ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

1

80

40

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 80 • Č. 1 • STR. 1—132 • PRAHA 31. III. 1955

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky"*)

SVAZEK 80 (1955)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Obsah:

Články:

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 80 * PRAHA, 31. III. 1955 * ČÍSLO 1

ČLÁNKY

ROZKLADY PRVKŮ VE SVAZECH SPLŇUJÍCÍCH PODMÍNKU PRO KLESAJÍCÍ ŘETĚZCE

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 16. března 1954.)

DT: 519.5

ϱ-rozkladem je nazváno spojení $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$ $n \geqq 2$ prvků daného svazu, když platí $a_i \varrho \bigvee_{a_j \in \bar{A}} a_i$ pro každé i a pro každou neprázdnou množinu $\bar{A}$, obsaženou v množině $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$ (ϱ je symetrická binární relace mezi prvky svazu). V tomto článku zkoumá autor takovéto ϱ-rozklady ve svazech s podmínkou pro klesající řetězce. Obecné vlastnosti jsou užity na některé speciální typy zmíněných rozkladů.

§ 1. Úvod. V tomto článku jsou zkoumány vzájemné vztahy mezi t. zv. vlastními, direktními a silnými rozklady prvků ve svazech s minimální podmínkou. V § 2 je zaveden pojem ϱ-rozkladu, který všecky tři typy rozkladů zahrnuje a skýtá možnost vysloviti některé obecné věty, jež se dají specialisovat pro jednotlivé případy rozkladů. V § 3 jsou vyšetřovány vlastní rozklady. § 4 je věnován direktním rozkladům; je odvozena nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval právě jeden ϱ-rozklad za jistých omezujících podmínek. Theorémy 3 a 4 ukazují, jaký je rozdíl mezi direktními rozklady v modulárních a nemodulárních svazech. Kromě t. zv. silných rozkladů, jež jsou zkoumány v § 5, jsou studovány ještě v jistém smyslu k nim duální ϱ_4-rozklady a ukázána vzájemná souvislost mezi posledními dvěma typy rozkladů.

V dodatku jsou zkoumány některé podmínky pro to, aby Zassenhausova konstrukce, užitá na dané dva řetězce, neposkytovala vlastní zjemnění a jsou provedeny dvě jednoduché aplikace na ϱ-rozklady.

§ 2. Základní definice. Všude v tomto článku (s výjimkou první části dodatku) předpokládáme svazy, splňující podmínku pro klesající řetězce ([1], str. 37). Proto existuje nulový prvek O.

Relací ϱ budeme rozumět symetrickou binární relaci, definovanou mezi prvky svazu. Výraz

$$c = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n \quad (n \geqq 2) \tag{1}$$

nazveme rozkladem prvku c ve složky $a_1, \ldots, a_n$. Označme ještě $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $A_i = \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$.

Definice 1. *Platí-li* $\bigvee_{a_j \in A_i'} a_j \, \varrho \, a_i$ *pro každé* $i = 1, 2, \ldots, n \geqq 2$, *a pro každou neprázdnou množinu* $A_i' \subset A_i$, *pak nazveme* (1) *ϱ-rozkladem.*

Definice 1'. *Platí-li* $\bigvee_{a_i \in A_I} a_i \, \varrho \, \bigvee_{a_j \in A_{II}} a_j$ *pro každé dvě neprázdné disjunktní množiny* $A_I, A_{II} \subset A$, *pak* (1) *nazveme význačným ϱ-rozkladem.*

Důsledek. Každý význačný ϱ-rozklad je ϱ-rozkladem. Je-li (1) ϱ-rozklad, resp. význačný ϱ-rozklad, pak také $\bigvee_{a_i \in A'} a_i$ (kde $A' \subset A$ je alespoň dvouprvková) je ϱ-rozklad, resp. význačný ϱ-rozklad.

Definice 2. *Relace ϱ je typu I, když platí implikace:* $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_i \, \varrho \, a_{i+1}$ (*pro* $i = 1, \ldots, n-1$) $\Rightarrow$ (1) *je ϱ-rozklad.*

Lemma 1. *Je-li ϱ typu I, pak každý ϱ-rozklad je význačný ϱ-rozklad.*

Důkaz. Nechť (1) je ϱ-rozklad. Buďte A_I, A_{II} dvě neprázdné disjunktní podmnožiny v A. Protože nezáleží na očíslování prvků a_j, lze předpokládat, že $A_I = \{a_1, \ldots, a_j\}$, $A_{II} = \{a_{j+1}, \ldots, a_{j+k}\}$, $j + k \leqq n$. Podle definice 1 je

$$[(a_1 \vee \ldots a_j) \vee a_{j+1} \vee \ldots \vee a_{j+i}] \, \varrho \, a_{j+i+1} \text{ pro } i = 0, 1, \ldots, k-1\,.$$

Odtud dostaneme užitím definice 2, že $(a_1 \vee \ldots \vee a_j) \vee a_{j+1} \vee \ldots \vee a_{j+k}$ je ϱ-rozklad (pro $j, k \geqq 2$), takže jest

$$\bigvee_{a_i \in A_I} a_i \, \varrho \, \bigvee_{a_l \in A_{II}} a_l\,.$$

Pro $j = 1$ nebo $k = 1$ platí předchozí relace rovněž.

Definice 3. *Relace ϱ je typu II, když platí implikace:* $x \, \varrho \, y \Rightarrow$ *pro každé nenulové* $x' \leqq x$ *platí* $x' \, \varrho \, y$.

Uvažujme dále tuto implikaci:

(2) Jsou-li $\bigvee_{\substack{j=1,\ldots,k \\ j \neq \alpha}} x_j$ ϱ-rozklady pro každé $\alpha = 1, 2, \ldots, k$ a platí-li dále $\bigvee_{j=1}^{k-1} x_j \, \varrho \, x_k$, pak $\bigvee_{j=1}^{k} x_j$ je ϱ-rozklad.

Lemma 3. *Nechť ϱ je typu II a splňuje* (2). *Nechť x* non ϱ *0 pro každé x. Pak platí implikace z definice* 2.

Důkaz. Nechť platí $a_1 \, \varrho \, a_2$, $a_1 \vee a_2 \, \varrho \, a_3, \ldots, a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1} \, \varrho \, a_n$. Protože ϱ je typu II a protože x non ϱ *0*, platí také

(3) $\bigvee_{a_i \in A^*} a_i \, \varrho \, a_{i+1}$ pro každou neprázdnou množinu $A^* \subset \{a_1, \ldots, a_i\}$. Nechť všecky rozklady, utvořené z každých k prvků množiny A jsou ϱ-rozklady. Podle (3) platí pro každý takový rozklad $a_{\beta_1} \vee \ldots \vee a_{\beta_k}$ (kde $k, \beta_1, \ldots, \beta_k$ jsou přirozená čísla, pro něž platí $1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k \leq n$) nutně $a_{\beta_1} \vee \ldots \vee a_{\beta_{k-1}} \, \varrho \, a_{\beta_k}$. Tedy podle (2) je ϱ-rozkladem každý rozklad, utvořený z $k + 1$ prvků množiny A. Podle (3) plyne $a_i \, \varrho \, a_j$ pro kterékoliv prvky s různými indexy. Tedy úplnou indukcí podle k dostaneme, že (1) je ϱ-rozklad, což bylo dokázat.

Předpoklad x non $\varrho \, 0$ byl podstatný, jak plyne z následujícího příkladu: Nejprve definujme relaci ϱ. Nechť a_1, a_2 jsou atomy. Nechť platí $0 \, \varrho \, a_1$, $a_1 \, \varrho \, 0$, $a_1 \, \varrho \, a_2$, $a_2 \, \varrho \, a_1$; pro kteroukoliv jinou dvojici nechť relace ϱ neplatí. Relace ϱ je symetrická, je typu II a splňuje (2) (předpoklad v implikaci je zde prázdný). Platí $0 \, \varrho \, a_1$, $0 \vee a_1 \, \varrho \, a_2$, přesto však $0 \vee a_1 \vee a_2$ není ϱ-rozklad, neboť 0 non $\varrho \, a_2$.

Lemma 3. *Nechť ϱ je typu I. Jsou-li* a) *rozklady $a_i = \bigvee_{j=1}^{\tau_i} a_{ij}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ ϱ-rozklady anebo je-li $\tau_i = 1$ a je-li* b) *rozklad* (1) *ϱ-rozkladem, pak také $c = \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{\tau_i} a_{ij}$ je ϱ-rozklad.*

Dokážeme nejprve *pomocnou poučku:*

Nechť ϱ je typu I. Nechť rozklady $c = a \vee b$, $a = \bigvee_{i=1}^{r} a_i$, $b = \bigvee_{j=1}^{s} b_j$ jsou ϱ-rozklady. Pak také $c = \bigvee_{i=1}^{r} a_i \vee \bigvee_{j=1}^{s} b_j$ je ϱ-rozklad.

Důkaz. Poněvadž $c = a \vee b$, $b = \bigvee_{j=1}^{s} b_j$ jsou ϱ-rozklady, plyne z definice 1 $b_s \, \varrho \, b_{s-1}$, $b_s \vee b_{s-1} \, \varrho \, b_{s-2}, \ldots, b_s \vee b_{s-1} \vee \ldots \vee b_2 \, \varrho \, b_1$, $b \, \varrho \, a$. Tedy podle definice 2 je také $c = a \vee b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_s$ ϱ-rozklad.

Poněvadž $a = \bigvee_{i=1}^{r} a_i$ je ϱ-rozklad, platí podle definice 1 vztahy $a_1 \, \varrho \, a_2$, $a_1 \vee a_2 \, \varrho \, a_3, \ldots, a_1 \vee \ldots \vee a_{r-1} \, \varrho \, a_r$.

Protože $c = a \vee b_1 \vee \ldots \vee b_s$ je ϱ-rozklad, platí podle definice 1 $a \, \varrho \, b_1$, $a \vee b_1 \, \varrho \, b_2$, $a \vee b_1 \vee b_2 \, \varrho \, b_3, \ldots, a \vee b_1 \vee \ldots \vee b_{s-1} \, \varrho \, b_s$. Tedy podle definice 2 také $c = \bigvee_{i=1}^{r} a_i \vee \bigvee_{i=1}^{s} b_j$ ϱ-rozklad, což bylo dokázat.

Z pomocné poučky plyne ihned úplnou indukcí tvrzení lemmatu 3.

§ 3. Relace ϱ_1. Definice 4. *Prvek c je ϱ-(ne)rozložitelný, (ne)existuje-li ϱ-rozklad* (1).

Definice 5. *Symetrická relace ϱ_1 nechť je dána takto:*

$$x \, \varrho_1 \, y \Leftrightarrow x \text{ non} \gtreqless y$$

([1], str. 93; [3], kap. 1, oddíl 4) *O. Ore* nazývá ϱ_1-rozklady vlastními rozklady.

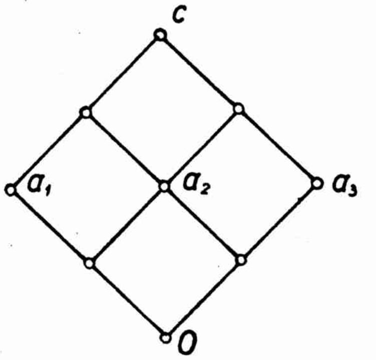
Lemma 4. 1. *Každý ϱ_1-rozklad je význačným ϱ_1-rozkladem.*

2. *Existuje svaz, v němž ϱ_1 není typu I (typu II).*

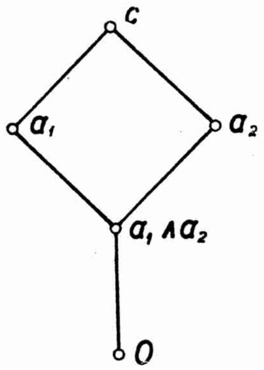
3. *Platí ekvivalence* $x\, \varrho_1\, y \Leftrightarrow \begin{cases} x \vee y > x \\ x \vee y > y \end{cases}$.

4. *Každý ϱ_1-rozložitelný prvek je možno ϱ_1-rozložit v ϱ_1-nerozložitelné složky.*

5. *Platí-li* $a_i\, \varrho_1 \bigvee_{a_j \in A_i} a_j$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n \geqq 2$, *pak* (1) *je ϱ_1-rozklad.*



Obr. 1.



Obr. 2.

Důkaz. 1. Nechť je dán ϱ_1-rozklad (1). Není-li to význačný ϱ_1-rozklad, pak existují neprázdné disjunktní množiny $A_I, A_{II} \subset A$ tak, že platí $\bigvee_{a_\alpha \in A_I} a_\alpha \leqq \bigvee_{a_\beta \in A_{II}} a_\beta$. Pak ale platí $a_\alpha \leqq \bigvee_{a_\beta \in A_{II}} a_\beta$ pro každé $a_\alpha \in A_I$, což odporuje předpokladu, že (1) je ϱ_1-rozklad.

2. Uvažujme svaz, jehož diagram je na obr. 1. Platí $a_1\, \varrho_1\, a_2$, $a_1 \vee a_2\, \varrho_1\, a_3$. Protože $a_2 < a_1 \vee a_3$, není $c = a_1 \vee a_2 \vee a_3$ ϱ_1-rozkladem. Tedy v uvažovaném svazu není ϱ_1 typu I.

Dále uvažujme svaz, jehož diagram je na obr. 2. Platí $a_1\, \varrho_1\, a_2$. Pro prvek $a_1 \wedge a_2$ platí $0 < a_1 \wedge a_2 < a_1$, neplatí však $a_1 \wedge a_2\, \varrho_1\, a_2$. Tedy v uvažovaném svazu není ϱ_1 typu II.

3. Důkaz je zřejmý.

4. Důkaz bude proveden v rámci důkazu theorému 1.

5. Nechť platí $a_i\, \varrho_1 \bigvee_{a_j \in A_i} a_j$ pro $i = 1, 2, \ldots, n \geqq 2$. Kdyby (1) nebyl ϱ_1-rozklad, pak by existovala neprázdná množina $A' \subset A_i$ tak, že by platilo buď $a_i \leqq \bigvee_{a_\gamma \in A'} a_\gamma$ anebo $a_i \geqq \bigvee_{a_\gamma \in A'} a_\gamma$. První nerovnost ihned odporuje předpokladu, ze druhé pak plyne $a_i \geqq a_\gamma$ pro každé $a_\gamma \in A'$, což je opět ve sporu s předpokladem.

Theorém 1. *Relace ϱ nechť je typu I a nechť $x \varrho y \Rightarrow x \varrho_1 y$. Pak každý ϱ-rozložitelný prvek se dá ϱ-rozložit ve vesměs ϱ-nerozložitelné složky.*

Důkaz. Nechť je dána relace ϱ a nechť platí $x \varrho y \Rightarrow x \varrho_1 y$. Dále budiž dán ϱ-rozložitelný prvek e a jeho libovolný ϱ-rozklad $e = \bigvee_{i=1}^{r} e_i$. Podle tvrzení 3 lemmatu 4 platí pro každé $i = 1, 2, \ldots, r$ nerovnost $e_i < e$. Prvek e_i je buďto ϱ-nerozložitelný, pak jej vybereme, anebo existuje ϱ-rozklad $e_i = \bigvee_{j=1}^{\tau_i} e_{ij}$, kde $e_{ij} < e_i$ pro všecka $j = 1, 2, \ldots, \tau_i$. Buďto je prvek e_{ij} ϱ-nerozložitelný, pak jej vybereme, anebo existuje ϱ-rozklad $e_{ij} = \bigvee_{k=1}^{\sigma_{ij}} e_{ijk}$, kde $e_{ijk} < e_{ij}$ pro $k = 1, 2, \ldots, \sigma_{ij}$. V tomto procesu pokračujeme. Poněvadž daný svaz splňuje podmínku pro klesající řetězce, má tento proces nutně konečný počet kroků. Ze všech vybraných ϱ-nerozložitelných prvků utvoříme rozklad. Nechť za prvé platí $x \varrho y \Leftrightarrow x \varrho_1 y$. V uvažovaném rozkladu vyškrtneme všecky složky, obsažené ve spojení ostatních. Zbylý rozklad je nutně ϱ_1-rozklad. Tím je dokázáno tvrzení 4 z lemmatu 4.

Nechť za druhé ϱ je typu I. Pak dle lemmatu 3 je uvažovaný rozklad ϱ-rozkladem. Theorém je dokázán.

§ 4. Relace ϱ_2. Věta o unicitě. Definice 6. *Relace ϱ_2 nechť je charakterisována takto: $x \varrho_2 y \Leftrightarrow x \wedge y = 0$ pro nenulové x, y; x non ϱ_2 0 pro každé x.*

Birkhoff ([1], str. 94) užívá pro ϱ_2-rozklady symboliky $c = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$. ϱ_2-rozklady bývají nazývány direktní. Srovnej také *Ore* ([3], kap. 2, oddíl 1)!

Z definice 6 plyne, že 0 nemůže být složkou žádného ϱ_2-rozkladu a že $x \varrho_2 y \Rightarrow x \varrho_1 y$.

Lemma 5. *Relace ϱ_2 je ekvivalentní s relací ϱ_1 typu II.*

Důkaz. 1. Nechť platí $x \varrho_2 y$, takže $x, y \neq 0, x \wedge y = 0$. Tedy platí $x \text{ non} \gtreqless y$. Nechť $0 < x' < x$. Pak $x' \wedge y = 0$, tedy $x' \varrho_2 y$, a tudíž i $x' \varrho_1 y$.

2. Nechť ϱ_1 je typu II a $x \varrho_1 y$, takže $x, y \neq 0$, $x \wedge y < x$. Kdyby platilo $x \wedge y > 0$, pak (protože ϱ_1 je typu II) by bylo $x \wedge y \varrho x$, což je spor. Proto $x \wedge y = 0$, čili $x \varrho_2 y$.

Důsledek. Platí-li pro nenulové prvky $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ rovnice $0 = a_i \wedge (\bigvee_{a_j \in A_i} a_j)$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, pak (1) je ϱ_2-rozklad.

Lemma 6. *Existuje svaz a v něm ϱ_1-rozklad, jenž není ϱ_2-rozkladem.*

Důkaz. Mějme opět svaz, jehož diagram je na obr. 2. Platí $a_1 \varrho_1 a_2$. Rozklad $a_1 \vee a_2$ je tedy ϱ_1-rozklad, není to však ϱ_2-rozklad, neboť $a_1 \wedge a_2 > 0$.

Pro další nazveme zjemněním rozkladu (1) rozklad $c = \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{\tau_i} a_{ij}$, kde $a_i = \bigvee_{j=1}^{\tau_i} a_{ij}$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Theorém 2. *Relace ϱ nechť je typu I a splňuje implikaci $x \varrho y \Rightarrow x \varrho_1 y$.*

Tvrzení 1. *Existuje-li právě jeden (až na uspořádání složek) ϱ-rozklad prvku c v ϱ-nerozložitelné složky*

(4) $c = e_1 \vee e_2 \vee \ldots \vee e_n$, *pak pro každé dva ϱ-rozklady*

(5a) $c = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_r$,

(5b) $c = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_s$ *platí rovnice*

(6a) $a_i = \bigvee_{j=1}^{s} (a_i \wedge b_j)$ *pro* $i = 1, \ldots, r$,

(6b) $b_j = \bigvee_{i=1}^{r} (a_i \wedge b_j)$ *pro* $j = 1, \ldots, s$.

Tvrzení 2. *Je-li ϱ typu II a platí-li pro každé dva ϱ-rozklady* (5a), (5b) *rovnice* (6a), (6b), *pak existuje ϱ-rozklad, který je společným zjemněním rozkladů* (5a), (5b). *Speciálně existuje právě jeden ϱ-rozklad prvku c v ϱ-nerozložitelné složky.*

Důkaz tvrzení 1. Nechť jsou splněny zmíněné předpoklady.

Nejprve dokážeme pomocnou poučku:

Pro každý ϱ-rozklad $c = \bigvee_{i=1}^{l} g_i$ platí $g_i = \bigvee_{e_\mu \in M_i} e_\mu$ (pro $i = 1, \ldots, l$) kde $M_1 \cup \cup M_2 \cup \ldots \cup M_l$ je rozklad množiny $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ na neprázdné disjunktní části.

Prvek g_i je totiž buďto ϱ-nerozložitelný anebo existuje jeho ϱ-rozklad v ϱ-nerozložitelné složky (podle theorému 2) $g_i = \bigvee_{\gamma=1}^{\tau_i} p_\gamma$. V případě, že g_i je ϱ-nerozložitelný, položme $\tau_i = 1$. Podle lemmatu 3 musí být $p_\gamma \in E$ pro každé $\gamma = 1, \ldots, \tau_i$. Tedy při vhodném označení lze psát $p_\gamma = e_{(i,\gamma)}$ ($\gamma = 1, \ldots, \tau_i$; dvojice $(i, 1), (i, 2), \ldots, (i, \tau_i)$ jsou přirozená čísla, pro něž platí $1 \leqq (i, 1) < < (i, 2) < \ldots < (i, \tau_i) \leqq n$). Bez omezení obecnosti nechť platí $e_1 \leqq g_1 \wedge g_2$. Nechť $1 < (1, 1)$. Pak $e_1 \leqq \bigvee_{\gamma=1}^{\tau_1} e_{(i,\gamma)}$. To ale odporuje předpokladu, že (4) je ϱ_1-rozklad. Tedy $1 = (1, 1)$ a obdobně $1 = (2, 1)$.

Sestrojme rozklad $c = e_1 \vee e_{(1,2)} \vee \ldots \vee e_{(1,\tau_1)} \vee e_1 \vee e_{(2,2)} \vee \ldots \vee e_{(2,\tau_2)} \vee g_3 \vee \vee \ldots \vee g$. Toto zjemnění ϱ-rozkladu $c = \bigvee_{i=1}^{l} g_i$ je dle lemmatu 3 opět ϱ-rozkladem. Avšak tento rozklad není ϱ_1-rozkladem, neboť obsahuje dvakrát tutéž složku e_1. Tedy neplatí $e_1 \leq g_1 \wedge g_2$. Máme celkem výsledek, že e_i non$\leq g_j \wedge g_k$ pro $i = 1, \ldots, n$ a pro různá i, j, nabývající hodnot $1, 2, \ldots, l$. Pomocná poučka je dokázána.

Nechť (5a), (5b) jsou ϱ-rozklady. Předně platí $\bigvee_{j=1}^{s}(a_i \wedge b_j) \leq a_i$ pro $i = 1, \ldots, r$. Za druhé nechť $\bigcup_{i=1}^{r} A_i$ je ten rozklad množiny E v neprázdné disjunktní části, pro něž $a_i = \bigvee_{e_\alpha \in A_i} e_\alpha$. Budiž $\bigcup_{i=1}^{s} B_i$ ten rozklad množiny v neprázdné disjunktní části, pro něž platí $b_i = \bigvee_{e_\beta \in B_i} e_\beta$ pro $i = 1, \ldots, s$. Je-li $A_i \cap B_j \neq 0$, pak platí $a_i \wedge b_j = (\bigvee_{e_\alpha \in A_i} e_\alpha) \wedge (\bigvee_{e_\beta \in \beta_j} e_\beta) \geq \bigvee_{e_\delta \in A_i \cap B_j} e_\delta$. Je-li $A_i \cap B_j = 0$, pak položíme $\bigvee_{e_\delta \in A_i \cap B_j} e_\delta = 0$. Dále platí $\bigcup_{j=1}^{s}(A_i \cap B_j) = A_i \cap (\bigcup_{j=1}^{s} B_j) = A_i \cap E = A_i$ pro $i = 1, \ldots, r$. Tedy dále $\bigvee_{j=1}^{s}(a_i \wedge b_j) = \bigvee_{j=1}^{s}\{(\bigvee_{e_\alpha \in A_i} e_\alpha) \wedge (\bigvee_{e_\beta \in B_j} e_\beta)\} \geq \bigvee_{j=1}^{s} \bigvee_{e_\delta \in A_i \cap B_j} e_\delta = \bigvee_{e_\delta \in A_i} e_\delta = a_i$.

Máme výsledek $\bigvee_{j=1}^{s}(a_i \wedge b_j) \geq a_i$. Tedy celkem $\bigvee_{j=1}^{s}(a_i \wedge b_j) = a_i$. Platí tedy rovnice (6a). Obdobně dokážeme rovnice (6b).

D ů k a z t v r z e n í 2. Nechť platí předpoklady pro tvrzení 2. Pro jisté pořadí $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,r}$ prvků $1, 2, \ldots, r$ a pro jistý index $\tau_i = 1, 2, \ldots, r$ platí pak $a_i \wedge b_{\alpha_{i,h}} > 0$ (pro $h = 1, 2, \ldots, \tau_i$) a dále $a_i \wedge b_{\alpha_{i,h}} = 0$ pro $h = \tau_i + 1, \ldots, r$. Je-li $\tau_i = r$, pak rovnice nepřichází v úvahu. Máme nyní dva případy:

Buďto je $\tau_i = 1$, a pak $a_2 = a_i \wedge b_{\alpha_{i,1}}$, z čehož plyne $a_i \leq b_{\alpha_{i,1}}$, anebo je $\tau_i \neq 1$, a pak z toho, že (5b) je ϱ-rozklad a že ϱ je typu II dostáváme, že také $c = \bigvee_{i=1}^{r} \bigvee_{h=1}^{\tau_i}(a_i \wedge b_{\alpha_{i,h}})$ je ϱ-rozklad.

Předpokládejme dále, že prvky $a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_s$ jsou ϱ-nerozložitelné, což lze učinit podle věty 2. Pak platí $\tau_i = 1$, $a_i \leq b_{\alpha_{i,1}}$ pro každé $i = 1, \ldots, r$. Dále platí $c = \bigvee_{j=1}^{s} b_j \geq \bigvee_{j=1}^{r} b_{\alpha_{j,1}} \geq \bigvee_{j=1}^{r} a_j = c$. Tedy $\bigvee_{j=1}^{s} b_j = \bigvee_{j=1}^{r} b_{\alpha_{j,1}}$. Kdyby platilo $s > r$, pak by existoval index w (různý od $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_r$, a rovný některému z čísel $1, 2, \ldots, s$) tak, že $b_w \leq \bigvee_{j=1}^{r} b_{\alpha_{j,1}}$. Rozklad (5b) by nebyl ϱ_1-rozkladem. Tedy platí $s = r$. Při vhodném označení platí pak rovnost $i = \alpha_{i,1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$. Při tomto označení tedy jest $a_i \leq b_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$.

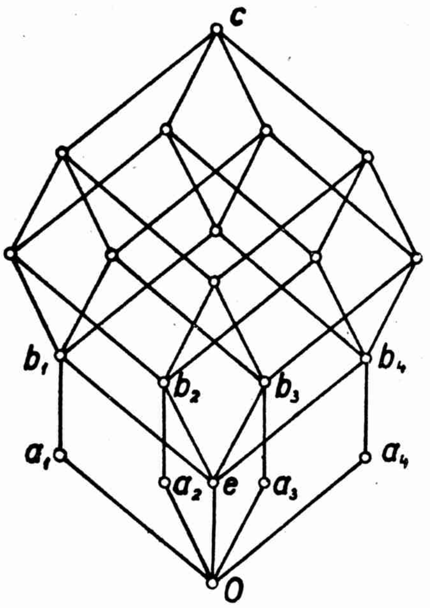
Provedeme-li předchozí úvahy při záměně obou rozkladů (5a), (5b), dostaneme $a_i \geq b_i$ pro $i = 1, \ldots, r$. Tedy celkem $a_i = b_i$ pro $i = 1, \ldots, r$, čímž je tvrzení 2 dokázáno. Je otázka, do jaké míry lze zeslabit předpoklad, že ϱ je typu II.

Theorém 3. *Existuje konečný nemodulární svaz S s ϱ_2-rozkladem $c = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4$ tak, že platí*

(7) $e = (a_i \vee a_j) \wedge (a_k \vee a_l) > 0$ *pro jakoukoliv permutaci i, j, k, l z prvků 1, 2, 3, 4.*

Důkaz. Na obrazci 3 je diagram svazu S. Množina prvků $x \geqq e$ tvoří v S podsvaz S', který je Booleovou algebrou, vytvořenou prvky $b_1, \ldots, b_4$.

Pak zřejmě platí vztahy (7). Z diagramu je patrné, že $a_i \wedge (\bigvee_{j \neq i} a_j) = 0$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Tedy $c = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4$ je ϱ_2-rozklad.



Obr. 3.

Dokázaná věta se dá vyslovit také takto: v nemodulárním svazu nemusí být ϱ_2-rozklad význačným ϱ_2-rozkladem. V další části článku omezíme se na *modulární* svazy a nebudeme to zvláště zdůrazňovat.

Theorém 4. *Každý ϱ_2-rozklad je význačným ϱ_2-rozkladem.*

Důkaz. Buď dán ϱ_2-rozklad (1). Máme ukázat, že platí

(8) $(\bigvee_{a_\alpha \in A_I} a_\alpha) \wedge (\bigvee_{a_\beta \in A_{II}} a_\beta) = 0$

pro každé dvě neprázdné disjunktní množiny A_I, A_{II}, obsažené v A. Vyšetřujme nyní tyto dva výroky:

(M_i) (8) platí, když jedna z množin A_I, A_{II} má právě i prvků.

Zde jest $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ a zřejmě $M_i \Leftrightarrow M_{n-i}$.

(N_i) Jsou-li A', A^i, A neprázdné navzájem disjunktní množiny obsažené v A, při čemž A^i obsahuje právě i prvků, pak

(9) $(\bigvee_{a_\alpha \in A'} a_\alpha \vee \bigvee_{a_\xi \in A^i} a_\xi) \wedge (\bigvee_{a_\alpha \in A'} a_\alpha \vee \bigvee_{a_\beta \in A''} a_\beta) = \bigvee_{a_\alpha \in A'} a_\alpha$ (pro $i = 1, \ldots, n - 2$).

(M_1) platí, protože (1) je ϱ_2-rozkladem. Dokážeme

(10,1) $(M_i) \Rightarrow (N_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$.

Dle (M_i) platí $\bigvee a_\xi \wedge (\bigvee a_\alpha \vee \bigvee a_\beta) = 0$. Užijeme modularity. Ze vztahu $\bigvee a_\alpha \leq \bigvee a_\alpha \vee \bigvee a_\beta$ ihned plyne (9) pro dané i. Dále dokážeme implikaci

(10,2) $(N_i) \Rightarrow (M_{i+1})$ pro $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$.

Nechť platí (N_i). V (9) volme $A' = \{a_k\}$, takže $a_k = (a_k \vee \bigvee a_\xi) \wedge (a_k \vee \bigvee a_\beta)$. Z modularity plyne $a_k = a_k \vee [(\bigvee a_\xi) \wedge (a_k \vee \bigvee a_\beta)]$, a tedy $a_k \geq (\bigvee a_\xi) \wedge$ $\wedge (\bigvee a_\beta \vee a_k)$.

Vyberme nyní z A'' libovolný prvek a_l a nahraďme jej prvkem a_k. Ostatní prvky z A'' ponechme. Dostaneme tak množinu A'''. Aplikujme (9), kde za množiny A', A'', A^i vezmeme množiny $\{a_l\}$, A''', A^i. Platí $a_l = (a_l \vee \bigvee a_\xi) \wedge$ $\wedge (a_l \vee \bigvee_{a_\gamma \in A'''} a_\gamma)$; z modularity opět plyne $a_l \geq (\bigvee a_\xi) \wedge (a_l \vee \bigvee a_\gamma)$, kde ovšem $a_l \vee \bigvee a_\gamma = a_k \vee \bigvee a_\beta$. Poněvadž platí $a_k \wedge a_l = 0$, jest $(\bigvee a_\xi) \wedge (a_k \vee \bigvee a_\beta) = 0$. Označení zřejmě neomezuje obecnost. Implikace (10,2) je dokázána.

Poněvadž (10,1), (10,2) implikují $(M_i) \Rightarrow (M_{i+1})$ a poněvadž platí (M_1), je dle úplné indukce věta dokázána. Z ní plyne tento důsledek:

(1) *je ϱ_2-rozklad, když a jen když prvky $a_1, \ldots, a_n$ vytvořují Booleovu algebru délky n.*

Důkaz. Existuje-li uvažovaná Booleova algebra, pak zřejmě (1) je ϱ_2-rozklad. Nechť tedy naopak (1) je ϱ_2-rozklad. Považujme prvky $a_1, \ldots, a_n$ za neprázdné disjunktní množiny. Svazové spojení lze považovat za sjednocení a také svazový průsek lze považovat za průnik na základě (M_i), (N_i). Tím je důkaz proveden.

Theorém 5. *Platí-li pro nenulové prvky $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$*

(11_i) $(a_1 \vee \ldots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0$ pro $i = 1, \ldots, n-1$, *pak* (1) *je ϱ_2-rozklad.* — *Jinými slovy, relace ϱ_2 je typu I.*

Důkaz. Podle lemmatu 5 je ϱ_2 typu II. Lze tedy užít lemmatu 2. Předem nutno však dokázat implikaci (2), která v našem případě zní: Je-li $\bar{a}_i = \bigvee_{a_j \in A_i} a_j$ ϱ_2-rozklad pro každé i, pak také (1) je ϱ_2-rozklad. Důkaz hned provedeme.

Nechť platí předpoklad a neplatí závěr. Pak platí bez omezení obecnosti $a_1 \wedge \bar{a}_1 > 0$. Vyšetříme dvojím způsobem průsek $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_n$. Dle modularity platí $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_n = (\bar{a}_1 \wedge a_1) \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. Nyní musí být $(\bar{a}_1 \wedge a_1) \vee (a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}) >$ $< a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$, neboť v opačném případě platí místo nerovnosti rovnost a z té plyne $\bar{a}_1 \wedge a_1 \leq a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. To ale není možné, neboť $a_1 \wedge (a_2 \vee$ $\vee \ldots \vee a_{n-1}) = 0$ podle předpokladu, že rozklad $a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1}$ je ϱ_2-rozklad (viz obr. 4).

Podle modularity platí $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_n = (a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1} \vee (a_n \wedge \bar{a}_n)$. Avšak podle (11_1) je $a_n \wedge \bar{a}_n = 0$, tedy $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_n = a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$, což je spor s předchozím výsledkem, podle něhož místo rovnosti platí nerovnost. Implikace je dokázána, a tím i celá věta.

Poznámka. Věty 4, 5 jsme dokázali nezávisle na sobě. Jejich vzájemný poměr popisuje lemma 1, aplikované na ϱ_2. Z něho a z theorému 5 vyplývá theorém 4.

Podle theorému 1 je každý ϱ_2-rozložitelný prvek ϱ_2-rozložitelný na vesměs ϱ_2-nerozložitelné složky.

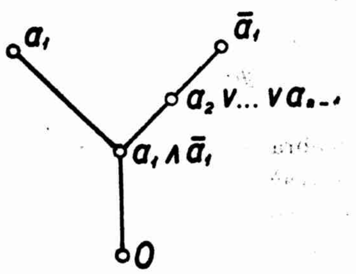
§ 5. **Relace** ϱ_3. Zavedeme mezi prvky svazu symetrickou binární relaci ϱ_3 touto definicí:

Definice 7. *Pro nenulová* x, y *jest* $x\,\varrho_3\,y \Leftrightarrow (x \vee p) \wedge (y \vee p) = p$ *pro každé* p; x non ϱ_3 0 *pro každé* x.

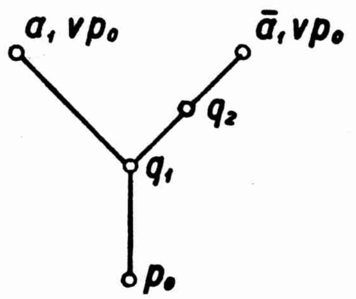
Srovnej ([3], kap. II, oddíl 3).

Důsledek: Položíme-li $p = 0$ dostaneme $x\,\varrho_3\,y \Rightarrow x\,\varrho_2\,y$.

Theorém 6. *Relace* ϱ_3 *je typu II i typu I.*



Obr. 4.



Obr. 5.

Důkaz. Nechť $x\,\varrho_3\,y$, $0 < x' \leq x$. Pak pro každé p platí $p \leq (x' \vee p) \wedge (y \vee p) \leq (x \vee p) \wedge (y \vee p) = p$, tedy platí $(x' \vee p) \wedge (y \vee p) = p$, a tedy $x'\,\varrho_3\,y$, takže relace ϱ_3 je typu II. Nechť za druhé platí $a_1\,\varrho_3\,a_2$, $a_1 \vee a_2\,\varrho_3\,a_3$ $\ldots$, $a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1}\,\varrho_3\,a_n$. Podle lemmatu 2 stačí dokázat implikaci: Je-li každý rozklad $\bar{a}_i = \bigvee_{a_j \in A_i} a_j$ ϱ_3-rozklad $(i = 1, \ldots, n)$, pak také (1) je ϱ_3-rozklad.

Nechť platí premisa z implikace a neplatí její závěr. Pak existuje jistý prvek p_0 tak, že platí $p_0 < (a_1 \vee p_0) \wedge (\bar{a}_1 \vee p_0)$ (bez omezení obecnosti). Položme $q = (\bar{a}_1 \vee p_0) \wedge (\bar{a}_n \vee p_0)$, $q_1 = (\bar{a}_1 \vee p_0) \wedge (a_1 \vee p_0)$, $q_2 = p_0 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. Z modularity plyne $q = q_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. Kdyby dále platilo $q_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1} = q_2$, pak $q_1 \leq q_2$, $q_1 \leq a_1 \vee p_0$, a tedy $q_1 \leq (a_1 \vee p_0) \wedge q_2$. Na druhé straně je zřejmá nerovnost $q_1 \geq q_2 \wedge (a_1 \vee p_0)$. Tedy celkem $q_1 = q_2 \wedge (a_1 \vee p_0)$. Dle předpokladu však $p_0 < q_1$, tedy $p_0 < q_2 \wedge (a_1 \vee p_0)$. To ale není možné, neboť $a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1}$ je ϱ_3-rozklad. Tedy platí $q_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1} > q_2$ (viz obr. 5). Tedy konečně $q > q_2$.

Podle modularity platí dále $q = [(\bar{a}_n \vee p_0) \wedge (a_n \vee p_0)] \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. Podle $\bar{a}_n\,\varrho_3\,a_n$ plyne z předchozího $q = q_2$, což je spor s předešlým $q > q_2$. Tedy ϱ_3 je typu I.

Poznámka. Podle lemmatu 1 je každý ϱ_3-rozklad význačným ϱ_3-rozkladem. Podle theorému 1 dá se každý ϱ_3-rozložitelný prvek ϱ_3-rozložit v ϱ_3-nerozložitelné složky.

Nyní dokážeme tuto *ekvivalenci* (viz [2], kap. I, odd. 4, věta 3):

(12) $(a_1 \wedge a_2) \vee a_3 = (a_1 \vee a_3) \wedge (a_2 \vee a_3) \Leftrightarrow (a_1 \vee a_2) \wedge a_3 = (a_1 \wedge a_3) \vee$ $\vee (a_2 \wedge a_3)$.

Důkaz. Z levé strany plyne ihned $[(a_1 \wedge a_2) \vee a_3] \wedge a_1 = (a_1 \vee a_3) \wedge (a_2 \vee$ $\vee a_3) \wedge a_1$. Z modularity a z toho, že $a_1 \wedge (a_1 \vee a_3) = a_1$, dostaneme $(a_1 \wedge a_2) \vee$ $\vee (a_1 \wedge a_3) = a_1 \vee (a_2 \wedge a_3)$. Zcela obdobně dostaneme $(a_2 \wedge a_1) \vee (a_2 \wedge a_3) =$ $= a_2 \wedge (a_1 \vee a_3)$. Z rovnice $(a_1 \wedge a_2) \vee (a_1 \wedge a_3) = a_1 \wedge (a_2 \vee a_3)$ plyne $(a_1 \wedge$ $\wedge a_2) \vee (a_1 \wedge a_3) \vee a_2 = [(a_2 \vee a_3) \wedge a_1] \vee a_2$. Na základě modularity a podle toho, že $(a_1 \wedge a_2) \vee a_2 = a_2$, dostaneme $(a_1 \wedge a_3) \vee a_2 = (a_2 \vee a_1) \wedge$ $\wedge (a_2 \vee a_3)$. Obdobně dostaneme rovnost $(a_2 \wedge a_3) \vee a_1 = (a_1 \vee a_2) \wedge (a_1 \vee$ $\vee a_3)$. Z kterékoliv z obou posledních rovnic plyne konečně $(a_1 \vee a_2) \wedge a_3 =$ $= (a_1 \wedge a_3) \vee (a_2 \wedge a_3)$. Vzhledem ke svazové dualitě je ekvivalence dokázána.

Lemma 7. *Platí-li* $(x \vee p) \wedge (y \vee p) = p$ *pro každé* p, *pak platí pro každé* p $(x \vee y) \wedge p = (x \wedge p) \vee (y \wedge p)$.

Důkaz. Pro $p = 0$ dostaneme z předpokladu $x \wedge y = 0$. Tedy platí rovnost $(x \wedge y) \vee p = (x \vee p) \wedge (y \vee p)$. Dle (12) plyne hledaný závěr.

