = \{q\}$ a utvorme vytvorujúci rozklad $R = R(\mathfrak{A})$ (viď def. 3). Nech R' je komplement rozkladu R v $\overline{S}$. Prvointerval p sa anuluje v rozklade $R \cup R'$, teda sa anuluje aspoň v jednom z rozkladov R, R'. Ak by sa anuloval v rozklade R', anuloval by sa v tomto rozklade tiež interval q, čo je spor s predpokladom. Teda sa p anuluje v rozklade R, z čoho plynie podľa poznámky 3 za vetou 1, že prvointerval q je slabo projektívny s prvointervalom p.

2. Nech vzťah slabej projektívnosti prvointervalov sväzu S je symetrický. Potom $\overline{S}$ je Booleova algebra.

Dôkaz: Nech $R_1 \in \overline{S}$. Nech $\mathfrak{A}_1$ ($\mathfrak{A}_2$) je množina tých prvointervalov sväzu S, ktoré sú (nie sú) anulované v rozklade R_1. Zrejme platí $R_1 = R(\mathfrak{A}_1)$. Utvorme rozklad $R_2 = R(\mathfrak{A}_2)$. Keďže každý prvointerval sväzu S patrí do jednej z množín $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, rozklad $R_1 \cup R_2$ je najväčším rozkladom na S.

Predpokladajme, že by sa prvointerval p anuloval v rozklade $R_1 \cap R_2$. Z toho by vyplývalo 1. $p \in \mathfrak{A}_1$, 2. existuje $q \in \mathfrak{A}_2$ taký, že q je slabo projektívny s prvointervalom p. Podľa predpokladu o symetričnosti vzťahu slabej projektívnosti je potom tiež p slabo projektívny s prvointervalom q. Z toho plynie, že sa q anuluje v rozklade R_1, teda $q \in \mathfrak{A}_1$. To však nie je možné, keďže $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = 0$. Teda $R_1 \cap R_2$ je najmenší rozklad na S. Z toho vyplýva, že rozklad R_2 je komplementárny k rozkladu R_1. Tým je tvrdenie vety dokázané.

Poznámky: 1. Pri dôkaze nasledujúcej vety použijeme toto tvrdenie: Nech S je sväz, nech R, R' sú komplementárne vytvorujúce rozklady na S, nech S_0 je podsväz v S. Pre prvky $x, y \in S_0$ položme $x \equiv y(R[S_0])$ vtedy a len vtedy, keď $x \equiv y(R)$, a analogicky pre $R'[S_0]$. Potom $R[S_0]$, $R'[S_0]$ sú komplementárne vytvorujúce rozklady na S_0. Dôkaz tohoto tvrdenia je zrejmý.

2. L'ahko sa zistí, že symetričnosť vzťahu slabej projektívnosti prvointervalov je vždy splnená v modulárnych sväzoch. Pre distributívne sväzy je podmienka, aby $\overline{S}$ bola Booleova algebra, obzvlášť jednoduchá:

Veta 4. *Vytvorujúce rozklady distributívneho sväzu S tvoria Booleovu algebru vtedy a len vtedy, keď sväz S je diskrétny.*

Dôkaz. a) Nech S je diskrétny distributívny sväz. Podľa predošlej poznámky vzťah slabej projektívnosti prvointervalov sväzu S je symetrický, teda podľa vety 1 $\bar{S}$ je Booleova algebra.

b) Predpokladajme, že distributívny sväz S je nie diskrétny. Teda v ňom existuje nekonečný reťazec r, ktorý má najmenší a najväčší prvok. Označme tieto prvky a resp. b. Zrejme sa potom z reťazca r dá vybrať postupnosť prvkov $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tak, že platí alebo $a_i < a_{i-1}$ pre $i = 1, 2, \ldots$, alebo $a_i > a_{i-1}$ pre $i = 1, 2, \ldots$ Vyšetrujme prvú možnosť (v druhom prípade je postup dôkazu duálny). Označme

$$\langle a_i, a_{i+1}\rangle = p_i,\ \{p_i\} = \mathfrak{A}_i,\ R(\mathfrak{A}_i) = R_i,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i = R .$$

Nech $x > a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Podľa [3] (poznámka 2 za lemmou 1) v každom z rozkladov R_i (a teda tiež v rozklade R) prvok x tvorí osobitnú triedu.

Označme $S_0 = \{a_1, a_2, \ldots, b\}$. Podľa predošlého je $a_i \equiv a_{i+1}(R)$, $a_i \not\equiv b(R)$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Ak by existoval komplement R' k rozkladu R, potom by $R'[S_0]$ bol komplementárny vytvorujúci rozklad k rozkladu $R[S_0]$. Rozklad $R[S_0]$ však nemá komplement (viď príklad v poznámke 3 za vetou 2), teda ani rozklad R nemá komplement. Tým je tvrdenie vety dokázané.

