Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O PROJEKTIVNÍM ZOBECNĚNÍ CHORDÁLY

JAN SCHUSTER, Praha.

(Došlo dne 26. října 1953.)

DT : 513.611

V článku je ukázáno projektivní zobecnění metrického pojmu chordály a některé jeho důsledky.

1. Systém reálných kuželoseček, které mají dva různé (reálné nebo imaginární) body společné anebo které se v jednom společném bodě navzájem dotýkají, označme Σ. Zvolme dále souřadnicovou soustavu pro homogenní souřadnice x, y, z tak, aby společné body resp. společný bod kuželoseček systému Σ byly na přímce $z = 0$ dány anulovanou kvadratickou formou (s nenulovým diskriminantem)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0\,, \tag{1}$$

resp. aby společná tečna a společný bod kuželoseček systému Σ byla přímka $z = 0$ s tím svým bodem, který je na ní dán rovnicí (1), v níž forma na levé straně má nulový diskriminant. A, B, C jsou konstanty nikoli všecky nulové.

Libovolná kuželosečka systému Σ, která se nerozpadá tak, aby jako součást obsahovala přímku $z = 0$, pak je:

$$2Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2ayz + 2bxz + pz^2 = 0\,;$$

a, b, p jsou parametry této kuželosečky v systému Σ.

Budeme vyšetřovat, jak je třeba volit bod $S(x_0, y_0, z_0)$, aby jeho poláry q_k $(k = 1, 2)$ vzhledem ke dvěma různým pravým kuželosečkám l_k o rovnicích

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2a_kyz + 2b_kxz + p_kz^2 = 0\,, \quad k = 1, 2\,, \tag{2}$$

protínaly tyto kuželosečky v bodech, jež leží opět na kuželosečce ze systému Σ. Kuželosečka $l_k (k = 1, 2)$ a degenerovaná kuželosečka složená z přímky $z = 0$ a poláry q_k určují svazek, který označme σ_k. Výše zmíněný požadavek je pak splněn tehdy a jen tehdy, když svazky σ_1 a σ_2 mají společnou kuželosečku. Svazek σ_k $(k = 1, 2)$ má rovnici

$$\begin{aligned}\varphi_k(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2a_kyz + 2b_kxz + p_kz^2) +\\ + \psi_k\{(Ax_0 + By_0 + l_kz_0)\,x + (Bx_0 + Cy_0 + a_kz_0)\,y +\\ + (b_kx_0 + a_ky_0 + p_kz_0)\,z\}\,z = 0\,, \quad k = 1, 2\,.\end{aligned}$$

Svazky σ_1 a σ_2 mají tedy společnou kuželosečku tehdy a jen tehdy, když $\varphi_1 = \varphi_2$ (v dalším klademe $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$) a ještě

$$\left.\begin{aligned} 2(a_1 - a_2)\,\varphi + (Bx_0 + Cy_0 + a_1z_0)\,\psi_1 - (Bx_0 + Cy_0 + a_2z_0)\,\psi_2 = 0\,, \\ 2(b_1 - b_2)\,\varphi + (Ax_0 + By_0 + l_1z_0)\,\psi_1 - (Ax_0 + By_0 + l_2z_0)\,\psi_2 = 0\,, \\ (p_1 - p_2)\varphi + (l_1x_0 + a_1y_0 + p_1z_0)\,\psi_1 - (l_2x_0 + a_2y_0 + p_2z_0)\,\psi_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Eliminací φ, ψ_1 a ψ_2 z těchto rovnic dostaneme po jednoduchých úpravách

$$\{2(b_2 - b_1)\,x_0 + 2(a_2 - a_1)\,y_0 + (p_2 - p_1)\,z_0\}\,.$$
$$.\,\{(\overline{a_2 - a_1}A - \overline{b_2 - b_1}B)\,x_0 + (\overline{a_2 - a_1}B - \overline{b_2 - b_1}C)\,y_0 +$$
$$+ (a_2b_1 - a_1b_2)\,z_0\} = 0\,.$$

Geometrické místo bodu S je tedy dáno takto (indexy 0 vynecháme):

$$2(b_2 - b_1)\,x + 2(a_2 - a_1)\,y + (p_2 - p_1)\,z = 0 \quad (5)$$

a

$$(\overline{a_2 - a_1}A - \overline{b_2 - b_1}B)\,x + (\overline{a_2 - a_1}B - \overline{b_2 - b_1}C)\,y + (a_2b_1 - a_1b_2)\,z = 0\,.$$

Přímka (5) spolu s přímkou $z = 0$ dává zřejmě degenerovanou kuželosečku ve svazku kuželoseček, určenou kuželosečkami l_1 a l_2. Přímka (5) splývá s přímkou $z = 0$ tehdy a jen tehdy, když

$$a_1 = a_2\,, \quad b_1 = b_2\,.$$

Geometrický význam těchto relací je zřejmý z rovnic (2).

Přímku (5), která je částí geometrického místa bodu S, nazveme *projektivní chordálou kuželoseček* l_1 a l_2.