Theorém 7. *Každý* ϱ_3*-rozložitelný prvek dá se* ϱ_3*-rozložit právě jedním způsobem (až na uspořádání složek) v* ϱ_3*-nerozložitelné složky.*

Důkaz. Uvažujme ϱ_3-rozklady (5a), (5b). Pak platí rovnice (6a), (6b). Z (5b) totiž plyne dle lemmatu 7 $(a_i \wedge b_1) \vee (a_i \wedge b_2) = a_i \wedge (b_1 \vee b_2)$, $[a_i \wedge (b_1 \vee b_2)] \vee (a_i \wedge b_3) = a_i \wedge (b_1 \vee b_2 \vee b_3), \ldots, [a_i \wedge (b_1 \vee \ldots \vee b_{s-1})] \vee$ $\vee (a_i \wedge b_s) = a_i \wedge c = a_i$.

Podobně pro (6b). Poněvadž platí $x \varrho_3 y \Rightarrow x \varrho_1 y$ a poněvadž ϱ_3 je typu I i typu II, plyne z druhého tvrzení theorému 2 hledaný závěr o unicitě.

§ 6. Relace ϱ_4. Definice 8. $x \varrho_4 y \Leftrightarrow x \varrho_1 y, (x \vee y) \wedge p = (x \wedge p) \vee (y \wedge p)$ *pro každé* p.

Poznámka. Dle (12) platí spolu s rovností $(x \vee y) \wedge p = (x \wedge p) \vee (y \wedge p)$ také rovnost $(x \wedge y) \vee p = (x \vee p) \wedge (y \vee p)$.

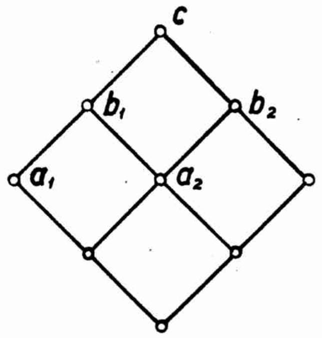
Theorém 8. *Platí-li* $a_i \varrho_4 \bigvee_{a_j \in A_i} a_j = \bar{a}_i$ *pro každé* $i = 1, \ldots, n \geq 2$, *pak* (1) *je* ϱ_4*-rozklad.*

Důkaz. Nechť tedy platí $a_i \varrho_4 \bar{a}_i$ pro $i = 1, \ldots, n \geq 2$. Nechť platí (1). Tedy $c \wedge p = (\bar{a}_1 \wedge p) \vee (a_1 \wedge p)$. Nechť $d = \bigvee_{a_\omega \in A_2'} a_\omega$, kde $a_1 \in A_2' \subset A$. Jest $c \wedge p \wedge d = [(\bar{a}_1 \wedge p) \vee (a_1 \wedge p)] \wedge d$. Pro pravou stranu této rovnice platí podle modularity: $[(\bar{a}_1 \wedge p) \vee (a_1 \wedge p)] \wedge d = (a_1 \wedge p) \vee (\bar{a}_1 \wedge p \wedge d)$.

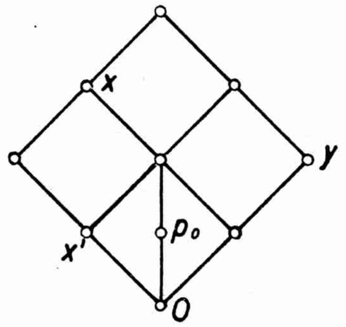
Z modularity plyne dále, že $d \wedge \bar{a}_1 = \bigvee_{a_\tau \in A_2''} a_\tau$, kde A_2'' vznikne z A_2' odebráním prvku a_1. Pro levou stranu uvažované rovnice platí $c \wedge p \wedge d = p \wedge d$, neboť $c > d$. Máme výsledek: $d \wedge p = (a_1 \wedge p) \vee (\bigvee_{a_\tau \in A_2''} a_\tau \wedge p)$, kde $d = a_1 \vee \bigvee_{a_\tau \in A_2''} a_\tau$.
Protože označení indexy 1, 2 neomezuje obecnost, je tím věta dokázána.

Lemma 8. *Existuje svaz, v němž ϱ_4 není typu I (typu II).*

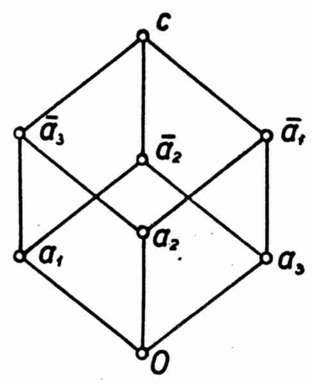
Důkaz. Dán svaz s diagramem na obr. 6. Pro libovolné tři prvky tohoto svazu platí distributivní zákony, tedy $c = b_1 \vee b_2$, $b_1 = a_1 \vee a_2$ jsou ϱ_4-rozklady (vztahy $b_1 \varrho_1 b_2$, $a_1 \varrho_1 a_2$ jsou splněny). Avšak $c = a_1 \vee a_2 \vee b_2$ není ϱ_4-rozklad, neboť $a_2 < b_2$. První tvrzení je tím dokázáno.



Obr. 6.



Obr. 7.



Obr. 8.

Uvažujme nyní modulární svaz, jehož diagram je na obr. 7. Odstraníme-li prvek p_0, zbude distributivní podsvaz; platí v něm tedy $(x \wedge p) \vee (y \wedge p) = (x \vee y) \wedge p$, kde p je libovolný prvek tohoto podsvazu. Z diagramu se přesvědčíme, že platí také $(x \wedge p_0) \vee (y \wedge p_0) = (x \vee y) \wedge p_0$. Poněvadž je $x \varrho_1 y$, jest tedy $x \varrho_4 y$.

Prvek x' splňuje nerovnost $0 < x' < x$. Z diagramu je patrné, že $x' \wedge p_0 = 0$, $y \wedge p_0 = 0$, $(x' \vee y) \wedge p_0 = p_0$, a tedy $(x' \vee y) \wedge p_0 > (x' \wedge p_0) \vee (y \wedge p_0)$. Neplatí tedy $x' \varrho_4 y$. Druhé tvrzení je dokázáno.

Poznámka. Existují-li ϱ_4-rozklady (5a), (5b), pak platí rovnice (6a), (6b). Důkaz provedeme na základě rovnic (12) obdobně jako důkaz theorému 7. Je-li ϱ_4 typu II, pak platí $x \varrho_4 y \Rightarrow x \varrho_3 y$. Důkaz je zřejmý, neboť je $x \wedge y = 0$.

Dokážeme ještě jednu existenční větu:

Theorém 9. *Existuje relace ϱ taková, že ačkoliv platí $a_i \varrho \bar{a}_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n \geqq 2$, přesto (1) není ϱ-rozkladem.*

Důkaz. Dán konečný distributivní svaz, jehož diagram je na obr. 8. Označíme symbolem $\mathrm{d}(x)$ dimensi prvku x.

Relaci ϱ definujme takto: $x \varrho y \Leftrightarrow x \varrho_1 y$, $|\mathrm{d}(x) - \mathrm{d}(y)| = 1$.

Tato relace je symetrická. Platí $a_i \varrho \bar{a}_i$ pro $i = 1, 2, 3$. Avšak $\mathrm{d}(a_i) = \mathrm{d}(a_j)$, a tedy a_i non ϱa_j. Tedy $a_1 \vee a_2 \vee a_3$ není ϱ-rozklad. Věta je dokázána.

Dodatek

O nezjemněných Zassenhausových řetězcích

Věta 1. *Mějme v modulárním svazu S řetězce*

(1a) $a = a_0 > a_1 > \ldots > a_n = b$,

(1b) $a = b_0 > b_1 > \ldots > b_n = b$.

Zassenhausova konstrukce, provedená na (1a), (1b) *nedává vlastní zjemnění, když a jen když existuje permutace τ čísel* $0, 1, \ldots, n - 1$ *tak, že platí*

(2,1) $a_i \wedge b_{\tau(i)+1} = a_{i+1} \wedge b_{\tau(i)}$,

(2,2) $a_i \vee b_{\tau(i)+1} = a_{i+1} \vee b_{\tau(i)}$ pro $i = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Důkaz. Nechť Zassenhausova konstrukce neposkytuje vlastního zjemnění. Pak z [4], (věta 1.2, 1.6, 1.7) plyne existence permutace τ takové, že

$$a_i/a_{i+1} \underset{d}{\sim} a_i \wedge b_j/a_{i+1} \wedge b_{j+1} \overset{d}{\sim} b_j/b_{j+1},$$

$$a_i/a_{i+1} \overset{d}{\sim} a_i \vee b_j/a_{i+1} \vee b_{j+1} \underset{d}{\sim} b_j/b_{j+1},$$

kde $j = \tau(i)$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Odtud a z [5], (věta 2.8 a věta k ní duální) plyne (2,1), (2,2).

Nechť naopak platí (2,1), (2,2). Pak $a_{i,\tau(i)} = a_{i+1} \vee (a_i \wedge b_{\tau(i)}) = a_i \wedge (a_{i+1} \vee b_{\tau(i)}) = a_i$ podle (2,2) a $a_{i,\tau(i)+1} = a_{i+1} \vee (a_i \wedge b_{\tau(i)+1}) = a_{i+1}$ podle (2,1), takže Zassenhausova konstrukce nezjemní řetězec (1a), a tudíž ani (1b).

Věta 2. *Ve větě 1 jest* $\tau(i) = n - i + 1$ (*pro* $i = 0, 1, \ldots, n - 1$), *právě když místo rovnic* (2,1), (2,2) *platí rovnice*

(3,1) $a_{i+1} \wedge b_{n-i-1} = b$,

(3,2) $a_{i+1} \vee b_{n-i-1} = a$ *pro* $i = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Důkaz. Je-li $\tau(i) = n - i - 1$, pak (3,1), (3,2) dokážeme z (2,1), (2,2) snadno úplnou indukcí podle i.

Platí-li (3,1), (3,2), platí i (2,1), (2,2) pro $\tau(i) = n - i - 1$.

Věta 3. *Nechť S' je podsvaz, vytvořený v modulárním svazu S řetězci* (1a), (1b). *S' je konečná Booleova algebra délky n, právě když platí rovnice* (3,1), (3,2).

Důkaz. a) Z [1], (věta 5, str. 72) vyplývá, že S' je konečný distributivní podsvaz v S.

Nechť platí rovnice (3,1), (3,2). Z těchto rovnic a z modularity plyne

$$\bigvee_{j=0}^{i} (a_j \wedge b_{n-j-1}) = b_{n-i-1},$$

$$\left(\bigvee_{j=0}^{i} (a_j \wedge b_{n-j-1})\right) \wedge (a_{i+1} \wedge b_{n-i-2}) = b_{n-i-1} \wedge a_{i+1} \wedge b_{n-i-2} =$$
$$= a_{i+1} \wedge b_{n-i-1} = b.$$

Podle theorému 5 jest rozklad $\bigvee_{i=0}^{n-1}(a_i \wedge b_{n-i-1})$ ϱ_2-rozklad. Z předchozího a z rovnice (3,2) snadno plyne, že je to rozklad prvku a.

Z předchozího plyne, že prvky $a_i \wedge b_{n-i-1}$ jsou generátory svazu S'. Tedy podle důsledku z theorému 4 je S' Booleovou algebrou délky n.

b) Předpokládejme, že S' je Booleova algebra délky n a že (1a), (1b) jsou její vytvořující řetězce. Snadno dokážeme toto tvrzení: Lze určit pořadí $c_1, \ldots, c_n$ atomů z S' tak, že $a_i = c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_{n-i}$, $b_i = c_{i+1} \vee c_{i+2} \vee \ldots \vee c_n$ pro $i = 1, \ldots, n-1$. Z tohoto tvrzení ihned plyne platnost rovnic (3,1), (3,2).

Nakonec provedeme dvě jednoduché aplikace. V modulárním svazu s podmínkou pro klesající řetězce buďte dány ϱ-rozklady

(4v) $u = v_1 \vee v_2 \vee \ldots \vee v_r$,

(4w) $u = w_1 \vee w_2 \vee \ldots \vee w_r$,

kde všecky složky jsou ϱ-nerozložitelné a kde platí buď $\varrho = \varrho_1$ nebo $\varrho = \varrho_2$.

Pak lze sestrojit řetězce

(5v) $u > v_2 \vee \ldots \vee v_r > v_3 \vee \ldots \vee v_r > \ldots > v_r \geqq w_1 \vee v_r$,

(5w) $u > w_1 \vee \ldots \vee w_{r-1} > w_1 \vee \ldots \vee w_{r-2} > \ldots > w_1 \geqq w_1 \vee v_r$.

Protože platí Kurošova-Oreova, resp. Oreova věta o náhradě (viz [1], str. 93—95), lze při vhodném očíslování sestrojit ϱ-rozklady

(6i) $u = w_1 \vee \ldots \vee w_i \vee v_{i+1} \vee \ldots \vee v_r$ pro $i = 1, \ldots, r-1$.

Platí-li $\varrho = \varrho_2$, pak z theorému 4 plyne $(w_1 \vee \ldots \vee w_i) \wedge (v_{i+1} \vee \ldots \vee v_r) = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, r-1$. Podmínky věty 2 jsou tedy splněny a můžeme vyslovit tuto větu:

Věta 4. *Jsou-li ϱ_2-rozklady (6i) odvozeny z ϱ_2-rozkladů (4v), (4w) s ϱ_2-nerozložitelnými složkami, pak Zassenhausova konstrukce, provedená na (5v), (5w), nedává vlastní zjemnění.*

V dalším budeme ještě vyšetřovat relaci ϱ_1.

Věta 5. *Nechť ϱ_1-rozklady (6i) jsou odvozeny z ϱ_1-rozkladů (4v), (4w) s ϱ_1-nerozložitelnými složkami a nechť*

a) *platí pro každé $i = 1, \ldots, r-1$*

(7i) $(w_1 \vee \ldots \vee w_i) \wedge (v_{i+1} \vee \ldots \vee v_r) = w_1 \wedge v_r$.

Pak Zassenhausova konstrukce, užitá na (5v), (5w), neposkytuje vlastní zjemnění.

b) *Zassenhausova konstrukce, provedená na (5v), (5w) nedává vlastní zjemnění. Pak platí rovnice (10i) pro každé $i = 1, \ldots, r-1$.*

Důkaz. Případ a) je zřejmý. Obraťme se tedy k případu b). Z rovnice (6,1) plyne $\tau(1) = r - 1$. Z rovnic (9, 2), ..., (9, $r-1$) plyne $\tau(i) \leqq r - i$. Kdyby platilo $\tau(i) < r - i$, pak $v_i \vee \ldots \vee v_r \leqq w_1 \vee \ldots \vee w_{r-\tau(i)} \vee v_{i+1} \vee \ldots \vee$

$\vee v_r$, a tedy buď $v_i \leqq w_1 \vee \ldots \vee w_{r-\tau(i)} \vee v_{i+1} \vee \ldots \vee v_r$ (pro $i = 1, \ldots, r - 1$), což odporuje tomu, že $(6i)$ je ϱ_1-rozklad anebo $v_r \leqq w_1 \vee \ldots \vee w_{r-\tau(r)}$, což odporuje tomu, že $(9, r - 1)$ je ϱ_1-rozklad. Tedy platí $\tau(i) = r - i$ pro každé $i = 1, \ldots, r$.

LITERATURA

[1] *G. Birkhoff*, Lattice theory, rev. edition, New York 1948.

[2] *O. Ore*, On the foundation of abstract algebra I, Ann. of Math. *36* (1935), str. 406 až 437.

[3] *O. Ore*, On the foundation of abstract algebra II, Ann. of Math. *37* (1937), str. 265 až 292.

[4] *L. Jánoš*, Свойства уплотнения Цассенхауза, Чехосл. мат. ж. *3* (*78*), str. 159—182.

[5] *Vl. Kořínek*, Svazy, v nichž platí obecně věta Jordan-Hölderova, Rozpravy II. tř. české akademie, ročník LIX, číslo 23.

Резюме.

РАЗЛОЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СТРУКТУРЫ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ

Вацлав Гавел (Václav Havel), Прага.

(Поступило в редакцию 16. III. 1954 г.)

В работе определяется симметрическое бинарное отношение ϱ для элементов данной структуры с условием минимальности. Соединение

$$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n \quad (n > 1)$$

называется ϱ-разложением, если

$$a_i \varrho (a_{k_1} \vee a_{k_2} \vee \ldots \vee a_{k_j})$$

справедливо для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ и для каждого набора взаимно различных индексов $k_1, k_2, \ldots, k_j$ из $\{1, 2, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, n\}$.

Мы получим *собственные ϱ-разложения*, если будет выполняться условие

$$x \varrho y \Leftrightarrow x \operatorname{non} \gtreqless y\,,$$

прямые ϱ-разложения, если будет

$$x \varrho y \Leftrightarrow x \operatorname{non} \gtreqless y\,, \quad x \wedge y = 0\,,$$

и *сильные ϱ-разложения*, если

$$x \varrho y \Leftrightarrow x \operatorname{non} \gtreqless y\,, \quad (x \vee p) \wedge (y \vee p) = p$$

для всякого p из данной структуры.

В работе изучаются общие свойства ϱ-разложений и связи между тремя сверху определенными специальными типами ϱ-разложений.

Summary.

THE DECOMPOSITIONS OF ELEMENTS OF THE LATTICE WITH MINIMAL CONDITION

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Received March 16, 1954.)

In the preceding paper a symmetrical binar relation ϱ between the elements of a given lattice with minimal condition is introduced. The join $a_1 \vee a_2 \vee \vee \ldots \vee a_n$ $(n > 1)$ is called ϱ-decomposition, if $a_i \; \varrho \; (a_{k_1} \vee a_{k_2} \vee \ldots \vee a_{k_j})$ holds for every $i = 1, \ldots, n$ and for every choice of the various $k_1, \ldots, k_j$ from $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$.

We obtain the proper decompositions for $[x \; \varrho \; y \Leftrightarrow x \text{ non} \gtreqless y]$, the direct decompositions for $[x \; \varrho \; y \Leftrightarrow x \text{ non} \gtreqless y, \; x \wedge y = 0]$, the strong decompositions for $[x \; \varrho \; y \Leftrightarrow x \text{ non} \gtreqless y, \; (x \vee p) \wedge (y \vee p) = p$ for every p of a given lattice$]$.

In the paper some general properties of the ϱ-decompositions and some connections between the special types of ϱ-decompositions are investigated.

NĚKTERÁ POŘADOVÁ ROZDĚLENÍ A JEJICH POUŽITÍ

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Došlo dne 24. března 1954.) DT:519.5

S použitím výsledků kombinatorických úvah o množině čísel $1, 2, \ldots, N$ jsou zde odvozeny dva pořadové testy, schopné nahradit t — test s asymptotickou vydatností 0,955.

1. Úvod a shrnutí. Tato práce, až na malé změny, je jednou ze tří částí disertace, kterou jsem podal v roce 1949. Jsou z ní odvozeny tři zákony rozdělení, vyplývající z jednoduchých úvah o souboru čísel $1, 2, \ldots, N$, a dále je v ní naznačeno použití těchto rozdělení na testování nulových hypothes. Čísla $1, 2, \ldots, N$ v těchto testech hrají roli pořadí, takže běží o tak zvané pořadové testy. Rozdělení a test, označené písmenem α, se zde patrně vyskytují po prvé. Avšak za původce myšlenky, na které je tento test založen, je nutno pokládat R. A. FISHERA, který v III. kapitole svého „The Design of Experiments" uvádí test, založený na stejném principu jen s tím rozdílem, že nebere za základ pořadí hodnot, ale hodnoty samy. Tím se ovšem test stává po počtářské stránce velmi pracným, neboť pro každý konkretní případ si musíme vypočíst zvláštní zákon rozdělení. Při α-testu naopak, jakmile je jednou rozdělení α vypočteno a tabelováno, je provedení testu dílem několika minut. Rozsáhlá tabulka kritických hodnot α pro 5 stupňů významnosti a pro 10 až 50 párů pozorování je uvedena v této práci.

K rozdělení a testu, označenému písmenem β, dospěl již v roce 1945 WILCOXON v článku [1], u nás nepřístupném. Proto se jím budu zabývat jen potud, pokud se má metoda jeho zpracování jeví jako originální. Třetí rozdělení a test, označené písmenem γ, tvořící s předešlými ucelený systém, je dobře ve statistice znám z úloh o pořadovém koeficientu korelace τ.

Pro osud testů, uvedených v této práci, rozhodující jsou jejich přednosti a nedostatky vzhledem k běžnému Studentovu t-testu, kterého se používá k zjištění významnosti

(i) rozdílu mezi průměry dvou spárovaných výběrů,
(ii) rozdílu mezi průměry dvou nespárovaných výběrů,
(iii) regresního koeficientu.

V případě (i) může být t-test nahrazen α-testem, v případě (ii) β-testem (t. j. Wilcoxonovým testem resp. testem pomocí Mann-Whitneyovy U-statistiky), a v případě (iii) γ-testem.[1]) Hlavní výhodou uvedených pořadových testů je jejich jednoduchost a rychlost, a to, že vycházejí z obecnějších, a tím reálnějších předpokladů. Také jejich vydatnost není špatná, neboť jak ukázal VAN DER VAERDEN v práci [3] asymptotická vydatnost β-testu činí $\frac{3}{\pi} = 0{,}955$. Stejný výsledek platí i pro α-test, což bych chtěl ukázat ve zvláštním článku. Nesmíme však při všech kladech pořadových testů zapomínat na tu důležitou okolnost, že případy, kdy je nutno provést jen test významnosti, jsou poměrně řídké. Vždy, jakmile je významnost prokázána, je nutno zároveň stanovit interval spolehlivosti, a tu, zatím co t-test jej poskytuje bezprostředně, pořadové testy jej mohou poskytnout jen s neúměrně velkými počtářskými obtížemi.

2. α-rozdělení. Vyjděme od množiny čísel $1, 2, \ldots, N$ a uvažujme všechny její podmnožiny, dávajíce každé z nich jakožto elementárnímu jevu stejnou pravděpodobnost 2^{-N}. Součet čísel v jednotlivých podmnožinách — označme jej α — bude potom náhodnou veličinou, nabývající celočíselných hodnot v mezích

$$0 \leq \alpha \leq \tfrac{1}{2}N(N+1) .$$

Vytvořující polynom pro rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny α snadno nalezneme, uvědomíme-li si, že α je součtem n nezávislých náhodných veličin

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N ,$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= k \quad \text{(když číslo } k \text{ je v dané podmnožině)},\\ &= 0 \quad \text{(v opačném případě)}. \end{aligned}$$

Při tom obě možnosti jsou stejně pravděpodobné, neboť počet podmnožin, které číslo k obsahují, je právě takový jako těch, které je neobsahují. Rozklad α na součet $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N$ má reálný protějšek v tom, že vytvoření obecné podmnožiny můžeme rozdělit na N nezávislých kroků: V prvém zahrneme či nezahrneme do podmnožiny číslo 1, v druhém číslo 2 atd. pro všech N čísel. Vytvořující polynomy náhodných veličin α_k jsou rovny

$$\tfrac{1}{2}(1 + t^k)$$

a tedy vytvořující polynom α je dán vztahem

$$P_N(t)\, 2^N = (1 + t)(1 + t^2) \ldots (1 + t^N) .$$

---

[1]) Pro stručnost označuji jedním písmenem jednak formu zákona rozdělení, jednak náhodnou veličinu, ovládanou tímto zákonem rozdělení, a také i příslušný test.

Koeficienty polynomů $P^N(t)\,2^N$, které po vydělení 2^N dávají pravděpodobnosti příslušných hodnot α, lze počítat pomocí očividného rekurentního vztahu

$$P_N(t)\,2^N = P_{N-1}(t)\,2^{N-1}(1 + t^N)\,.$$

To jest, napíši-li pod posloupnost koeficientů $P_{N-1}(t)\,2^{N-1}$ tutéž posloupnost, posunutou o N míst, a sečtu, dostanu koeficienty $2^N P_N(t)$. Jelikož rozdělení náhodných veličin α_k jsou symetrická, platí to i o rozdělení α. Střední hodnotu, rozptyl a plochost rozdělení α vypočteme snadno pomocí odpovídajících charakteristik veličin α_k:

$$\begin{aligned} E(\alpha_k) &= \tfrac{1}{2}k \\ D^2(\alpha_k) &= \tfrac{1}{4}k^2 \\ \mu_4(\alpha_k) &= \tfrac{1}{16}k^4 \\ \varkappa_4(\alpha_k) = \mu_4(\alpha_k) - 3D^4(\alpha_k) &= -\tfrac{1}{8}k^4 \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \tfrac{1}{4}N(N+1) \\ D^2(\alpha) &= \tfrac{1}{24}N(N+1)(2N+1) \\ \varkappa_4(\alpha) &= -\tfrac{1}{240}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1) \\ \gamma_2(\alpha) &= \frac{\varkappa_4(\alpha)}{D^4(\alpha)} \sim -\frac{18}{5N}\,. \end{aligned}$$

Konvergence α-rozdělení k normálnímu rozdělení bezprostředně vyplývá z Liapunovovy věty: Třetí absolutní momenty veličin α_k jsou rovny $k^3 2^{-3}$ a jejich součet

$$\sum_{k=1}^{N} k^3 2^{-3} = \tfrac{1}{32}N^2(N+1)^2\,.$$

Podíl třetí odmocniny tohoto součtu a standardní odchylky $D(\alpha)$ pro $N \to \infty$ konverguje k nule.

3. γ-rozdělení. Vyjděme opět od množiny čísel $1, 2, \ldots, N$ a uvažujme všechny permutace, dávajíce každé z nich jakožto elementárnímu jevu stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{N!}$. Potom počet inversí — označme si jej γ — bude náhodnou veličinou. Náhodná veličina γ nabývá celočíselných hodnot v mezích

$$0 \leq \gamma \leq \tfrac{1}{2}N(N-1)$$

a opět ji lze rozložit na součet $(N-1)$ nezávislých složek

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{N-1}\,,$$

kde γ_k je počet inversí, způsobených tím, že číslo $(k+1)$ předchází některé z čísel menších, t. j. některé z čísel $1, 2, \ldots, k$. Tento rozklad náhodné veličiny γ má reálný protějšek v tom, že vytvoření obecné permutace lze rozložit na $N - 1$ nezávislých kroků: V prvním dáme číslo 2 buď za nebo před 1; v druhém dáme 3 buď za obě předcházející čísla nebo mezi ně anebo před ně obě, atd. až v $(N-1)$-ním kroku dáme číslo N buď za $(N-1)$ předcházejících čísel nebo do některé z $(N-2)$ mezer mezi nimi anebo před ně všechny.

Jelikož náhodné veličiny γ_k nabývají hodnot $0, 1, 2, \ldots, k$, a to se stejnými pravděpodobnostmi, neboť každé eventualitě odpovídá stejný počet permutací — elementárních jevů, jsou jejich vytvořující polynomy rovny

$$\frac{1}{k+1}(1+t+t^2+\ldots+t^k) = \frac{1}{k+1}(1-t^{k+1})(1-t)^{-1}$$

a vytvořující polynom γ je dán vztahem

$$R_N(t)\, N!(1-t)^N = (1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^N)\,. \tag{1}$$

Konvergenci rozdělení γ k normálnímu rozdělení, jeho symetrii, jakož i hlavní momenty, bychom odvodili do písmene stejným způsobem jako tomu bylo u rozdělení α. Uveďme si pouze

$$E(\gamma) = \tfrac{1}{4}N(N-1)\,,$$
$$D^2(\gamma) = \tfrac{1}{72}N(N-1)(2N+5)\,.$$

4. β-rozdělení. I nyní vyjděme od čísel $1, 2, \ldots, N$ a uvažujme všechny možnosti jak je rozdělit na dvě skupiny, jednu o n a druhou komplementární o $(N-n)$ prvcích, dávajíce každé skupině o n prvcích jakožto elementárnímu jevu stejnou pravděpodobnost $\dfrac{1}{\binom{N}{n}}$. Potom počet inversí mezi skupinami a jejich komplementy — označme jej β — bude náhodnou veličinou. Inversí mezi skupinami budeme rozumět zjev, že ve skupině o n prvcích se vyskytuje číslo větší než některé číslo z komplementární skupiny a celkový počet inversí zjistíme, když prozkoumáme všech $n(N-n)$ dvojic čísel, z nichž první je ze skupiny o n prvcích a druhé z komplementární skupiny. Náhodná veličina β tedy nabývá celočíselných hodnot v mezích

$$0 \leq \beta \leq n(N-n)\,.$$

Vraťme se nyní k náhodné veličině γ, sledované v předešlém paragrafu. Rozdělíme-li každou permutaci na dvě části — na prvních n a na posledních $(N-n)$ prvků — pak vidíme, že náhodnou veličinu γ lze rozložit na součet tří nezávislých veličin

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \beta\,,$$

kde γ_1 je počet inversí uvnitř prvé části, γ_2 je počet inversí uvnitř druhé části a β je počet inversí mezi oběma částmi. Tento rozklad náhodné veličiny γ má reálný protějšek v tom, že vytvoření obecné permutace lze rozdělit na tři nezávislé kroky: v prvém určíme čísla, která budou na prvních n místech, a tím i čísla pro posledních $(N-n)$ míst; v druhém kroku zpermutujeme mezi sebou čísla určená pro prvních n míst a ve třetím kroku provedeme totéž se zbývajícími $(N - n)$ čísly.

Vytvořující polynomy γ, γ_1 a γ_2 jsou dány vztahem (1). Označíme-li si vytvořující polynom β písmenem $Q_{N,n}(t)$, pak ze vztahu

$$R_N(t) = R_n(t)\, R_{N-n}(t)\, Q_{N,n}(t)$$

ihned plyne

$$Q_{N,n}(t) \binom{N}{n} = \frac{(1 - t^N)(1 - t^{N-1}) \dots (1 - t^{N-n+1})}{(1 - t)(1 - t^2) \dots (1 - t^n)} \,. \tag{2}$$

Píšeme-li formální obdobu faktoriálů

$$(1 - t)(1 - t^2) \dots (1 - t^k) = (1 - t^k)! \,,$$

máme

$$Q_{N,n}(t) \binom{N}{n} = \frac{(1 - t^N)!}{(1 - t^n)!\,(1 - t^{N-n})!} \,,$$

takže vytvořující polynom β je jakousi obdobou kombinačních čísel mezi polynomy. Vidíme, že se nemění, dosadíme-li $(N - n)$ místo n

$$Q_{N,n}(t) = Q_{N,N-n}(t) \,.$$

Avšak $Q_{N,N-n}(t)$ je vytvořující polynom pro rozdělení náhodné veličiny $n(N - n) - \beta$, z čehož je ihned vidět, že rozdělení β je symetrické.

Koeficienty $Q_{N,n}(t) \binom{N}{n}$ a pomocí nich i pravděpodobnosti příslušných hodnot β nalezneme snadno z rekurentního vztahu

$$R_{N,n}(t) \binom{N}{n} = R_{N-1,n}(t) \binom{N-1}{n} + t^{N-n} R_{N-1,n-1}(t) \binom{N-1}{n-1} \,,$$

který si čtenář, užívaje (2), snadno ověří. Reálný smysl tohoto vztahu je v tom, že při rozdělení čísel $1, 2, \dots, N$ do dvou skupin lze *rozložit* dva případy, podle toho, zda číslo N přijde do komplementární skupiny či do skupiny o n prvcích. V prvém případě bude inversí právě tolik, jako kdybychom příslušným způsobem rozdělili jen čísla $1, 2, \dots, N - 1$, kdežto v druhém případě jich bude o $(N - n)$ více.

Označíme-li si součet čísel ve skupině o n prvcích S, snadno si lze ověřit, že

$$\beta = S - \tfrac{1}{2}n(n + 1) \,.$$

S je součtem n čísel vybraných bez vracení a se stejnými pravděpodobnostmi ze základního souboru $1, 2, \dots, N$, v němž základní rozptyl je $\sigma^2 = \frac{1}{12}(N^2 - 1)$. Tudíž

$$D^2(S) = n\sigma^2 \frac{N - n}{N - 1} = \frac{1}{12}\, n(N - n)(N + 1)$$

a tedy i

$$D^2(\beta) = \tfrac{1}{12} n(N - n)(N + 1) \,.$$

Střední hodnotu β nalezneme vzhledem ke symetrii jako průměr krajních hodnot 0 a $n(N-n)$:

$$E(\beta) = \tfrac{1}{2}n(N-n)\,.$$

Závěrem se ptejme, k jakému rozdělení konverguje rozdělení β při $N \to \infty$. Zde je nutno rozlišit dva případy:

a) n zůstává pevné. V tomto případě budeme sledovat rozdělení veličiny $\frac{\beta}{N}$. Charakteristickou funkci $\varphi(t)$ rozdělení veličiny $\frac{\beta}{N}$ nalezneme, když ve vyhovujícím polynomu (2) nahradíme t výrazem $e^{it/N}$:

$$\varphi(t) = \frac{(1-e^{it\frac{N}{N}})(1-e^{it\frac{N-1}{N}})\dots(1-e^{it\frac{N-n+1}{N}})\,1\,.\,2\dots n}{(1-e^{it\frac{1}{N}})(1-e^{it\frac{2}{N}})\dots(1-e^{it\frac{n}{N}})\,N(N-1)\dots(N-n+1)}\,.$$

Jelikož

$$\lim_{N\to\infty}(1-e^{it\frac{N-k+1}{N}}) = 1-e^{it} \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\lim_{N\to\infty}(1-e^{it\frac{k}{N}})\,\frac{N-k+1}{k} = -\,it\,,$$

dostáváme

$$\lim_{N\to\infty}\varphi(t) = \left\{\frac{e^{it}-1}{it}\right\}^n.$$

To je charakteristická funkce součtu n nezávislých náhodných veličin, majících spojité rovnoměrné rozdělení nad intervalem (0, 1).

b) $n \to \infty$ a $(N-n) \to \infty$. Jelikož rozdělení součtu n nezávislých hodnot vybraných z rovnoměrného rozdělení konverguje při $n \to \infty$ k normálnímu rozdělení, můžeme z toho ihned vyvodit, že při *některém* způsobu společné konvergence n a $(N-n)$ k nekonečnu bude rozdělení β konvergovat k normálnímu rozdělení. Avšak bylo dokázáno, viz na př. [2], že konvergence k normálnímu rozdělení nastává při *jakékoliv* konvergenci $n \to \infty$ a $(N-n) \to \infty$.

5. α-test. Nyní si ukážeme jak lze použít výsledků odvozených v minulých paragrafech k testování nulových hypothes. Mějme N párů pozorování (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ vesměs nezávislých a takových, že pozorování x_i byla získána za podmínek A, kdežto pozorování y_i za podmínek B. Kromě toho nechť tu působily vedlejší podmínky, které sice byly pro každý pár pozorování stejné, ale od páru k páru se měnily (viz dále uvedený příklad). Nyní testujme nulovou hypothesu, že změna podmínek A v podmínky B neměla vliv na velikost pozorovaných hodnot, a že všechny rozdíly uvnitř párů lze považovat za náhodné. Jinými slovy, testujme nulovou hypotesu, že každý pár pozorování představuje dvě hodnoty nezávisle vybrané z téhož spojitého rozdělení, které se ovšem může od páru k páru měniti.

Vytvořme rozdíly

$$d_i = x_i - y_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

a seřaďme je podle *absolutní* velikosti. Spojitost rozdělení vylučuje případy $|d_i| = |d_j|$ pro $i \neq j$ a také případy $d_i = 0$. Rozdíly uspořádané podle *absolutní* velikosti si označme $d^{(1)}, d^{(2)}, \ldots, d^{(n)}$, takže

$$|d^{(1)}| < |d^{(2)}| < \ldots < |d^{(N)}|\,.$$

Potom lze každé řadě párů pozorování (x_i, y_i) přiřadit podmnožinu čísel $1, 2, \ldots, N$ tak, že číslo k bude do ní pojato tehdy a jen tehdy, je-li rozdíl $d^{(k)}$

Tabulka 1.

i, k	x_i	y_i	d_i	$d^{(k)}$
1	188	139	49	6
2	96	163	—67	8
3	168	160	8	14
4	176	160	16	16
5	153	147	6	23
6	172	149	23	24
7	177	149	28	28
8	163	122	41	29
9	146	132	14	41
10	173	144	29	—48
11	186	130	56	49
12	168	144	24	56
13	177	102	75	60
14	184	124	60	—67
15	96	144	—48	75

kladný. Z nulové hypothesy bezprostředně vyplývá, že každá taková podmnožina bude mít stejnou pravděpodobnost a součet pořadí kladných rozdílů v jejich uspořádání podle absolutní velikosti bude mít rozdělení α.

Test provedeme tedy takto: vypočteme rozdíly mezi páry pozorování, seřadíme je podle absolutních hodnot, sečteme pořadové indexy kladných rozdílů a potom srovnáme zjištěné α s tabulovanou kritickou hodnotou pro příslušný stupeň významnosti. Samozřejmě, očekáváme-li porušení nulové hypothesy jen jedním směrem, redukuje se stupeň významnosti na jednu polovinu. Abychom nemuseli tabelovat horní kritické hodnoty pro α, můžeme využít toho, že je na naší vůli, zda budeme sčítat pořadové indexy kladných či záporných rozdílů. Označíme-li si α založené na kladných rozdílech α_+ a α založené na záporných rozdílech α_-, pak platí

$$\alpha_+ + \alpha_- = \tfrac{1}{2}N(N+1)\,,$$

takže horní kritickou hodnotu překročí α_+ právě tehdy, překročí-li α_- kritickou hodnotu dolní. To nám umožňuje tabelovat jen kritické hodnoty dolní, se kterými srovnáváme α založené na rozdílech toho znaménka, které se vyskytuje méně často.

Příklad. Použijme α-test k rozboru klasického Darwinova experimentu, uvedeného v „The Design of Experiments" R. A. Fishera. Zde je zkoumáno, zda potomstvo rostliny, vzniklé křížením, se liší významně co do své výšky od potomstva vzniklého samooplodněním. Bylo vypěstováno 15 párů exemplářů určité rostliny, v nichž každý jedinec byl vystaven pokud možno stejné péči a stejným původním podmínkám, takže příslušníci každého páru se až na náhodné vlivy lišili pouze tím, že jeden vznikl křížením a druhý samooplodněním. V tabulce 1 jsou v druhém sloupci udány výsledky dosažené u exemplářů vzniklých křížením a v třetím sloupci souběžné výsledky u jedinců vzniklých samooplodněním, při čemž jednotkou je $\frac{1}{8}$ palce. Ve čtvrtém sloupci jsou dány rozdíly a v pátém jsou tyto rozdíly seřazeny podle absolutní velikosti. Čísla v prvém sloupci určují pořadí, a to jak d_i, tak i $d^{(k)}$. Jelikož záporné rozdíly jsou jen dva, založíme α-test na nich. Jelikož -48 má pořadí 10 a -67 má pořadí 14, dostáváme

$$\alpha = 10 + 14 = 24\,.$$

V tabulce 2 nacházíme, že pro $N = 15$ je 5%-ní kritická hodnota 25,3, takže spokojíme-li se s 5%-ním stupněm významnosti, je nalezená hodnota α významně malá a soudíme, že způsob vzniku rostliny na její výšku vliv má. Použijeme-li t-test, dostáváme $t = 2{,}148$, což je také hodnota nepatrně větší než 5%-ní hodnota, takže oba testy dávají v podstatě stejný výsledek.

V tabulce 2 jsou vypočteny dolní kritické hodnoty pro 10%-ní, 5%-ní, 2%-ní, 1%-ní a 0,1%-ní stupně významnosti. Pro malá N bylo použito skutečného α-rozdělení. Pro větší N bylo možno použít aproximace pomocí normálního rozdělení, opraveného v člen Edgeworthovy řady, beroucí zřetel na plochost.

Poznámka 1. Je-li v tabulce 2 na místě 5%-ní kritické hodnoty uvedeno číslo $a_{0,05}$, znamená to, že

$$P(\alpha_+ \leq a_{0,05}) + P(\alpha_- \leq a_{0,05}) = 0{,}05\,.$$

Je-li číslo $a_{0,05}$ necelé, na př. $a_{0,05} = 25{,}3$, znamená to, že s pravděpodobností 0,3 můžeme za významnou považovat i hodnotu 26, aniž by pravděpodobnost zamítnutí nulové hypothesy, je-li správná, stoupla nad 0,05.

Poznámka 2. Při skutečných experimentech se bude stávat, že některé rozdíly budou rovny nule, a jiné zase budou stejné co do své absolutní hodnoty. Tento případ lze převést na předešlý tím, že dodatečně jednak každý nulový rozdíl prohlásíme s pravděpodobností 0,5 za kladný a s pravděpodobností 0,5 za záporný, a jednak skupinky co do absolutní velikosti stejně velkých rozdílů náhodně seřadíme podle „velikosti" tak, že každé seřazení bude mít stejnou pravděpodobnost. Po tomto umělém „doplnění" experimentu, bude možno užít α-test přesně tak, jako by se jednalo o výběr ze spojitého rozdělení. Jeho

Tabulka 2.

Dolní kritické hodnoty pro α-test.