Definícia 7. *Ideál I sväzu S nazveme neutrálnym, ak existuje taký vytvorujúci rozklad R na S, že množina I je jednou z tried tohoto rozkladu.* (Viď [1], str. 122, 174, 180.)

Poznámky. 1. Predpokladajme, že sväz S má najmenší prvok O. Ak R je vytvorujúci rozklad na S, potom množina prvkov, kongruentných s prvkom O v rozklade R, je zrejme neutrálny ideál; označme ho $N(R)$. Môže sa ovšem stať, že pre $R_1 \neq R_2$ je $N(R_1) = N(R_2)$. Otázka je: aká je nutná a postačujúca podmienka pre sväz S, aby rôznym vytvorujúcim rozkladom R_1, R_2 patrili rôzne neutrálne ideály $N(R_1)$, $N(R_2)$? (Viď [1], problém 73.)

2. Predošlú otázku môžeme v inej formulácii vysloviť takto: aká je nutná a postačujúca podmienka pre sväz S s najmenším prvkom O, aby bolo splnené nasledujúce tvrdenie:

(A_0) Každý vytvorujúci rozklad R na S je jednoznačne určený, ak je udaná trieda tohoto rozkladu, obsahujúca prvok O.

3. Obecnejšie, pre sväzy bez O môžeme analogickú otázku vyjadriť takto: aká je nutná a postačujúca podmienka pre sväz S, aby platilo:

(A) Každý netriviálny vytvorujúci rozklad R na S obsahuje ako triedu istý ideál $I(R)$; ideálom $I(R)$ je rozklad R jednoznačne určený.[2])

[2]) Podrobnejšie: žiadame, aby každý vytvorujúci rozklad na S, ktorý obsahuje $I(R)$ ako triedu, bol rovný rozkladu R.

Pre diskrétne sväzy je snadné vyjadriť hľadanú podmienku pomocou vzťahu slabej projektívnosti prvointervalov.

Veta 5. *Pre distributívny sväz S platí tvrdenie A vtedy a len vtedy, keď ku každému prvointervalu p sväzu S existuje ideál $I(p)$ taký, že 1. prvointerval p je slabo projektívny s každým prvointervalom ideálu $I(p)$, 2. v ideále $I(p)$ existuje prvointerval p_1, slabo projektívny s prvointervalom p.*

Dôkaz. a) Predpokladajme, že pre sväz S platí tvrdenie A. Nech p je prvointerval v S. Označme $\{p\} = \mathfrak{A}$, $R(\mathfrak{A}) = R$. Nech $\mathfrak{A}_1$ je množina všetkých prvointervalov ideálu $I(R)$. Zrejme je p slabo projektívny s každým prvointervalom množiny $\mathfrak{A}_1$ (viď poznámku 3 za vetou 1). Z podmienky A plynie $R = R(\mathfrak{A}_1)$. Prvointerval p sa anuluje v rozklade R, tedy existuje prvointerval $p_0 \in \mathfrak{A}_1$, slabo projektívny s intervalom p.

b) Predpokladajme, že pre sväz S je splnená podmienka, vyslovená v dokazovanej vete. Nech R je vytvorujúci rozklad na S, nech (pevne zvolený) prvointerval p sa anuluje v rozklade R, nech z je prvok množiny $I(p)$, nech $I(R)$ je množina všetkých prvkov $x \in S$, pre ktoré platí $x \equiv z(R)$. L'ahko sa zistí, že množina $I(R)$ je ideál.[3]) (Zrejme je $I(R)$ triedou rozkladu R, teda $I(R)$ je neutrálny ideál.) Nech $\mathfrak{A}$ je množina všetkých prvointervalov ideálu $I(R)$. Dokážeme, že platí $R(\mathfrak{A}) = R$ (teda množina $I(R)$ jednoznačne určuje rozklad R).

Keďže $I(R)$ je trieda rozkladu R a keďže $R(\mathfrak{A})$ je najmenší z vytvorujúcich rozkladov na S, ktoré anulujú všetky prvky množiny $\mathfrak{A}$, platí $R(\mathfrak{A}) \leq R$. Nech q je ľubovoľný prvointerval, ktorý sa anuluje v rozklade R. Sostrojme ideál $I(q)$. Zrejme sa všetky prvky ideálu $I(q)$ anulujú v rozklade R. Keďže prenik ideálov $I(p)$, $I(q)$ je neprázdny, platí $I(q) \subseteq I(R)$. Podľa predpokladu v ideále $I(q)$ existuje prvointerval q_0 slabo projektívny s intervalom q. Podľa predošlého je $q_0 \in \mathfrak{A}$, teda interval q sa anuluje v rozklade $R(\mathfrak{A})$. Z toho plynie $R \leq R(\mathfrak{A})$, a úhrnne $R = R(\mathfrak{A})$. Tým je tvrdenie vety dokázané.