Budiž $S(x_0, y_0, z_0)$ libovolný její bod. Rovnice (4) mají pak právě jen tato řešení ve φ, ψ_1, ψ_2:

$$\varphi : \psi_1 : \psi_2 = -z_0 : 2 : 2\,. \quad (6)$$

Dosazením do (3) za φ_1 a ψ_1 anebo za φ_2 a ψ_2, při čemž $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, dostaneme pak rovnici kuželosečky ze systému Σ, která jde průsečíky kuželoseček l_1 a l_2 s polárami q_1 a q_2 bodu S vzhledem k těmto kuželosečkám. Tedy na př.:

$$\left.\begin{aligned} z_0(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) - 2x_0(Ax + By)\,z - 2y_0(Bx + Cy)\,z - \\ - (2b_1x_0 + 2a_1y_0 + p_1z_0)\,z^2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

2. Připojme ke kuželosečkám (2) ještě pravou kuželosečku l_3 ze systému Σ o rovnici

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2a_3yz + 2b_3xz + p_3z^2 = 0\,.$$

Nechť kuželosečka l_3 nesplývá s žádnou z kuželoseček l_1, l_2. Kuželosečky l_1 a l_2 resp. l_2 a l_3 resp. l_3 a l_1 mají pak projektivní chordály o rovnicích

$$\left.\begin{aligned} 2(b_2 - b_1)\,x + 2(a_2 - a_1)\,y + (p_2 - p_1)\,z = 0\,, \\ 2(b_3 - b_2)\,x + 2(a_3 - a_2)\,y + (p_3 - p_2)\,z = 0\,, \\ 2(b_1 - b_3)\,x + 2(a_1 - a_3)\,y + (p_1 - p_3)\,z = 0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

a tedy nesplývají-li, procházejí jedním bodem, jehož souřadnice jsou:

$$x_0 : y_0 : z_0 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & p_1 \\ 1 & a_2 & p_2 \\ 1 & a_3 & p_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & p_1 & b_1 \\ 1 & p_2 & b_2 \\ 1 & p_3 & b_3 \end{vmatrix} : 2 \begin{vmatrix} 1 & b_1 & a_1 \\ 1 & b_2 & a_2 \\ 1 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Poláry tohoto bodu vzhledem ke kuželosečkám l_1, l_2, l_3 je protínají v bodech, které leží na této kuželosečce systému Σ:

$$\begin{vmatrix} Ax^2 + 2Bxy + Cy, & -(Ax + By)\,z, & -(Bx + Cy)\,z, & z^2 \\ p_1 & b_1 & a_1 & 1 \\ p_2 & b_2 & a_2 & 1 \\ p_3 & b_3 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

K této její rovnici dospějeme nejsnáze tak, že z rovnice (7), (8_1), (8_3) a z identity

$$p_1z_0 + 2b_1x_0 + 2a_1y_0 - (2b_1x_0 + 2a_1y_0 + p_1z_0) = 0$$

eliminujeme x_0, y_0, z_0.

3. Vyšetřujme teď projektivní chordály takových pravých kuželoseček našeho systému Σ, které se dotýkají daných dvou různých přímek r a t. Zvolme za tyto přímky přímky

$$x = 0 \quad \text{a} \quad y = 0\,.$$

Kuželosečka svazku Σ se dotýká těchto přímek tehdy a jen tehdy, když je současně

$$a^2 - Cp = 0\,, \quad b^2 - Ap = 0\,,$$

čili

$$a = \varepsilon_1\sqrt{Cp}\,, \quad b = \varepsilon_2\sqrt{Ap}\,,$$

kde $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Konstanty A, C musí tedy nutně být téhož znaménka. Geometrický význam toho je jasný.

Libovolné dvě různé pravé kuželosečky l_1 a l_2 systému Σ, které se dotýkají zvolených přímek r a t, mají tedy rovnice:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2\varepsilon_1\sqrt{Cp_1}yz + 2\varepsilon_2\sqrt{Ap_1}xz + p_1z^2 = 0\,,$$
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2\varepsilon_1\sqrt{Cp_2}yz + 2\varepsilon_2\sqrt{Ap_2}xz + p_2z^2 = 0\,;$$

pro parametry p_1 a p_2 platí:

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{sgn} p_1 = \operatorname{sgn} p_2 = \operatorname{sgn} A = \operatorname{sgn} B\,, \\ p_1 \neq p_2\,. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Projektivní chordála těchto kuželoseček je tedy

$$2\varepsilon_2\sqrt{|A|}x + 2\varepsilon_1\sqrt{|C|}y + \sigma(\sqrt{|p_1|} + \sqrt{|p_2|})\,z = 0\,,$$

kde $\sigma = \operatorname{sgn} p_1$. Pro libovolné hodnoty parametrů p_1, p_2 omezené podmínkami (9), jde tato chordála vždy bodem

$$(\varepsilon_1\sqrt{|C|},\ -\varepsilon_2\sqrt{|A|},\ 0)\,,$$

který leží na přímce $z = 0$.

Tato vlastnost je projektivním zobecněním známé věty, že chordály kružnic, dotýkajících se dvou přímek, tvoří osnovy přímek.

Analogické úvahy by bylo možno provést i v prostorech o vyšším počtu dimensí. Tak na př. v trojrozměrném prostoru bychom za jejich základ vzali systém kvadrik, které procházejí pevnou kuželosečkou, a pod. Příslušné definice a výpočty by pak byly zcela analogické těm, které jsme udělali v tomto článku.