Počet párů N	Stupeň významnosti 10 %	5 %	2 %	1 %	0,1 %
10	10,8	8,0	4,9	3,0	
11	13,9	10,7	7,1	4,8	
12	17,5	13,8	9,6	7,0	0,8
13	21,4	17,2	12,6	9,6	2,4
14	25,7	21,0	15,8	12,4	4,2
15	30,5	25,3	19,5	15,7	6,3
16	35,6	29,9	23,5	19,3	8,8
17	41,2	34,9	27,9	23,3	11,6
18	47,1	40,3	32,6	27,6	14,7
19	53,6	46,1	37,8	32,3	18,1
20	60,4	52,3	43,3	37,3	21,9
21	67,6	58,9	49,1	42,7	25,9
22	75,2	66,0	55,4	48,6	30,3
23	83,3	73,4	62,2	54,7	35,1
24	91,8	81,2	69,3	61,4	40,3
25	100,8	89,5	76,7	68,3	45,8
26	110,1	98,2	84,6	75,7	51,6
27	119,9	107,3	92,9	83,4	57,7
28	130,2	116,8	101,6	91,6	64,2
29	140,8	126,8	110,7	100,0	71,2
30	151,9	137,1	120,2	108,9	78,6
31	163,4	147,9	130,2	118,2	86,3
32	175,5	159,1	140,5	128,0	94,3
33	187,9	170,7	151,2	138,2	102,7
34	200,7	182,8	162,3	148,8	111,5
35	214,0	195,3	173,9	159,8	120,7
36	227,7	208,2	185,9	171,0	130,2
37	241,9	221,5	198,3	182,7	140,1
38	256,5	235,3	211,1	195,0	150,4
39	271,5	249,6	224,4	207,6	161,1
40	287,0	264,2	238,1	220,6	172,1
41	303,0	279,2	252,1	233,8	183,6
42	319,3	294,7	266,5	247,5	195,4
43	336,2	310,6	281,5	261,8	207,7
44	353,4	327,0	296,9	276,5	220,4
45	371,2	343,8	312,7	291,6	233,5
46	389,3	361,1	328,9	307,1	247,0
47	408,0	378,7	345,5	322,8	260,8
48	427,0	396,8	362,5	339,0	275,0
49	446,5	415,4	380,0	355,8	289,7
50	466,5	434,4	397,9	373,0	304,7

citlivost se tím ovšem zmenší. Pro aplikaci však bude stačit užít místo „doplňování" experimentu následujícího polovinového pravidla:

1° vyskytuje-li se mezi diferencemi k nul, připočteme na vrub α $\frac{1}{2}(1 + 2 + \ldots + k)$.

2° vyskytuje-li se na místech, $r + 1, \ldots, r - k + 1$ k co do absolutní hodnoty stejných diferencí, mezi nimiž je k_+ kladných a k_- záporných,

$k_+ + k_- = k$, pak připočteme na vrub α $\left(r + \frac{k-1}{2}\right) k_+$, resp. $\left(r + \frac{k-1}{2}\right) k_-$ podle toho, zda používáme α_+ či α_-.

V těch skupinkách, kde jsou všechny rozdíly stejného znaménka, nebude samozřejmě třeba dělat žádná opatření. Statistika α, získaná z polovinového pravidla nebude již sice mít přesně to rozdělení, které máme tabelováno, ale lze očekávat, že v případě, kdy nul a absolutně rovných rozdílů nebude mnoho, budou tabulky i nadále použitelné.

Tabulka 3.

Dolní 5 %-ní kritické hodnoty pro β-test

m \ n	3	4	5	6	7	8	9	10
4	—	0,7						
5	0,4	1,6	2,8					
6	1,0	2,4	3,9	5,4				
7	1,5	3,3	5,1	6,9	8,8			
8	2,0	4,1	6,2	8,4	10,7	13,0		
9	2,5	5,0	7,4	10,0	12,6	15,3	18,0	
10	3,0	5,7	8,5	11,5	14,5	17,6	20,6	23,7

Tabulka 4.

Dolní 10 %-ní kritické hodnoty pro β-test

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	—	0,0							
4	—	0,7	1,8						
5	0,1	1,4	2,8	4,1					
6	0,4	2,1	3,7	5,4	7,2				
7	0,8	2,7	4,7	6,8	8,9	11,1			
8	1,2	3,3	5,7	8,2	10,7	13,2	15,8		
9	1,6	4,0	6,8	9,6	12,5	15,4	18,3	21,3	
10	1,9	4,6	7,8	11,0	14,2	17,5	21,0	24,3	27,6

Poznámka 3. Je-li nulová hypothesa vyvrácena, vyvstává úloha najít interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ. Lze při tom postupovat následujícím způsobem: Vezmeme libovolné μ a na chvíli budeme předpokládat, že střední hodnota je skutečně rovna tomuto μ. Pak ovšem s příslušnou pravděpodobností, řekněme 0,95, nesmí α vypočtené z hodnot $(d_1 - \mu)$, $(d_2 - \mu), \ldots, (d_N - \mu)$ padnout do kritického oboru. Čili ta μ, pro které se to stane, budou tvořit interval spolehlivosti. Výpočet krajních bodů tohoto intervalu by se však muselo dělat patrně zkusmo, což by bylo velmi obtížné.

Poznámka 4. Použití α-testu se neomezuje jen na spárované výběry. Lze jím testovat i poněkud obecnější hypothesu, že střední hodnota n pozorování majících symetrické rozdělení, je rovna určité konstantě. (U spárovaných výběrů testujeme hypothesu, že střední hodnota rozdílů je rovna nule.) Jiným zobecněním by byl necentrální α test, při kterém by však bylo nutno specifikovat formu distribuční funkce.

6. β-test. Máme-li dva nespárované nezávislé výběry $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a $y_1, y_2, \ldots, y_m$, lze nulovou hypothesu, pravící, že všech $n + m$ hodnot bylo vybráno z téhož rozdělení, otestovat pomocí β-testu. Stačí zjistit počet inversí mezi oběma výběry, t. j. počet případů, že $y_i < y_j$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$. Za předpokladu, že nulová hypothesa platí, bude mít tento počet inversí β-rozdělení, kde $N - n = m$. Dolní 5%-ní a 10%-ní kritické hodnoty pro n, $m \leq 10$ jsou pro β-test uvedeny v tabulkách 3. a 4. S tabelovanými kritickými hodnotami opět srovnáváme β vypočtené na základě těch inversí, kterých je méně.

7. γ-test. Mějme N nezávislých párů pozorování $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ z dvojrozměrného rozdělení. Nulovou hypotesu, že x a y jsou nezávislé, lze pak otestovat pomocí γ-testu. Stačí zjistit počet inversí v posloupnosti $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(N)}$ vytvořené tak, že odpovídající hodnoty x_i tvoří rostoucí posloupnost $x^{(1)} < x^{(2)} < \ldots < x^{(N)}$. Za předpokladu, že nulová hypothesa platí, bude mít tento počet inversí γ-rozdělení.

LITERATURA

[1] *Wilcoxon F.*, Individual comparisons by ranking methods, Biometrics Bull. 1, 80—83 (1945).

[2] *H. B. Mann* and *D. R. Whitney*, On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Ann. Math. Stat. vol. *18*, 50—61, (1947).

[3] *Van der Vaerden*, Order tests for the two sample problem and their power. Proceedings A, 55, 453—458 (1952);
Order tests for the two sample problem (second communication), Proceedings A, 56, 303—310; (1953).
Order tests for two sample problem (third communication), Proceedings A, 56, 311—316 (1953).

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ПОРЯДКОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ЯРОСЛАВ ХАЕК (Jaroslav Hájek), Прага.

(Поступило в редакцию 24/III 1954 г.)

В предлагаемой работе выводятся три типа распределений и три соответствующих теста α, β, и γ; при выводе используются элементарные рассуждения о множестве $\{1, 2, \ldots, N\}$ натуральных чисел $1, 2, \ldots, N$. Асимптотическая эффективность α-теста и β-теста равна 0,955.

α-распределение. Мы будем считать все подмножества множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ элементарным событиямии. Пусть вероятность каждого элементарного событтия равна 2^{-N}. Сумма α всех чисел в каждом элементарном событии есть случайная величина, производящий полином которой $P_N(t)$ дан соотношением

$$P_N(t)\, 2^N = \prod_{n=1}^{N} (1 + t^n) .$$

Средняя величипа $E(\alpha)$, дисперсия $D^2(\alpha)$ и остальные характеристики даны формулами на стр. 19. α-распределение стремится к нормальному распределению, как непосредственно вытекает из теоремы Ляпунова.

γ-распределение. Рассмотрим все перестановки множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, считая каждую из них элементарным событием. Пусть $(N!)^{-1}$ есть вероятность каждого такого события. Число γ всех инверсий в каждой перестановке является случайной величиной. Производящий полином $R_N(t)$ можно составить по уравнению (1).

β-распределение. Рассмотрим систему всех подмножеств, содержащих n элементов ($n \leqq N$) множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, причем условимся считать каждое подмножество элементарным событием. Число β всех инверсий между подмножеством и дополнительным к нему множеством в множестве $\{1, 2, \ldots, N\}$ является случайной величиной. Под инверсией между двумя множествами мы подразумеваем каждую пару чисел (p, q), где $p > q$ и p принадлежит первому, а q — второму множеству.

Элементы каждой перестановки можно разделить на две группы; первая группа содержит первые n элементов перестановки, а вторая содержит остальные $N - n$ элементов. Итак, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \beta$, где через $\gamma_1(\gamma_2)$ обозначено число всех инверсий в первой (второй) группе, а β означает число всех инверсий между обеими группами. Производящие полиномы γ, γ_1 и γ_2 даны уравнением (1). Отсюда следует, что производящий полином $Q_{N,n}(t)$ β-распределения удовлетворяет следующему соотношению:

$$R_N(t) = R_n(t)\, R_{N-n}(t)\, Q_{N,n}(t) .$$

Полином $Q_{N,n}(t)$ можно вычислить по формуле (2). Очевидно,

$$Q_{N,n}(t) = Q_{N,N-n}(t) ,$$

значит, β-распределение симметрично. Формулы для средней $E(\beta)$ и дисперсии $D^2(\beta)$ приведены на стр. 21 и 22.

Пусть теперь $N \to \infty$. Предположим, что n постоянно. Если в (2) заменить t выражением $e^{itN^{-1}}$, то получится характеристическая функция $\varphi(t)$ распределения βN^{-1}, откуда следует, что β-распределение стремится к распределению суммы n независимых ортогональных случайных величин. В том случае, когда как $n \to \infty$, так и $N \to \infty$, получим нормальное распределение.

α**-тест.** Пусть дано N пар независимых наблюдений (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, при которых условия A влияли на наблюдения x_i, а условия B влияли на наблюдения y_i. Пусть, кроме того, дальнейшие условия C влияли на обе величины x_i и y_i одинаковым образом, но изменялись от пары к паре. Нашей задачей будет проверить нулевую гипотезу: каждая пара наблюдений представляет две величины, выбранные независимо друг от друга из одного и того же непрерывного распределения, которое, конечно, может меняться от пары к паре. Расположим абсолютные величины разностей $d_i = x_i - y_i$ в виде возрастающей последовательности

$$|d^{(1)}| < |d^{(2)}| < \ldots < |d^{(N)}|$$

и поставим в соответствие неблюдениям (x_i, y_i) $i = 1, 2, \ldots, N$, подмножество множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, содержащее все числа k, для которых $d^{(k)} > 0$. Из нулевой гипотезы следует, что вероятности всех таких подмножеств одинаковы. Кроме того, сумма порядковых индексов положительных разностей, расположенных по абсолютной величине, имеет α-распределение. Следовательно, можно ставнить вычисленное α с табулированным критическим значением для соответствующей степени значительности. α-тест использован для анализа классического опыта Дарвина, опубликованного в „*The Design of Experiments*" и касающегося растений, возникших скрещиванием и самооплодотворением. В этом случае мы получим $\alpha = 24$. В таблице 2 для $N = 15$ и 5% мы находим значение 25,3. t-тест Стьюдента дает $t = 2{,}148$. Итак, оба теста дают практически одинаковые результаты.

α-тестом можно пользоваться даже в том случае, когда данные распределения не являются непрерывными.

β**-тест.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — две независимые непарные выборки. Предположим, что справедлива нулевая гипотеза, что все $n + m$ значений были выбраны из одного и того же распределения. В таком случае можно воспользоваться β-тестом. Достаточно определить число инверсий между выборками. Это число обладает β-распределением, где $N - n = m$. Нижние 5%-ные и 10%-ные критические значения затабулированы.

γ**-тест.** Пусть $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ — N друг от друга независимых пар наблюдений из двухмерного распределения. Если x и y независимы (нулевая гипотеза), то можно применить γ-тест. Расположим значения x_i в виде возрастающей последовательности $x^{(1)} < x^{(2)} < \ldots < x^{(N)}$ и предположим, что соответствующие значения y_i будут $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(N)}$. Если справедлива нулевая гипотеза, то число инверсий в упомянутой последовательности обладает γ-распределением.

Summary.

SOME RANK DISTRIBUTIONS AND THEIR APPLICATIONS

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Received March 24, 1954.)

In this paper three laws of distribution and three corresponding tests α, β and γ are derived by means of elementary considerations of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$ of natural numbers $1, 2, \ldots, N$. The asymptotical efficiencies of α-test and β-test are 0,955.

α-distribution. Let us consider all subsets of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$ as elementary events. Let 2^{-N} be the probability of every elementary event, The sum α of all numbers in each elementary event is a random variable whose generating polynomial $P_N(t)$ is give by the relation

$$P_N(t) \,.\, 2^N = \prod_{n=1}^{N} (1 + t^n) \,.$$

The mean value $E(\alpha)$, the variance $D^2(\alpha)$ and other characteristics of the α-distribution are given by the formulae on page 19. The convergence to the normal distribution follows immediately from Liapunov's theorem.

γ-distribution. Let us consider all permutations of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$, regarding every permutation as an elementary event. Let $(N!)^{-1}$ be the probability of every such event. The number γ of all inversions in any permutation is a random variable. The generating polynomial $R_N(t)$ can be computed from equation (1).

β-distribution. Let us consider the system of all consisting of n elements ($n \leq N$) of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$, every subset being an elementary event. Let $\binom{N}{n}^{-1}$ be the probability of every elementary event. The number β of all inversions between the subset and its complementary set in the set $\{1, 2, \ldots, N\}$ is a random variable. By the inversion between two subsets of natural numbers we understand each pair of numbers (p, q), where $p > q$ and p belongs to the first and q to the second subset.

We can divide the elements of every permutation into two groups; one group consists of the first n elements of the permutation and the second consists of the remaining $N - n$ elements. Therefore $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \beta$ where γ_1 (γ_2) denotes the number of all inversions in the first (second) group and β denotes the number of all inversions between both groups. Generating polynomials γ, γ_1 and γ_2 are given by (1). From this it follows that the generating polynomial $Q_{N,n}(t)$ of the β-distribution satisfies the following relation

$$R_N(t) = R_n(t) \,.\, R_{N-n}(t) \,.\, Q_{N,n}(t) \,.$$

The polynomial $Q_{N,n}(t)$ can be computed from (2). Evidently

$$Q_{N,n}(t) = Q_{N,N-n}(t)$$

Now, let $N \to \infty$. Suppose that n is constant. If we replace t by $e^{it \cdot N^{-1}}$ in (2) we get the characteristic function $\varphi(t)$ of the distribution $\beta \,.\, N^{-1}$ from which it follows that the β-distribution converges to the distribution of the sum of n independent rectangular random variables. In the case when both $n \to \infty$ and $N - n \to \infty$ we get normal distribution.

α-test. Let N pairs of independent observations (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, N$ be given whereby a condition A influence the values x_i and a condition B influences the values y_i. Moreover, let a third condition C influence both values x_i and y_i equally but let C vary from pair to pair. Our task now is to test the null hypothesis, viz. that each pair of observation represents two values independently sampled from the same continuous distribution which, of course, can vary from one pair to another. Let us arrange the absolute values of the differences $d_i = x_i - y_i$ in the ascending sequence

$$|d^{(1)}| < |d^{(2)}| < \ldots < |d^{(N)}|$$

and let us assign to the observations (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, N$ a subset of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$ consisting of all numbers k for which $d^{(k)} > 0$. From the null hypothesis it follows that the probability of every such subset is the same. Moreover the sum of ranks of positive differences in their arrangement is distributed according to the α-distribution. Consequently we can compare the computed α with the tabulated critical value for corresponding level of significance. The α-test is used for the analysis of the classical Darwin's experiment, published in "The Design of Experiments" concerning the off-spring of a plant reproduced by crossing and by self-fertilisation. In this case we get $\alpha = 24$. In table 2 we find the value 25,3 for $N = 15$ and for 5%. Student's t-test gives $t = 2{,}148$. In this case both tests give practically the same result.

The α-test can be used even in the case, where the given distributions fail to be continuous.

β-test. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and $y_1, y_2, \ldots, y_m$ be two independent nonpaired samples. Let us suppose that the zero hypothesis holds true, viz. that all $n + m$ values are sampled from the same distribution. In this case the β-test can be used. It is sufficient to determine the number of inversions between the two samples. The number of inversions will be β-distributed, where $N - n = m$. Lower 5% and 10% critical values are tabulated.

γ-test. Let $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ be N independent pairs of observations of a two-dimensional distribution. If x and y are independent (the zero-hypothesis) then it is possible to use the γ-test. Let us arrange the values x_i in an ascending sequence $x^{(1)} < x^{(2)} < \ldots < x^{(N)}$ and let the corresponding values y_i are $y^{(1)}$, $y^{(2)}, \ldots, y^{(N)}$. If the zero hypothesis is true, the number of inversion in the last sequence has γ-distribution.

LINEÁRNÍ ZÁVISLOST FUNKCÍ JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

(Došlo dne 3. května 1954.) DT:517.41

Hodnost Wronského matice n funkcí udává za jistých podmínek počet lineárně nezávislých funkcí mezi těmito n funkcemi. Zde je dokázáno ve větě 2 kriterium obecnější a současně jednodušší než to, které se obyčejně uvádí.

Je známa důležitá úloha, kterou hraje t. zv. determinant Wronského při vyšetřování lineární závislosti a nezávislosti funkcí. Obyčejně se udává kriterium, obsažené v tomto článku jako 3. pomocná věta. Vlastním cílem tohoto článku je obecnější a jednodušší kriterium, obsažené ve větě 2. Tato věta je jednoduchým důsledkem věty 1, která se týká jisté limitní vlastnosti Wronského determinantu. Podnět k tomuto článku dal rozhovor jeho autora s E. ČECHEM v r. 1943. Je dosti těžko zjistit, není-li věta 2 již známa; její důkaz vyžaduje jen klasických pomůcek. Ale sotva je věta 2 známa naší širší matematické obci.

V celém článku slovo „číslo" znamená komplexní číslo; slovo „funkce" znamená **komplexní** funkci jedné **reálné** proměnné; „derivace" znamená konečnou („vlastní") derivaci.[1]) Připomeňme: Existuje-li $f^{(k)}(\alpha)$ $(k > 0)$, je

$$\lim_{\xi\to0} \xi^{-k}\left(f(\alpha+\xi) - f(\alpha) - \frac{\xi}{1!}f'(\alpha) - \dots - \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(\alpha) - \frac{\xi^k}{k!}f^{(k)}(\alpha)\right) = 0\,; \tag{1}$$

pro reálné f viz na př. můj *Úvod do počtu diferenciálního*, konec kap. XI; také se dostane (1) ihned z věty 150. Je-li f komplexní, užijeme právě zmíněného výsledku na reálnou a imaginární část. Užijeme-li rovnice (1) na funkci $f^{(v)}(x)$, obdržíme rovnici

$$f^{(v)}(\alpha+\xi) = \sum_{l=v}^{k} f^{(l)}(\alpha)\frac{\xi^{l-v}}{(l-v)!} + o(\xi^{k-v})\,; \tag{2}$$

přitom $o(\xi^p)$ značí takovou funkci $g(\xi)$, že je $\lim\limits_{\xi\to0} \xi^{-p}g(\xi) = 0$; speciálně $o(1)$

[1]) Je-li $f = g + ih$ (g, h reálné funkce), definujeme ovšem $f^{(k)} = g^{(k)} + ih^{(k)}$. Někdy píšeme $f^{(0)}$ místo f.

značí takovou funkci $g(\xi)$, že je $\lim_{\xi \to 0} g(\xi) = 0$. Rovnice (2) platí tehdy, je-li $0 \leqq v < k$ a existuje-li $f^{(k)}(\alpha)$; je-li $f^{(k)}(x)$ spojitá v bodě α, platí (2) zřejmě i pro $0 \leqq v = k$.

§ 1. Věta 1 a její důkaz.

Je-li předložena matice komplexních čísel

$$\begin{matrix} a_{0,0}\, a_{0,1} \ldots, a_{0,\nu-1} \\ a_{1,0}\, a_{1,1} \ldots, a_{1,\nu-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,0}\, a_{n-1,1} \ldots, a_{n-1,\nu-1} \end{matrix} \qquad (n > 0, \nu > 0)\,, \tag{3}$$

budeme její l-tý řádek $a_{l,0}, a_{l,1}, \ldots, a_{l,\nu-1}$ označovati znakem $\{l\}$. Je-li dán nějaký systém řádků

$$\{l_0\}, \{l_1\}, \ldots, \{l_{\varrho-1}\}\,, \tag{4}$$

nazýváme číslo $l_0 + l_1 + \ldots + l_{\varrho-1}$ jeho výškou; hodností systému (4) nazveme hodnost matice

$$\begin{matrix} a_{l_0,0}, \ldots, a_{l_0,\nu-1} \\ a_{l_1,0}, \ldots, a_{l_1,\nu-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l_{\varrho-1},0}, \ldots, a_{l_{\varrho-1},\nu-1}\,. \end{matrix} \tag{5}$$

Systém (4) je „nezávislý", jsou-li řádky matice (5) lineárně nezávislé, t. j. je-li její hodnost rovna ϱ; jinak je systém (4) „závislý". Pro $\varrho = 1$ znamená závislost systému $\{l\}$ totéž jako rovnice $a_{l,0} = a_{l,1} = \ldots = a_{l,\nu-1} = 0$.

Čísla

$$l_0, l_1, \ldots, l_{\varrho-1} \tag{6}$$

nemusí být různá; jsou-li dvě z nich stejná, je ovšem systém (4) závislý.[2]) Dva systémy považujeme za stejné tehdy a jen tehdy, liší-li se příslušné soustavy čísel (6) pouze permutací; tedy systémy $\{1\}, \{3\}, \{5\}$ a $\{3\}, \{1\}, \{5\}$ jsou stejné; rovněž $\{1\}, \{3\}, \{3\}, \{5\}$ a $\{3\}, \{1\}, \{5\}, \{3\}$; ale systém $\{1\}, \{3\}, \{5\}$ a systém $\{1\}, \{3\}, \{3\}, \{5\}$ jsou různé.

1. pomocná věta. *Budiž dána matice (3), mající hodnost ν (tedy $n \geqq \nu$). Mezi všemi nezávislými systémy ν řádků existuje aspoň jeden, který má nejmenší výšku; tuto nejmenší výšku označme H.*

Označme jeden z těchto nezávislých systémů výšky H znakem

$$\{I_1\}, \ldots, \{I_\nu\} \quad (I_1 < I_2 < \ldots < I_\nu)\,. \tag{7}$$

[2]) Místo „(4) je nezávislý systém" budeme také říkati, že (4) se skládá z nezávislých řádků.

Tvrdím:

I. Existuje pouze jeden systém ν nezávislých řádků o výšce H.

II. Je-li

$$\{h_1\}, \{h_2\}, \ldots, \{h_\lambda\} \tag{8}$$

systém takový, že

$$0 < \lambda < \nu,\ h_1 + h_2 + \ldots + h_\lambda < I_1 + I_2 + \ldots + I_\lambda\,, \tag{9}$$

je systém (8) *závislý.*

III. Je-li

$$\{h_1\}, \{h_2\}, \ldots, \{h_\lambda\} \tag{10}$$

systém takový, že

$$h_1 \leqq h_2 \leqq \ldots \leqq h_\lambda,\ 0 < \lambda \leqq \nu \tag{11}$$

a je-li

$$h_\mu < I_\mu \tag{12}$$

aspoň pro jedno μ ($1 \leqq \mu \leqq \lambda$), *je systém* (10) *závislý.*

Důkaz. Zřejmě II plyne z III — stačí srovnat $h_1, \ldots, h_\lambda$ v II podle velikosti. Ale také I plyne z III. Je-li totiž $\{h_1\}, \ldots, \{h_\nu\}$ nezávislý systém, $h_1 \leqq h_2 \leqq \leqq \ldots \leqq h_\nu$,

$$h_1 + \ldots + h_\nu = H = I_1 + \ldots + I_\nu\,,$$

musí podle III býti $h_\mu \geqq I_\mu$ pro každé μ, tedy $h_\mu = I_\mu$.

Dokažme tvrzení III. Pro každé τ ($1 \leqq \tau \leqq \mu$) sestrojme systém

$$\{I_1\}, \ldots, \{I_{\mu-1}\}, \{h_\tau\}, \{I_{\mu+1}\}, \ldots, \{I_\nu\}\,; \tag{13}$$

ten má výšku menší než H (neboť $h_\tau \leqq h_\mu < I_\mu$) a tedy platí mezi řádky (13) netriviální lineární relace. Kdyby se z této relace dal vypočísti některý řádek $\{I_\varrho\}$ ($\varrho > \mu$), daly by se řádky (7) vyjádřit jako lineární kombinace ν řádků

$$\{I_1\}, \ldots, \{I_{\varrho-1}\}, \{h_\tau\}, \{I_{\varrho+1}\}, \ldots, \{I_\nu\}\,;$$

tento systém by tedy musil býti rovněž nezávislý, což není možné, ježto má výšku menší než H. Relace (13) je tedy prostě relací mezi $\{I_1\}, \ldots, \{I_{\mu-1}\}, \{h_\tau\}$, z níž lze ovšem $\{h_\tau\}$ vypočísti. Tedy řádky $\{h_1\}, \ldots, \{h_\mu\}$ jsou lineárními kombinacemi $\mu - 1$ řádek $\{I_1\}, \ldots, \{I_{\mu-1}\}$[3]) a tedy tvoří závislý systém. Tím spíše je závislý celý systém (10).

V dalším budeme potřebovati pouze tvrzení I, II.

Věta 1. *Budiž $0 < \nu < n$. Funkce $f_0(x), \ldots, f_{\nu-1}(x)$ nechť mají derivaci řádu $n - 1$ v bodě α (a tedy derivaci řádu $\nu - 1$ v jistém okolí bodu α). Nechť matice*

---

[3]) Pro $\mu = 1$ to znamená, že $\{h_1\}$ se skládá ze samých nul.

$$\begin{matrix} f_0^{(0)}(\alpha), & \ldots, f_{\nu-1}^{(0)}(\alpha) \\ f_0'(\alpha), & \ldots, f_{\nu-1}'(\alpha) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f_0^{(n-1)}(\alpha), & \ldots, f_{\nu-1}^{(n-1)}(\alpha) \end{matrix} \tag{14}$$

má hodnost ν. Položme

$$\Delta_\nu(x) = \begin{vmatrix} f_0(x), & \ldots, f_{\nu-1}(x) \\ f_0'(x), & \ldots; f_{\nu-1}'(x) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f_0^{(\nu-1)}(x), & \ldots, f_{\nu-1}^{(\nu-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{15}$$

I. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - \alpha| < \delta$ je $\Delta_\nu(x) \neq 0$.

II. Podrobněji: Položme $f_l^{(k)}(\alpha) = a_{kl}$, takže matice (14) nabude tvaru (3). Definujme $H, I_1, \ldots, I_\nu$ jako v první pomocné větě a kladme

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{I_1,0}, & \ldots, a_{I_1,\nu-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{I_\nu,0}, & \ldots, a_{I_\nu,\nu-1} \end{vmatrix}, \quad \textit{takže } \Delta \neq 0. \tag{16}$$

Potom jest

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\Delta_\nu(\alpha + \xi)}{\xi^{I_1 + \ldots + I_\nu - \frac{1}{2}\nu(\nu-1)}} = \frac{\Delta}{I_1! \ldots I_\nu!} \prod_{1 \leq i < k \leq \nu} (I_k - I_i) . \tag{17}$$

Poznámka. Tvrzení I plyne ovšem z tvrzení II. Srovnáme-li (17) s (1), vidíme, že se funkce $\Delta_\nu(x)$ chová v blízkosti bodu α tak, jakoby měla v bodě α derivaci řádu $I_1 + \ldots + I_\nu - \frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ různou od nuly a všechny derivace nižších řádů rovny nule; je však zajímavo, že (17) platí i v mnohých případech, kdy jmenovaná derivace neexistuje. Budiž na př. $\nu = 2$, $n = 6$ a v matici (14) buďte první čtyři řádky složeny ze samých nul, předposlední řádek budiž 1, 0 a poslední 0, 1. Potom podle (17) je limita $\lim_{\xi \to 0} \frac{\Delta_2(\alpha + \xi)}{\xi^8}$ konečná a různá od nuly; ale osmá derivace funkce $\Delta_2(x)$ obsahuje devátou derivaci funkcí $f_0(x), f_1(x)$, kdežto k platnosti rovnice (17) stačí v tomto případě existence derivací pátého řádu.

Důkaz věty 1. Pro zkrácení pišme $I_\nu = m$, takže $\nu - 1 \leq m \leq n - 1$. Na funkce $f_0, \ldots, f_{\nu-1}$ užijme vzorce (2), a to pro $k = m$ a pro $v = 0, 1, \ldots, \nu - 1$. Obdržíme pro $0 \leq q \leq \nu - 1$[4])

$$\begin{aligned} (m + 1)!\, \xi^v f_q^{(v)}(\alpha + \xi) &= \sum_{l=0}^{m} f_q^{(l)}(\alpha)\, \xi^l (m + 1) \,.\, m \ldots (l - v + 1) + \eta_{v,q}(\xi) \,.\, \xi^m , \\ &= A_{v,q,0} + A_{v,q,1} + \ldots + A_{v,q,m+1} , \end{aligned} \tag{18}$$

[4]) V následujícím součtu členové s $l < v$ sami sebou vypadnou, ježto pro $l < v$ je $(m + 1) \,.\, m \ldots (l - v + 1) = 0$.

kde

$$\left.\begin{aligned} A_{v,q,l} &= a_{lq}\xi^l(m+1)\,.\,m\ldots(l-v+1) \text{ pro } l \leqq m\,,\\ A_{v,q,m+1} &= \eta_{v,q}(\xi)\,.\,\xi^m\,,\ \lim_{\xi\to 0}\eta_{v,q}(\xi) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Tedy jest

$$((m+1)!)^\nu\,\xi^{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}\,\Delta_\nu(\alpha+\xi) = \sum_{l_0,l_1,\ldots,l_{\nu-1}=0}^{m+1} \begin{vmatrix} A_{0,0,l_0}, & \ldots, A_{0,\nu-1,l_0}\\ A_{1,0,l_1}, & \ldots, A_{1,\nu-1,l_1}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ A_{\nu-1,0,l_{\nu-1}}, & \ldots, A_{\nu-1,\nu-1,l_{\nu-1}} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Vyšetřujme jednotlivé determinanty vpravo.

I. Vezměme onen determinant, kde všechna čísla

$$l_0, l_1, \ldots, l_{\nu-1} \tag{21}$$

jsou rovna $m+1$. Podle (19) je tento determinant roven $o(\xi^{\nu m})$ a tedy $o(\xi^{I_1+\ldots+I_\nu}) = o(\xi^H)$, neboť $I_\varrho \leqq I_\nu = m$.

II. Vezměme za druhé nějaký determinant, v němž právě k $(1 \leqq k < \nu)$ z čísel (21) je rovno $m+1$, ostatních $\nu - k$ pak je menších než $m+1$. Rozviňme tento determinant podle oněch k řádků, k nimž příslušná l_ϱ jsou rovna $m+1$. Tím se rozpadne determinant na součet několika sčítanců tvaru (K je konstanta)

$$K\xi^{s_1+\ldots+s_{\nu-k}} \begin{vmatrix} a_{s_1,w_1} & \ldots, a_{s_1,w_{\nu-k}}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ a_{s_{\nu-k},w_1}, & \ldots, a_{s_{\nu-k},w_{\nu-k}} \end{vmatrix}\,.\,\xi^{km}\,. \begin{vmatrix} \eta_{t_1,v_1}(\xi), & \ldots, \eta_{t_1,v_k}(\xi)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \eta_{t_k,v_1}(\xi), & \ldots, \eta_{t_k,v_k}(\xi) \end{vmatrix}, \tag{22}$$

kde $s_1, \ldots, s_{\nu-k}$ jsou právě ona čísla z posloupnosti (21), jež jsou menší než $m+1$. Druhý determinant v (22) konverguje k nule pro $\xi \to 0$. Je-li $s_1 + \ldots + s_{\nu-k} \geqq I_1 + \ldots + I_{\nu-k}$, je $s_1 + \ldots + s_{\nu-k} + mk \geqq I_1 + \ldots + I_\nu = H$, a výraz (22) jest roven $o(\xi^H)$. Je-li však $s_1 + \ldots + s_{\nu-k} < I_1 + \ldots + I_{\nu-k}$, jsou řádky $s_1, \ldots, s_{\nu-k}$ v matici (3) podle druhého tvrzení 1. pomocné věty závislé a první determinant v (22) se dokonce přímo rovná nule.

III. Zbývá vyšetřiti ony determinanty z (20), v nichž všechna l_ϱ jsou menší než $m+1$. Podle (19) máme tedy vyšetřiti součet všech výrazů

$$\begin{vmatrix} a_{l_0,0}, & \ldots, a_{l_0,\nu-1}\\ a_{l_1,0}, & \ldots, a_{l_1,\nu-1}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ a_{l_{\nu-1},0}, & \ldots, a_{l_{\nu-1},\nu-1} \end{vmatrix}\,.\,\xi^{l_0+l_1+\ldots+l_{\nu-1}}\prod_{w=0}^{\nu-1}(m+1)\,.\,m\ldots(l_w-w+1)\,, \tag{23}$$

kde čísla $l_0, l_1, \ldots, l_{\nu-1}$ probíhají hodnoty $0, 1, \ldots, m$. Je-li $l_0 + l_1 + \ldots + l_{\nu-1} > H$, je výraz (23) roven $o(\xi^H)$; je-li $l_0 + l_1 + \ldots + l_{\nu-1} < H$, je determinant v (23) roven nule. Je-li $l_0 + l_1 + \ldots + l_{\nu-1} = H$, a nevzniká-li posloupnost $l_0, l_1, \ldots, l_{\nu-1}$ z posloupnosti $I_1, I_2, \ldots, I_\nu$ permutací, je determinant v (23) rovněž roven nule podle prvního tvrzení 1. pomocné věty. Podle výsledků dosažených v I, II, III a podle (20) je tedy

$$((m+1)!)^{\nu}\,\xi^{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}\,\Delta_{\nu}(\alpha+\xi)=$$

$$=\xi^{H}\sum_{l_0,\ldots,l_{\nu-1}}\begin{vmatrix} a_{l_0,0}, & \ldots, & a_{l_0,\nu-1}\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ a_{l_{\nu-1},0} & \ldots, & a_{l_{\nu-1},\nu-1}\end{vmatrix}\prod_{w=0}^{\nu-1}(m+1)\,m\ldots(l_w-w+1)+o(\xi^{H}), \quad (24)$$

kde se sčítá přes oněch $\nu!$ posloupností $l_0,\ldots,l_{\nu-1}$, jež vznikají permutací z posloupnosti $I_1,\ldots,I_{\nu}$. Součet v (24) vpravo je zřejmě roven (viz (16))

$$\Delta\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu}\left(\pm\prod_{\varrho=1}^{\nu}(m+1)\,m\ldots(I_{\varrho}-\alpha_{\varrho}+1)\right), \quad (25)$$

kde se sčítá přes všechny systémy $\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$, vznikající ze systému $0,1,\ldots,\nu-1$ permutací; znamení je $+$ nebo $-$ podle toho, zda permutace je sudá či lichá. Podle definice determinantu je výraz (25) roven

$$\Delta\frac{((m+1)!)^{\nu}}{I_1!\,I_2!\ldots I_{\nu}!}\begin{vmatrix}1, & I_1, & I_1(I_1-1), & \ldots, & I_1(I_1-1)\ldots(I_1-\nu+2)\\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill}\\ 1, & I_{\nu}, & I_{\nu}(I_{\nu}-1), & \ldots, & I_{\nu}(I_{\nu}-1)\ldots(I_{\nu}-\nu+2)\end{vmatrix} \quad (26)$$

a poslední determinant je roven Vandermondovu determinantu

$$\begin{vmatrix}1, & I_1, & \ldots, & I_1^{\nu-1}\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ 1, & I_{\nu}, & \ldots, & I_{\nu}^{\nu-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<k\leq\nu}(I_k-I_i), \quad (27)$$

takže pravá strana v (24) je

$$\xi^{H}((m+1)!)^{\nu}\frac{\Delta}{I_1!\ldots I_{\nu}!}\prod_{1\leq i<k\leq\nu}(I_k-I_i)+o(\xi^{H}), \quad (28)$$

odkudž vzhledem k $H=I_1+\ldots+I_{\nu}$ plyne (17).

Poznámka. Z věty 1 plyne ihned tento důsledek: Budiž $0<\nu<n$. Funkce $f_0(x), f_1(x),\ldots,f_{m-1}(x)$ nechť mají v každém bodě otevřeného intervalu (a,b) derivaci řádu $n-1$. Nechť matice

$$\begin{vmatrix}f_0(x), & \ldots, & f_{m-1}(x)\\ f_0'(x), & \ldots, & f_{m-1}'(x)\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ f_0^{(n-1)}(x), & \ldots, & f_{m-1}^{(n-1)}(x)\end{vmatrix} \quad (M_1)$$

má v každém bodě intervalu (a,b) hodnost aspoň ν. Budiž $\mathfrak{M}$ množina oněch $x\in(a,b)$, pro něž matice

$$\begin{matrix}f_0(x), & \ldots, & f_{m-1}(x)\\ f_0'(x), & \ldots, & f_{m-1}'(x)\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ f_0^{(\nu-1)}(x), & \ldots, & f_{m-1}^{(\nu-1)}(x)\end{matrix} \quad (M_2)$$

má hodnost menší než ν. Potom $\mathfrak{M}$ nemá hromadných bodů v (a,b).

Důkaz. Je-li dán libovolný bod α intervalu (a, b), existuje v matici (M_1) pro $x = \alpha$ jistě ν nezávislých sloupců. Podle věty 1 existuje pak $\delta > 0$ tak, že v intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ neleží žádný bod množiny $\mathfrak{M}$, různý od α. Tedy není α — libovolný to bod intervalu (a, b) — hromadným bodem množiny $\mathfrak{M}$.

§ 2. Věta 2 a její důkaz.

V celém tomto paragrafu buďte splněny tyto předpoklady: Jest dán otevřený interval (a, b) a mimo to n funkcí $f_l(x)$ $(0 \leqq l \leqq n - 1,\ n > 0)$, jež mají v (a, b) derivace až do řádu $n - 1$. Pro každé $x \in (a, b)$ existuje tedy matice

$$\begin{matrix} f_0(x), & \ldots, & f_{n-1}(x) \\ f_0'(x), & \ldots, & f_{n-1}'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_0^{(n-1)}(x), & \ldots, & f_{n-1}^{(n-1)}(x)\,. \end{matrix} \tag{29}$$

Existuje-li q nezávislých řádků komplexních čísel[5])

$$\begin{matrix} A_{1,0}, & \ldots, & A_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{q,0}, & \ldots, & A_{q,n-1} \end{matrix} \tag{30}$$

tak, že pro $1 \leqq l \leqq q$ a pro každé $x \in (a, b)$ jest

$$A_{l,0}\, f_0(x) + \ldots + A_{l,n-1}\, f_{n-1}(x) = 0\,, \tag{31}$$

ale neexistuje-li $q + 1$ takových nezávislých řádků, budeme říkati, že funkce

$$f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \tag{32}$$

mají v (a, b) stupeň závislosti q. Jest ovšem $0 \leqq q \leqq n$. Jest $q = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže platí: jsou-li $A_0, \ldots, A_{n-1}$ čísla taková, že pro všechna $x \in (a, b)$ jest

$$A_0\, f_0(x) + \ldots + A_{n-1}\, f_{n-1}(x) = 0\,, \tag{33}$$

jest $A_0 = A_1 = \ldots = A_{n-1} = 0$. V tomto případě $q = 0$ se proto také říká, že funkce (32) jsou lineárně nezávislé v (a, b). Triviální a velmi známé jsou tyto dvě věty:

2. pomocná věta. *Mají-li funkce* (32) *v* (a, b) *stupeň závislosti aspoň* q, *má matice* (29) *v každém bodě intervalu* (a, b) *hodnost nejvýše* $n - q$.

Důkaz. Z rovnice (33) plyne derivováním soustava rovnic

$$A_0\, f_0^{(\sigma)}(x) + \ldots + A_{n-1}\, f_{n-1}^{(\sigma)}(x) = 0 \quad (\sigma = 0, 1, \ldots, n - 1)\,, \tag{34}$$

mající matici (29). Má-li (34) q nezávislých řešení (30), má (29) hodnost nejvýše $n - q$.

---

[5]) To značí, že matice (30) má hodnost q.

3. pomocná věta. *Budiž* $0 < \nu < n$. *Nechť matice* (29) *má v každém bodě intervalu* (a, b) *hodnost* ν. *Nechť pro každé* $x \in (a, b)$ *jest*

$$\begin{vmatrix} f_0(x), & \ldots, & f_{\nu-1}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_0^{(\nu-1)}(x), & \ldots, & f_{\nu-1}^{(\nu-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{35}$$

Potom mají funkce (32) *v* (a, b) *stupeň závislosti* $n - \nu$.