Skombinujme nakoniec požiadavky, vyslovené v spomínaných problémoch 72 a 73 z práce [1] takto:

(B) Budeme hovoriť, že sväz S má vlastnosť B, ak 1. sväz $\overline{S}$ je Booleovou algebrou, a súčasne 2. pre sväz S platí tvrdenie A.

Pre stručnejšie vyjadrovanie zaveďme ešte nasledujúcu definíciu:

Definícia 8. *a) Prvointervaly p, p' diskrétneho sväzu S nazývame ekvivalentnými, ak platí $p \succeq p'$, $p' \succeq p$.*

b) Nech diskrétny sväz S má najmenší prvok 0. Prvointervaly $\langle 0, x \rangle$ budeme nazývať minimálnymi prvointervalmi a označovať $p_0, q_0, \ldots$

Poznámka. Vzťah ekvivalentnosti prvointervalov je zrejme reflexívny, symetrický a tranzitívny.

---

[3]) Na základe vlastností 1. 2, vyslovených v dokazovanej vete, všetky prvointervaly ideálu $I(p)$ sa anulujú v rozklade R. Nech $x_1, x_2 \in I(R)$, $y \in S$. Platí $x_1 \equiv z(R)$, $x_1 \cap y \equiv z \cap y(R)$. Keďže $z \cap y \in I(p)$, je $z \cap y \equiv z(R)$, teda $x_1 \cap y \equiv z(R)$. Zo vzťahov $x_i \equiv z(R)$ $(i = 1, 2)$ plynie $x_1 \cup x_2 \equiv z(R)$. Tým dokázané, že $I(R)$ je ideál.

Veta 6. *Diskrétny sväz S s najmenším prvkom 0 má vlastnosť B vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľný prvointerval p sväzu S platí 1. p je slabo projektívny aspoň s jedným minimálnym prvointervalom, 2. ak p je slabo projektívny s niektorým minimálnym intervalom p_0, potom p, p_0 sú ekvivalentné.*

Dôkaz. a) Predpokladajme, že diskrétny sväz S s najmenším prvkom O má vlastnosť B. Nech p je prvointerval v S. Uvažujme príslušný ideál $I(p)$ podľa vety 5. Podľa tejto vety $I(p)$ obsahuje viac ako jeden prvok, teda existuje minimálny prvointerval p_0, pre ktorý platí $p \succeq p_0$. Podľa vety 4 sú prvointervaly p, p_0 ekvivalentné.

b) Nech sú splnené podmienky 1., 2. dokazovanej vety.

1. Nech p, q sú prvointervaly v S, $p \succeq q$. Podľa predpokladu existuje minimálny prvointerval q_0, ekvivalentný s q. Potom je $p \succeq q_0$, teda podľa podmienky 2. dokazovanej vety je zároveň p ekvivalentný s q_0. Z toho plynie, že intervaly p, q sú ekvivalentné. Podľa vety 4 sväz $\bar{S}$ je Booleova algebra.

2. Nech p je prvointerval v S. Označme $\{p\} = \mathfrak{A}, R(\mathfrak{A}) = R$. Podľa predošlého odseku množina prvkov, kongruentných s O v rozklade R, obsahuje viac ako jeden prvok. Označme túto množinu $I(p)$. $I(p)$ je zrejme ideál. Podľa definície množiny $I(p)$ prvointerval p je slabo projektívny s každým prvointervalom tejto množiny. Nech p_0 je minimálny prvointerval ideálu $I(p)$. Podľa podmienky 2 dokazovanej vety intervaly p, p_0 sú ekvivalentné. Podľa vety 5 je potom pre sväz S splnená podmienka A. Tým je tvrdenie vety dokázané.

Definícia 9. *Sväz S budeme nazývať jednoduchým, ak nemá žiadny netriviálny vytvorujúci rozklad.*

Veta 7. *Diskrétny sväz S bez najmenšieho prvku splňuje podmienku B vtedy a len vtedy, keď je jednoduchý.*

Dôkaz. a) Nech sväz S je jednoduchý. Potom podmienka B je zrejme splnená.

b) Predpokladajme, že diskrétny sväz S nemá najmenší prvok a že splňuje podmienku B. Nech p, q sú ľubovoľné prvointervaly v S. Utvorme podľa vety 5 ideály $I(p)$, $I(q)$. Keďže sväz S nemá najmenší prvok, množina $I = I(p) \cap I(q)$ obsahuje viac ako jeden prvok. I je zrejme ideál v S. Nech s je prvointerval ideálu I. Podľa vety 5 platí $p \succeq s$, $q \succeq s$. Podľa vety 4 p, s resp. q, s sú ekvivalentné, takže tiež prvointervaly p, q sú ekvivalentné. Z toho vyplýva, že sväz S je jednoduchý.

Poznámka. Nazvime sväz S polojednoduchým, ak pre každý interval $\langle a, b\rangle$, $a < b$ sväzu S existujú prvky $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $a_0 = a$, $a_n = b$, také, že intervaly $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sú jednoduchými sväzmi („jedno-