Důkaz. Pro každé $x \in (a, b)$ najdu $n - \nu$ nezávislých řešení rovnic (34) takto: pro každé celé l ($\nu \leqq l \leqq n - 1$) zvolím $A_{l,l} = 1$, $A_{l,h} = 0$ pro $\nu \leqq h \leqq n - 1$, $h \neq l$ a určím $A_{l,0}, \ldots, A_{l,\nu-1}$ ze soustavy ν rovnic

$$A_{l,0} f_0^{(\sigma)}(x) + \ldots + A_{l,\nu-1} f_{\nu-1}^{(\sigma)}(x) + A_{l,\nu} f_\nu^{(\sigma)}(x) + \ldots + A_{l,n-1} f_{n-1}^{(\sigma)}(x) = 0 \tag{36}$$

pro $\sigma = 0, 1, \ldots, \nu - 1$; potom budou rovnice (36) ovšem splněny i pro $\sigma = \nu, \nu + 1, \ldots, n - 1$, ježto levé strany všech rovnic (34) jsou lineárními kombinacemi prvních ν z nich. Zřejmě jsou $A_{l,h} = A_{l,h}(x)$ pro $0 \leqq h \leqq \nu - 1$ funkce proměnné x, jež jsou racionálně složeny z funkcí $f_\varrho^{(\sigma)}(x)$ ($0 \leqq \sigma \leqq \nu - 1 < n - 1$, $0 \leqq \varrho \leqq n - 1$);[6]) existují tedy derivace $A'_{l,h}(x)$. Pro $h \geqq \nu$ jsou $A_{l,h}$ dokonce konstanty. Je-li nyní $0 \leqq \sigma \leqq \nu - 1$, plyne derivováním příslušné rovnice (36)

$$A_{l,0} f_0^{(\sigma+1)} + \ldots + A_{l,n-1} f_{n-1}^{(\sigma+1)} + A'_{l,0} f_0^{(\sigma)} + \ldots + A'_{l,\nu-1} f_{\nu-1}^{(\sigma)} = 0 ; \tag{37}$$

užiji-li následující rovnice (36) (s hodnotou $\sigma + 1$; to lze, ježto $\sigma + 1 \leqq n - 1$), dostanu

$$A'_{l,0} f_0^{(\sigma)} + \ldots + A'_{l,\nu-1} f_{\nu-1}^{(\sigma)} = 0 \text{ pro } \sigma = 0, 1, \ldots, \nu - 1 . \tag{38}$$

Vzhledem k (35) plyne odtud $A'_{l,h} = 0$ pro $h = 0, 1, \ldots, \nu - 1$, takže všechny funkce $A_{l,h}$ jsou konstantní. Rovnice (36) pro $\sigma = 0$ a pro $l = \nu, \nu + 1, \ldots, n - 1$ nám pak ukazují, že stupeň závislosti funkcí (32) v (a, b) je aspoň $n - \nu$; že pak nemůže býti větší, plyne z 2. pomocné věty.

Poznámka. V 3. pomocné větě by ovšem místo determinantu (35) mohl býti kterýkoliv determinant, složený z prvních ν řádek a z kterýchkoliv ν sloupců matice (29). 3. pomocná věta udává vzájemně jednoznačný vztah mezi hodností matice (29) a stupněm závislosti funkcí (32) v (a, b), ovšem za těchto předpokladů:

A. Hodnost matice (29) má ve všech bodech intervalu (a, b) touž hodnotu ν.

B. Determinant (35) je v (a, b) stále různý od nuly.

Ukážeme nyní, že předpoklad B lze vynechati:

Věta 2. *Budiž* $0 \leqq \nu \leqq n$. *Pro každé* $x \in (a, b)$ *nechť má matice* (29) *hodnost* ν. *Potom mají funkce* (32) *v* (a, b) *stupeň závislosti* $n - \nu$.

---

[6]) Jmenovatelem je determinant (35).

Poznámka. Jestliže má matice (29) ve všech bodech intervalu (a, b) hodnost nejvýše ν, v některých bodech hodnost právě ν a v jiných bodech hodnost menší než ν, nemusí býti stupeň závislosti roven $n - \nu$. Příklad pro $n = 2$: budiž $f_0(x) = 0$, $f_1(x) = x^2$ pro $x < 0$; $f_0(x) = x^2$, $f_1(x) = 0$ pro $x \geqq 0$. Hodnost matice (29) je zřejmě 1 pro každé $x \neq 0$, ale 0 pro $x = 0$. Funkce f_0, f_1 jsou lineárně nezávislé, t. j. mají stupeň závislosti 0 (a nikoliv 1) v každém otevřeném intervalu, obsahujícím počátek. Vskutku, platí-li rovnice $A_0 f_0(x) + A_1 f_1(x) = 0$ pro nějakou hodnotu $x_1 < 0$ a současně pro nějakou hodnotu $x_2 > 0$, je $A_0 \cdot 0 + A_1 x_1^2 = 0$, $A_0 x_2^2 + A_1 \cdot 0 = 0$, t. j. $A_1 = A_2 = 0$.

Důkaz věty 2. Případ $\nu = n$ je samozřejmý podle 2. pomocné věty: stupeň závislosti nemůže být kladný, tedy je roven nule. Také případ $\nu = 0$ je triviální, neboť potom pro všechna $x \in (a, b)$ je $f_0(x) = 0, \ldots, f_{n-1}(x) = 0$, což je n nezávislých lineárních relací mezi funkcemi $f_0, \ldots, f_{n-1}$, takže stupeň závislosti je n.

Předpokládejme proto v dalším $0 < \nu < n$. Napřed dokážeme toto:

Tvrzení A. Ke každému bodu $\alpha \in (a, b)$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že $a < \alpha - \delta < \alpha + \delta < b$ a že stupeň závislosti funkcí (32) v intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ je roven $n - \nu$.

Budiž tedy dán bod $\alpha \in (a, b)$. Jistě existuje ν sloupců matice (29) tak, že matice sestrojená z těchto ν sloupců má v bodě α hodnost ν. Budiž to bez újmy obecnosti matice, složená z prvních ν sloupců, t. j. matice

$$\begin{matrix} f_0(x), & \ldots, & f_{\nu-1}(x) \\ f_0'(x), & \ldots, & f_{\nu-1}'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0^{(n-1)}(x), & \ldots, & f_{\nu-1}^{(n-1)}(x) \end{matrix} \tag{39}$$

Podle věty 1 existuje $\delta > 0$ tak, že v intervalu $j_1 = (\alpha - \delta, \alpha)$ a rovněž v intervalu $j_2 = (\alpha, \alpha + \delta)$ platí nerovnost (35). Podle 3. pomocné věty mají funkce (32) v j_1 i v j_2 stupeň závislosti právě $n - \nu$; položme $n - \nu = q$. Existuje tedy q nezávislých řádků komplexních čísel

$$A_{l,0}, \ldots, A_{l,n-1} \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1) \tag{40}$$

a q nezávislých řádků komplexních čísel

$$B_{l,0}, \ldots, B_{l,n-1} \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1) \tag{41}$$

tak, že pro $x \in j_1$ jest

$$A_{l,0} f_0(x) + \ldots + A_{l,n-1} f_{n-1}(x) = 0 \tag{42}$$

a pro $x \in j_2$ jest

$$B_{l,0} f_0(x) + \ldots + B_{l,n-1} f_{n-1}(x) = 0\,. \tag{43}$$

Ježto $f_\varrho(x)$ jsou spojité v (a, b), platí (42), (43) i pro $x = \alpha$. Derivováním rovnic (42) (v bodě α derivujeme zleva) a rovnic (43) (v bodě α derivujeme zprava) obdržíme rovnice

$$A_{l,0} f_0^{(\sigma)}(x) + \ldots + A_{l,n-1} f_{n-1}^{(\sigma)}(x) = 0\,, \tag{44}$$

platné pro $\alpha - \delta < x \leqq \alpha$, $0 \leqq \sigma \leqq n - 1$, a rovnice

$$B_{l,0} f_0^{(\sigma)}(x) + \ldots + B_{l,n-1} f_{n-1}^{(\sigma)}(x) = 0\,, \tag{45}$$

platné pro $\alpha \leqq x < \alpha + \delta$, $0 \leqq \sigma \leqq n - 1$. Pro $x = \alpha$ platí tedy rovnice (44) i (45); t. j. rovnice

$$C_0 f_0^{(\sigma)}(\alpha) + \ldots + C_{n-1} f_{n-1}^{(\sigma)}(\alpha) = 0 \quad (\sigma = 0, 1, \ldots, n - 1) \tag{46}$$

mají řešení (40) i (41). Ježto však matice (29) má v bodě α hodnost ν, má soustava (46) pouze $q = n - \nu$ řešení, takže každý řádek (40) je lineární kombinací řádků (41); z rovnice (43) tedy plyne, že rovnice (42) platí i pro $\alpha \leqq x < < \alpha + \delta$. Rovnice (42) platí tedy pro $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$, takže funkce (32) mají v $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ stupeň závislosti aspoň $q = n - \nu$ a tedy podle 2. pomocné věty p r á v ě $n - \nu$. Tím je tvrzení A dokázáno.

Zvolme nyní pevně bod $c \in (a, b)$. Podle tvrzení A existuje $q = n - \nu$ nezávislých řádků komplexních čísel

$$C_{l,0}, \ldots, C_{l,n-1} \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1) \tag{46}$$

tak, že v jistém intervalu $(c - d, c + d)$ platí rovnice

$$C_{l,0} f_0(x) + \ldots + C_{l,n-1} f_{n-1}(x) = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1)\,. \tag{47}$$

Budiž $\mathfrak{M}$ množina oněch bodů $x \in (a, b)$, pro něž platí (47); budiž $\mathfrak{M}_0$ množina všech vnitřních bodů množiny $\mathfrak{M}$, takže $c \in \mathfrak{M}_0$. Dokážeme-li, že $\mathfrak{M}_0 = (a, b)$, bude tím zřejmě věta 2. dokázána (podle rovnic (47), platných pak v celém intervalu (a, b), bude totiž stupeň závislosti funkcí (32) v (a, b) nejméně roven $q = n - \nu$ a podle 2. pomocné věty je nejvýše roven $n - \nu$). Předpokládejme tedy, že $\mathfrak{M}_0 \neq (a, b)$. Potom existuje bod $\alpha \in (a, b)$, patřící k hranici množiny $\mathfrak{M}_0$. Podle tvrzení A existuje $\delta > 0$ tak, že $a < \alpha - \delta < \alpha + \delta < b$ a že v intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ mají funkce (32) stupeň závislosti q. Existuje tedy q nezávislých řádků

$$A_{l,0}, \ldots, A_{l,n-1} \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1) \tag{48}$$

tak, že v intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ jest

$$A_{l,0} f_0(x) + \ldots + A_{l,n-1} f_{n-1}(x) = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1)\,. \tag{49}$$

V intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ existuje bod γ, patřící k $\mathfrak{M}_0$; lze tedy zvoliti $\varepsilon > 0$ tak malé, že $(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon) \subset \mathfrak{M}_0$, $(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon) \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. V intervalu $(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)$ platí (47) i (49); ježto podle 2. pomocné věty mají funkce (32) v $(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)$ stupeň závislosti nejvýše $n - \nu = q$, je nutně každý řádek (46) lineární kombinací řádků (48), takže podle (49) platí rovnice (47) v celém intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Tedy je $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset \mathfrak{M}_0$, takže bod α nemůže patřiti k hranici množiny $\mathfrak{M}_0$, což je hledaný spor.

Резюме

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ ОТ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ВОЙТЕХ ЯРНИК (Vojtěch Jarník), Прага.

(Поступило в редакцию 3/V 1954 г.)

Пусть $f_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu - 1; \nu > 0)$ — комплексная функция одной вещественной переменной, имеющая в точке α производную порядка $n - 1$ $(n > \nu)$. Предположим, что матрица (14) имеет ранг ν, такчто существуют целые числа $I_1, \ldots, I_\nu$ $(0 \leqq I_1 < I_2 < \ldots < I_\nu \leqq n - 1)$, для которых определитель Δ [см. (16), где $a_{kl} = f_l^{(k)}(\alpha)$] отличен от нуля. Выберем $I_1, \ldots, I_\nu$ так, чтобы значение $I_1 + \ldots + I_\nu$ было минимумом*) (при соблюдении условия $\Delta \neq 0$). Тогда имеет место (17), где $\Delta_\nu(x)$ определен формулой (15). Существует, следовательно, такое $\delta > 0$, что $\Delta_\nu(x) \neq 0$ для $0 < |x - \alpha| < \delta$. Отсюда легко вывести следующий результат: Если функции $f_0, \ldots, f_{n-1}$ такие, что матрица (29) имеет во всех точках промежутка (a, b) тот же самый ранг ν, то в (a, b) имеет место в точности $n - \nu$ независимых соотношений вида $c_0 f_0 + c_1 f_1 + \ldots + c_{n-1} f_{n-1} = 0$. (Нет надобности требовать, чтобы ранг матрицы, состоящей из ν первых строк матрицы (29), был равен ν во всех точках промежутка (a, b).)

Résumé.

SUR LES FONCTIONS LINÉAIREMENT DÉPENDANTES

VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

(Reçu le 3 mai 1954.)

Pour $k = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ $(\nu > 0)$ soit $f_k(x)$ une fonction complexe d'une variable réelle qui possède, au point α, une dérivée finie d'ordre $n - 1$ $(n > \nu)$. Supposons que la matrice (14) possède le rang ν; il existe donc des nombres entiers $I_1, I_2, \ldots, I_\nu$ $(0 \leqq I_1 < I_2 < \ldots < I_\nu \leqq n - 1)$ tels que la déterminante Δ (voir (16), où $a_{kl} = f_l^{(k)}(\alpha)$) soit différente de zéro. Nous supposons $I_1, \ldots, I_\nu$ choisis de manière de rendre la somme $I_1 + \ldots + I_\nu$ minimum*) (sous la condition $\Delta \neq 0$). Alors on a (17), où $\Delta_\nu(x)$ est le Wronskien (15). Il existe donc un $\delta > 0$ tel que l'on ait $\Delta_\nu(x) \neq 0$ pour $0 < |x - \alpha| < \delta$. On en déduit comme un corollaire facile le résultat suivant:

*) Это условие определяет числа $I_1, \ldots, I_\nu$ однозначно.

*) Cette condition détermine les nombres $I_1, \ldots, I_\nu$ d'une manière univoque.

Si les fonctions $f_0, \ldots, f_{n-1}$ sont telles que la matrice (29) ait, dans tous les points de l'intervalle (a, b), le même rang ν, alors il existe précisément $n - \nu$ relations linéaires indépendantes (de la forme $c_0 f_0 + c_1 f_1 + \ldots + c_{n-1} f_{n-1} = 0$) valables dans toute l'étendue de l'intervalle (a, b). (Il n'est pas nécessaire d'exiger que la matrice, formée de ν premières lignes de la matrice (29), possède le rang ν dans chaque point de (a, b).)

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O SVAZOVĚ USPOŘÁDANÝCH GRUPOIDECH

VÁCLAV KUDLÁČEK, Brno.

(Došlo dne 13. května 1954.) DT: 519.4

Ve své práci pojednávám o svazově uspořádaných grupoidech, t. j. o množinách, které jsou současně grupoid a svaz. Mým cílem bylo především zobecnění některých výsledků, které byly získány pro svazově uspořádané grupy, jak jsou uvedeny jednak v (BL), jednak v (LG), jednak v (KB),*) na které mě upozornil prof. dr O. Borůvka. Ve zobecnění daných výsledků jsem postupoval tím způsobem, že jsem vynechal některé axiomy grupy a volil pak vztah mezi svazovým násobením a násobením v grupoidu. Věta první, druhá a pátá si všímá vztahu monotonie uspořádání pro násobení a zákonů distributivních pro násobení. Věta třetí ukazuje, že komutativní svazově uspořádaný grupoid s krácením je distributivní svaz. Věta šestá a sedmá určuje podmínky, kdy svazově uspořádaný grupoid je jednoduše uspořádaný. V textu je uvedeno několik příkladů svazově uspořádaných grupoidů.

Definice 1. *Částečně uspořádaný grupoid je grupoid, jehož pole je částečně uspořádaná množina v relaci* $\leqq$ *a kde pro libovolné prvky* $a, x, y \in G$ *platí*

$$(U) \quad x \leqq y \Rightarrow a \,.\, x \leqq a \,.\, y, \; x \,.\, a \leqq y \,.\, a \,.$$

Definice 2. *Svazově uspořádaný grupoid je částečně uspořádaný grupoid, jehož pole je svaz.*

Poznámka: Ve svazově uspořádaném grupoidu G jsou každé uspořádané dvojici prvků (a, b) z grupoidu G přiřazeny prvky $a. b$, $a \cup b$, $a \cap b$ opět z grupoidu G. Je tedy svazově uspořádaný grupoid množina s trojím násobením nebo jinak svaz s třetím násobením, které je vázáno vztahem (U).

Věta 1. *Nechť G je svaz s třetím násobením, které je se svazovými operacemi vázáno vztahy, buď*

$$(D1) \quad a \,.\, (x \cup y) = a \,.\, x \cup a \,.\, y \,,$$
$$(D2) \quad (x \cup y) \,.\, a = x \,.\, a \cup y \,.\, a \,,$$

nebo

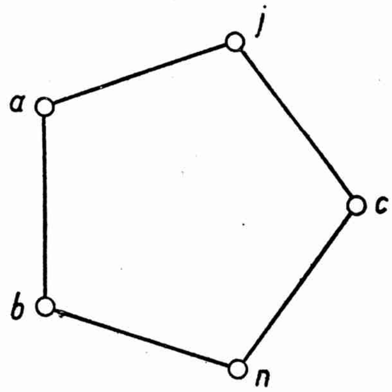
$$(D1') \quad a \,.\, (x \cap y) = a \,.\, x \cap a \,.\, y \,,$$
$$(D2') \quad (x \cap y) \,.\, a = x \,.\, a \cap y \,.\, a \,,$$

*) Viz seznam literatury na konci této práce.

kde $a, x, y \in G$. Pak G je svazově uspořádaný grupoid. Je-li G svazově uspořádaný grupoid, nemusí platit žádný ze vztahů $(D1)$, $(D2)$, $(D1')$, $(D2')$.

Důkaz: Nechť G je svaz s třetím násobením. Nechť platí $(D1)$ a $(D2)$. Nechť jsou $a, x, y \in G$ takové, že $x \leqq y$; pak $y = x \cup y$ a dále $a \,.\, y = a \,.\, (x \cup y) = a \,.\, x \cup a \,.\, y$, tedy $a \,.\, x \leqq a \,.\, y$. Podobně $y \,.\, a = (x \cup y) \,.\, a = x \,.\, a \cup y \,.\, a$, tedy $x \,.\, a \leqq y \,.\, a$. Platí tedy (U) a G je svazově uspořádaný grupoid. Podobně dokážeme platnost vztahu (U) z platnosti $(D1')$ a $(D2')$.

Nechť G je svazově uspořádaný grupoid, pak pro porovnatelné prvky x, $y \in G$ zřejmě platí distributivní zákony $(D1)$—$(D2')$. Neboť ať na př. $x \leqq y$, pak také $a \,.\, x \leqq a \,.\, y$, $x \,.\, a \leqq y \,.\, a$, pro $x, y, a \in G$. Dále $x \cup y = y$, $a \,.\, x \cup a \,.\, y = a \,.\, y = a \,.\, (x \cup y)$ a také $x \,.\, a \cup y \,.\, a = y \,.\, a = (x \cup y) \,.\, a$. Podobně se ukáže platnost $(D1')$ a $(D2')$.



Obr. 1.

Příklad 1. Ukážeme nyní na příkladě, že pro neporovnatelné prvky svazově uspořádaného grupoidu nemusí platit žádný ze vztahů $(D1)$—$(D2')$. Nechť G je svazově uspořádaný grupoid. Svazové násobení je dáno diagramem (obr. 1), grupoidní násobení je dáno tabulkou:

	j	a	b	c	n
j	j	a	a	a	b
a	a	a	a	c	n
b	a	b	b	n	n
c	b	c	n	n	n
n	n	n	n	n	n

Zřejmě je splněn vztah (U). Distributivní zákony $(D1)$—$(D2')$ neplatí, na př.

$$\begin{aligned}
a &= a \,.\, j = a \,.\, (b \cup c) \neq a \,.\, b \cup a \,.\, c = a \cup c = j\,, \\
a &= j \,.\, a = (b \cup c) \,.\, a \neq b \,.\, a \cup c \,.\, a = b \cup c = j\,, \\
b &= j \,.\, n = j \,.\, (b \cap c) \neq j \,.\, b \cap j \,.\, c = a \cap a = a\,. \\
n &= n \,.\, j = (b \cap c) \,.\, j \neq b \,.\, j \cap c \,.\, j = a \cap b = b\,.
\end{aligned}$$

Tím je věta dokázána.

Věta 2. *Nechť G je komutativní svazově uspořádaný grupoid, v němž platí $(D1)$, $(D1')$, pak platí*

$$(K) \quad (a \cup b) \,.\, (a \cap b) = a \,.\, b\,.$$

Naopak svazově uspořádaný grupoid, v kterém platí (K), je komutativní, ale nemusí v něm nutně platit $(D1)$ a $(D1')$.

Důkaz: Nechť G je komutativní svazově uspořádaný grupoid, v němž platí $(D1)$ a $(D1')$. Protože G je komutativní grupoid platí, také $(D2)$ a $(D2')$. Nechť $a, b \in G$. Násobme nerovnosti $a \cup b \geqq a \geqq a \cap b$, resp. $a \cup b \geqq b \geqq a \cap b$ prvky

b resp. a. Pak máme $(a \cup b) . b \cap (a \cup b) . a \geqq a . b \geqq (a \cap b) . b \cup (a \cap b) . a$; dále $(a \cup b) . (a \cap b) \geqq a . b \geqq (a \cup b) . (a \cap b)$. Musí tedy platit (K).

Druhou část tvrzení dokažme na příkladě.

Příklad 2. Nechť G je svazově uspořádaný grupoid. Svazové násobení je dáno obrázkem (obr. 1) a grupoidní násobení je dáno tabulkou.

	j	a	b	c	n
j	j	j	j	j	j
a	j	j	j	j	j
b	j	j	j	j	c
c	j	j	j	j	c
n	j	j	c	c	n

Násobení je zřejmě komutativní. Vztah (K) je splněn pro porovnatelné prvky. Pro neporovnatelné prvky obdržíme:

$$(a \cup c) . (a \cap c) = j . n = a . c = j\,, \quad (b \cup c) . (b \cap c) = j . n = b . c = j\,.$$

Neplatí $(D1)$, neboť

$$c = c \cup c = n . b \cup n . c \neq n . (b \cup c) = n . j = j\,.$$

Neplatí $(D1')$, neboť

$$c = c \cap c = n . b \cap n . c \neq n . (b \cap c) = n . n = n\,.$$

Tím je naše věta dokázána.

Podobnou větu dokazuje poněkud jinak F. Klein-Barmen (KB, Satz 1, s. 88), ale předpokládá platnost asociativního zákona pro grupoidní násobení. V dalším klade otázku, zda naopak z platnosti vztahu (K) vyplývají vztahy $(D1)$ a $(D1')$ u asociativních svazově uspořádaných grupoidů. Odpověď je záporná, jak dokazuje předchozí příklad 2, v němž se jedná o asociativní grupoid.

Věta 3. *Nechť G je svaz s třetím násobením. Nechť platí (K) a pravidlo o krácení, t. j.*

$$a . x = a . y \Rightarrow x = y\,;$$

pak G je distributivní svaz.

Poznámka: Podobnou větu pro svazově uspořádané grupy, ale nekomutativní dokazuje Birkhoff (BL, Chapt. XIV, Th. 5, p. 219). Pro svazově uspořádané grupoidy podobnou větu dokazuje Klein-Barmen (KB, Satz 6, s. 93). Využívá opět asociativního zákona.

Důkaz: Použijme věty, která je v BL, Chapt. IX, Th. 2, Cor. 1, p. 134. Svaz S je distributivní, platí-li pro libovolné prvky $a, x, y \in S$

$$\left.\begin{matrix} a \cup x = a \cup y \\ a \cap x = a \cap y \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y\,.$$

Nechť tedy a, x, y jsou libovolné prvky z G, pro které platí $a \cup x = a \cup y$, $a \cap x = a \cap y$. Vynásobením těchto rovnic dostaneme $(a \cup x) . (a \cap x) = (a \cup y) . (a \cap y)$, z čehož $a . x = a . y$. Po zkrácení máme $x = y$. Je tedy G distributivní svaz.

Věta 4. *Nechť G je svazově uspořádaný grupoid, v kterém platí pravidla o krácení. Pak pole grupoidu G nemůže býti konečná množina.*

Důkaz: Je-li pole konečná množina, je G quasigrupa. Nechť $j \in G$ je jednička svazu, nechť x je libovolný prvek z G, pak existuje prvek $y \in G$ tak, že $x . y = j$. Platí $j \geqq y$, z čehož $x . j \geqq x . y = j$. Je tedy $x . j = j$ pro všechna $x \in G$, což je spor.

Definice 3. *Nechť G je částečně uspořádaný grupoid, který je současně quasigrupa, pak grupoid G nazveme částečně uspořádanou quasigrupou. Když G je svaz, pak G nazveme svazově uspořádanou quasigrupou.*

Označme

$$(H) \quad a . x \leqq a . y \Leftrightarrow x \leqq y\,, \quad x . a \leqq y . a \Leftrightarrow x \leqq y\,.$$

Věta 5. *Nechť G je svazově uspořádaná quasigrupa. Když a jen když platí (H), pak platí $(D1)$, $(D2)$.*

Důkaz: 1a) Nechť platí $(D1)$, $(D2)$. Nechť $x, y, a \in G$, $x \leqq y$. Potom $a . (x \cup y) = a . y = a . x \cup a . y$, tedy $a . x \leqq a . y$.

b) Nechť $a . x \leqq a . y$, pak $a . x \cup a . y = a . y = a . (x \cup y)$, z toho $y = x \cup y$, tedy $x \leqq y$. Podobně pro $x . a \leqq y . a$.

2. Nechť platí (H). Nechť $a, x, y \in G$, pak existuje $c \in G$ tak, že platí

$$a . x \leqq a . x \cup a . y = a . c, \text{ pak } a . x \leqq a . c, \text{ tedy } x \leqq c\,,$$
$$a . y \leqq a . x \cup a . y = a . c, \text{ pak } a . y \leqq a . c, \text{ tedy } y \leqq c\,.$$

Nechť pro nějaké $d \in G$ platí $x \leqq d$, $y \leqq d$, pak $a . x \leqq a . d$, $a . y \leqq a . d$ a $a . c \leqq a . d$; z toho $c \leqq d$ a $c = x \cup y$. Máme tedy $a . (x \cup y) = a . x \cup a . y$.

Podobně postupujeme pro $(x \cup y) . a = x . a \cup y . a$.

Poznámka 1. Věta 5 platí, zaměníme-li v ní $(D1)$ a $(D2)$ pomocí $(D1')$ a $(D2')$.

Poznámka 2. Podobnou větu dokazuje Birkhoff v (BL) pro svazově uspořádané grupy.

Definice 4. *Nechť G je svazově uspořádaná lupa (t. j. svazově uspořádaná quasigrupa s jedničkou). Jednoznačně stanovený prvek $a^{-1} \in G$ s vlastností $a . a^{-1} = e$ nazýváme (pravým) inversním prvkem.*

Poznámka: Birkhoff v (BL) v Chapt. XIV, § 4, cv. 7 definuje svazově uspořádanou lupu jinak.

Definice 5. *Částečně uspořádaný grupoid G je jednoduše uspořádaný, když pole grupoidu je jednoduše uspořádáno, t. j. když pro každé dva prvky $a, b \in G$ platí jeden ze vztahů $a \leqq b$, $a \geqq b$.*

Věta 6. *Nechť G je svazově uspořádaná lupa, kde platí (H). Když a jen když pro libovolné prvky $a, b \in G$, $a > e$, $b > e$ platí $a \cap b > e$, pak G je jednoduše uspořádaná.*

Důkaz: Když G je jednoduše uspořádaná, tvrzení je zřejmé. Nechť nyní platí podmínky věty. Ukažme nejprve, že platí-li pro nějaké dva prvky $a, b \in G$ některý ze vztahů:

$$1.\ a \,.\, b^{-1} \leqq e\,, \qquad 2.\ e \leqq b \,.\, a^{-1}\,,$$
$$3.\ a \,.\, b^{-1} \geqq e\,, \qquad 4.\ e \geqq b \,.\, a^{-1}\,,$$

pak musí platit jeden ze vztahů $a \leqq b$, $b \leqq a$. Nechť na př. platí 1. Pak máme $b \,.\, b^{-1} = e = a \,.\, b^{-1} \cup e = a \,.\, b^{-1} \cup b \,.\, b^{-1} = (a \cup b) \,.\, b^{-1}$, odtud $b = a \cup b$, tedy $a \leqq b$. Podobně pro vztahy 2—4.

Předpokládejme nyní, že pro některé dva prvky $a, b \in G$ neplatí ani jeden ze vztahů 1.—4. Musí tedy platit

$$a \,.\, b^{-1} \cup e > e\,, \qquad b \,.\, a^{-1} \cup e > e\,,$$
$$a \,.\, b^{-1} \cap e < e\,, \qquad b \,.\, a^{-1} \cap e < e\,.$$

Je tedy

$$(A) \qquad (a \,.\, b^{-1} \cup e) \cap (b \,.\, a^{-1} \cup e) > e\,.$$

Dále

$$e \geqq (a \,.\, b^{-1} \cap e) \cup (b \,.\, a^{-1} \cap e) = (a \,.\, b^{-1} \cap b \,.\, b^{-1}) \cup (b \,.\, a^{-1} \cap a \,.\, a^{-1}) =$$
$$= (a \cap b) \,.\, b^{-1} \cup (a \cap b) \,.\, a^{-1} = (a \cap b) \,.\, (b^{-1} \cup a^{-1}) = a \,.\, (b^{-1} \cup a^{-1}) \cap b \,.$$
$$.\, (b^{-1} \cup a^{-1}) = (a \,.\, b^{-1} \cup e) \cap (e \cup b \,.\, a^{-1})\,,$$

což je spor s (A). Musí tedy platit jeden ze vztahů 1.—4. a tím je věta dokázána.

Definice 6. *Nechť G je částečně uspořádaný grupoid s jednotkou e, pak prvek k se nazývá minimální kladný prvek, není-li vztah $e < x < k$ splněn pro žádné $x \in G$. Množinu všech minimálních kladných prvků nazýváme krycí množinou jednotky e.*

Věta 7. *Nechť G je svazově uspořádaná lupa, kde platí (H). Nechť krycí množina obsahuje právě jeden prvek k. Nechť pro každé $x \in G$, pro něž $x > e$, platí $x \geqq k$. Potom G je jednoduše uspořádaná.*

Důkaz: Uvažujme $x, y \in G$ takové, že $x > e$, $y > e$. Dále máme $x \geqq k$, $y \geqq k$, $x \cap y \geqq k > e$. Je tedy G podle věty 6 jednoduše uspořádaná.

Poznámka: Věta 6 a 7 je dokázána pro svazově uspořádané grupy v (LG). Všimněme si, že jsme k důkazu vět užili pouze těchto předpokladů: G je svazově uspořádaný grupoid s jednotkou; ke každému prvku existuje inversní prvek; platí vztahy $(D1)$—$(D2')$ a krácení.

Uveďme příklad svazově uspořádaného grupoidu, který vyhovuje těmto zjednodušeným předpokladům a není grupa.

Příklad 3. Nechť G je množina celých čísel. Grupoidní násobení je dáno následujícími vztahy

1. Je-li $x > 0$, $y > 0$, pak

$$x \,.\, y = \binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}.$$

2. Je-li $x > 0$, $y < 0$, nebo $x < 0$, $y > 0$, pak

$$x \,.\, y = x + y\,,$$

kde symbolem $x + y$ je myšleno sečítání v obvyklém smyslu.

3. Je-li $x < 0$, $y < 0$, pak

$$x \,.\, y = -\binom{|x| + |y|}{|x|} = -\binom{|x| + |y|}{|y|}.$$

4. Je-li $x = 0$, pak pro všechna $y \in M$ platí

$$0 \,.\, y = y\,.$$

Svazové násobení definujeme takto:

$$x \cup y = \max\,(x, y)\,, \quad x \cap y = \min\,(x, y)\,.$$

Tabulka pro grupoidní násobení:

	...	—3	—2	—1	0	1	2	3 ...
.		.	.	.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.	.	.
—3	...	—20	—10	—4	—3	—2	—1	0 ...
—2	...	—10	—6	—3	—2	—1	0	1 ...
—1	...	—4	—3	—2	—1	0	1	2 ...
0	...	—3	—2	—1	0	1	2	3 ...
1	...	—2	—1	0	1	2	3	4 ...
2	...	—1	0	1	2	3	6	10 ...
3	...	0	1	2	3	4	10	20 ...
.		.	.	.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.	.	.

Z tabulky je zřejmé, že násobení je abelovské, není asociativní a ke každému prvku $x \in G$ existuje inversní prvek x^{-1}, který je dán vztahem $x^{-1} = -x$. Dále platí krácení. Je splněn vztah (U). Z definice svazového násobení je zřejmé, že jsou splněny vztahy (D1)—($D2'$) a pro $x, y \in G$ platí, když $x > e$, $y > e$, pak $x \cap y > e$.

LITERATURA

(BL) *Garrett Birkhoff*: Lattice theory, Revised Edition, 1948, New York.

(BG) *Otakar Borůvka*: Úvod do teorie grup, 2. vydání, 1952, Praha.

(KB) *Fritz Klein-Barmen*: Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung. Mathematische Zeitschrift *47*, roč. 1941, S. 85—104.

(LG) *F. Loonstra*: Discrete Groups, Indagationes math. *13* (1951), p. 162-168.

Резюме

СТРУКТУРНО УПОРЯЦОЧЕННЫЕ ГРУППОИДЫ

ВАЦЛАВ КУДЛАЧЕК (Václav Kudláček), Брно.

(Поступило в редакцию 13/V 1954 г.)

Работа содержит некоторые результаты теории структурно опорядоченных группоидов, т. е. структур с третьим умножением; в ней показаны определенные соотношения между структурными операциями и третьим умножением.

В статье, показаны и некоторые обобщения результатов, которые приведены в работах Клейн-Бармена (KB), Люнстра (LG) и Биркгофа (BL).

Summary.

LATTICE-ORDERED GROUPOIDS

VÁCLAV KUDLÁČEK, Brno.

(Received May 13, 1954.)

This work contains some results concerning the theory of lattice-ordered groupoids, i. e. lattices with third multiplication, in which certain relations between lattice-operations and a third operation are defined. In my work I give some generalizations of the results obtained by Birkhoff (BL), Loonstra (LG) and Klein-Barmen (KB).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O PLOCHÁCH KLÍNOVÝCH, I

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 11. června 1954.)

DT: 513.62

V článku definuje autor plochy, které obsahují systém křivek, z nichž každé dvě lze na sebe zobrazit vhodným posunutím a vhodnou afinitou. Tyto plochy mají užití ve stavebně-inženýrské praxi.

§ 1. Explicitní klínové plochy

Funkcemi budeme rozumět bez výjimky reálné funkce reálných argumentů. Množinu uspořádaných dvojic z dané oblasti, splňujících rovnici $f(x, y) = 0$, označíme stručněji $(f(x, y) = 0)$; v analogickém smyslu budeme užívat označení $(f(x, y, z) = 0)$.

Zobrazení bodových množin M, M' z téže eukleidovské roviny nazveme afinitou, když lze volit souřadnicové osy a nenulové reálné číslo k tak, že pro každý vzor $(x, y) \in M$ a jeho obraz $(x', y') \in M'$ platí $x = x'$, $y \, . \, k = y'$; přímku $(y = 0)$ nazveme osou afinity, přímku $(x = 0)$ směrem afinity a číslo k charakteristikou afinity.

Všimněme si, že tato afinita je symetrická a v případě téže osy také transitivní. Elace není v této afinitě zahrnuta.

Úmluva 1. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je definována nad jistou množinou I_x a funkce $g(y)$, $h(y)$ nad jistou množinou I_y. Zaveďme označení

$$(z = f(x) \, . \, g(y) + h(y)) = \varkappa \, .$$

V dalším označme symbolem I_y danou množinu reálných čísel. Pro každé $y_0 \in I_y$ definujme jistým způsobem množinu $N(y_0) \subset (y = y_0)$. Uvažujme nyní o této podmínce:

(1) Jsou-li čísla y_1, y_2 jakkoliv vybrána z I_y a neleží-li žádná z množin $N(y_1)$, $N(y_2)$ na rovnoběžce s rovinou $(z = 0)$, pak množinu $N(y_1)$ lze posunout rovnoběžně s rovinou $(x = 0)$ na množinu $N(y_1)' \subset (y = y_2)$ tak, že $N(y_1)'$ je afinní s $N(y_2)$ pro osu $(y = y_2) \cap (z = 0)$ a směr $(y = y_2) \cap (x = 0)$.

Zaměníme-li v předchozím symboly x, y a zavedeme-li místo N symbol M, dostaneme analogickou podmínku (2).

Poučka 1. *a) Nechť platí úmluva 1. Budiž dále* $N(y_0) = \varkappa \cap (y = y_0)$. *Pak platí podmínka* (1).

b) Předpokládejme, že $F(x, y)$ *je funkce, definovaná nad* $I_x \times I_y$ *(pro jisté množiny reálných čísel* I_x, I_y*). Položme dále*

$$N(y_0) = (z = F(x, y) = 0) \cap (y = y_0) .$$

Platí-li podmínka (1), *pak rovnici* $z = F(x, y)$ *lze přepsat do tvaru z úmluvy 1.*

Důkaz. a) Nechť platí $g(y_1) \neq 0 \neq g(y_2)$. Posunutím o vektor $(0, y_2 - y_1, h(y_2)\, g(y_1)\, g^{-1}(y_2) - h(y_1))$ přejde $N(y_1)$ v $N(y_1)'$. Sestrojíme-li afinitu o ose $(y = y_2) \cap (z = 0)$, směru $(y = y_2) \cap (x = 0)$ a charakteristice $g(y_2)\, g^{-1}(y_1)$, pak $N(y_1)'$ se zobrazí touto afinitou v $N(y_2)$.

b) Tvrzení je zřejmé v případě, že pro každé $y_0 \in I_y$ je $F(x, y_0)$ konstanta. Předpokládejme tedy, že existuje neprázdná množina $I'_y \subset I_y$ tak, že pro žádné $y_0 \in I'_y$ není $F(x, y_0)$ konstantní. Vyberme číslo $y_1 \in I'_y$.

Položíme-li $F(x, y_1) = f(x)$, pak podle podmínky (1) a podle definice afinity pro každé $y_0 \in I'_y$ a pro jisté jednoznačně určené funkce $g(y), h(y)$ je splněna rovnice

$$N(y_0) = (z = f(x)\, g(y) + h(y)) \cap (y = y_0) .$$

Takováto rovnice platí zřejmě i pro $y_0 \in I'_y$. Z rovnice $f(x)\, g(y) + h(y) = f(x) \,.\, G(y) + H(y)$ plyne pro $g(y) \neq G(y)$ rovnice $f(x) = (H(y) - h(y))(g(y) - G(y))^{-1}$, a tedy $f(x)$ je konstantní proti předpokladu. Tedy jest $g(y) = G(y)$ a následkem toho také $h(y) = H(y)$. Jednoznačnost je dokázána.

Poučka 2. *Předpokládejme, že funkce* f, g, h *v úmluvě 1 nejsou konstantní. Budiž dále* $M(x_0) = \varkappa \cap (x = x_0)$. *Pak platí* (2), *právě když existují konstantní čísla* A, B *tak, že*

$$g(y) = A \,.\, h(y) + B \,. \tag{3}$$

Důkaz. Nechť platí (3). Po dosazení dostaneme rovnici

$$z = h(y)(A \,.\, f(x) + 1) + B \,.\, f(x) ,$$

a tedy platí podle poučky 1a podmínka (2).

Nechť platí podmínka (2). Je-li funkce $f(x_0)\, g(y) + h(y)$ konstantní pro každé $x_0 \in I_x$, pak jsou také g, h konstantní, což odporuje předpokladu. Tedy existuje $x_1 \in I_x$ tak, že $f(x_1)\, g(y) + h(y)$ není konstantní. Podle poučky 1b platí nyní pro každé $x \in I_x$ a pro jisté funkce $m(x), n(x)$ rovnice

$$f(x)\, g(y) + h(y) = (f(x_1)\, g(y) + h(y))\, m(x) + n(x) \,. \tag{4}$$

1. Platí-li $m(x) = 1$ pro jisté $x \in I_x$, pak z rovnice (4) plyne $(f(x) - f(x_1)) \,.\, g(y) = n(x)$. Z nerovnosti $f(x) \neq f(x_1)$ vyplývá že g je konstantní, což odporuje předpokladu. Tedy jest $f(x) = f(x_1)$. *V tomto případě platí tedy* (4) *pro každé reálné* $g(y)$. Všimněme si, že rovnice $m(x) = 1$ nemůže platit pro každé $x \in I_x$, neboť to by znamenalo, že f je konstantní.

2. Platí-li $m(x) \neq 1$ pro jisté $x \in I_x$, pak jest $f(x) \neq f(x_1)\, m(x)$. Z nerovnosti $m(x) \neq 1$ a z rovnice

$$f(x) = f(x_1)\, m(x)$$

plyne totiž

$$h(y)(m(x) - 1) + n(x) = 0\,,$$

a tedy h je konstantní, což je ve sporu s předpokladem.

Z rovnice (4) nyní odvodíme rovnici

$$g(y) = h(y)(m(x) - 1)(f(x) - f(x_1)\, m(x))^{-1} + n(x)(f(x) - f(x_1)\, m(x))^{-1}\,.$$

Položíme-li

$$(m(x) - 1)(f(x) - f(x_1)\, m(x))^{-1} = A(x),\; n(x)(f(x) - f(x_1)\, m(x))^{-1} = B(x)\,,$$

pak předchozí rovnice má tvar $g(y) = A(x)\, h(y) + B(x)$.

Předpokládejme, že x_2, x_3 jsou jakékoliv prvky z I_x, pro něž platí $m(x_2) \neq 1 \neq m(x_3)$. Potom platí rovnice

$$h(y)\, A(x_2) + B(x_2) = h(y)\, A(x_3) + B(x_3)\,.$$

Kdyby nebyla splněna rovnice $A(x_2) = A(x_3)$, pak h by byla konstanta proti předpokladu. Tedy jest $A(x_2) = A(x_3)$ a následkem toho také $B(x_2) = B(x_3)$. *Tedy pro každé $x \in I_x$, pro které platí $m(x) \neq 1$, jsou $A(x)$, $B(x)$ konstantní.* Tedy pro každé takové x platí rovnice (3).

Aby byly splněny oba případy, musí platit pro $g(y)$ rovnice (3). Poučka je dokázána.

Dodatek. Ve vyloučených případech, kdy některá funkce f, g, h je konstantní, platí (2) bez další podmínky.

Poučka 4. *Předpokládejme, že v úmluvě 1 je I_y interval, f není konstantní a funkce z má v každém bodě z $I_x \times I_y$ spojitou parciální derivaci podle y. Pak také g, h mají v každém bodě spojitou derivaci.*

Důkaz. Protože f není konstantní, existují čísla $x_1, x_2 \in I_x$ tak, že $f_1 = f(x_1) \neq f_2 = f(x_2)$. Vyšetřujme soustavu rovnic pro $g(y)$, $h(y)$

$$m(y) = f_1 g(y) + h(y)\,,$$
$$n(y) = f_2 g(y) + h(y)\,.$$

Determinant soustavy je roven nenulovému výrazu $f_1 - f_2$. Platí tedy

$$g(y) = (m(y) - n(y))(f_1 - f_2)^{-1}\,,\quad h(y) = (f_1 n(y) - f_2 m(y))(f_1 - f_2)^{-1}\,.$$

Z tohoto výpočtu ihned plyne tvrzení poučky.

Lze tedy nyní vyslovit tuto definici:

Definice 1. *Jsou-li množiny I_x, I_y v úmluvě 1 jednorozměrné oblasti a mají-li funkce f, g, h všude spojitou derivaci, pak plochu $\varkappa$ nazveme explicitní klínovou plochou.*

Příklad 1. V úmluvě 1 položme

$$f(x) = x^2, \ g(y) = ay^2 + d, \ a \neq 0 \neq c\,.$$

Platí rovnice

$$ay^2 + b = ac^{-1}(cy^2 + d) + b - ac^{-1}d\,;$$

tedy podle poučky 3 jsou na příslušné ploše $\varkappa$ v rovinách $(x = x_0)$ paraboly anebo přímky, pro něž platí podmínka (2).

§ 2. Implicitní klínové plochy

Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ je definována nad dvojrozměrnou oblastí O. Má-li tato funkce na oblasti O spojité, nikde současně nulové první parciální derivace a má-li rovnice $f(x, y) = 0$ v O alespoň jedno řešení, pak množinu $(f(x, y) = 0)$ nazveme rovinnou křivkou. Obdobně definujme v trojrozměrném případě plochu $(f(x, y, z) = 0)$.

Úmluva 2. Buďte $G(y)$, $H(y)$ funkce, mající v jednorozměrné oblasti J spojité první derivace, při čemž neplatí $G(y) = 0$ pro žádné $y \in J$; buď $F(x, \bar{z})$ funkce, definovaná nad dvojrozměrnou oblastí O_1 tak, že $(F(x, \bar{z}) = 0)$ je křivka v rovině uspořádaných dvojic $(x, \bar{z})$.

Pak funkce $F(x, z\,G(y) + H(y))$ je definována nad oblastí $O = \underset{(x,y,z)}{E}((x, \bar{z}) \in O_1,\ y \in J,\ z \in (-\infty, \infty),\ \bar{z} = z\,G(y) + H(y))$. Zaveďme ještě označení $(F(x, z\,G(y) + H(y)) = 0) = \varkappa$.

Poučka 5. *Bodová množina $\varkappa$ z úmluvy 2 je plocha v prostoru uspořádaných trojic (x, y, z).*

Důkaz. Z rovnice

$$z = (\bar{z} - H(y_0))\,G^{-1}(y_0)$$

vyplývá, že pro žádné $y_0 \in J$ není množina $\varkappa \cap (y = y_0)$ prázdná. Dále se lehko ověří, že existují spojité parciální derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \ \frac{\partial F}{\partial z} = G(y)\,\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}, \ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\,.$$

Tyto derivace se nemohou současně rovnat nule pro žádný bod z oblasti O. V opačném případě by totiž množina $(F(x, \bar{z}) = 0)$ nemohla být křivkou.

Jsme tedy nyní oprávněni vyslovit tuto definici:

Definice 2. *Plochu $\varkappa$ z úmluvy 2 nazveme implicitní klínovou plochou.*

Zavedeme si symbol $N(y_0) = \mu \cap (y = y_0)$; přitom μ je daná plocha a y_0 je libovolné reálné číslo. Vyšetřujme podmínku:

(5) Jsou-li množiny $N(y_1)$, $N(y_2)$ neprázdné, pak lze $N(y_1)$ posunout rovnoběžně s rovinou $(x = 0)$ na křivku $N(y_1)' \subset (y = y_2)$, která je s $N(y_2)$ afinní pro osu $(y = y_2) \cap (z = 0)$ a směr $(y = y_2) \cap (x = 0)$.

Poučka 6.

a) Klínová plocha $\varkappa$ *z definice 2 splňuje podmínku* (5).

b) Daná plocha μ *nechť neobsahuje rovnoběžky s přímkou* $(x = 0) \cap (y = 0)$. *Platí-li pro tuto plochu podmínka* (5), *pak* μ *splňuje definici 2.*

Důkaz. a) Zaveďme označení

$$k = (F(x, z) = 0) \cap (y = 0) .$$

Posunutím o vektor $(0, y_0, H(y_0))$ přejde křivka k v křivku

$$k' = (F(x, z + H(y_0) = 0) \cap (y = y_0) .$$

Afinitou o ose $(y = y_0) \cap (z = 0)$, směru $(y = y_0) \cap (x = 0)$ a charakteristice $G^{-1}(y_0)$ zobrazí se křivka k' na křivku $N(y_0)$. Vzhledem k transitivitě afinity při pevné ose platí tedy podmínka (5).

b) Vyšetřujme taková y_0, pro něž platí $N(y_0) \neq 0$. Pro každé takové y_0 existuje podle podmínky (5) křivka

$$k = (F(x, z) = 0) \cap (y = 0)$$

(daná jistou funkcí F), která posunutím rovnoběžným s rovinou $(x = 0)$ přejde v křivku $k' \subset (y = y_0)$, jež je s $N(y_0)$ afinní vzhledem k ose $(y = y_0) \cap (z = 0)$ a směru $(y = y_0) \cap (x = 0)$. To ale znamená (podle poučky 1b), že platí rovnice

$$z = ZG(y_0) + H(y_0), \text{ kde } G(y_0) \neq 0,\ H(y_0)$$

jsou jistá reálná čísla a z, Z jsou třetí souřadnice odpovídajících si bodů křivek k', $N(y_0)$.

Tedy platí

$$\mu = (F(x, zG(y) + H(y)) = 0) .$$

Poučka je tím dokázána.

Poučka 7. *Buď* $G(y)$ *polynom stupně* s_G, $H(y)$ *polynom stupně* s_H *a* $F(x, z) = \sum_{i=1}^{k} a_i x^{v_i} z^{w_i}$ *polynom, pro nějž uspořádané dvojice exponentů* (v_i, w_i) *jsou navzájem různé a koeficienty* a_i *jsou nenulové. Pak polynom* $F(x, zG(y) + H(y))$ *má stupeň*

$$\max_i \, (v_i + w_i \max (s_G + 1, s_H)) .$$

Důkaz je snadný.

Příklad 2. V úmluvě 2 nechť platí

$$(x^2 + y^2z^2 = 1) = \varkappa ;$$

oblast J je v tomto případě interval $(0, \infty)$. Křivka $N(y_0)$ jsou elipsy, které se dají na sebe zobrazit posunutím a afinitou (podle poučky 6a).

Poznámka 1. V definici 1 odstraníme z I_y všecka ta y, která anulují funkci $g(y)$; takto zmenšenou oblast I_y označíme I_y^+. Z příslušné explicitní plochy klínové dostaneme plochu $\varkappa^+$ o rovnici

$$f(x) - zg^{-1}(y) - g^{-1}(y)\, h(y) = 0$$

vzhledem k oblasti $I_x^* \times I_y^+$. Tato plocha $\varkappa^+$ je speciálním případem implicitní klínové plochy. Z toho je patrná vzájemná souvislost obou definicí 1, 2.

Poznámka 2. Připustíme-li v úmluvě 2 ta y, pro něž platí $G(y) = 0$, pak pro takováto y může na (rozšířené) ploše $\varkappa$ ležet soustava rovnoběžek o rovnici $F(x, H(y)) = 0$. Na těchto přímkách mohou se vyskytovat singulární body (právě když platí $\frac{\partial F}{\partial x} = G(y) = H'(y) = 0$). To je také hlavní důvod, proč jsme případ $G(y) = 0$ vyloučili (při definici plochy jsme se přece výslovně omezovali na regulární body).

§ 3. Speciální klínové plochy.

V tomto paragrafu budeme vyšetřovat klínové plochy se systémem parabol. Takové plochy mají totiž význam v praxi. Budeme výhradně užívat pravoúhlého souřadnicového systému.

Definice 3. *V rovině $(y = 0)$ definujme p jakožto rovnoběžku s osou x anebo jakožto parabolu o ose v ose z. Dále definujme p_I jakožto rovnoběžku s osou x anebo jakožto parabolu v rovině rovnoběžné s osou x tak, že její osa leží v rovině $(x = 0)$. Nechť dále platí $p_I \cap (y = 0) = \emptyset$. Pro každé reálné x_0 označme symbolem p_{x_0}*

1. přímku, určenou body $p \cap (x = x_0)$, $p_I \cap (x = x_0)$ v případě, že třetí souřadnice těchto bodů jsou stejné;

2. parabolu, jejíž osa je přímka $(x = x_0) \cap (y = 0)$ a na níž leží body $p \cap (x = x_0)$, $p_I \cap (x = x_0)$ v případě, že třetí souřadnice těchto bodů jsou různé. Plochu $\bigcup_{x_0 \in (-\infty, \infty)} p_{x_0}$ nazveme Hacarovou plochou.

Profesor Kadeřávek vyslovil domněnku, že Hacarova plocha obsahuje v obecném případě kromě parabol v rovinách $(x = x_0)$ ještě další systém parabol. Bude ukázáno, že tato domněnka je správná.

Nejprve však odvodíme rovnici Hacarovy plochy. Nechť A, B, m, n, k, q jsou konstanty, křivka p nechť má v rovině $(y = 0)$ rovnici $z = Ax^2 + B$; předpokládejme dále, že platí inkluse $p_I \subset (z = ky + q)$ a že rovnice průmětu p_I do roviny $(z = 0)$ je $y = mx^2 + n$. Pro podmínku $p_I \cap (y = 0) = \emptyset$ je ekvivalentní podmínka:

(6) Konstanta n je nenulová a dále platí buďto $m = 0$ anebo $m \neq 0$, $\operatorname{sg} m = \operatorname{sg} n$. V rovině $(x = x_0)$ platí pro křivku p_{x_0} rovnice

$$z = \frac{k(mx_0^2 + n) + q - (Ax_0^2 + B)}{(mx_0^2 + n)^2} y^2 + Ax_0^2 + B ,$$

takže po úpravě dostaneme rovnici plochy ve tvaru

$$z = \frac{(km - A)\, x^2 + kn + q - B}{(mx^2 + n)^2} y^2 + Ax + B . \tag{7,1}$$

V případě, že p_I je parabola, jsme předpokládali, že rovina této paraboly není rovnoběžná s osou z. Tento vyloučený případ nyní projednáme. Křivku p určíme jako v předchozím. Nechť dále a, b, c jsou konstanty, z nichž poslední je nenulová. Křivka p_I nechť má v rovině $(y = c)$ rovnici $z = ax^2 + b$. Pro křivku p_{x_0} platí nyní v rovině $(x = x_0)$ rovnice

$$z = \frac{ax_0^2 + b - (Ax_0^2 + B)}{c^2} y^2 + Ax_0^2 + B .$$

Z ní dostaneme po úpravě rovnici plochy ve tvaru

$$z = \frac{(a - A)\, x^2 + b - B}{c^2} y^2 + Ax^2 + B . \tag{7,2}$$

Z této rovnice je zřejmé, že v rovinách $(y = y_0)$ jsou na ploše paraboly anebo přímky. Tento případ je ostatně známý.

Poučka 8. *Hacarova plocha má některou z rovnic* (7), *kde* A, B, m, n, a, b, c *jsou konstanty, z nichž* c *je nenulová a pro* m, n *platí podmínka* (6).

Úmluva 3. Čísla A, B nechť jsou konstantní a nechť $f(x)$ je funkce, mající pro každé x spojitou derivaci. Plochu, určenou rovnicí $z = f(x)\, y^2 + Ax^2 + B$ označíme $\varkappa$. Dále nechť jsou m, n, k, q konstanty, při čemž první dvě jsou nenulové a platí pro ně $\operatorname{sg} m = \operatorname{sg} n$.

V rovinách $(x = x_0)$ je na ploše $\varkappa$ systém parabol nebo přímek. Vyšetříme průmět průniku $(z = ky + q) \cap \varkappa$ do roviny $(z = 0)$. Tento průmět má v rovině $(z = 0)$ rovnici $f(x)\, y^2 - ky + Ax^2 + B - q = 0$; obsahuje křivku $(y = mx^2 + n) \cap (z = 0)$, právě když platí $f(x)(mx^2 + n)^2 - k(mx^2 + n) + Ax^2 + B - q = 0$. S touto rovnicí je ekvivalentní rovnice

$$f(x) = \frac{kmx^2 + kn - Ax^2 - B + q}{(mx^2 + n)^2} . \tag{8}$$

Nechť dále platí pro jisté konstanty k', q', m', n' (z nichž poslední dvě jsou nenulové a splňují rovnici $\operatorname{sg} m' = \operatorname{sg} n'$)

$$\frac{kmx^2 - Ax^2 + kn - B + q}{(mx^2 + n)^2} = \frac{k'm'x^2 - Ax^2 + k'n' - B + q'}{(m'x^2 + n')^2} \text{ identicky v } x .$$

Jsou-li čitatelé identicky rovni nule, dostáváme triviální případ válcové plochy anebo roviny. Není-li tomu tak, pak existuje nenulový faktor w tak, že platí

$$mw = m',\ nw = n',\ (km - A)\, w^2 = k'm' - A,\ (kn - B + q)\, w^2 = \\ = k'n' - B + q' .$$

Tedy jsou splněny rovnice

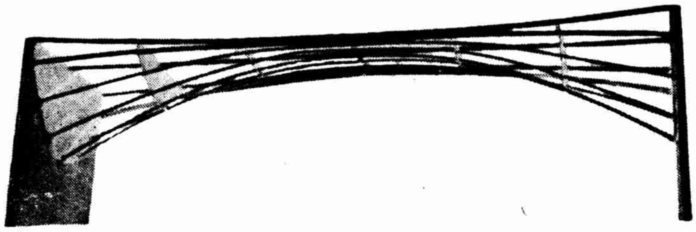
$$(km - A)\,w^2 - k'mw + A = 0,\ (kn - B + q)\,w^2 - k'nw + B - q' = 0\,. \quad (9)$$

Tyto rovnice mají právě jedno řešení k', q'. Z toho již plyne tvrzení poučky, kterou nyní vyslovíme.

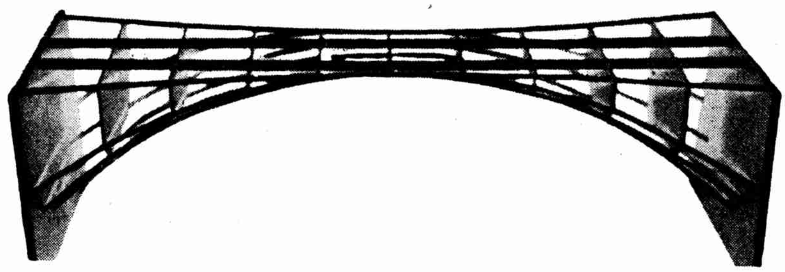
Poučka 9. *Plocha Hacarova, daná podle úmluvy 3 a podmínky* (8), *obsahuje pro každé nenulové w parabolu $(z = k'y + q') \cap (y = wmx^2 + wn)$, při čemž k', q' jsou určeny z rovnic* (9). *Průměty těchto parabol do roviny* $(z = 0)$ *jsou tedy kolmo afinní pro osu afinity v ose x.*

Tato poučka potvrzuje oprávněnost domněnky profesora Kadeřávka.

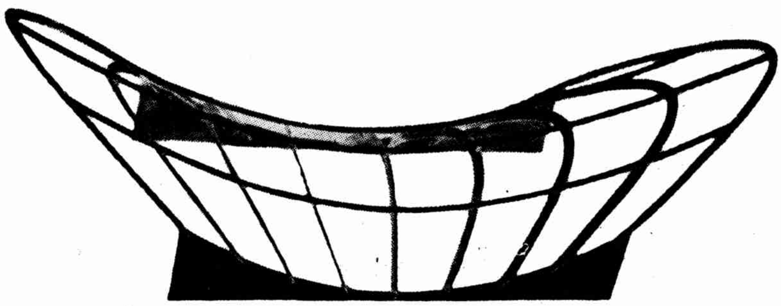
Poznámka 3. Plochy klínové mají upotřebení ve stavebním inženýrství (zejména při skořepinových konstrukcích). O jejich zavedení mají zásluhu profesor Fr. Kadeřávek a profesor B. Hacar. První z nich dal také podnět k této práci.



Model části Hacarovy plochy, zhotovený *Rudolfem Čechem, Eduardem Drozdem* a *Miroslavem Šourkem.**) (Aplikace na mostní konstrukce.)



Model části Hacarovy plochy zhotovený *Ottou Pohlem.**) (Aplikace na mostní konstrukce.)



Model části jisté klínové plochy, zhotovený *Evou Rejthárkovou, Ludmilou Vaňhovou* *a Miloslavem Knoulichem.**) (Plocha má tvar sedla.)

---

*) Posluchači fakulty stavebního inženýrství (ČVUT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O JEDNOM NUMERICKÉM ŘEŠENÍ ÚPLNĚ REGULÁRNÍCH SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC A O JEHO APLIKACI NA STATICKÉ ŘEŠENÍ PATROVÝCH RÁMŮ

IVO BABUŠKA, Praha.

(Došlo dne 25. dubna 1954.)

DT:512.831
624.04
624.072.333

Ve stavební praxi se vyskytují velmi často systémy lineárních rovnic, které mají jisté charakteristické vlastnosti. Je to systém lineárních deformačních rovnic při statickém výpočtu patrových rámů (viz na př. [3]).

C. V. Klouček ukázal (srv. [1], [2]) jistou metodu řešení těchto rovnic, kterou nazval podle fysikálního významu rozvodem deformací.[1]) Tato metoda má určitý iterativní charakter. C. V. Klouček pak ve svých pracích ukazuje na konkretních výpočtech správnost a účinnost této metody. V tomto článku je tato metoda zobecněna a ukázána její správnost pro systémy lineárních rovnic, které mají určité přesně definované vlastnosti a které budeme nazývat úplně regulárními.

1. Některé vlastnosti symetrických matic.

V tomto odstavci zavedeme jisté pojmy o maticích a dokážeme některé věty, které budeme v dalším potřebovat.

Definice 1. *Buď* $A = \|a_{i,j}\|$; $a_{i,i} \neq 0$ *symetrická matice konečného řádu n nebo nekonečná. Budeme nazývat bodovou množinu* M_A *o n různých (resp. spočetně mnoha) bodech* $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ *konjugovanou k A, jestliže ke každému* P_k *jest přiřazena jednojednoznačně k-tá rovnice a mimo to na* M_A *jsou definovány tyto pojmy.*

a) $P_i \underset{A}{\approx} P_j$, $i \neq j$, *jestliže* $a_{i,j} \neq 0$.

b) $P_f \underset{A}{\sim} P_k$, *jestliže existuje posloupnost bodů* P_{s_i}, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ *taková, že* $P_{s_0} = P_l$; $P_{s_n} = P_k$ *a* $P_{s_i} \approx_A P_{s_{i+1}}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$. Jestliže $P_l \sim_A$ $\sim_A P_k$, *pak budeme říkat, že body jsou ekvivalentní, a jestliže* $P_i \approx_A P_j$, *potom budeme říkat, že body* P_i, P_j *jsou sousední vzhledem k A.*

Poznámka. Snadno se nahlédne vzhledem k předpokládaným vlastnostem matice A, že jsou splněny axiomy ekvivalence.

[1]) Kloučkova kniha měla být v poslední době přeložena také do čínštiny.

Definice 2. *Matici $A = \|a_{i,j}\|$, konečnou nebo nekonečnou, nazveme úplně regulární s konstantou α, jestliže splňuje tyto vlastnosti:*

a) je symetrická,

b) pro všechna i platí $0 < k < a_{i,i} < K < \infty$,

c) jest $a_{i,i} = \alpha_i \sum_j |a_{i,j}|$, kde se sčítá přes všechna $j \neq i$ a jest $\alpha_i > \alpha > 1$.

Úmluva. Dále budeme předpokládat vždy úplně regulární matici. Tento předpoklad nebudeme proto již dále zvlášť uvádět.

Definice 3. *Označíme m lineární prostor všech číselných omezených posloupností. Dále m_n označíme n-dimensionální euklidovský prostor. Budeme-li mluvit o p-té souřadnici vektoru $q \in m$, budeme psát $x_p(q)$ a budeme míti na mysli číslo x_p posloupnosti vyjadřující vektor q.*

Úmluva. Jestliže nebude možno dojíti k omylu, označíme symbolem m i n-dimensionální euklidovský prostor.

Věta 1. *Buď $A = \|a_{i,j}\|$ úplně regulární matice. Potom tato matice definuje lineární zobrazení na m.*

Důkaz: Jestliže jde o nekonečnou matici, je třeba dokázat, že matice A transformuje omezenou posloupnost opět v omezenou posloupnost. To jest však vzhledem k vlastnostem b) a c) úplně regulární matice zřejmé.

Úmluva. Lineární zobrazení vytvořené maticí $A, B, \ldots$ označíme $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$. Matici A nazveme souvislou, jestliže všechny prvky konjugované množiny M_A jsou navzájem ekvivalentní.

Věta 2. *Jestliže matice A není souvislá, potom ji můžeme vyjádřit jako přímý součet souvislých matic.*[2])

Důkaz. Jak známo, matici A můžeme vyjádřit jako přímý součet matic $A = \bigcup_i A_i$, právě když prostor m můžeme vyjádřit jako přímý součet podprostorů $m^{(i)}$ takových, že $\mathbf{A}$ zobrazuje podprostor $m^{(i)}$ do sebe.

Buď M_A konjugovaná množina k A. Tato množina rozpadne se na třídy ekvivalence (alespoň dvě, vzhledem k tomu, že matice A není souvislá). Označme tyto třídy T_i. (Těchto tříd jest zřejmě nejvýše spočetně mnoho.)

---

[2]) Říkám, že matice jest přímým součtem dvou matic, jestliže vhodnou permutací můžeme dosáhnouti toho, aby matice měla tento tvar:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots\ldots & a_{1,m_1}, & 0, & 0, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots\ldots & a_{2,m_1}, & 0, & 0, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m_1,1}, & a_{m_1,2}, & \ldots, & a_{m_1,m_1}, & 0, & 0, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0, & 0, & \ldots\ldots & & a_{m_1+1,m_1+1}, & \ldots, & & a_{m_1+1,m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots\ldots & & a_{m_2,m_1+1}, & \ldots\ldots & & a_{m_2,m_2} \end{pmatrix}$$

Obdobně tomu jest, když jde o přímý součet několika matic.

Buď dále $m^{(i)}$ podprostor prostoru m takový, že jest splněna relace

$$P_k \text{ non} \in T_i, \; q \in m^{(i)} \Rightarrow x_k(q) = 0$$

pro každé k, i.

Podprostory $m^{(i)}$ zřejmě tvoří prostor m jako přímý součet. Zbývá dokázati, že zobrazení $\mathbf{A}$ zobrazuje prostory $m^{(i)}$ do sebe.

Skutečně však jest

$$x_k(\mathbf{A}q) = \sum_l a_{k,l}\, x_l(q) = \sum_{\substack{l \\ P_l \in T_i}} a_{k,l}\, x_l(q) + \sum_{\substack{l \\ P_l \text{non} \in T_i}} a_{k,l}\, x_l(q)\,.$$

Je-li $q \in m^{(i)}$, platí

$$x_k(\mathbf{A}q) = \sum_{\substack{l \\ P_l \in T_i}} a_{k,l}\, x_l(q)\,.$$

Jestliže nyní P_k non $\in T_i$, potom zřejmě $a_{k,l} = 0$, neboť $P_l \in T_i$ a naše tvrzení jest dokázáno.

Definice 5. *Jestliže matice A jest přímým součtem souvislých matic A_i, potom tyto matice budeme nazývat komponentami matice A.*

Definice 6. *Matici budeme nazývat uzavřenou, jestliže existuje konečná posloupnost navzájem různých čísel $s_0, s_1, \ldots, s_m$ tak, že platí*

1. $P_{s_k} \approx_A P_{s_{k+1}}$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$, $m > 2$,
2. $P_{s_m} \approx_A P_{s_0}$.

V opačném případě budeme matici nazývat otevřenou.

Poznámka. Pro názornou představu můžeme každé matici přiřadit její graf. Předpokládejme, což nesporně můžeme, že konjugovaná množina jest složena z lineárně nezávislých bodů v rovině, t. j. z bodů, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Grafem G_A matice budeme nazývat množinu těchto bodů a množinu úseček P_iP_j, jestliže $P_i \approx_A P_j$.

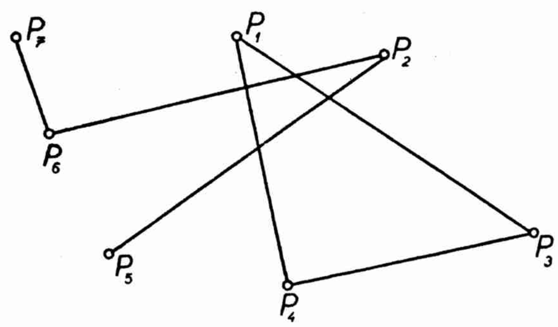
Z grafu matice můžeme snadno přehlédnout, zda matice jest souvislá, otevřená atd.

Definice 7. *Buď M_A konjugovaná množina k otevřené souvislé matici A. Budeme říkat, že bod $P_i \in M_A$ jest vnitřním bodem, jestliže hlavní minor A_i není souvislá matice.*[3])

[3]) Hlavním minorem $A_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ matice A nazýváme matici, která vznikne tím, že vyškrtneme v A, $m_1, m_2, \ldots, m_n$-tý řádek a sloupec.

Uvedeme příklad: Mějme matici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



Obr. 1.

Potom její graf jest na obr. 1. Vidíme okamžitě, že matice není souvislá. Není totiž $P_1 \sim_A P_5$, neboť P_1 není spojen řetězem s P_5.

Dále jest patrno, že matice má dvě komponenty, z nichž jedna jest otevřená, druhá zavřená.

Poznamenejme ještě, že body P_i můžeme volit zřejmě tak, že graf matice bude míti právě tolik komponent ve smyslu topologickém, jako má matice, a že graf jest jednoduše souvislý ve smyslu topologickém, právě když matice jest otevřená.

Zatím jsme konstruovali k dané matici její graf. Ve stavební praxi při statickém výpočtu rámových konstrukcí je tomu naopak.

Nejdříve máme dán graf, schema rámu a k němu sestavujeme matici deformačních rovnic. Často se ani matice nevypisují a její prvky se píší do grafu.

Věta 3. *Buď A otevřená matice; potom každý její hlavní minor jest otevřená matice.* Zřejmé.

Definice 8. *Buď A souvislá otevřená matice a M_A její konjugovaná množina. Množinu $M_A^{i,n} \subset M_A$ budeme nazývat množinou bodů řádu n vzhledem k P_i, jestliže splňuje tyto vlastnosti:*

$P_k \in M_A^{i,n}$, jestliže existuje posloupnost $P_{l_0}, P_{l_1}, \ldots, P_{l_n}$ o $n + 1$ prvcích navzájem různých taková, že

$$P_{l_0} = P_i,\ P_{l_n} = P_k \text{ a } P_{l_j} \approx_A P_{l_{j+1}},\quad j = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Někdy také budeme říkat, že body řádu n vzhledem k P_i mají vzdálenost od bodu P_i rovnou n.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že v minulé definici se předpokládá matice A souvislá a otevřená, existuje, jak se snadno nahlédne, právě jediná posloupnost uvedených vlastností, a tedy každý bod má vzhledem k pevnému bodu právě jediný řád.

Definice 9. *Budeme říkat, že bod P_i konjugované množiny M_A má stupeň p, jestliže P_i má právě p sousedních bodů.*

P o z n á m k a. Graf souvislé otevřené matice má tvar „stromu" podle obr. 2. Na tomto obraze jsou body řádu p vzhledem k P^0 označeny P^p. Pojem řádu bodu má tak velmi názorný význam.

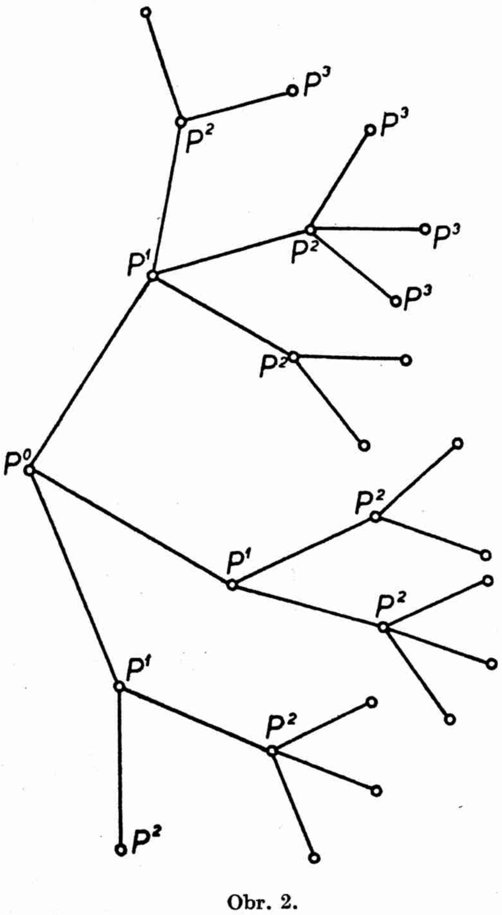
Věta 4. *Buď A otevřená souvislá matice. Potom každý bod konjugované množiny řádu p jest spojen právě s jedním bodem nižšího řádu, a to řádu p — 1.*

D ů k a z. Pro určitost vztahujeme řád bodu k P_0 a mluvme o bodu P_n, který jest řádu n.

Podle definice existuje posloupnost bodů o $n + 1$ prvcích,

$$P_0 \approx_A P_1 \approx_A P_2 \approx_A \dots$$
$$\dots P_{n-1} \approx_A P_n ,$$

při čemž tato posloupnost existuje právě jediná. Z toho jest okamžitě patrno, že bod P_{n-1} jest řádu n — 1, a tím jest tvrzení dokázáno, neboť jestliže by existovaly dva body řádů n — 1, sousední vzhledem k P_n, nemohla by matice být otevřená.



Obr. 2.

Věta 5. *Buď A souvislá otevřená matice a M_A její konjugovaná množina. Buď $M_A^{i,n}$ množina bodů n-tého řádu vzhledem k P_i. Dále buď ${}^*M_A^{i,n} = \sum_{k=0}^{n-1} M_A^{i,k}$. Potom hlavní minor $A_{l_1,l_2}, \dots, P_{l_k} \in {}^*M_A^{i,n}$ se rozpadá na komponenty takové, že každý bod řádu n jest právě v jedné komponentě a žádné dva body nemohou být v jedné z nich.*

D ů k a z. Jest zřejmé, že každý bod řádu n leží právě v jedné komponentě. Stačí tedy dokázat, že nemohou být dva body řádu n v jedné komponentě. Tedy dejme tomu, že body $P_{n_1} \neq P_{n_2}$ řádu n jsou v téže komponentě. Potom jsou ekvivalentní, a proto existuje posloupnost bodů $P_{k_0}, P_{k_1}, \dots, P_{k_s}$ řádu $p \geq n$, že

$$P_{k_0} = P_{n_1},\ P_{k_s} = P_{n_2} \text{ a } P_{k_j} \approx_{A_{l_1,l_2},\dots} P_{k_{j+1}}, \quad j = 0, 1, \dots, s - 1 .$$

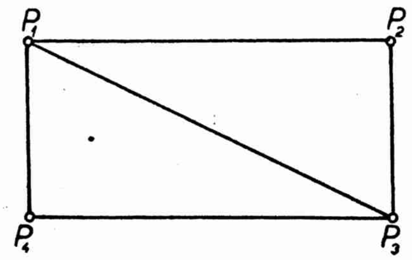
Mimo to však vzhledem k tomu, že P_{n_1} a P_{n_2} jsou n-tého řádu, existují body

$P_{r_0}, P_{r_1}, \ldots, P_{r_t}$ takové, že P_{r_j}, $0 < j < t$, jsou body řádu menšího než n a $P_{r_0} = P_{n_1}$, $P_{r_t} = P_{n_2}$ a $P_{r_i} \sim_{A_{l_1,l_2,\ldots}} P_{r_{i+1}}$. Z toho by však plynulo, že by matice A nebyla otevřená, což je spor. Věta jest tedy dokázána.

Důsledek věty 5. *Počet komponent minoru*

$$A_{l_1,l_2}, \ldots, P_{l_k} \in {}^*M_A^{i,n}$$

je stejný jako počet prvků množiny $M_A^{i,n}$. Jestliže není matice A konečná, míní se počtem mohutnost.



Obr. 3.

Definice 10. *Buď $A = \|a_{i,j}\|$ matice řádu $n < \infty$. Otevřenou matici konečnou nebo nekonečnou $A^* = \|a^*_{i,j}\|$ nazveme rozvinutím matice A, má-li tyto vlastnosti:*

a) Jestliže označíme P_i body konjugované množiny M_A a P_i^* body množiny M_{A^*}, potom existuje jednoznačné zobrazení φ množiny M_{A^*} na M_A.

b) Zobrazení φ zobrazuje vzájemně jednoznačně všechny sousední body bodu P_i^* na všechny sousední body bodu $\varphi(P_i^*)$.

c) Jestliže $P_m = \varphi(P_i^*)$, $P_n = \varphi(P_j^*)$, potom $a^*_{i,j} = a_{m,n}$.

Poznámka. Konstrukce rozvinuté matice má názorný význam. Ukážeme to na příkladě. Buď

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Graf matice jest na obr. 3.

Na obr. 4 jest naznačena část grafu rozvinuté matice $^*A$, kde ke každému bodu P_i^* jest poznamenán v závorce bod $\varphi(P_i^*)$. Z toho jest již také snadno patrná konstrukce rozvinuté matice.

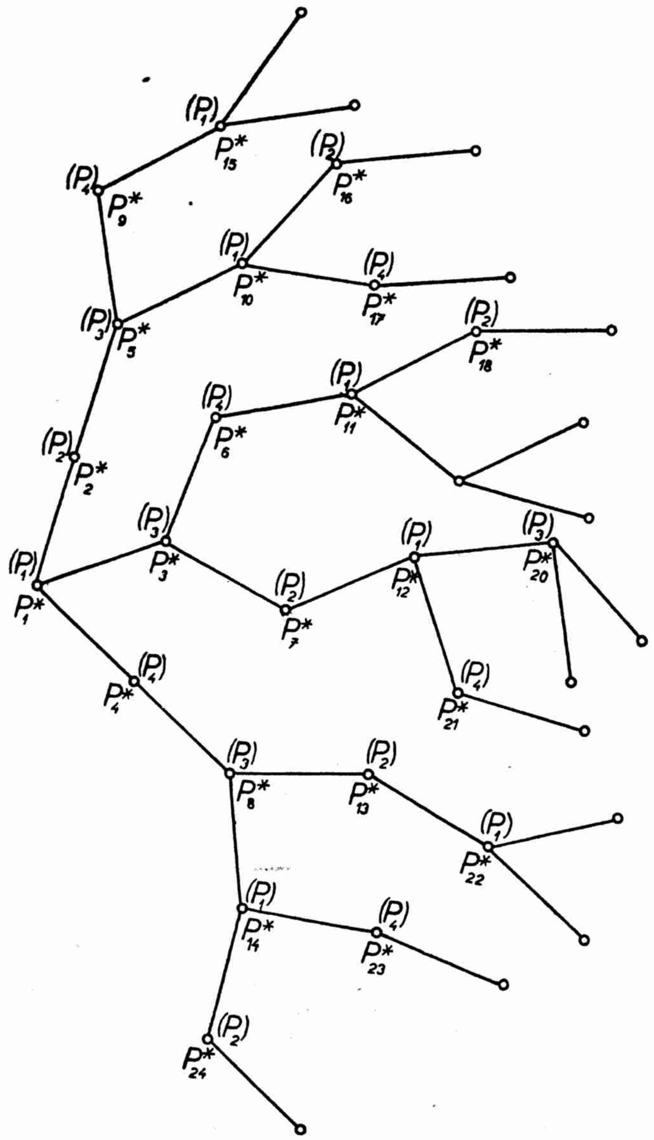
V obr. 5 jest naznačena část rozvinuté matice A^*:

Poznámka 1. Rozvinutá matice má zřejmě v každém řádku a v každém sloupci nejvýše tolik nenulových koeficientů, jako je řád matice A.

Poznámka 2. Jestliže matice A jest otevřená, potom její rozvinutá matice A^* je s ní identická. (Nejvýše s permutací řádků a sloupců.)

Poznámka 3. Rozvinutá matice A^* jest zřejmě také úplně regulární s touže konstantou jako matice A.

Poznámka 4. Z uvedeného příkladu jest patrno, jak se konstruuje rozvinutá matice. Existence rozvinutí matice je tím zřejmá.



Obr. 4.

Jednoznačnost ovšem zde neplatí. Lze však poměrně snadno nahlédnout, že platí i unicita, jestliže nehledíme na permutaci indexů. Vzhledem k tomu však, že tuto jednoznačnost nebudeme potřebovat, nebudeme se u toho zdržovat.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
6 & 1 & 3 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & 4 & . & . & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
3 & . & 7 & . & . & 1 & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-1 & . & . & 3 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 2 & . & . & 7 & . & . & . & 1 & 3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & 3 & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 2 & . & . & . & 4 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 7 & . & . & . & . & 2 & 3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & 3 & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 3 & . & . & . & . & 6 & . & . & . & . & . & 1 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & 6 & . & . & . & . & . & . & 1 & 3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 6 & . & . & . & . & . & . & . & 3 & -1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & 4 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 3 & . & . & . & . & . & 6 & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Obr. 5.

2. Dvě věty o nekonečném systému lineárních rovnic.

V tomto odstavci uvedeme jednu větu o nekonečném systému lineárních rovnic, kterou budeme dále potřebovat. Mimo to ukážeme, že se tato věta dá aplikovat i na nekonečné systémy s úplně regulární maticí podle definice 2.

Věta 6. *Mějme nekonečný systém lineárních rovnic.*

$$x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\infty} c_{i,k} x_k + b_i\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots .$$

O systému předpokládejme, že má tyto vlastnosti:

a) $1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\infty} |c_{i,k}| = \varrho > 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$

b) $|b_i| \leq K\varrho\,.$

Potom tento systém má ohraničené řešení

$$|x_i| \leq K\,.$$

Toto řešení může být získáno buď postupnými aproximacemi nebo methodou redukce, t. j. tak, že jestliže $\overset{N}{x}_i$ *jest řešení konečného systému*

$$\overset{N}{x_i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{k=N} c_{i,k}\overset{N}{x_k} + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N\,,$$

potom

$$x_i = \lim_{N \to \infty} \overset{N}{x_i}\,.$$

Důkaz viz [4], kap. 1, § 2.

Věta 7. *Mějme nekonečný systém rovnic*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}x_k = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

a budiž matice tohoto systému úplně regulární. Dále nechť $|b_i| < K$. Potom tento systém vyhovuje předpokladům věty 6.

Důkaz. Je to zřejmé vzhledem k tomu, že podle definice úplně regulární matice jest $0 < \varkappa < a_{i,i}$, a tak stačí dělit každou rovnici členem $a_{i,i}$.

3. Některé vlastnosti úplně regulárních matic.

V tomto odstavci dokážeme některé věty o úplně regulárních maticích, resp. soustavách lineárních rovnic s úplně regulární maticí.

Věta 8. *Buď $A = \|a_{i,j}\|$, $i, j = 1, \ldots, n$ úplně regulární matice řádu $n < \infty$. Potom tato matice jest positivně definitivní.*

Důkaz. Máme dokázati, že

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \sum a_{i,j}x_ix_j > 0$$

pro všechna x_i, x_j, která nejsou identicky rovna nule.

Kvadratickou formu pišme ve tvaru

$$\sum_i a_{i,i}x_i^2 + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \sum_j a_{i,j}x_ix_j = \sum_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \alpha_i |a_{i,j}| x_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} a_{i,j}x_ix_j\,,$$

neboť podle definice regulární matice jest

$$a_{ii} = \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \alpha_i |a_{i,j}|\,.$$

Poněvadž však $\alpha_i \geq \alpha > 1$, jest

$$\sum_i \sum_j a_{i,j}x_ix_j \geq \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \alpha |a_{i,j}| x_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} a_{i,j}x_ix_j =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \sum_j |a_{i,j}| (x_i^2 + 2\beta_{i,j}x_ix_j + x_j^2) + (\alpha - 1) \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \sum_j |a_{i,j}|\, x_i^2\,.$$

Při tom

$$\beta_{i,j} \begin{matrix} < \\ \, \end{matrix} \begin{matrix} +1 \\ -1\,. \end{matrix}$$

Je však

$$x_i^2 + 2\beta_{i,j}x_ix_j + x_j^2 \geq 0\,,$$

a proto

$$\sum_i\sum_j a_{i,j}x_ix_j \geq (\alpha - 1)\sum_i x_i^2 \frac{a_{i,i}}{\alpha_i} > 0\,.$$

Věta je tedy dokázána.

Věta 9. *Mějme soustavu lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1\,,\\ a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

s úplně regulární maticí. Předpokládejme dále, že $b_k = 1$, $b_j = 0$, $j \neq k$, $j = 1, \ldots, n$. *Jestliže* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *jest řešení tohoto systému, potom platí* $x_k > 0$.

D ů k a z. Podle věty 8 jest matice soustavy positivně definitivní. Jak známo, platí potom, zavedeme-li známým způsobem skalární součin v n-dimensionálním euklidovském prostoru a chápeme-li matici soustavy jako matici lineárního zobrazení,

$$(Ax, x) > 0$$

pro každé $x \neq 0$ z našeho euklidovského prostoru.

Jestliže tedy jest $\mathring{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ řešení naší soustavy, potom

$$0 < (A\mathring{x}, \mathring{x}) = (b, \mathring{x}) = x_k\,,$$

kde $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Věta 10. *Buď* $A = \|a_{i,j}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots$, *nekonečná úplně regulární matice s konstantou* α. *Označíme* $\overset{N}{A} = \|a_{i,j}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, *redukovanou matici. Potom také* $\overset{N}{A}$ *jest úplně regulární s touže konstantou.*

D ů k a z. Zřejmě jsou splněny prvé dva předpoklady. Snadno se také nahlédne, že je splněn i třetí, neboť

$$a_{i,i} \geq \alpha \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\infty} |a_{i,j}| \geq \alpha \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}|\,.$$

Věta 11. *Mějme nekonečný systém lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots &= b_1\,,\\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots &= b_2\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\end{aligned}$$

Buď matice této soustavy úplně regulární. Buď dále $b_k = 1$, $b_j = 0$, $j \neq k$, $j = 1, \ldots$. *Jestliže* $x_1, x_2, \ldots$ *je řešením tohoto systému, potom platí* $x_k \geq 0$.

Důkaz. Podle vět 7 a 8 existuje řešení a platí

$$x_k = \lim_{N\to\infty} \overset{N}{x}_k ,$$

když $\overset{N}{x}_k$ je řešení redukované soustavy. Matice této soustavy je však podle věty 10 úplně regulární. Můžeme předpokládat, že $N > k$. Potom podle věty 9 jest $\overset{N}{x}_k > 0$. Z toho plyne, že $x_k \geq 0$, což bylo dokázat.

4. Řešení soustavy lineárních rovnic s úplně regulární otevřenou maticí.

V tomto a dalším odstavci budeme se zabývat řešením systémů lineárních rovnic s úplně regulární maticí. V tomto odstavci pak se budeme zabývat nejprve případem, že matice jest otevřená.

Věta 12. *Mějme systém lineárních rovnic s konečnou souvislou otevřenou maticí*[4])

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b\,, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n &= 0\,. \end{aligned}$$

(Zde i vždy dále předpokládáme, že matice jest úplně regulární.)

Potom označíme-li

$$\alpha_{i,j} = \frac{a_{i,j}^2}{a_{i,i}a_{j,j}}\,,$$

bude platit

$$x_1 = \frac{b}{a_{1,1}}\frac{1}{X}\,.$$

$$X = 1 - \cfrac{\alpha_{1,i_1}}{1 - \cfrac{\alpha_{i_1,k_1}}{1-\ldots} - \cfrac{\alpha_{i_1,k_2}}{1-\ldots} - \ldots} - \cfrac{\alpha_{1,i_2}}{1 - \cfrac{\alpha_{i_2,l_1}}{1-\ldots} - \cfrac{\alpha_{i_2,l_2}}{1-\ldots}} - $$

$$- \cfrac{\alpha_{1,i_s}}{1 - \cfrac{\alpha_{i_s,m_1}}{1-\ldots} - \cfrac{\alpha_{i_s,m_2}}{1-\ldots} - \ldots}\,, \qquad (1)$$

kde indexy $i_1, i_2, \ldots, i_s$ jsou určeny tou podmínkou, že $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, \ldots, P_{i_s}$ jsou všechny body sousední s bodem P_1. Indexy $k_1, k_2, \ldots, k_{s_2}$ jsou určeny podmínkou, že $P_{k_1}, P_{k_2}, \ldots, P_{k_{s_2}}$ jsou všechny body, které jsou sousední s P_{i_1} a které jsou současně druhého řádu vzhledem k P_1 (v tomto případě $P_{k_1}, \ldots, P_{k_{s_2}}$ jsou všechny body sousední s P_{i_1} s výjimkou bodu P_1). Podobně indexy $l_1, l_2, \ldots, l_{s_3}$ jsou určeny pod-

[4]) Kdyby matice nebyla souvislá, řešil by se každý částečný systém samostatně, takže předpoklad souvislosti není na újmu obecnosti.

minkou, že $P_{l_1}, P_{l_2}, \ldots, P_{l_{s_0}}$ jsou všechny body, které jsou sousední s P_{i_2} a které jsou současně druhého řádu vzhledem k P_1. Stejně pak i dále.

Vzhledem k tomu, že soustava lineárních rovnic má konečnou, otevřenou matici, jsou veškeré řetězové zlomky konečné.

Dále pak, jestliže jest P_p bod p-tého řádu vzhledem k P_1, platí

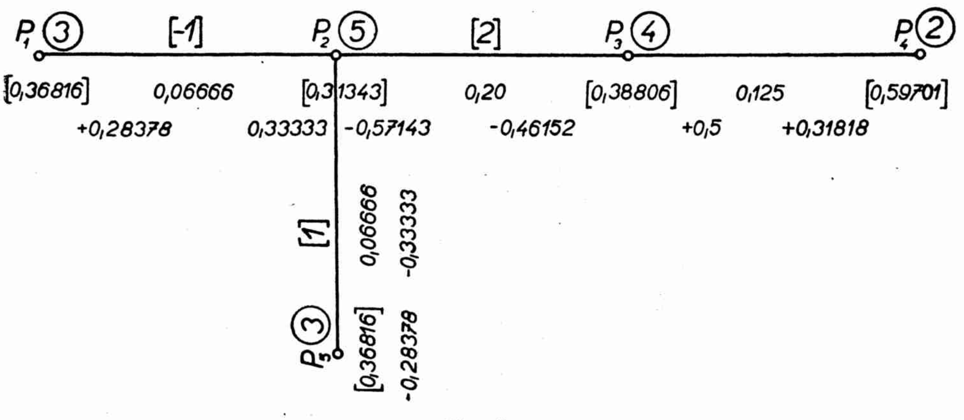
$$x_p = -\frac{a_{p,p^*}x_{p^*}}{a_{p,p}}\;\cfrac{1}{1-\cfrac{\alpha_{p,k_1}}{1-\cfrac{\alpha_{k_1,l_1}}{1-\ldots}-\cfrac{\alpha_{k_1,l_2}}{1-\ldots}}-\cfrac{\alpha_{p,k_2}}{1-\cfrac{\alpha_{k_2,m_1}}{1-\ldots}-\cfrac{\alpha_{k_2,m_2}}{1-\ldots}}-\ldots}, \tag{2}$$

kde index p^* jest určen tou podmínkou, aby bod P_{p^*} byl sousední s bodem P_p a řádu $p - 1$. Dále pak indexy $k_1, k_2, \ldots, k_s$ jsou určeny z toho, že body $P_{k_1}, P_{k_2}, \ldots, P_{k_s}$ jsou všechny body $p + 1$ řádu, které jsou sousední k P_p.

Podobně indexy $l_1, l_2, \ldots, l_{s_2}$ jsou určeny z podmínky, že body $P_{l_1}, P_{l_2}, \ldots, P_{l_{s_2}}$ jsou všechny body takové, které jsou sousední s bodem P_{k_1} a které jsou zároveň řádu $p + 2$. Stejně i dále.[5])

Ukážeme nyní na příkladě konkretní postup. Řešme tuto soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
3x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad &= -1\,,\\
-x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 &= 0\,,\\
2x_2 + 4x_3 - x_4 \qquad &= +1\,,\\
x_3 + 2x_4 \qquad &= 0\,,\\
x_2 \qquad\qquad + 3x_5 &= 0\,.
\end{aligned}$$



Obr. 6.

[5]) Podrobná konstrukce řetězového zlomku bude také patrna z příkladu, který dále následuje.

Na obr. 6 jest naznačen graf této soustavy a výpočet proveden v tomto grafu.

Postup je nyní následující:

1. Ke každému bodu P_i připíšeme koeficient $a_{i,i}$ (červeně). V obr. 6 jest koeficient vyznačen v kroužku.

2. Ke každé spojnici $P_i P_j$ napíšeme koeficient $a_{i,j}$ (červeně) a $\alpha_{i,j} = \frac{a_{i,j}^2}{a_{i,i}, a_{j,j}}$ (černě). Na obr. 6 jest koeficient $a_{i,j}$ napsán v lomené závorce.

Jest dále

$$\alpha_{1,2} = \frac{(-1)^2}{3 \cdot 5} = 0{,}06666 \,,$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{2^2}{5 \cdot 4} = 0{,}20 \,,$$

atd.

3. Vypočítáme hodnoty kořenů za předpokladu, že $b = 1$, a označíme ji potom hodnotou $c_{i,i}$ (vzorec (1)).

Jest

$$c_{1,1} = \frac{1}{3\left[1 - \dfrac{0{,}06666}{1 - \dfrac{0{,}20}{1 - 0{,}125} - 0{,}06666}\right]} = 0{,}36816 \,,$$

$$c_{2,2} = \frac{1}{5\left[1 - 0{,}06666 - 0{,}06666 - \dfrac{0{,}20}{1 - 0{,}125}\right]} = 0{,}31343 \,,$$

$$c_{3,3} = \frac{1}{4\left[1 - 0{,}125 - \dfrac{0{,}20}{1 - 0{,}06666 - 0{,}06666}\right]} \,.$$

atd.

Tyto koeficienty jsou napsány u příslušných bodů v lomené závorce. Píší se barevně (modře).

4. Vypočítáme nyní koeficienty $c_{i,j}$ podle vzorce (2). Dostaneme

$$c_{1,2} = -\frac{-1}{5\left[1 - 0{,}06666 \dfrac{0{,}20}{1 - 0{,}125}\right]} = +0{,}28378 \,,$$

$$c_{2,1} = -\frac{-1}{3} = +0{,}33333 \,,$$

$$c_{2,3} = -\frac{2}{4[1 - 0{,}125]} = -0{,}57143 \,,$$

atd.

Toto číslo napíšeme k bodu P_i na spojnici $\overline{P_i P_j}$.

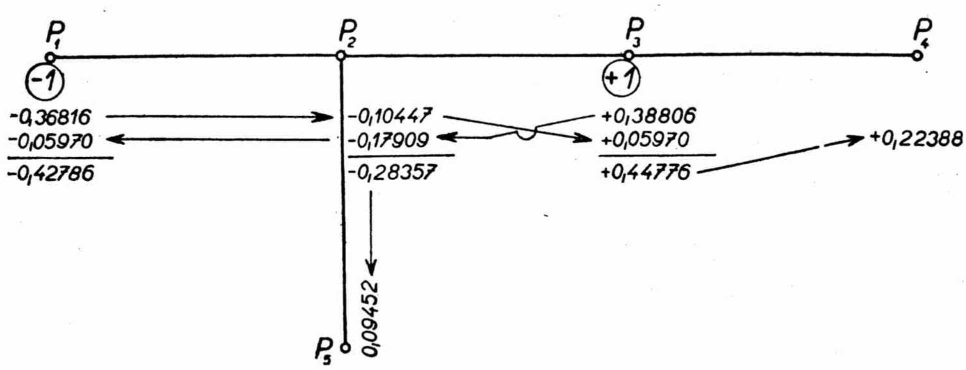
5. Nyní provedeme rozvod, který jest v následujícím obr. 7 vyznačen šipkami. V praxi se tyto šipky ovšem nevyznačují.

a) Napíšeme k jednotlivým bodům příslušné pravé strany barevně. Na obr. 7 jsou vyznačeny v kroužku. Píšeme je pouze tam, kde jsou různé od nuly.

b) Vypočítáme „primérní" kořeny $x_i^0 = c_{i,i} b_i$. Jest

$$x_1^0 = (-1) \,.\, 0{,}36816 = -0{,}36816 \,,$$
$$\text{atd.}$$

Píšeme je pouze tam, kde jsou rovny nule.



Obr. 7.

c) Provedeme vlastní rozvod. Jest

$$x_2^1 = x_1^0 c_{1,2} = (-0{,}36816) \,.\quad 0{,}28378 = -0{,}10447 \,,$$
$$x_3^2 = x_2^1 c_{1,3} = (-0{,}10447) \,.\, (-0{,}57143) = +0{,}05970 \,. \text{ atd.}$$

Dostáváme kořeny

$$x_1 = -0{,}42786 \,,$$
$$x_2 = -0{,}28357 \,,$$
$$x_3 = +0{,}44776 \,,$$
$$x_4 = +0{,}22388 \,,$$
$$x_5 = 0{,}09452 \,.$$

D ů k a z v ě t y 12. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že matice je souvislá. Buď M_A konjugovaná množina vzhledem k matici A. Nazveme nyní řádem matice A vzhledem k bodu P_j maximum z řádů všech jednotlivých bodů P_i vzhledem k P_j. Dokažme nyní naše tvrzení indukcí podle řádu matice vzhledem k tomu bodu, kde v příslušné rovnici na pravé straně (jako jediný koeficient) není koeficient roven nule.

Jestliže řád matice jest roven nule, potom tvrzení jest správné, neboť se jedná o systém s jedinou rovnicí. Předpokládejme nyní, že tvrzení věty 12 je správné, pokud řád matice vzhledem k danému bodu jest nejvýše roven m. Dokážeme, že naše tvrzení platí i v tomto případě, že řád matice jest $m + 1$. Nechť tedy tento řád jest právě $m + 1$. Vzhledem k tomu, že matice jest úplně regulární, máme zaručenu existenci řešení a můžeme proto považovat nyní na okamžik kořen x_1 za známý a převésti jej na pravou stranu systému. Po potlačení prvé rovnice dostaneme v tomto případě soustavu rovnic

$$
\begin{array}{c}
a_{2,2}x_2 + \dots + \dots + a_{2,n}x_n = -a_{2,1}x_1 \,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n,2}x_2 + \dots + \dots + a_{n,n}x_n = -a_{n,1}x_1 \,.
\end{array}
\tag{3}
$$

Matice této soustavy jest zřejmě hlavní minor A_1.

Nyní rozlišujme dva případy. Bod P_1 jest bodem vnitřním a bod P_1 není bodem vnitřním.

V prvém případě matice A_1 nebude souvislá (definice 7). Systém rovnic rozpadne se proto na částečné systémy (jejich matice jsou komponenty matice A_1) takové, že na jejich pravé straně jest nejvýše jeden nenulový koeficient. V opačném případě totiž by matice A nemohla být otevřená.

Snadno se tak nahlédne, že nyní řád matic těchto systémů vzhledem k uvažovaným bodům (t. j. k těm bodům, kde v příslušné rovnici na pravé straně jest nenulový koeficient) jest nejvýše roven m.

Jestliže bod P_1 není vnitřním bodem, matice A_1 zůstane souvislá a snadno možno se přesvědčit o tom, že na pravé straně systému (3) bude nejvýše jeden koeficient různý od nuly a že řád matice A vzhledem k příslušnému bodu jest nejvýše roven m.

Tedy v obou případech, t. j. ať jest bod P_1 vnitřní či nikoliv, potom řády resp. řád systému (4) se zmenší nejméně o jedničku. Tedy podle indukčního předpokladu platí tvrzení věty 12, a proto je

$$
x_i = \frac{-a_{i,1}x_1}{a_{11}\left[1 - \Sigma \dfrac{\alpha_{i,j}}{1 - \Sigma}\right]}
\tag{4}
$$

pro všechny koeficienty i takové, že jsou prvního řádu vzhledem P_1. Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice

$$
a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b \,,
$$

dostaneme

$$
x_1 \left[a_{1,1} - \frac{a_{1,2}^2}{a_{22}[1 - \dots]} - \dots - \frac{a_{1,n}^2}{a_{n,n}[1 - \dots]}\right] = b \,.^{6)}
$$

Dělíme-li tuto rovnici $[a_{1,1} - \dots]$, dostaneme okamžitě prvou část tvrzení o x_1. Druhou část tvrzení o výpočtu ostatních kořenů jsme už také zde dokázali.

---

[6]) Poznamenejme, že ve jmenovateli výrazu (2) nemůže být nula, poněvadž příslušný částečný systém, na nějž větu aplikujeme, jest podle věty 10 také úplně regulární. Jest ovšem zřejmé, že vlastnost úplné regularity není pro existenci zlomku (2) nutná.

Poznámka. V praktických případech při statickém řešení rámů jsou koeficienty $\alpha_{i,j}$ poměrně malé, jak uvidíme v dalším odstavci při výpočtu jistého rámu. Proto nemusíme bráti řetězové zlomky až do konce.

V minulé větě jsme řešili případ, kdy matice byla konečného řádu. Přejdeme nyní k maticím nekonečným a dokážeme o tomto řešení jisté věty, které budeme potřebovat, až se budeme zabývat soustavami s maticí uzavřenou.

Věta 13. *Věta 12 platí i pro nekonečnou, úplně regulární otevřenou matici pouze s tím rozdílem, že řetězové zlomky jsou nekonečné.*

Důkaz: Plyne okamžitě z věty 12 a z věty 6.

Poznámka. Z minulé věty vyplývá také okamžitě existence (konvergence) řetězových zlomků.

Nyní dokážeme větu, na které je v podstatě založena možnost přenésti uvedenou metodu na soustavy s uzavřenými maticemi.

Věta 14. *Mějme nekonečný systém lineárních rovnic*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x_j = b_i\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

s úplně regulární otevřenou maticí. Buď dále $b_0 = 1$, $b_k = 0$, $k \neq 0$. Jestliže jest T_1 podmnožina všech bodů prvního řádu vzhledem k P_0 konjugované množiny M_A, potom platí

$$\sum_{\substack{j\\ j\neq 0}} |a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j| \leq \frac{1}{\alpha}\,.\text{[7]}$$

Důkaz. Soustavu nekonečně mnoha rovnic pišme v tomto tvaru

$$\sum_{\substack{j\\ P_j \in T_1}} \alpha_0|a_{0,j}|x_0 + \sum_{\substack{j\\ j\neq 0}} a_{0,j}x_j = 1, \tag{6}$$

$$a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{\infty} \alpha_j|a_{j,k}|x_j + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{\infty} a_{j,k}x_k = 0,\ P_j \in T_1\,, \tag{7}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x_j = 0,\ P_i \neq P_0;\ P_i \text{ non} \in T_1\,. \tag{8}$$

Vzhledem k tomu, že body P_i non $\in T_1$, $i \neq 0$, nejsou spojeny s P_0, nevyskytuje se v rovnici (8) neznámá x_0.

Řešme nyní tento systém rovnic[8])

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{\infty} \alpha_j|a_{j,k}|x_j + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{\infty} a_{j,k}x_k = -(a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j)\,, \ldots, P_j \in T_1\,, \tag{9}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x_j = 0,\ P_0 \neq P_i \text{ non} \in T_1\,.$$

---

[7]) Srv. definici úplně regulární matice.

[8]) Předpokládáme na okamžik, že známe x_0, a x_j pro $P_j \in T_1$.

Podle věty 6 má systém (5) omezení řešení a proto i výrazy $a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j$ jsou omezené. Proto soustava (9) má omezené řešení, které jest ovšem totožné s řešením soustavy (5). Podle předpokladu dokazované věty je matice soustavy (5) otevřená. Proto matice (9) se rozpadne na přímý součet souvislých otevřených úplně regulárních matic takových, že v těchto částečných soustavách je na pravé straně jediný nenulový člen.[9])

Proto podle věty 11 platí

$$-x_j = (a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j)\,\varepsilon_j\,, \quad \text{kde} \quad \varepsilon_j \geq 0\,, \tag{10}$$

a to pro všechna taková j, že $P_j \in T_1$.

Napišme nyní ještě jednou rovnice (6) a (10)

$$\sum_{j \in T_1} \alpha_0|a_{0,j}|x_0 + \sum a_{0,j}x_j = 1\,,$$

$$\varepsilon_j a_{j,0}x_0 + x_j(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) = 0$$

a řešme pomocnou soustavu rovnic

$$\alpha_0|a_{j,0}|x_0 + a_{0,j}x_j = \vartheta_j\,,$$

$$\varepsilon_j a_{j,0}x_0 + x_j(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) = 0\,.$$

Dostaneme

$$x_0 = \frac{\delta_j(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j)}{\alpha_0|a_{j,0}|(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) - a_{0,j}^2\varepsilon_j} = \gamma_j\delta_j\,.$$

Poznamenejme při tom, že pro jakékoliv $\varepsilon_j \geq 0$ nemůže být jmenovatel roven nule.

Poněvadž jest $\varepsilon_j \geq 0$, $\alpha_0 > \alpha > 1$, $\alpha_j > \alpha > 1$, platí, jak snadno nahlédneme, že $\gamma_j > 0$. Dále máme

$$x_j = \frac{-a_{j,0}\delta_j\varepsilon_j}{\alpha_0|a_{j,0}|(\alpha_j|a_{j,0}| + \varepsilon_j) - a_{0,j}^2}\,.$$

Podle rovnice má platit

$$\sum_{\substack{j\\ P_j \in T_1}} \vartheta_j = 1\,,$$

a proto

$$x_0 = \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j\\ P_j \in T_1}} \frac{1}{\gamma_j}}\,.$$

Z toho plyne, že

$$\delta_j = \frac{1}{\gamma_j} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j\\ P_j \in T_1}} \frac{1}{\gamma_j}}\,.$$

---

[9]) Jestliže bod P_0 není vnitřní, matice má jenom komponentu, a proto vlastně o skutečný rozpad nejde.

Dosaďme nyní vypočtené hodnoty do výrazu

$$|a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j| .$$

Dostaneme

$$|a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j| = \frac{|a_{j,0}|}{\alpha_0|a_{j,0}|(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) - a_{0,j}^2\varepsilon_j} .$$

Proto

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} |a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j| = \sum_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} \frac{|a_{j,0}|}{\alpha_0|a_{j,0}|(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) - a_{0,j}^2\varepsilon_j} \cdot \frac{1}{\gamma_j} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} \frac{1}{\gamma_j}} .$$

Poněvadž však jest $\alpha_0 > \alpha$, $\alpha_j > \alpha$, $\varepsilon_j \geq 0$, platí

$$\frac{|a_{j,0}|}{\alpha_0|a_{j,0}|(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) - a_{0,j}^2\varepsilon_j} \leq \frac{|a_{j,0}|}{\alpha^2|a_{j,0}|^2\varepsilon_j - \varepsilon_j a_{0,j}^2 + \alpha|a_{j,0}|} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}|a_{j,0}|^2\varepsilon_j} \leq \frac{1}{\alpha} .$$

Proto s ohledem na to, že $\gamma_j > 0$, dostáváme

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} |a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j| = \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} \frac{1}{\gamma_j}} \sum_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} \frac{|a_{j,0}| \frac{1}{\gamma_j}}{\alpha_0|a_{j,0}|(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) - a_{0,j}^2\varepsilon_j} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} \frac{1}{\gamma_j}} \sum \frac{1}{\gamma_j} = \frac{1}{\alpha} ;$$

tím je věta dokázána.

Věta 15. *Mějme systém lineárních rovnic, nekonečný* ($N = \infty$) *nebo konečný* ($N \neq \infty$)

$$\sum_{j=0}^{N} a_{i,j}x_j = b_i . \tag{11}$$

O matici soustavy předpokládejme, že jest úplně regulární s konstantou a otevřená.[10]) *Buď dále* $b_j = 0$, $j = 1, 2, 3$. *Označme* T_k *množinu všech bodů k-tého řádu vzhledem k* P_0 *konjugované množiny* A. *Potom platí*

$$\sum_{\substack{k \\ P_j \in T_{n+1} \\ P_k \in T_n}} \sum_{j} |a_{j,k}x_k + \alpha_j|a_{j,k}|x_j| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{\substack{m \\ P_k \in T_n \\ P_m \in T_{n-1}}} \sum_{k} |a_{k,m}x_m + x_k|a_{k,m}|\alpha_k| .$$

---

[10]) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že matice jest souvislá.

Důkaz. Označme T^*_{n+1} množinu všech bodů řádu $p \geq n + 1$. Pišme soustavu rovnic (5)

$$x_k \sum_{\substack{l \\ P_l \in T^*_{n+1}}} \alpha_k |a_{k,l}| + \sum_{\substack{j \\ P_j \in T^*_{n+1}}} x_j a_{j,k} = - \sum_{\substack{m \\ P_m \in T_{n-1}}} (x_m a_{k,m} + x_k |a_{k,m}| \alpha_k) \tag{12}$$

pro všechna k taková, že P_k jest bod n-tého řádu a

$$\sum_l x_l a_{p,l} = 0 \,, \quad P_p \in T^*_{n+2} \,. \tag{13}$$

Matice soustavy systému (12) a (13), se rozpadne na přímý součet matic, o nichž se snadno možno přesvědčit, že mají rovněž konstantu α. (Srov. větu 3, 10.)[11]) Mimo to také možno nahlédnout, že na pravé straně jednotlivých částečných matic vyskytuje se jediný nenulový koeficient. Sumační znaménko na pravé straně (12) jest formální, protože jde pouze o jediný člen.

Proto platí podle věty 14, že

$$\sum_{\substack{k \\ P_j \in T_{n+1} \\ P_k \in T_n}} \sum_j |a_{j,k} x_k + \alpha_j |a_{j,k}| x_j| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{\substack{m \\ P_m \in T_{n-1} \\ P_k \in T_n}} \sum_k |x_k |a_{k,m}| \alpha_k + x_m a_{k,m}| \,;$$

tím je věta 15 dokázána.

Věta 16. *Mějme soustavu lineárních rovnic, nekonečnou ($N = \infty$) nebo konečnou ($N \neq \infty$)*

$$\sum_{j=0}^{N} a_{i,j} x_j = b_i \,, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \,.$$

O matici předpokládejme, že je otevřená a úplně regulární s konstantou α. Buď dále $b_i = 0$, $i \neq 0$, $b_0 = 1$.

Označíme-li T_k množinu bodů k-tého řádu vzhledem k P_0, potom platí

$$\sum_{\substack{k \\ P_j \in T_{n+1} \\ P_k \in T_n}} \sum_j |a_{j,k} x_k + \alpha_j |a_{j,k}| x_j| \leq \frac{1}{\alpha^{n+1}} \,.$$

Důkaz. Důkaz provedeme snadno úplnou indukcí. Je-li $n = 0$, potom tvrzení je správné podle věty 14. Nechť nyní platí naše věta pro $n = p$. Potom podle věty 15 platí naše věta i pro $h = p + 1$. Tím jest věta 16 úplně dokázána.

5. Řešení systému lineárních rovnic s úplně regulární uzavřenou maticí.

V minulém odstavci jsme ukázali řešení soustavy rovnic s úplně regulární otevřenou maticí. V tomto odstavci ukážeme, jak se aplikuje tato metoda na soustavy rovnic s uzavřenou maticí.

---

[11]) Případně nemusí ani být skutečný rozpad, t. j. když přímý součet jest tvořen jednou maticí.

Věta 17. *Mějme soustavu $n+1$ lineárních rovnic*

$$\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

O matici A soustavy předpokládejme, že jest úplně regulární (otevřená nebo uzavřená).

Dále předpokládejme, že $b_0 = 1$, $b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0$. Buď A^* rozvinutá matice a předpokládejme, že $\varphi(P_0^*) = P_0$. Předpokládejme dále, že body konjugované množiny M_{A^*} jsou očíslovány tak, že body P_j^*, $p_k \leq j < p_{k_M}$, jsou k-tého řádu vzhledem k P_0^*. Buď dále $x_0, x_1, \ldots, x_n$ řešení soustavy a nechť $x_0^k, x_1^k, \ldots, x_{p_k-1-1}^k$ je řešení soustavy lineárních rovnic

$$\sum_{j=0}^{j=p_{k+1}-1} c_{i,j} x_j^k = d_i^k\,, \quad i = 0, 1, \ldots, p_{k+1} - 1\,,^{12}) \tag{14}$$

při čemž nechť matice této soustavy A^{*k} je redukovaná matice rozvinuté matice A^* (až po body k-tého řádu). Mimo to nechť $d_0^k = 1$, $d_j^k = 0$, $j \neq 0$. Buď dále X_l^k podmnožina všech bodů množiny $M_{A^{*k}}$ takových, že

$$P_\alpha^* \in X_l^k \Rightarrow \varphi(P_\alpha^*) = P_l\,.$$

Potom, jestliže označíme

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in X_l^k}} x_j^k = x_j^{*k}\,,$$

platí

$$\lim_{k\to\infty} x_l^{*k} = x_l\,.$$

Důkaz. O matici můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je souvislá. Vzhledem k tomu, že matice A jest podle předpokladu úplně regulární, závisí řešení spojitě na pravé straně. Naše tvrzení bude tedy zřejmě dokázáno, jestliže ukážeme, že

$$\sum_{j=0}^{p_{k+1}-1} a_{i,j} x_j^{*k} - b_i \to 0 \text{ pro } k \to \infty\,.$$

Abychom to dokázali, všimněme si posloupnosti čísel

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} x_j^k - d_i^k = \varrho_i^k,\ i = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

když klademe $x_j^* = 0$ pro $j \geq p_{k+1}$. Při tom matice $\|c_{i,j}\|$ jest rozvinutá matice A^*.

Vzhledem k tomu, že každý bod r-tého řádu jest spojen nejvýše s body řádu $r-1$ a $r+1$ (viz větu 4), je nejvýše $\varrho_j^k \neq 0$ pro $p_{k+1} \leq j < p_{k+2}$.

[12]) $c_{i,j}$ jsou koeficienty rozvinuté matice.

Ukažme dále, že je

$$\sum_j |\varrho_j^k| \leq \frac{1}{\alpha^{k+1}}.$$

Označíme T_k množinu všech bodů řádu k konjugované matice $M_{A^{*k}}$.

Vezmeme nyní v (14) všechny rovnice pro takové i, že $P_i \in X_l^k$, a sečteme je. Vzhledem k definici rozvinuté matice, k vlastnostem tam definovaného zobrazení φ, můžeme snadno nahlédnouti, že dostaneme

$$\sum_{j=0}^{n} a_{l,j} x_j^{*k} - b = \sum_{\substack{i \\ P_i \in X_l^k}} \varrho_i^k, \quad l = 0, 1, \ldots, n.$$

Jak jsme však již poznamenali $\varrho_j^k \neq 0$ pouze pro i takové, že $P_j^* \in T_{k+1}$. Tedy

$$|\sum a_{l,j} x_j^{*k} - b_i| \leq | \sum_{\substack{i \\ P^*_i \in T_{k+1}}} \varrho_i^k |,$$

při čemž ϱ_i^k můžeme psát také v tomto tvaru

$$\sum_{P_j \in T_k} c_{j,q} x_j^k = \varrho_q^k$$

pro všechna q taková, že $P_q \in T_{k+1}$.

Abychom odhadli výraz na pravé straně, užijeme věty 16. Skutečně platí

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in T_k}} \sum_{\substack{p \\ P_p \in T_{k-1}}} |c_{j,p} x_p^k + \alpha_j |c_{j,p}| x_j^k| \leq \frac{1}{\alpha^k}. \tag{15}$$

Každou rovnici ze systému (14) příslušnou bodům, které jsou řádu k, lze psát v tomto tvaru

$$\sum_{P_p \in T_{k-1}} (c_{j,p} x_p^k + \alpha_j x_j^k \,.\, |c_{j,p}|) + \sum_{\substack{q \\ q \in T_{k+1}}} \alpha_j |c_{j,q}|\, x_j^k = 0, \ P_j \in T_k.$$

Platí tedy také

$$\sum_{P_p \in T_{k-1}} |c_{j,p} x_p^k + \alpha_j x_j^k |c_{j,p}|| = \sum_{\substack{q \\ q \in T_{k+1}}} \alpha_j |c_{j,q}| |x_j^k|, \ P_j \in T_k$$

vzhledem k tomu, že bod řádu k je spojen nejvýše s jedním bodem řádu $k - 1$, a vzhledem k tomu, že $\alpha_j > \alpha > 1$.

Sečteme nyní všechny tyto rovnice. Dostaneme

$$\sum_{P_j \in T_k} \sum_{P_p \in T_{k-1}} |c_{j,p} x_p^k + \alpha_j x_j^k |c_{j,p}|| = \sum_{\substack{P_j \in T_k \\ P_q \in T_{k+1}}} \sum \alpha_j |c_{j,q}| |x_j^k|.$$

Užijeme-li relace (15), dostaneme

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in T_k}} \sum_{\substack{q \\ P_q \in T_{k+1}}} \alpha_j |c_{j,q} x_j^k| \leq \frac{1}{\alpha^k},$$

a vzhledem k tomu, že $\alpha_j > \alpha$, platí

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in T_k \\ P_q \in T_{k+1}}} \sum_{q} |c_{j,q} x_j^k| \leq \frac{1}{\alpha^{k+1}} .$$

Nyní se snadno již nahlédne, že

$$|\Sigma a_{i,j} x_j^{*k} - b_i| \leq \frac{1}{\alpha^{k+1}} ,$$

a z toho plyne již naše tvrzení.

Poznámka. Věta 17 umožňuje nám řešiti uzavřené systémy metodou rozvodu deformace, neboť tato věta převádí řešení systému s uzavřenou maticí na řešení systémů s otevřenou maticí. Při praktickém výpočtu ovšem nerozepisujeme rozvinutou matici. Rovněž i řešíme najednou případ, že na pravé straně našeho systému jsou různá $b_j \neq 0$.

Celkový postup ukážeme na příkladě, kde bude patrno i uspořádání výpočtu. Před tím však ukážeme na jednom velmi jednoduchém případě, jak se v podstatě aplikují naše věty, neboť počítání na konečný počet desetinných míst uvedený postup poněkud modifikuje.

Řešme tento systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 0{,}5x_3 + x_4 &= 1 , \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 0 , \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0 , \\ x_1 - x_3 + 4x_4 &= 0 . \end{aligned} \tag{16}$$

Budeme nejprve řešit nekonečnou soustavu lineárních rovnic s maticí, která je rozvinutá matice naší původní soustavy s takovými pravými stranami, že $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = \ldots = 0$.

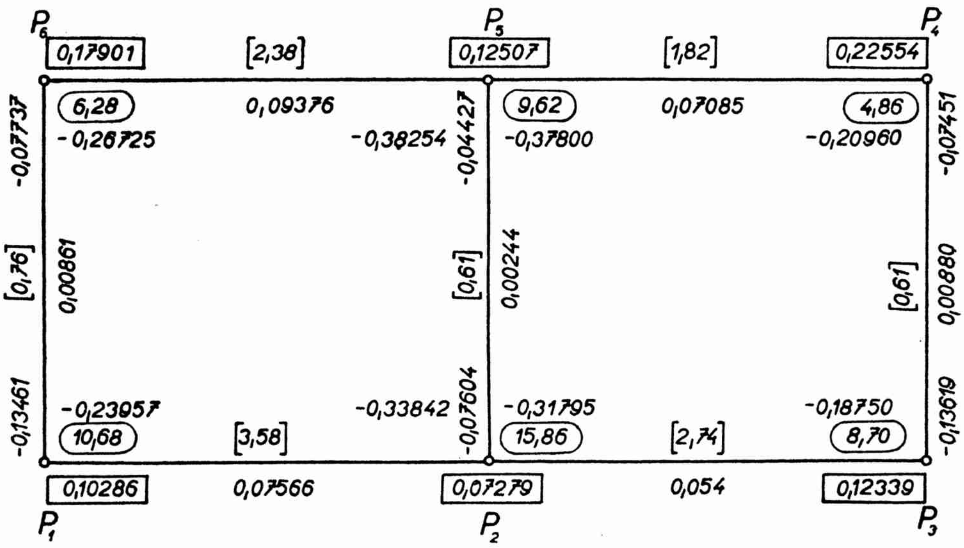
Tedy budeme řešit soustavu

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
7\bar{x}_1 + & 2\bar{x}_2 + & 0{,}5\bar{x} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & = 1, \\
2\bar{x}_1 + & 6\bar{x}_2 + & . & . & \bar{x}_5 & . & . & . & . & . & . & . & = 0, \\
0{,}5\bar{x}_1 + & . & 5\bar{x} & . & . & \bar{x}_6 & -\bar{x}_7 & . & . & . & . & . & = 0, \\
\bar{x}_1 & . & . & +4\bar{x}_4 & . & . & . & -\bar{x}_8 & . & . & . & . & = 0, \\
. & \bar{x}_2 & . & . & +5\bar{x}_5 & . & . & . & +0{,}5\bar{x}_9 & +\bar{x}_{10} & . & . & = 0, \\
. & . & \bar{x}_3 & . & . & 6\bar{x}_6 & . & . & . & . & +2\bar{x}_{11} & . & = 0, \\
. & . & -\bar{x}_3 & . & . & . & +4\bar{x}_7 & . & . & . & . & +\bar{x}_{12} & = 0, \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . &
\end{array} \tag{17}$$

Ve větě 17 jsme ukázali, že rozřešíme-li nekonečný systém rovnic (17), rozřešíme tím i náš systém (16), a to tak, že

$$x_k = \sum_{\substack{j \\ \varphi(P_j^*) = P_k}} \bar{x}_j .$$

Ukázali jsme, že uvedený nekonečný součet jest konvergentní a tudíž že stačí vzíti jen konečný počet členů k tomu, abychom získali výsledek s libovolnou přesností, t. j. tak, že vezmeme v úvahu pouze body, jejichž řád vzhledem k bodu P_0 jest nejvýše k. Každý kořen $\overline{x}_j$ ovšem můžeme určit jen přibližně, na př. již z toho důvodu, že počítáme na konečný počet desetinných míst, ovšem tak, že uvedený součet jest určen s libovolnou přesností.[13]) Dejme tomu na př., že stačí počítat kořeny $\overline{x}_j$ na 4 desetinná místa. Řetězový zlomek mů-



Obr. 8.

žeme vzít proto jen do takové délky, abychom měli zaručeno čtvrté desetinné místo. Dejme tomu, že k tomu potřebujeme ve zlomku (1) pět kroků. Podobně vezmeme zlomek v (2) na př. na pět kroků. Tím docílíme toho, že koeficienty $c_{i,j}$, $c_{k,l}$ [srv. str. 72] jsou numericky stejné pro případ, že $\varphi(P_i^*) = \varphi(P_k^*)$, $\varphi(P_j^*) > \varphi(P_l^*)$, čehož využíváme.

Shrneme-li naše vývody, můžeme říci, že větu 17 aplikujeme v tom smyslu, že řešíme nekonečný systém s rozvinutou maticí s jistou přesností a neřešíme tyto kořeny pomocí redukované soustavy rovnic.

Praktický postup uvádíme v dalším příkladě.

[13]) Otázku, na kolik desetinných míst musíme počítat hodnoty x_k a kolik těchto členů musíme brát, abychom výsledek dostali s předem požadovanou přesností, zde neřešíme. Je to otázka jiného druhu, která také mimo jiné na př. souvisí se statistickým pojetím chyb. Prakticky jest vhodné rozhodnouti se v konkretních případech nějakým způsobem podle účelu výpočtu pro jistý počet desetinných míst a nakonec pomocí vypočtených residuí provésti odhad chyby v určení kořenů, což možno učiniti snadno na př. pomocí věty 6.

Řešme tuto soustavu:

$$\begin{aligned}
10{,}68x_1 + 3{,}58x_2 \phantom{+ 2{,}74x_3 + 0{,}61x_4 + 1{,}82x_5} + 0{,}76x_6 &= 4{,}16\,,\\
3{,}58x_1 + 15{,}86x_2 + 2{,}74x_3 \phantom{+ 0{,}61x_4} + 0{,}61x_5 \phantom{+ 0{,}76x_6} &= -4{,}16\,,\\
2{,}74x_2 + 8{,}70x_3 + 0{,}61x_4 \phantom{+ 1{,}82x_5 + 0{,}76x_6} &= 0\,,\\
0{,}61x_3 + 4{,}86x_4 + 1{,}82x_5 \phantom{+ 0{,}76x_6} &= 0\,,\\
0{,}61x_2 \phantom{+ 8{,}70x_3} + 1{,}82x_4 + 9{,}62x_5 + 2{,}38x_6 &= 0\,,\\
0{,}76x_1 \phantom{+ 1{,}82x_4} + 2{,}38x_5 + 6{,}28x_6 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Je to statický výpočet rámové konstrukce, příklad uvedený v [3] na str. 57. Na obr. 8 jest naznačen graf matice soustavy. Do tohoto grafu provádíme celý výpočet. Označení zde je stejné jako na obr. 6.

Tedy: 1. Čísla v kroužcích jsou diagonální členy matice. 2. Čísla v hranaté závorce jsou členy matice $a_{i,j}$. 3. Pod hodnotami $a_{i,j}$ jsou napsány členy $\alpha_{i,j}$.

Nyní vypočítáme jednotlivé řetězové zlomky nejprve pro primérní kořeny. Protože koeficienty jsou velmi malé vzhledem k jedničce, stačí se omezit na několik členů. Pišme

$$x_i^0 = b_i c_{i,i}\,.$$

Potom máme, omezíme-li se na prvé dva kroky,

$$c_{1,1} = \frac{1}{10{,}68\left[1 - \dfrac{0{,}00681}{1 - 0{,}00861} - \dfrac{0{,}00244}{1 - 0{,}09376 - 0{,}07085} - \dfrac{0{,}05441}{1 - 0{,}00880}\right]} = $$
$$= 0{,}10286$$

a podobně

$$c_{2,2} = \frac{1}{15{,}86\left[1 - \dfrac{0{,}07566}{1 - 0{,}00861} - \dfrac{0{,}00244}{1 - 0{,}09376 - 0{,}07085} - \dfrac{0{,}05441}{1 - 0{,}00880}\right]}\,.$$

Tyto koeficienty jsou u příslušných bodů napsány v lomené závorce; jinak se píší barevně, na př. modře.

Poznámka. V následující tabulce jest koeficient $c_{1,1}$, když v řetězovém zlomku jsou jeden, dva nebo tři kroky.

	1 krok	2 kroky	3 kroky
$c_{1,1}$	0,10230	0,10286	0,10287

Z toho je patrno, že se můžeme omezit pouze na několik málo kroků při výpočtu řetězového zlomku. Známe-li primérní kořeny x_1^0, rozvádíme je.

Pišme

$$x_i = c_{j,i} x_j^0\,.$$

Tedy máme

$$c_{1,2} = \frac{-3{,}58}{15{,}86\left[1 - \dfrac{0{,}05441}{1-0{,}00880} - \dfrac{0{,}00244}{1-0{,}09376-0{,}07085}\right]} = -0{,}23957\,.$$

Toto číslo napíšeme k bodu P_1 na spojnici $\overline{P_1P_2}$; podobně

$$c_{2,1} = \frac{-3{,}58}{10{,}68\left[1 - \dfrac{0{,}00861}{1-0{,}09376}\right]} = -0{,}33842$$

a toto číslo napíšeme k bodu P_2 na spojnici $\overline{P}_1, \overline{P}_2$. Stejně je tomu u ostatních bodů.

Poznamenejme zde opět, že koeficienty $c_{i,j}$ jsou rovněž velmi málo citlivé na počet kroků v řetězovém zlomku. V následující tabulce jest vypočítán koeficient $c_{1,2}$, uvažujeme-li ve zlomku jeden, dva nebo tři kroky.

	1 krok	2 kroky	3 kroky
$c_{1,2}$	—0,2394	—0,23957	—0,23959

Vypsáním všech těchto uvedených hodnot jest skončena prvá část výpočtu, která nezávisí na pravé straně našeho systému lineárních rovnic.

Jako další část výpočtu provádí se bezprostřední rozvod. Provádí se buď do grafu matice, kde jsou psány i ostatní hodnoty, nebo na obraz zvláštní. Je v našem případě proveden zvlášť obr. 9.

Postup jest následující: 1. Ke každému bodu napíšeme výraz $b_i \,.\, c_{i,i}$.

2. Provedeme rozvod ve vodorovném směru. Tak

$$-0{,}23957\,.\quad 0{,}42791 = -0{,}10256\,,$$
$$-0{,}33842\,.\,(-0{,}30282) = +0{,}10248\,.$$

Rozvody označujeme pro přehlednost šipkami, což v praxi se pak nedělá. Ve směru $P_6 - P_5 - P_4$ jest primérní rozvod nulový.

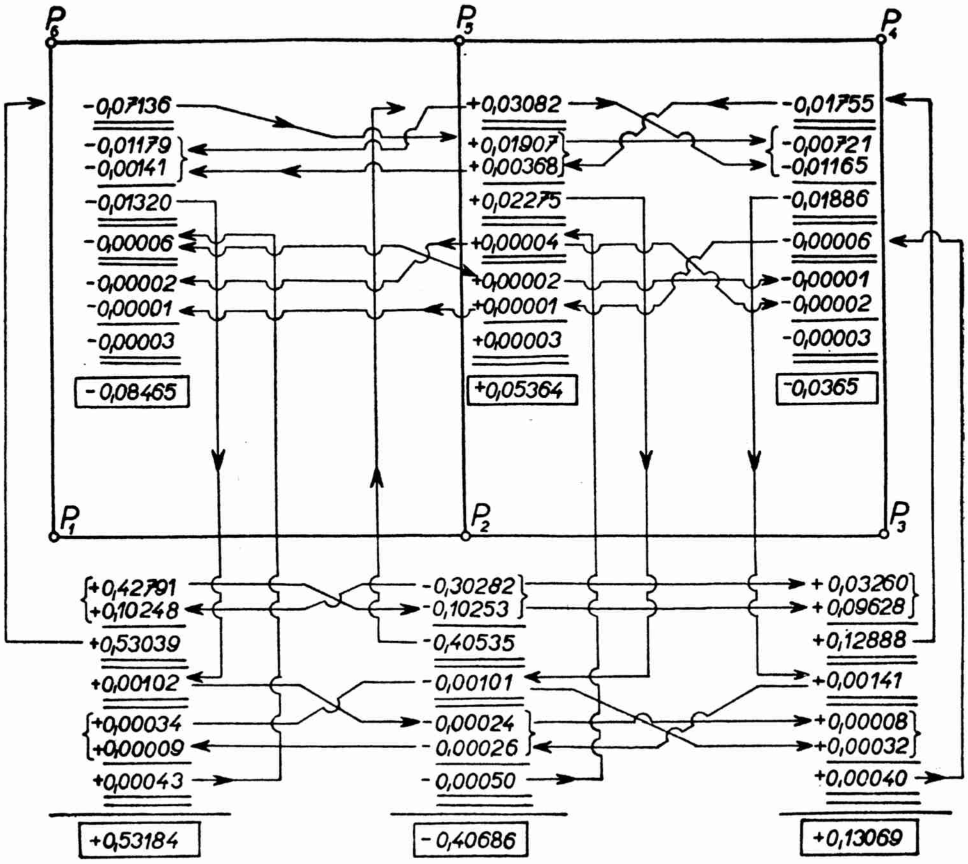
3. Provádíme svislý rozvod nahoru. Tak jest

$$0{,}53039(-0{,}13464) = -0{,}07136\,.$$

4. Provedeme vodorovný rozvod ve směru $P_6 - P_5 - P_4$ a $P_4 - P_5 - P_6$.
5. Provedeme svislý rozvod dolů.
6. Provedeme vodorovný rozvod ve směru $P_1 - P_2 - P_3$ a $P_3 - P_2 - P_1$.
7. Provádíme další rozvody. Je možno však proces již skončit.
8. Dostáváme kořeny, resp. jejich aproximace

$$x_1 = \quad 0{,}53039 + 0{,}00102 + 0{,}00043 = +0{,}53184\,,$$
$$x_2 = -(0{,}40535 + 0{,}00101 + 0{,}00050) = -0{,}40686\,,$$

atd.



Obr. 9.

Kořeny jsou uspořádány v další tabulce, kde jsou také vyčíslena residua.

	Kořeny	Residua
1	+0,53184	—0,0008416
2	—0,40686	+0,0019986
3	+0,13069	—0,0000584
4	—0,03650	—0,0000443
5	+0,05364	—0,0000648
6	—0,08465	+0,0002596

Je patrno, že byly získány celkem velmi dobré výsledky. Zpřesnění kořenů bychom provedli novým řešením rovnic s residui jakožto pravými stranami.

6. Závěr

V tomto odstavci učiníme některé poznámky k praktickému užití uvedené metody.

1. Metoda rozvodu deformací, jak byla uvedena, jest účinná zejména, když stupně bodů konjugované množiny jsou poměrně malé vzhledem k řádu matice. Metoda pak je zejména užitelná, když matice má dosti pravidelnou síť. To se na př. vyskytuje ve statice při řešení patrových rámů s neposuvnými styčníky. V těchto případech je graf velmi blízký čtvercové síti.

2. Soustavy lineárních rovnic s úplně regulární maticí jsou ovšem řešitelny i jinými iteračními procesy, na př. Ritzovou iterací, Gauss-Seidlovou iterací, případně i v její relaxační (Southwell) modifikaci. Gauss-Seidlova iterace v praktických případech při výpočtu rámových konstrukcí konverguje dosti rychle. Tak na př. v uvedeném příkladě stačí 7 kroků Gauss-Seidlovy iterace. Ritzova methoda konverguje poněkud pomaleji. Pro stejnou přesnost je třeba provésti 13 kroků. Jestliže se má provésti řešení soustavy pro jedinou pravou stranu, potom jest asi nejvhodnější normální iterace. Jestliže však jde o výpočet pro řadu pravých stran, pak je výhodnější popsaná metoda rozvodu deformací, vzhledem k tomu, že výpočet konstant $c_{i,j}$ nezávisí na pravých stranách systému.

3. Řetězové zlomky konvergují velmi rychle, takže v praktických případech stačí vzíti jeden nebo dva kroky. Poněkud pomaleji konverguje již bezprostřední rozvod, kde musíme vzíti poměrně více kroků. Organisace výpočtu při rozvodu může býti různá.

Úprava postupných vodorovných a svislých rozvodů pro čtvercové nebo podobné sítě se zdá být velmi vhodná.

4. Rychlost celkové konvergence závisí na konstantě α. Čím jest α větší, t. j. čím více převládá diagonální člen, tím rychlejší je konvergence.

5. Odhad chyby jest nejsnáze proveditelný výpočtem residuí a použitím věty 6.

6. Uvedená metoda rozvodu, tak jak byla uvedena, jest účinná i v některých jiných případech než pro soustavy s úplně regulárními maticemi. Zůstává otevřena otázka, jaké jiné postačující podmínky možno volit, aby uvedená metoda byla konvergentní.

7. Jistá nevýhoda uvedené metody jest poměrně obtížná kontrola výpočtu.

8. Shrňme tyto poznámky. Metoda rozvodu deformace pro výpočet soustavy lineárních rovnic jest výhodnější než běžné iterační metody, jestliže

a) matice soustavy jest úplně regulární s konstantou cca 1,5—2,

b) stupeň jednotlivých bodů konjugované matice je poměrně malý (4—5),

c) graf matice jest alespoň částečně pravidelný,

d) se provádí výpočet pro několik pravých stran (více než cca 25—30% řádu matice), případně když se invertuje matice.

LITERATURA

[1] *C. V. Klouček:* Rozvod deformací, Praha 1940.

[2] *C. V. Klouček:* Distribution of deformation (a new method of structural analysis), Prague 1949.

[3] *O. Novák:* Patrový rám, Praha 1952.

[4] *А. Б. Канторович, Б. У. Крыгол:* Приближенные методы высшего анализа 1952.

Резюме

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И О ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К СТАТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška), Прага.

(Поступило в редакцию 25/IV 1954 г.)

В мировой литературе по строительной механике, в особенности в литературе о стержневых конструкциях, занял видное место метод численного решения, который его автор, Ц. В. Клоучек (ср. [2]), назвал ,,методом разведенных деформаций".

Вопросы, связанные со статическим решением стержневых конструкций, в сущности эквивалентны с решением системы линейных уравнений. Возник поэтому вопрос, в каком смысле метод Клоучека можно сформулировать для систем уравнений общего вида и когда этот метод, носящий итеративный характер, будет сходящимся, в особенности потому, что этот метод оказался в некоторых случаях весьма эффективным.

В статье показано, что достаточным условием применимости указанного метода является требование, чтобы система уравнений была симметричной и вполне регулярной.

При этом мы говорим, что система уравнений

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 , \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

симметрична и вполне регулярна, если имеет место

1. $a_{i,j} = a_{j,i}$,
2. $a_{i,i} = \alpha_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$, $\alpha_i > \alpha > 1$.

Метод можно применить и к бесконечным системам уравнений. При этом, однако, вводится дальнейшее предположение

3. $0 < k < \alpha_{i,i} < K < \infty$.

В статье анализируется этот метод и кроме теоретических доказательств демонстрируется практический ход решения на численном примере.

Zusammenfassung.

ÜBER EINE NUMERISCHE LÖSUNG VON VOLLSTÄNDIG REGULÄREN SYSTEMEN LINEARER GLEICHUNGEN UND IHRE APPLIKATION AUF DIE STATISCHE LÖSUNG VON RAHMENTRAGWERKEN

IVO BABUŠKA, Praha.

(Eingelangt 25. IV. 1954.)

In der Weltliteratur der Baumechanik, speziell in der Literatur, die sich mit der Theorie von statischen Lösungen der Rahmentragwerken beschäftigt, hat eine Methode, die ihr Autor „Methode der fortgeleiteten Verformung" nennt, ihren Platz eingenommen.

Die Fragen, die mit der statischen Lösungen von Rahmentragwerken zusammenhängen, sind im Wesen äquivalent mit Fragen der Lösung eines Systems von Lineargleichungen. Es ist deswegen die Frage aufgetaucht, ob diese Methode der fortgeleiteten Verformung, welche in Speziellfällen sehr schnell zum Ziel führt, auch im Allgemeinen formuliert werden kann, und wann die Konvergenz der Methode, die einen iterativen Charakter hat, garantiert wird.

Diese Abhandlung beweist, dass für die Konvergenz dieser Methode die vollständige Regularität und Symmetrie eine hinreichende Bedingung ist. Ein System von Lineargleichungen wird vollständig regulär und symetrisch genannt, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:

1. $a_{i,j} = a_{j,i}$
2. $a_{i,i} = \alpha_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} |a_{i,j}|, \; \alpha_i > \alpha > 1.$

Diese Methode kann auch für Lösung von unendlichen Systemen der linearen Gleichungen angewendet werden. Dabei aber wird noch

3. $0 < k < a_{i,i} < k < \infty$.

vorausgesetzt.

In diesem Artikel wird diese Methode analysiert und ausser den theoretischen Beweisen zeigt der Autor auch auf numerischen Beispielen ihren praktischen Vorgang.

REFERÁTY

MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÝ KONGRES V AMSTERODAMU, KONANÝ 2.—9. ZÁŘÍ 1954

(Referát ze schůze matematické obce pražské, pořádané dne 25. října 1954.)

Kongresu se zúčastnili naši matematikové JARNÍK, KATĚTOV, KNICHAL a SCHWARZ; prof. Schwarz však nebyl na této schůzi přítomen.

První se ujal slova akademik JARNÍK. Upozornil napřed, že jeho referát nebude systematickou přednáškou; to by nebylo možné již proto, že byl kongres příliš rozsáhlý a žádný účastník neviděl vše, co se kongresu týkalo. Dále uvedl akademik Jarník něco z historie mezinárodních matematických kongresů; je to vlastně přes padesát let stará instituce. Mezinárodní kongresy se konají od r. 1897 do nynější doby přibližně každé čtyři roky.

Amsterodamský kongres byl holandskými matematiky dokonale zorganisován. Účastníků bylo nemnoho pod 2000, z toho však několik set rodinných příslušníků. Ohlášeno bylo 545 přednášek a sdělení. Mimo lidovou Čínu byly na kongresu zastoupeny téměř všechny státy na světě, ve kterých je významná matematická produkce.

Přednášky byly rozděleny do těchto sekcí: 1. Algebra a theorie čísel, 2. matematická analysa, 3. geometrie a topologie, 4. počet pravděpodobnosti a matematická statistika, 5. aplikace matematiky a matematická fysika, 6. základy a filosofie matematiky, 7. pedagogika a historie matematiky. Mimo to byla symposia: Stochastické procesy, algebraická geometrie, formální systémy.

Naši účastníci měli tyto přednášky: KATĚTOV ve 3. sekci o theorii dimense, KNICHAL v 5. sekci o kartézské representaci prostoru Minkowského, SCHWARZ v 1. sekci o charakterech pologrup, JARNÍK rovněž v 1. sekci o lineárních diofantických aproximacích.

Sjezd se konal v přátelském ovzduší upřímné mezinárodní spolupráce. Pořadatelé vynaložili mnoho úsilí na to, aby sjezd byl opravdu mezinárodním. To se jim vskutku podařilo — až na neúčast lidové Číny — a pořadatelé i účastníci sjezdu přijali s velkým uspokojením přítomnost zástupců zemí tábora míru. Zejména sovětská delegace se těšila zcela výjimečné pozornosti. Stojí snad za zmínku, že někteří matematikové z USA umějí dobře rusky. Pro nás je jistě závažné, že se účastníci sjezdu vyptávali naší delegace na naše mladé autory, s jejichž pracemi se setkali. Závěrem sdělil ak. Jarník, že na amsterodamském sjezdu bylo rozhodnuto, že příští kongres se bude konat v r. 1958 v Edinburghu.

Po ak. Jarníkovi referoval o amsterodamském kongresu rektor KATĚTOV. Vylíčil některé detaily, které se týkaly života a ubytování naší delegace, a podrobněji vylíčil rozsáhlost kongresu. Zmínil se, že v soukromých rozhovorech byly vyslovovány pochybnosti o tom, zda je účelné pořádat tak velké kongresy; poznamenal pak, že po stránce čistě vědecké jsou jistě užitečnější kongresy menší, že však takovýto velký kongres nejlépe přispěje k osobnímu sblížení matematiků.

Po referátu rektora Katětova se opět přihlásil ak. Jarník a doplnil svůj referát několika poznámkami o problémech z theorie čísel, jimiž se na sjezdu matematikové zabývali.

Dále referoval o zájezdu prof. Knichal. Uvedl, že na kongresu v 5. sekci byla sdělení jednak o různých konkretních fysikálních problémech, na př. o problémech vedení tepla, elektromagnetických vln a elasticity, jednak o problémech theoretické fysiky, zejména kvantové mechaniky a representace grup.

Dále se prof. Knichal zmínil, že účastníkům byly předváděny velké počítací stroje. Amsterodamský Matematický ústav má tři, jeden reléový a dva elektronkové; jeden elektronkový je holandské výroby, ostatní dva jsou z Ameriky. Jsou to stroje „s pevnou logikou".

Nakonec odpověděli naši účastníci amsterodamského kongresu na několik dotazů z řad posluchačstva. *Jan Mařík*, Praha.

RIEMANŮV KONGRES V BERLÍNĚ

Na programu schůze matematické obce pražské dne 1. listopadu 1954 byl referát o Riemannově matematickém kongresu v Berlíně konaném ve dnech 11. až 16. října 1954. Sjezd uspořádal Badatelský ústav matematický Německé akademie věd v Berlíně u příležitosti stého výročí Riemannovy habilitační přednášky „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen". Z Československa byla na kongresu delegace Československé akademi věd, kterou vedl akademik Ed. Čech a jejímiž dalšími členy byli prof. Dr Vyčichlo, prof. Dr Klapka, Dr Fiedler a Dr Nádeník.

První referoval prof. Vyčichlo. Promluvil nejprve stručně o životě a práci Bernharda Riemanna, o historii jeho habilitační přednášky a o její základní ideí. Její vliv na rozmanité matematické obory i na fysiku nemá svým rozsahem i působností takřka obdoby. To pak spolu s přáním, aby byl v Německu vzbuzen větší zájem o geometrii a její spojení s analysou a fysikou právě v tom duchu, jak si je představoval Riemann, vedlo pořadatele k nazvání kongresu Riemannovým jménem.

Na sjezdu bylo asi 200 účastníků, z toho mnoho studentů. Přítomni byli matematikové z Belgie, Bulharska, Československa, Italie, Maďarska, Německé demokratické republiky, Německé spolkové republiky, Polska a Rumunska.

Prof. Vyčichlo konstatoval, že značnou pozornost a zájem vzbudila sjezdová přednáška akademika Čecha: „Zur projektiven Differentialgeometrie".

Akademik Čech ve svém referátu sjezd kriticky zhodnotil jak po stránce organisační, tak i obsahové. Sjezd byl zajisté dobrou příležitostí k seznámení účastníků, ale bylo snad možné této stránce věnovat ještě větší péči. Lze také pochybovat o tom, zda bylo vhodné, že bylo upuštěno od krátkých sdělení v sekcích. Konaly se jen plenární přednášky a vzhledem k ohromnému dosahu Riemannových idejí není divu, že jejich themata i obsah byly značně různorodé; to bylo též jednou z příčin, proč po mnoha přednáškách nebyly vůbec diskuse. Za zvlášť zajímavé označil akademik Čech mimo jiné přednášky, které měli E. Kähler, K. Kuratowski a B. Sz.-Nagy. Sjezd byl skvělým dokladem toho, že geniální Riemannovy koncepce po 100 letech si plně uchovaly svou životnost.

V závěru schůze promluvili krátce Z. Nádeník a M. Fiedler o svých dojmech z Berlína a ze zájezdu do Postupimi, Výmaru, Oberhofu a Drážďan, uspořádaného po sjezdu Německou akademií věd. *Jan Mařík* a *Zbyněk Nádeník*, Praha.

O VYDÁVÁNÍ MATEMATICKÉ LITERATURY V SOVĚTSKÉM SVAZU

(Referát G. F. Rybkina, ředitele Státního nakladatelství technicko-theoretické literatury v Moskvě-Leningradě, přednesený v matematické obci pražské dne 15. listopadu 1954.)

G. F. Rybkin je ředitelem Státního nakladatelství technicko-theoretické literatury (GITTL), jehož úkolem je vydávat knihy z t. zv. exaktních věd, t. j. matematiky, mechaniky, fysiky, astronomie atd. Nakladatelství vydává asi 70% literatury z těchto oborů; zbytek vychází v učitelsko-pedagogickém nakladatelství, ve St. vyd. technické literatury Ukrajiny, v Nakladatelství moskevské a leningradské university, v Nakladatelství věd SSSR atd.

Ačkoliv přednáška byla zaměřena především k matematické literatuře, uvedl s. Rybkin některé obecné číselné údaje svědčící o ohromné práci nakladatelství GITTL za posledních 9 let. GITTL vydalo v letech 1946—1954 1101 titulů (bez nových vydání) s celkovým nákladem 54 mil. exemplářů, z čehož připadalo na matematiku 360 titulů, na fysiku 354, na mechaniku 167, na astronomii 64 atd. Porovnáme-li pouze tyto 4 hlavní discipliny mezi sebou, bylo knih z matematiky 38%, z fysiky 37%, z mechaniky 18% a z astronomie 7%; na počet exemplářů byl poměr takovýto: matematika 54%, fysika 25%, mechanika 16%, astronomie 5%. Z těchto čísel je patrna velká specifická váha matematiky v celkovém plánu nakladatelství. Velký význam, který se přikládá matematice v Sovětském svazu vůbec, je patrný i z toho, že v SSSR připadá za rok 1 matematická kniha na 100 obyvatel (v ČSR pouze na 185 obyvatel, podle neúplných údajů). To je zcela pochopitelné, neboť rozvoj matematiky je podmínkou rozvoje theoretického bádání ve fysikálních a technických vědách, jež hrají důležitou roli v období budování socialistického průmyslu.

Obraťme se nyní přímo k literatuře matematické. Z matematických knih vydaných v letech 1946—1954 bylo 18 věnováno historii matematiky, 21 klasikům matematiky, 164 vědecké literatuře (z toho 13 překladů), 94 učebnicím, 40 vědecko-populární literatuře a 23 příručkám.

Jelikož nakladatelství pečuje nejen o matematické knihy pro matematiky-specialisty a posluchače mat.-fysikálních fakult, nýbrž i pro techniky (tak na př. známá Fysikálně-matematická knihovna inženýra), je pro nakladatelství prvořadou otázkou, v jaké míře se theoretičtí pracovníci v matematice zajímají o problémy technické praxe a o zpracování těch partií matematiky, jež jsou technikům obzvlášť užitečné. S. Rybkin proto stručně uvedl vývoj ruské matematiky od poloviny 19. stol. a poukázal na tradiční úzký vztah ruské matematiky k aplikacím ve fysice a technice, a to zvláště t. zv. petrohradské matematické školy.

G. F. Rybkin potom uvedl stěžejní práce z jednotlivých matematických disciplin, které GITTL vydalo v letech 1946—1954. Tento výčet zde neuvádím a odkazuji zájemce na katalogy všech knih vydaných v GITTL v letech 1941—1953, které s. Rybkin věnoval matematickému ústavu ČSAV, a jež jsou k nahlédnutí v knihovně ústavu.

Po přednášce se rozvinula čilá diskuse, v níž G. F. Rybkin odpověděl na různé dotazy. Na dotaz akad. Jarníka, jakým způsobem jsou sestavovány v SSSR thematické plány časopisů, s. Rybkin odpověděl, že v časopise, jehož úkolem je především zajišťovat prioritu nových vědeckých poznatků, nelze dost dobře thematický plán sestavovat, jelikož redakce je více méně nucena uveřejňovat došlé příspěvky v chronologickém pořadí. Plán lze sestavit nanejvýš v tom případě, že má redakce v zásobě příspěvky alespoň na jeden rok. U časopisů přinášejících přehledné statě (jako na př. Uspechi matematičeskich nauk) je možno sestavovat thematický plán, ovšem opět za předpokladu, že jsou k disposici autoři, kteří by byli schopni a ochotni realisovat požadavky redakce.

Dále G. F. Rybkin podal informace o některých publikacích (moderní algebra, historie matematiky, Co je matematika?). Na podnět akad. Jarníka se s. Rybkin ještě zabýval otázkou vydávání monografií. Zdůraznil, že nakladatelství se řídí již tradiční ruskou zásadou, že vedle učebnic masového charakteru je třeba také vydávat vědecké monografie, jejichž vydávání, mají-li být cenou dostupné, je v některých případech nerentabilní. Vzhledem k tomu, že podle sovětských nařízení se určí cena knihy tak, že za každý tiskový arch u věd. monografie se počítá částka 50 kop. a u učebnice 30 kop., má nakladatelství přehled o finančním efektu jednotlivých knih a může svou činnost naplánovat tak, aby jeho rozpočet byl vyrovnán a přitom je s to zajistit vydání dostatečného počtu vědeckých monografií za poměrně nízkou cenu.

Na dotaz prof. VYČICHLA, informoval s. Rybkin přítomné o metodách práce redakce časopisu *Referativnyj žurnal*.

Obšírný a poučný referát G. F. Rybkina i jeho cenná vysvětlení, která podal na dotazy přednesené v diskusi, byly všemi přítomnými vyslechnuty s velikým zájmem a odměněny živým potleskem.

O. Vejvoda, Praha.

O METRICKÉ TEORII ČÍSEL

(Referát o přednášce JAROSLAVA KURZWEILA, přednesené v matematické obci pražské dne 22. listopadu 1954.)

V přednášce jsem mluvil o výsledcích, které souvisejí s tímto problémem formulovaným H. STEINHAUSEM:

Nechť $B^{(0)}$ je množina obsahující všechny posloupnosti $\{b_q\}_{q=1}^{\infty}$ splňující podmínky

$$(1)\ b_q \geq 0, \quad (2)\ b_q \geq b_{q+1}, \quad (3)\ \sum_{q=1}^{\infty} b_q = \infty.$$

Nechť K je kružnice v rovině (ξ, η) o poloměru $\frac{1}{2\pi}$ se středem v počátku. Je-li x reálné číslo, nechť $[x]$ je bod o souřadnicích

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x\,, \quad \eta = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x\,.$$

Jsou-li a, b reálná čísla, $a \leq b$, nechť interval $I[a, b]$ je množina takových bodů $[x]$, že je $a \leq x \leq b$. Na kružnici K je zřejmým způsobem definována lineární Lebesgueova míra μ tak, že je $\mu(K) = 1$. H. Steinhaus položil tuto otázku:

Má každé reálné číslo x tu vlastnost, že zvolíme-li libovolnou posloupnost $\{b_q\} \in B^{(0)}$, skoro každý bod na kružnici K patří do nekonečně mnoho intervalů $I[qx - b_q, qx + b_q]$, $q = 1, 2, 3, \ldots$?

Abychom tuto otázku zodpověděli, připomeneme jednu definici z theorie diofautických aproximací.

Nechť nezáporná funkce $\varphi(q)$ je definovaná pro přirozená q. Říkáme, že reálné číslo x připouští aproximaci φ, jestliže ke každému Q existují celá čísla $p, q, q > Q$ tak, že platí nerovnost

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqq \varphi(q)\,.$$

Jak známo, každé číslo x připouští aproximaci $\frac{1}{q^2}$ a CHINČIN dokázal tuto větu:

Nechť funkce $q^2 \varphi(q)$ monotonně klesá. Jestliže řada $\sum_{q=1}^{\infty} q\, \varphi(q)$ konverguje, potom množina těch reálných čísel x, která připouštějí aproximaci φ, má míru 0. Jestliže řada $\sum_{q=1}^{\infty} q\, \varphi(q)$ diverguje, potom množina těch reálných čísel x z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, která připouštějí aproximaci φ, má míru 1.

Nyní je možno otázku H. Steinhause zodpovědět touto větou:

Věta 1. *Číslo x má tu vlastnost, že ať zvolíme libovolnou posloupnost $\{b_q\} \in B^{(0)}$, skoro každý* *bod na K patří do nekonečně mnoho intervalů $I[qx - b_q, qx + b_q]$, $q = 1, 2, 3, \ldots$ právě tehdy, existuje-li takové číslo $d > 0$, že číslo x nepřipouští aproximaci $\dfrac{1}{(dq)^2}$.*

Abychom usnadnili formulaci dalších výsledků, zavedeme tato označení:

Nechť B je neprázdná podmnožina množiny $B^{(0)}$. Reálné číslo x, $0 \leq x < 1$ patří do množiny $\alpha(B)$, jestliže pro každou posloupnost $\{b_q\} \in B$ množina těch bodů na K, které patří do nekonečně mnoha intervalů $I[qx - b_q, qx + b_q]$ má míru 1.

Z Chinčinovy věty a z věty 1 snadno vyplývá, že množina $\alpha(B^{(0)})$ má míru 0.

Nechť nyní množina B obsahuje jediný element $\{b_q\}$ množiny $B^{(0)}$; potom platí

Věta 2. *Množina $\alpha(\{b_q\})$ má míru 1.*

Označme

$$A = \underset{x,y}{E}\,[0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1, \text{ existuje nekonečně mnoho párů celých čísel } p, q, \\ q > 0 \text{ tak, že platí } |qx - y - p| \leq b_q]$$

pro pevně zvolenou posloupnost $\{b_q\} \in B^{(0)}$.

Nechť $A^{(x,\cdot)}$ ($A^{(\cdot,y)}$) znamená řez množiny A, který vznikne, zvolíme-li pevně souřadnici x (nebo y).

Věta 2 je ekvivalentní s tvrzením, že Lebesgueova míra v rovině množiny A je rovna 1, neboť číslo x patří do množiny $\alpha(\{b_q\})$ právě tehdy, jestliže (lineární) míra množiny $A(x, .)$ je 1.

Označme $P(\varphi)$ množinu těch čísel x z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, která připouštějí aproximaci $\varphi(q)$. Zřejmě je

$$P(\varphi) = \underset{x}{E}\,[0 \leq x < 1, \text{ existuje nekonečně mnoho párů celých čísel } p, q, q > 0 \text{ tak,} \\ \text{že platí } |qx - p| \leq q\,\varphi(q)]$$

a

$$P\left(\frac{b_q}{q}\right) = A^{(\cdot,0)}.$$

Chinčinova věta říká, že řez $A^{(\cdot,0)}$ množiny A má míru 1, jestliže je $\{b_q\} \in B^{(0)}$ a jestliže posloupnost qb_q neroste.

Z věty 2 plyne ještě dosti snadno tento důsledek:

Zvolme $\{b_q\} \in B^{(0)}$ a položme

$$D = \underset{u,v}{E}\,[-\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty, \textit{ existuje nekonečně mnoho celých čísel} \\ p, q, q > 0 \textit{ tak, že platí } |qu + pv - 1| < b_q].$$

Potom množina těch bodů v rovině, které nepatří do množiny D, má míru 0.

Budiž $0 \leq \beta \leq 1$. Nechť $B^{(\beta)}$ je množina obsahující všechny posloupnosti $\{b_q\}$, které splňují podmínky

$$(1)\ b_q \geq 0, \quad (2)\ q^\beta b_q \geq (q+1)^\beta\, b_{q+1}, \quad (3)\ \sum_{q=1}^{\infty} b_q = \infty.$$

Je-li $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$, pak je $B^{(\beta_1)} \supset B^{(\beta_2)}$, $\alpha(B^{(\beta_1)}) \subset \alpha(B^{(\beta_2)})$.

Platí

Věta 3. *Je-li $0 \leq \beta < 1$, je $\alpha(B)^{(0)} = \alpha(B)^{(\beta)}$.*

Množina $\alpha(B^{(1)})$ má míru 1.

Z věty 3 speciálně plyne, že množina $\alpha(B^{(\beta)})$, $0 \leq \beta < 1$, má míru 0.

Nechť funkce $\varphi(q)$, definovaná pro přirozená čísla q, je nezáporná a nechť funkce $q\,\varphi(q)$ neroste. Definujme množinu $Y(\varphi)$: číslo x, $0 \leq x < 1$ patří do množiny $Y(\varphi)$ existuje-li přirozené číslo n takové, že x nepřipouští aproximaci $\varphi(nq)$. Větu 1 lze stručně zapsat:

$$\alpha(B^{(0)}) = Y\left(\frac{1}{q^2}\right).$$

Lze dokázati, že platí

Věta 4. *K dané funkci $\varphi(q)$ existuje množina $B(\varphi(q)) \subset B^{(0)}$ tak, že platí*

$$\alpha(B(\varphi(q))) = Y(\varphi).$$

Podobné problémy lze formulovat pro vícerozměrný případ. V tomto směru jsem pouze dokázal, že platí věta obdobná k větě 1.

Jaroslav Kurzweil, Praha.

NÁVŠTĚVA PROF. KALMÁRA V PRAZE; REFERÁT O JEHO PŘEDNÁŠCE

Dne 25. XI. 1954 navštívil Prahu na návratu z NDR člen-korespondent Maďarské Akademie věd, profesor university v Szegedu, LÁSZLO KALMÁR, jeden z předních současných představitelů a znalců matematické logiky a theorie základů matematiky.

Profesor Kalmár přednesl večer v matematickém ústavu matem.-fys. fakulty KU přednášku na thema *Klasifikace spojitých funkcí na Baireově prostoru* (iracionálních čísel z intervalu (0, 1)).

Dříve, než podáme referát o vlastním obsahu přednášky, bude dobře objasnit, jak souvisí toto ryze matematické thema (vlastně patřící do theorie reálných funkcí) s otázkami matematické logiky.

Jak je dobře známo, Baireův prostor iracionálních čísel z intervalu (0, 1) je topologicky ekvivalentní (homeomorfní) s kartézským součinem spočetně mnoha diskretních prostorů celých kladných čísel. (Homeomorfismus možno nejlépe udat pomocí rozvoje iracionálního čísla v nekonečný řetězový zlomek.) — Je-li $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ libovolný bod Baireova prostoru B (nadále již považovaného za prostor posloupností celých kladných čísel) a je-li f libovolné zobrazení B do B, pak $f(x) = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ je vlastně posloupností $f_j(x) = y_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ zobrazení prostoru B do diskretního prostoru N celých kladných čísel. Na místo tvoření „složek" $f_j(x)$ daného zobrazení f můžeme přibrat index j jako argument na první místo určitého zobrazení Φ prostoru B do N, které pak representuje vzájemně jednoznačným způsobem původní zobrazení f prostoru B do B takto:

$$\begin{aligned} \Phi(1, x_1, x_2, \ldots) &= y_1\,, \\ \Phi(2, x_1, x_2, \ldots) &= y_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(Zřejmě také obráceně každé zobrazení Φ prostoru B do N představuje takto jediné zobrazení f prostoru B do B, jestliže definujeme „složky" $y_1, y_2, \ldots$ hodnot obrazu v zobrazení f jako hodnoty $\Phi(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$ pro $x_1 = 1, 2, \ldots$). Lze tedy redukovat theorii zobrazení prostoru B do B v tomto smyslu na theorii zobrazení prostoru B do N.

Tak na př. je snadno vidět, že zobrazení f prostoru B do B je spojité tehdy a jen tehdy, je-li příslušné („representující") zobrazení Φ prostoru B do N spojité.

Zobrazení Φ prostoru B do N se někdy nazývají „*aritmetickými funkcionálami*", neboť „argument" probíhá „aritmetické funkce" $\varphi(i) = x_i$ (o argumentech a hodnotách celočíselných), hodnotou funkcionály je opět přirozené číslo $\Phi(\varphi)$.

V t. zv. konstruktivní aritmetice, sloužící k aritmetisaci formalisovaných axiomatických systémů v theorii základů matematiky, se však — zhruba řečeno — uvažují jen takové aritmetické funkce φ, u kterých hodnotu možno jistým mechanisovatelným algoritmem ke každé ciferně dané hodnotě argumentu po konečně mnoha krocích ciferně udat. (T. zv. obecně rekurentní funkce.) Z aritmetických funkcionál pak přicházejí v konstruktivní aritmetice matematické logiky v úvahu jen takové „konstruktivní" funkcionály, u nichž lze podobně již po konečně mnoha krocích udat k dané funkci hodnotu funkcionály. Zcela uspokojivou precisaci tohoto pojmu dosud nemáme. Jeden ze způsobů precisace pojmu konstruktivní funkcionály je dán právě takto (Kalmár):

*Nazveme aritmetickou funkcionálu $\Phi(\varphi) = \Phi(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$ **konstruktivní** tehdy, jestliže její hodnota je udána pro každou aritmetickou funkci φ vždy znalostí již jistého konečného počtu hodnot dané funkce φ, t. j. $\Phi(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$ závisí vždy jen na konečném počtu členů posloupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — při čemž tento počet potřebných hodnot (členů) sám závisí obecně na funkci φ (na posloupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$).*

Avšak tento požadavek neznamená — jak snadno nahlédneme — nic jiného, než že zobrazení Φ prostoru B do N je spojité. Neboť právě a jen tenkráte je zaručeno, že $\Phi(x) = \Phi(y)$, jakmile jen se $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ shoduje s $y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ skoro ve všech členech.

Tím je — alespoň zhruba — ozřejměna souvislost thematu přednášky s matematickou logikou. Kalmárova klasifikace spojitých zobrazení prostoru B do N je klasifikací ve vytčeném smyslu konstruktivních aritmetických funkcionál, neboli aritmetických funkcí spočetně nekonečně mnoha přirozených argumentů, které v každém místě závisí jen od konečně mnoha z nich. Takových funkcionál je ovšem mohutnost kontinua — na rozdíl od spočetného počtu obecně rekurentních funkcí, což přináší s sebou řadu velmi obtížných problémů při aplikaci tohoto pojmu v matematické logice, které pochopitelně v krátké přednášce prof. Kalmár nerozváděl. S hlediska theorie reálných funkcí je tu však konkretní matematický resultát: konstruktivní klasifikace spojitých zobrazení Baireova prostoru do sebe sama, která je analogická Baireově klasifikaci *ne*spojitých, postupnými limitními přechody získaných obyčejných funkcí (jedné) reálné proměnné. (Vztah obou klasifikací osvětlíme v závěrečné poznámce.)

A nyní k vlastnímu obsahu přednášky.

Uvažme nejprve jednoduché příklady spojitých zobrazení Φ prostoru B do N.

Jistě nejen funkce $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (s pevným n), ale i zobrazení $\Phi(x) = \Phi(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_{x_1}$ je takovým zobrazením; v druhém příkladě k udání toho, kolik členů dané argumentové posloupnosti je třeba k určení hodnoty zobrazení Φ, stačí znát první člen argumentové posloupnosti. Je-li však obecněji na př. Φ již dané spojité zobrazení B do N, pak i

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{\Phi(x)}$$

je takové zobrazení, neboť abychom mohli udat v pevném místě x jeho hodnotu, stačí nejprve určit hodnotu $\Phi(x)$ na základě znalosti konečného počtu členů dané posloupnosti $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ a tak určit počet členů (téže) argumentové posloupnosti x, které máme sečíst. — Na podobném postupném komplikování takového vytváření spojitých zobrazení B do N, od konstant vycházeje, je založena myšlenka Kalmárovy klasifikace.

K tomu cíli definuje Kalmár termín „r-tá specialisace" $\Phi_r(x)$ spojitého zobrazení Φ prostoru B do N už naznačeným způsobem takto:

$$\Phi_r(x_0, \ldots, x_n, \ldots) = \Phi(r, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \text{ s pevným přirozeným } r\,.$$

Do třídy K_0 klade pak konstanty.

Jsou-li již definovány všechny třídy K_β (kde β je ordinální číslo) s β menším, než pevně dané ordinální číslo α, pak do třídy K_α klade ta zobrazení B do N, jejichž každá specialisace patří do některé z tříd K_β s $\beta < \alpha$.

Ukazuje pak:

1. *Platí*

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_\alpha \subset \ldots$$

pro všechna spočetná ordinální α, *kdežto* $K_\alpha = K_{\alpha+1} = \ldots$ *pro každé* α *nespočetné.*

2. *Sjednocení všech* K_α *obsahuje jen spojitá zobrazení* Φ *prostoru* B *do* N *— a to všechna taková zobrazení.*

Tak do K_1 patří zřejmě zobrazení $\Phi(x_1, x_2, \ldots)$, fakticky závislá jen na x_1, do K_2 zobrazení Φ fakticky závislá jen na x_1 a x_2 atd.; do K_ω patří všechna zobrazení Φ taková, že po fixaci prvního argumentu vznikne již zobrazení závislé jen na pevném počtu n argumentů (členů posloupnosti); (pro každou fixaci obecně je ovšem n jiné) — atp.

Profesor Kalmár se ještě v závěru zmínil o tom, že lze udat jistou normální formu vyjádření spojitých zobrazení Φ prostoru B do N — a uvedl v té souvislosti jistý problém, který si však referent bohužel nepoznamenal a nedovedl by ho již věrně reprodukovat.

Přednáška byla pronesena v německém jazyce, živou a jasnou formou a vzbudila oprávněný zájem i diskusi. Jest jen litovati, že kolidovala s plenárním zasedáním Akademie a že jí v tomtéž týdnu předcházely dvě jiné matematické přednášky na téže půdě, takže návštěva byla slabá.

O diskusi by si referent dovolil následující poznámky: Na dotaz referentův, jak by se uvedená klasifikace spojitých zobrazení prostoru B do N modifikovala, kdyby se zobrazení z tříd s konečnými indexy podrobila restrikci, aby tato zobrazení byla obecně rekurentními funkcemi stále většího a většího počtu argumentů, ukázal prof. Kalmár toto:

Z počátku bychom obdrželi užší (a spočetné) třídy $K'_1, K'_2, \ldots$, ale po ω^2 krocích se situace vyrovná, a je pak již $K'_{\omega^2} = K_{\omega^2}$, $K'_{\omega^2+1} = K_{\omega^2+1}, \ldots$

Možno tedy skutečně spojitá zobrazení Baireova prostoru do přirozených čísel považovat za snad nejbližší, v jistém volném smyslu slova ještě „konstruktivní" rozšíření pojmu obecně rekurentní funkce. (To má — jak se ukázalo — jistý význam v rekurentní (konstruktivní) analysi.)

K otázce, vznesené Dr Špačkem, jak souvisí Kalmárova klasifikace se známým procesem Baireovy klasifikace nespojitých funkcí (která nebyla na místě plně objasněna pro nedostatek času) by si referent dovolil říci: Baireův proces postupného limitního vytváření Baireových funkcí (reálné proměnné) dává, byv aplikován na spojitá zobrazení Φ prostoru B do N (na rozdíl od Kalmárova procesu), třídy stále složitějších nespojitých zobrazení.

Možno však Kalmárův proces aplikovat uvnitř každé Baireovy třídy zobrazení. Zdá se, že tak obdržíme rozložení Baireových tříd na podtřídy, které jsou paralelní Lavrentěvovým t. zv. malým třídám Borelovských množin. Pokud zůstáváme ve třídě spojitých zobrazení, jde v Kalmárově klasifikaci vlastně o vystižení postupného „zhoršování stejnoměrnosti spojitosti." — Tyto otázky by měly být zkoumány.

Lad. Rieger, Praha.

RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

L. Collatz, **Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen.** Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K-G, Leipzig 1949, 466 stran.

Jak říká autor v předmluvě, je cílem knihy uvésti do obsáhlé problematiky vlastních hodnot se zřetelem na aplikace a numerické metody. Můžeme hned říci, že tento cíl se autoru plně zdařil.

Jak matematická literatura o problémech vlastních hodnot, tak i literatura o fysikálně-technických aplikacích matematické theorie, je v dnešní době velmi rozsáhlá, takže úplné její zpracování není ani dost dobře možné. Autor se o to ani nepokouší, nýbrž vybírá si nejdůležitější úseky, totiž problematiku vlastních hodnot u obyčejných diferenciálních rovnic, zatím co o parciálních diferenciálních rovnicích a integrálních rovnicích se zmiňuje více méně pouze v poznámkách. Také výběr aplikací je omezen více méně na jeden obor, totiž na mechaniku. Toto zdůraznění mechanických problémů vedlo autora, kterému zřejmě z aplikovaných problémů mechanika je nejblíže, k tomu, aby přidal obsáhlou kapitolu o problémech vlastních hodnot u matic, které se často v mechanice vyskytují. Poznamenejme ještě, že právě touto kapitolou se tato Collatzova kniha liší od jeho první knihy o problémech vlastních hodnot, která vyšla v r. 1944 u téhož nakladatele pod názvem *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung.*

Podívejme se nyní blíže na obsah Collatzovy knihy. Začíná úvodem s historickou zmínkou o jednom z nejstarších problémů vlastních hodnot řešeném EULEREM a s portréty nejvýznamnějších matematiků, kteří pracovali v tomto oboru. Pak následuje osm kapitol vlastní látky a končí řadou velmi pěkných a praktických tabulek.

1. kapitola obsahuje zajímavé a cenné příklady technických otázek z mechaniky vedoucích na problémy vlastních hodnot. Ze stabilitních problémů je pak uveden především vzpěr u prutů za různých podmínek, dále torse a vybočení I-nosníků a z úloh o kmitání torsní a příčné kmity prutů a torsní kmity kotoučů. Kapitola tak jako všechny následující končí úlohami.

Ve 2. kapitole začíná vlastní matematická theorie a jsou probrány základní matematické prostředky, jichž se v dalším používá. Nejdříve jsou uvedeny základní pojmy.

Autor je však neuvádí jen pro speciální případ rovnice

$$L(y) = \lambda\, g(x)\, y\,,$$

nýbrž čerpaje z prací E. KAMKEHO uveřejněných v letech 1939—1942 zabývá se rovnicemi tvaru

$$M(y) = \lambda\, N(y)$$

(kde M a N jsou lineární diferenciální výrazy). Dále jsou dosti podrobně probrány vlastnosti Greenovy funkce u obyčejných dif. rovnic, vysvětlen pojem Greenovy funkce u parciálních dif. rovnic a konečně je ukázáno, jak souvisí problémy vlastních hodnot s integrálními rovnicemi.

K této kapitole musíme ještě udělat tuto poznámku: Theorii vlastních hodnot u obyčejných dif. rovnic lze rozvinout buďto na základě theorie integrálních rovnic nebo variačního počtu nebo theorie obyčejných dif. rovnic. Kamke ukázal, že posledně jmenovaná cesta je nejlepší. Této cesty používá také autor. Proto v integrálních rovnicích uvádí pouze základní výsledky a o variačním počtu nemluví vůbec. Tato cesta má také tu výhodu, že nepředpokládá žádné zvláštní předběžné znalosti čtenářovy.

Ve 3. kapitole, která má název *Krátký nárys matematické theorie*, jsou probrány minimální vlastnosti vlastních hodnot, Courantův maximo-minimální princip, věta o srovnání, jsou udány odhady zdola i shora pro vlastní hodnoty (Einschliessungssatz) a je dokázána věta o rozvoji funkcí podle vlastních funkcí.

4. kapitola je věnována metodě postupných aproximací a to i grafickému provedení této metody. Jsou uvedeny Schwartzovy konstanty a jejich vlastnosti. Tak jako ve všech kapitolách je připojena řada velmi pěkných numerických příkladů.

5. kapitola pojednává o dalších metodách k výpočtu vlastních hodnot a funkcí, tentokráte o metodách založených na minimálních vlastnostech vlastních hodnot. Je uvedena Ritzova metoda, Galerkinovy a Grammelovy rovnice a rovněž jejich grafické zpracování.

6. kapitola je dosti obsáhlá a týká se problémů vlastních hodnot u matic. Autor předpokládá, že čtenář něco již o maticích ví. Proto o základních pojmech mluví stručně a hned se obrací k vyšetřování extremálních charakteristických čísel, t. j. reciprokých hodnot vlastních hodnot. Je ukázána souvislost s úlohou nalézti hlavní osy křivek a ploch druhého stupně, dokázán Courantův maximo-minimální princip a jiné. Dále je k výpočtu charakteristických čísel použita metoda postupných aproximací, zaveden pojem hlavních vektorů, řešeny přibližně systémy lineárních rovnic a uvedeny odhady velikostí charakteristických čísel. Při tom je tato kapitola doplněna zvláště četnými a pěknými aplikacemi.

V předposlední kapitole se autor zabývá použitím metody diferencí, jak u obyčejných, tak u parciálních dif. rovnic, a uvádí některé zlepšené způsoby této metody. Poslední kapitola obsahuje další metody k výpočtu vlastních hodnot, jako na př. metodu perturbací nebo použití řetězových zlomků k výpočtu vlastních hodnot u Mathieuovy rovnice.

Kniha končí návodem pro volbu metody k přibližnému výpočtu vlastních hodnot, seznamem řešených příkladů a 15 tabulkami ulehčujícími značně práci při praktickém řešení problémů vlastních hodnot.

Závěrem lze říci, že kniha je krásným příkladem spojení theorie a aplikací a že z ní bude mít velký užitek jak každý theoreticky pracující technik, tak každý matematik.

Miloš Zlámal, Brno.

Jos. Schmidtmayer: **Maticový počet a jeho použití v elektrotechnice.** Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1954, 244 stran, 97 obr., 5 příloh. Cena brož. 26,50 Kčs.

Tato kniha je určena převážně pracovníkům vývojových a výzkumných ústavů z oboru elektrotechniky. Je mezi knihami, směřujícími k aplikacím, do jisté míry dílem nového typu. Autor totiž neprobírá zde celou konstrukci theorie matic, nýbrž pouze její výsledky, t. j. uvádí věty až na některé výjimky bez důkazů. Definice a věty jsou však důsledně rozlišovány a uváděny vždy v přesném znění.

Takové pojetí celého spisu jistě nebude na závadu, neboť technikové zpravidla požadují pouze výsledky theorie. Sám autor píše v úvodu: „Taková úprava snad není zcela správná s hlediska čistě matematického; kniha však nebyla psána pro matematika, nýbrž pro pracovníky, jimž má umožnit — ve formě podrobného přehledu — spolehlivé použití elementárních výsledků maticového počtu (maticové algebry).“

Čtenář, který by se zajímal hlouběji o důkazy některých vět, najde je v literatuře, která je bohatě citována u každého odstavce.

Matematický aparát, který je požadován na čtenáři při studiu, je elementární až snad na některé věty o determinantech. Proto je XII. kapitola díla věnována theorii determinantu, zvláště pak methodám jejich numerického vyčíslení. Tím stává se kniha přístupnou nejširšímu okruhu čtenářů a dále též proto, že je psána velmi názorně. Výklad je doplněn četnými obrázky a příklady, vypočtenými v textu.

Celková problematika, kterou se kniha zabývá, je diktována její použitelností v elektrotechnice. Dílo je rozvrženo do dvou částí:

Prvá část se zabývá vlastní theorií matic, druhá je pak věnována theoretickému řešení soustav lineárních elektrických obvodů.

Prvá kapitola obírá se úvodními úvahami o n-dimensionálním vektorovém prostoru, zejména vlastnostmi systémů vektorů.

V kapitole druhé je definována matice, jejich rovnost a některé jejich speciální typy. Dále je tu definována hodnost matice, a vysloveny některé věty pro ni platné.

Ve třetí kapitole definuje autor základní algebraické operace s maticemi. Značná pozornost je věnována rozkladu regulární matice v součin dvou trojúhelníkových matic, a jsou probrány methody Banachiewiczova a Choleskiho.

Inversní matice k matici dané, její existence a vlastnosti jsou sledovány v kapitole IV.

Následující kapitola je pak věnována numerickým metodám výpočtu inversní matice (Gaussově, Banachiewiczově, Choleskiho).

V dalších dvou kapitolách je probrána aplikace theorie matic na transformace lineárních forem a řešení soustav lineárních algebraických rovnic.

V poslední kapitole prvé části, osmé, zabývá se autor rozdělenými maticemi. Zejména je tu poukázáno na dílčí řešení soustavy lineárních nehomogenních rovnic.

Část druhá, tvořená kapitolami IX, X, XI je věnována theorii sítí, jak už bylo shora řečeno. Úvodem jsou osvětleny pojmy proudu, napětí a základních prvků elektrických obvodů. Dále jsou vysloveny základní zákony sítě, t. j. zákony Kirchhoffovy a zákon o elektromagnetické indukci. Poté je přikročeno k probrání topologických vlastností sítě a k tomu cíli jsou zde zavedeny pojmy uzlu, větve a smyčky. Je tu uvedena věta o souvislosti mezi maximálním počtem lineárně nezávislých smyček, počtem uzlů a větví souvislé sítě, a dosti důkladně je pak sledován komplex „úplného stromu" a jeho vztah k soustavě lineárně nezávislých smyček.

V dalším je zavedena representace topologie sítě pomocí matic. Na tomto místě dopouští se autor té nedůslednosti, že neuvádí předpoklady, za kterých možno topologii sítě representovat pomocí $\mathbf{\Pi}$-matice. Jestliže totiž síť obsahuje větve, které začínají a končí v tomtéž uzlu, pak representace v uváděném smyslu není možná. To však není věci příliš na závadu, neboť v praxi se takové sítě málo kdy vyskytují.

Na základě probraných topologických výsledků je pak formulován vlastní problém řešení sítě. Zde nutno autorovi vytknouti to, že řádně nedefinuje, co nutno pod „řešením sítě" respektive jeho existencí rozumět. Zaujmeme-li totiž přísně theoretické stanovisko, pak se může stát, že „řešení" nějaké sítě, t. j. vektor proudů $\mathbf{I}$, který by splňoval Kirchhoffovy zákony, k danému vektoru napětí $\mathbf{U}_\nu$ vůbec neexistuje. Autor pojímá celou věc tak, jako kdyby vždycky takový vektor $\mathbf{I}$ existoval, a nadto jediný, neboť na př. na str. 171 dole píše: „Maticové rovnice (48.5) a (48.6) vyjadřují celkem m nezávislých lineárních rovnic pro m neznámých $\mathbf{I}_\mu$", což obecně není pravda. Na obhajobu autora nutno však uvést to, že prakticky každá „fysikální" síť má „řešení", t. j. že pro každý vektor $\mathbf{U}_\nu$ existuje jediný vektor $\mathbf{I}$, splňující Kirchhoffovy zákony.

Dále jsou probírány methody postupu při řešení sítě, a to metoda smyčkových proudů a metoda uzlových napětí. Současně je proveden rozbor, kdy která z těchto method je méně pracná.

Bylo by vhodné, kdyby tato kapitola obsahovala stať, věnovanou některým determinantům, které se v theorii sítí vyskytují. Lze totiž odvodit řadu pravidel, která se opírají o topologii sítě a která dovolují tyto determinanty okamžitě vyčíslit, jestliže matice **Z** je diagonální. Praktický význam toho je nasnadě.

Kapitola X je věnována příkladům řešení elektrických obvodů. Zároveň je tu poukázáno na zajímavou souvislost mezi řešením jistých sítí a problémem dělení obdélníku resp. čtverce na konečný počet menších, různě velkých čtverců.

Závěrečná kapitola XI se zabývá lineárními čtyřpóly. Je tu osvětlen pojem čtyřpólu, jeho impedanční, admitanční a kaskádní matice. Současně jsou odvozeny vztahy mezi maticemi složeného čtyřpólu, vzniklého seriovým, paralelním nebo kaskádním řazením, a maticemi jednotlivých čtyřpólů. Pro snadné použití jsou vztahy mezi různými maticemi téhož čtyřpólu (admitanční, impedanční, kaskádní) srovnány do tabulky. Rovněž tak jsou v tabulkách uvedeny matice různých základních čtyřpólů.

Závěrem možno říci, že tato kniha bude jistě vítanou a užitečnou příručkou pro techniky. Matematikovi může pak sloužit jako úvod do teorie lineárních elektrických obvodů, pokud by se o věc zajímal. *Václav Doležal*, Praha.

Rudolf Bayer: **Matematický dodatek ke knize** *Fradin*, **Anteny pro centimetrové a decimetroré vlny.** Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1954, 44 stran, 9 obrázků. Cena 4,41 Kčs.

Tento spis klade si za úkol usnadnit technickým pracovníkům studium Fradinovy knihy, neboť v naší literatuře není díla, které by souborně pojednávalo o těch partiích matematické analysy, které jsou v theorii anten potřebné.

Jednotlivé partie analysy, které autor v díle uvádí, jsou vybudovány dosti formálním způsobem. Je to zřejmě způsobeno těmito okolnostmi:

1. rozsah dodatku je omezen,

2. světová literatura, zabývající se theorií anten, je psána většinou tímto „fysikálním" způsobem,

3. přesná výstavba matematického aparátu byla by pro svou rozsáhlost asi pro technika neúnosná.

Neběží tedy o dílo matematické a nemělo by smysl vypočítávat všechny nepřesnosti které se ve spisu vyskytují. Pro ilustraci budiž zde uveden pouze jeden příklad. Na str. 6. zavádí autor pojem řádu takto:

„Máme-li dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ definovány pro $x > a$, a předpokládáme-li, že $g(x) > 0$, $f(x)$ může býti i komplexní, pak říkáme, že $f(x) = O[g(x)]$ když,

$$O \leqq \lim\sup \frac{|f(x)| \doteq k}{g(x)} < +\infty\,, \quad k = \text{konst.}$$

(Zde jde zřejmě o tiskovou chybu.) Po této definici jsou uvedena „pravidla pro symbol O" jako:

$$c_1\,O[g(x)] + c_2\,O[g(x)] = O[g(x)]\,.$$

Partie matematické analysy, které jsou ve spisu probírány, jsou asi tyto: Greenova věta, použití komplexních vektorů v theorii elektromagnetického pole, vektorové operace v křivočaré pravoúhlé soustavě souřadnic, řešení vlnové rovnice v kartézských a cylindrických souřadnicích a konečně některé vlastnosti Besselových funkcí a Legendreových polynomů.

Závěrem možno říci, přestože spis má pouze informativní charakter, že může technickému čtenáři pro předběžné studium posloužit. *Václav Doležal*, Praha.

Stroje na zpracování informací. Sborník II, Nakladatelství ČSAV, 1954, str. 320, obr. 167, 36 Kčs.

Za vědecké redakce nedávno zemřelého prof. dr Václava Hrušky vydala Laboratoř matematických strojů při ČSAV druhý Sborník, obsahující práce členů kolektivu LMS a jednu práci externí. Do Sborníku byl dodatečně vložen list s fotografií prof. Hrušky s posmrtnou vzpomínkou na tohoto československého průkopníka moderních početních metod.

Většina uveřejněných prací byla přednesena na II. celostátní pracovní konferenci v Domě vědeckých pracovníků J. E. Purkyně v prosinci 1953 a na pravidelných pátečních rozhovorech konaných Laboratoří.

Práce se dají rozdělit do tří skupin:

Do první skupiny patří práce, týkající se především čs. samočinného počitače „SAPO", po případě popisující hotové projekty matematických strojů. Jsou zde podrobně vysvětleny termíny a pojmy, s nimiž se musí seznámit každý, kdo chce alespoň trochu porozumět „nové matematické řeči". Jde na př. o termíny: slovo, instrukce, paměť, řadič, děrný štítek, operační jednotka atd. Autory prací této první skupiny jsou: Černý, Marek, Oblonský a Pokorný.

Stručný popis stroje SAPO je obsažen v úvodě na str. 13, z něhož vyjímáme: SAPO je reléový počitač s magnetickou bubnovou pamětí o kapacitě 1024 slov, která jsou složena ze 32 dvojkových číslic (0 nebo 1). (SAPO pracuje ve dvojkové soustavě číselné.) Stroj SAPO bude obsahovat asi 7000 relé a 400 elektronek. Ačkoliv autor základního návrhu Doc. dr A. Svoboda dobře ví, že zahraniční projektanti podobných matematických strojů dávají přednost elektronkovým, které jsou rychlejší, před reléovými, rozhodl se přece pro princip reléový z těchto důvodů: Valná většina řešení problémů, které laboratoř matematických strojů bude zpracovávat, je proveditelná počitačem SAPO v několika hodinách, nanejvýše dnech. Kdyby byl k disposici v provozu nákladnější a choulostivější počitač elektronkový, bylo by řešení proveditelné během minut, po případě hodin. Přesto výkon laboratoře jako celku by se tím podstatně nezvýšil. Tento výkon je totiž dán počtem problémů, které kolektiv pracovníků laboratoře vyřeší za rok a to záleží na počtu problémů, které kolektiv dovede připravit za tuto dobu pro strojové zpracování. Laboratoř počítá zatím s počtem odborníků, který dovolí připravit pro samočinný počitač 2 až 4 problémy měsíčně (což je ve světovém měřítku veliký výkon, umožněný vhodnou volbou kodovacího systému samočinného počitače SAPO). Bude trvat několik let než této kapacity laboratoře naše věda a průmysl využije a bude dávat laboratoři 52 úkolů ročně. Předpokládáme-li, že zadaný úkol se dá rozřešit počitačem SAPO za den a elektronkovým počitačem za hodinu, docházíme k závěru, že v prvním případě odevzdá se vyřešený problém asi za týden a den, v druhém případě za týden. To je jeden z důvodů, proč je u počitače SAPO kladen důraz spíše na spolehlivost, snadnou údržbu, laciný provoz, než na operační rychlost, která s sebou přináší mnoho stinných stránek.

Stroj SAPO je mimo jiné opatřen trojnásobnou operační jednotkou, t. j. každá prováděná operace se provádí třikrát současně a nezávisle na druhých. „Hlasovací zařízení", t. zv. prověřovač, vybere z nich správný výsledek i když v některé operační jednotce je porucha. Předpokládá se, že nenastane případ, aby dvě operační jednotky měly v jednom okamžiku poruchu stejného druhu (případ s pravděpodobností prakticky zanedbatelnou).

I když další práce ve Sborníku nejsou tak rozsáhlé jako tato první, řadí se k ní svou originálností a zajímavostí. Jsou to tři práce: V. Černý, Kody logických operací počitače SAPO; Z. Pokorný, Sestavování instrukčních sítí z připravených celků a Instrukční sítě na transformaci čísel v počitači SAPO. Černého práce popisuje způsob, jak doplnit operační jednotku a kody počitače SAPO, aby bylo možno tímto strojem řešit také úlohy z logického počtu. První jmenovaná práce Pokorného ukazuje postup, jak včleňovat do širších instrukčních sítí „podsítě", které představují některou častěji přicházející úlohu na př. výpočet hodnot $y = \cos x$ a pod. Druhá práce Pokorného popisuje dvě instrukční sítě: první převádí čísla z desítkové soustavy do dvojkové, druhá obráceně.

Druhá skupina prací se zabývá metodami řešení problémů na samočinných počitačích (jde speciálně o SAPO a kalkulační děrovač). Tyto metody se zásadně liší od běžných numerických metod početních proto, že používají aritmetické i nearitmetické operace, jsou přizpůsobeny speciálním vlastnostem použitého stroje a nemusí se omezovat na malý počet operací.

Do této skupiny patří následující práce: O. Pokorná, Řešení soustav lineárních algebraických rovnic minimisací součtu čtverců residuí; v ní je popsána nová iterační metoda řešení lineárních algebraických rovnic, která zjednodušuje dříve navrženou metodu A. Svobody tím, že snižuje počet potřebných operací. Metoda souvisí s iterační metodou Gauss-Seidelovou a s relaxační metodou Southwellovou.

J. M. Marek, Interpolace na základě hodnot funkce uvnitř interpolačního intervalu. Ačkoliv práce je zaměřena na zjednodušení interpolace na kalkulačním děrovači, má širší národohospodářský význam — jak zdůraznil prof. Hruška — při vydávání tabulek, jejichž rozsah se touto interpolační metodou značně zredukuje proti dosavadnímu rozsahu a to přibližně při stejné přesnosti.

J. Reichl, Řešení prvé okrajové úlohy Laplaceovy rovnice na strojích na děrné štítky. Metoda převádí řešení diferenciální rovnice na diferenční pomocí sítí a upravuje toto řešení pro výpočet na kalkulačním děrovači Aritma. Dá se užít pro obory omezené libovolnou uzavřenou křivkou.

Do třetí skupiny patří práce theoretická (synthesa reléových obvodů, synthesa kloubových mechanismů, synthesa pasivních $2n$-pólů) a fysikálně technické (elektronkové počítací obvody, elektromagnetické relé).

V práci A. Svobody, Synthesa reléových sítí, je popsána metoda návrhu kontaktové sítě, u které jsou předepsány průchodnosti mezi všemi dvojicemi daných uzlů Booleovými funkcemi. Je užito nové symboliky a operací s konečnými množinami.

Práce F. Svobody, Užití dvouhodnotové Booleovy funkce na synthesu jednotaktních hradlových obvodů, popisuje metodu synthesy reléového obvodu, podle které by bylo možno navrhnout matematický stroj na řešení synthesy hradlových obvodů.

V práci A. Svoboda-V. Vyšín, Třífázové hysteresní obvody v elektronkových počitačích, je popsána nová technika návrhu elektronkových počitačů, slibující proti technikám známým větší jednoduchost a nižší poruchovost.

Práce J. Oblonského, Elektromagnetické relé s potlačenou induktivní vazbou mezi vinutími, pojednává o škodlivých zjevech v reléových počitačích, způsobených induktivní vazbou mezi vinutím pracovním a přídržným téhož relé a navrhuje způsob, jak tyto zjevy odstranit.

K. Ontlová a M. Valach popisují ve své společné práci nový druh statistického analysátoru, dovolujícího sledovat proměnu histogramu četnosti, sestrojeného pro n prvků základního statistického souboru.

Práce M. Valacha, Synthesa desetikloubového mechanismu jako generátoru funkce tří nezávisle proměnných, představuje první pokus o synthesu kloubového mechanismu a třech stupních volnosti tak, aby sledoval předem danou funkci tří nezávisle proměnných.

Poslední práce Z. Nenadála, Mnohopóly pro sčítání elektrických napětí složené z ohmických odporů, je cennou příručkou pro každého, kdo se zabývá analogovými stroji, sestavenými z ohmických odporů.

Ke konci bych chtěl říci, že práce celého kolektivu, vedená Doc. dr A. Svobodou, laureátem státní ceny pro rok 1954, dochází plného pochopení naší vrcholné instituce ČSAV.

Bohužel je smutné, že na př. výstavba SAPO nebyla pojata do plánovaných státních úkolů. Zdá se mi, že tato skutečnost může být příčinou, že ČSR bude v dohledné době předstiženo jinými státy, které mezi svými odborníky nemají žádného A. Svobodu ani nadšený a iniciativní kolektiv, jaký máme my v Laboratoři matematických strojů.

Mil. Hampl, Praha.

Emil Kraemer: **Analytická geometrie lineárních útvarů.** Praha 1954. Nakladatelství Československé akademie věd. Cena brožovaného výtisku 24 Kčs. Stran 240, obrázků 40, náklad 3300.

Autor rozvrhl svou Analytickou geometrii lineárních útvarů do čtyř kapitol. Jak již v předmluvě uvádí, chce seznámit čtenáře s principy analytické geometrie, jakožto metody studia geometrických útvarů a chce ho naučit této metody také obratně používat. Kniha je určena pro čtenáře — začátečníky, a jestliže v ní autor používá vektorové algebry (a to způsobem, který vypracoval a zavedl akademik Eduard Čech v dvojdílných Základech analytické geometrie) a kromě toho i metod klasické analytické geometrie, není možno s ním souhlasit v tom smyslu, že „poslání této knížky je docela skromné". Naopak je třeba hned zpočátku zdůraznit, že právě pro začátečníky je tato kniha nesporným přínosem. Také to, že autor vědomě staví svůj výklad na základních poznatcích elementární geometrie a že se vědomě opírá o geometrický názor, je — vzhledem k určenosti této knihy — dalším a významným kladem. Tento způsob výkladu je také jednou z cest, jak vzbudit hlubší zájem o studium tohoto odvětví matematiky i u širšího okruhu čtenářů, kteří pak již snadněji mohou vniknout do poměrně náročných učebnic analytické geometrie moderní (zvláště již citované knihy akademika Čecha) i klasické, z nichž zvláště cituji Úvod do analytické geometrie od akademika Bohumila Bydžovského.

V kapitole první, nadepsané „Úvod do lineární algebry" obsahuje Kraemerova kniha stručný — ale pro poslání knihy zcela postačující — výklad theorie determinantů a matic. Po metodické stránce, vzhledem k psychologii čtenáře-začátečníka, je zcela pochopitelné, proč autor provádí výklad nejprve na determinantech a čtvercových maticích druhého stupně a teprve v odstavci třetím (na straně 25) na determinantech a čtvercových maticích stupně třetího. Čtenář, kterému tato látka není ještě známa, tím snadněji vnikne do celé problematiky.

Vhodnější by však bylo, kdyby autor toto své stanovisko ještě zdůraznil formulací vět. Tak na příklad již ve větě první (na straně 10) čteme: „Překlopíme-li čtvercovou matici kolem její hlavní diagonály (t. j. vyměníme-li řádky za sloupce, neměníce jejich pořadí), dostaneme matici, která má týž determinant jako matice původní."

Nedá se jistě pochybovat o obecné platnosti této věty pro čtvercové matice n-tého stupně, ale chybné je, když se tato věta vysloví obecně a důkaz je pak prováděn na čtvercové matici druhého stupně. Zajisté by bylo správnější kdyby autor buď poznamenal (asi tou formou, jak velmi vhodně učinil v úvodu třetího odstavce na straně 25), že tato věta platí obecně, nebo kdyby větu první vyslovil takto: „Překlopíme-li čtvercovou matici druhého stupně kolem její diagonály... atd." Podobná poznámka se týká ovšem i vět 3, 4, 5 a 8. Vzhledem k tomu, že ve větách 6 a 7 je tento nedostatek odstraněn, a v nich se výslovně mluví o čtvercové matici (resp. determinantu) druhého stupně, jedná se zde patrně o přehlédnutí se strany autora nebo redakce. Je třeba mít totiž stále na zřeteli, že kniha je určena hlavně začátečníkům a že je má zároveň učit i matematické přesnosti. Rovněž tak v úvodu této kapitoly na straně 7 je dosti nepochopitelný předpoklad, proč se nesmějí čísla a_i, b_i rovnat nule, ač je zbytečnost tohoto předpokladu po několika řádcích konstatována.

V poznámce 3 na straně 12 by snad bylo vhodnější říci: ...avšak, je-li aspoň jedno z čísel $a_i \neq 0$, není první řádek nikdy násobkem druhého; ale to není již tak podstatné, neboť i v původním znění je poznámka správná. Definice 14 na straně 28 je zbytečně dlouhá a pro začátečníka nepřehledná. Uvážíme-li, že se zde ve skutečnosti definují tři pojmy, totiž subdeterminant, doplněk a parita, měla by se definice 14 rozložit aspoň v definice dvě a připojit poznámku: $M_{hk} = (-1)^{h+k} . A_{hk}$ (jak se obyčejně definuje doplněk A_{hk} na základě subdeterminantu M_{hk}).

Tyto poznámky nechť však nebudí dojem, že by první kapitola této knihy byla špatná. Naopak třeba zdůraznit, že zde autor velmi vhodně a s nesporným pedagogickým talentem dosahuje vytčeného cíle. Již zde (jako ostatně v celé knize) je do výkladu vsunuta řada příkladů (v celé knize celkem 50) vhodných k okamžitému procvičení aktuální látky, právě tak jako na konci kapitoly jsou obdobné příklady na procvičení látky z celé statě. Již jejich počet (celkem 200) svědčí o svědomitosti autora, s jakou chce čtenáři látku dokonale objasnit.

V kapitole druhé, pojednávající o geometrii lineárních útvarů, osvětluje autor řadou definic pojem vektoru. Poněkud násilně však působí poznámka následující bezprostředně za větou 32 (na straně 51 a 52), kterou je zavedena rovnice

$$B = A + u\,. \tag{29}$$

Po věcné stránce je rovnice (29) ovšem opět naprosto správná (jak ji ostatně v jiné formě dokázal akademik Čech v již citované knize, rovnice (5.4), strana 20, I. díl), nedomnívám se však, že zavedena tak, jak je v Kraemerově Analytické geometrii, by mohla být čtenářem-začátečníkem správně pochopena. Autorova poznámka: „Uvidíme později, že rovnice (29) je velmi vhodně zvolena“ celý problém ještě komplikuje. Snad by bylo správnější rovnici (29) — a případně i pravidla pro zacházení s ní — výslovně definovat. To je však jediný (a ne příliš podstatný) nedostatek této kapitoly, ostatně jinak bezvadné. V dalších odstavcích pak autor znovu potvrzuje své značné pedagogické nadání s jakou názorností, výstižností a při tom stručností postupuje ve výkladu.

V kapitole třetí již přechází k metrickým vlastnostem lineárních útvarů, což také výstižně uvádí na začátku této kapitoly. Třeba zde zvláště zdůraznit, s jakou pečlivostí ukazuje již předem čtenáři cíl, kterého chce dosáhnout, a to nejen v každé z kapitol, ale i ve většině vět a dokonce i v mnoha příkladech. Usnadňuje tím nejen čtenáři studium, ale zároveň ho i nenásilně seznamuje s logickou výstavbou celého matematického myšlení, třeba to bylo jen v omezené disciplině.

Poslední kapitola čtvrtá, pojednávající o transformacích rovnoběžkových souřadnic a jejich speciálních případech — transformacích orthogonálních, velmi účelně doplňuje výklad předcházejících kapitol. Čtenář se zde zároveň seznámí s pojmem invarinatu, jehož význam mohl snad být ještě více zdůrazněn. Konečně je třeba upozornit na velmi dobře volená cvičení k opakování, kterými si čtenář může sám ověřit, do jaké míry studium zvládl.

Hodnotíme-li závěrem Kraemerovu knihu, můžeme s plným uspokojením konstatovat, že autor nejen dosáhl vytčeného cíle, ale celkový význam jeho Analytické geometrie se ještě zvětšuje tím, že tato kniha byla již dávno v naší matematické literatuře postrádána, a to právě v takové formě, v jaké je napsána, nehledě ani k tomu, že analytická geometrie není v osnovách jedenáctiletých vzdělávacích škol, takže studenti a absolventi těchto ústavů v ní najdou skutečně nepostradatelnou pomůcku pro další studium.

Václav Metelka, Liberec.

Dodatkem k předchozí recensi poznamenává s. MILAN LUSTIG, posluchač matematiky přírodovědecké fakulty MU v Brně.

Věta 70 na str. 115 Kraemerovy knihy není správná, jak ihned vyplývá z tohoto příkladu:

Mějme dvě různoběžné roviny ϱ, σ, kde rovina ϱ je dána bodem A a dvěma nekolineárními vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$ a rovina σ je dána bodem B a dvěma nekolineárními vektory $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ tak, že vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ jsou rovnoběžné s průsečnicí rovin ϱ, σ.

Pak vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ jsou navzájem rovnoběžné, tudíž jsou kolineární. Poněvadž každé tři vektory, z nichž dva jsou kolineární, jsou komplanární, pak tedy vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1$ a vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ jsou komplanární, tudíž jsou lineárně závislé, a potom by podle výše citované věty byly roviny ϱ, σ rovnoběžné, což je ve sporu s předpokladem, že roviny ϱ, σ jsou různoběžné.

Aby věta byla správná je třeba ji doplniti na př. předpokladem, že žádné dva z vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ nejsou lineárně závislé.

Poněvadž tento předpoklad ubírá větě na obecnosti, bylo by vhodnější větu vysloviti takto:

Budiž dána rovina ϱ bodem a dvěma lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$ a budiž dána rovina σ také bodem a lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$. Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby tyto dvě roviny byly rovnoběžné je

1. v obecném případě, aby tři,

2. v případě, že žádné dva z vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ nejsou kolineární, aby dvě ze všech možných trojic utvořených z $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ byly lineárně závislé.

Důkaz věty provedeme tak, že první část důkazu ponecháme shodnou s první částí důkazu Kraemerova na str. 115 knihy a druhou část rozdělíme na dva případy:

1. Označme trojice vektorů, které lze utvořit z $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ takto:

$$(1) \equiv (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2),\ (2) \equiv (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2),\ (3) \equiv (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2),\ (4) \equiv (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)\,.$$

Mohou nastat právě tyto čtyři různé případy:

a) (1), (2), (3) jsou tři trojice komplanárních vektorů,
b) (1), (2), (4) jsou tři trojice komplanárních vektorů,
c) (1), (3), (4) jsou tři trojice komplanárních vektorů,
d) (2), (3), (4) jsou tři trojice komplanárních vektorů.

Platí-li a) nebo b) jsou vektory (1) komplanární, t. j. $\mathbf{u}_2 \parallel \varrho$; dále (2) jsou komplanární, t. j. $\mathbf{v}_2 \parallel \varrho$. Tedy $\sigma \parallel \varrho$.

Platí-li c) nebo d) jsou vektory (3) komplanární, t. j. $\mathbf{u}_1 \parallel \sigma$, a také vektory (4) jsou komplanární, t. j. $\mathbf{v}_1 \parallel \sigma$. Tedy $\varrho \parallel \sigma$.

2. Dokažme si nejdříve pomocnou větu:

Buďte $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ takové vektory, že žádné dva z nich nejsou kolineární a dvě trojice utvořené z nich jsou komplanární. Tvrdíme, že každé tři vektory vybrané z vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ jsou komplanární.

Důkaz: Buďte na př. $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$; $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ dvě trojice komplanárních vektorů (můžeme zvoliti kterékoliv trojice, důkaz probíhá stejně). Libovolný bod M a vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$ určují rovinu τ, pak je $\mathbf{u}_1 \parallel \tau$, $\mathbf{v}_2 \parallel \tau$, a tedy všechny čtyři vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ jsou rovnoběžné s τ, a tedy každé tři z nich vybrané jsou komplanární. Další část důkazu je již zřejmá.

Milan Lustig, Brno.

ZPRÁVY

VĚDECKÉ PRÁCE M. KÖSSLERA

VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

V předešlém čísle tohoto časopisu vystihl akademik EDUARD ČECH vřelými slovy krásnou osobnost našeho milého jubilanta, prof. MILOŠE KÖSSLERA, který se tohoto roku dožil sedmdesátky. Tento článek je pak věnován Kösslerově vědecké činnosti. Jeho významná badatelská práce je až na malé výjimky věnována dvěma oborům matematiky: teorii analytických funkcí a teorii čísel — a ovšem též styčným oborům těchto dvou oblastí. V tomto informativním článku se nikterak nepokouším o úplnost a podávám přehled jen o některých pracích Kösslerových; snažil jsem se vybrat ty, které co nejlépe ukazují vědecký profil autorův a z nich opět ty, o nichž si čtenář na základě několikařádkového výkladu může utvořiti poměrně jasný obraz. Přirozeně je takový výběr subjektivn a omlouvám se prof. Kösslerovi i čtenáři, jestliže jsem jej někde provedl nevhodně; bylo by však v každém případě předčasné, hodnotit úplně a definitivně práci vědce, který je stále intensivně vědecky činný.

V důležitém oboru *analytických funkcí*, který hraje tak velkou roli ve vnitřní výstavbě matematiky i v jejích aplikacích, je Kössler dosud jediným naším zralým specialistou. Již v počátcích jeho vědecké činnosti se setkáváme s dvěma obšírnými pracemi [5] (z r. 1915—16), věnovanými theorii analytických funkcí. Obsah těchto prací vylíčím jen zlomkovitě — podrobný referát by vyplnil celý článek. Nechť vztah

$$z = g(t) \tag{1}$$

zobrazuje konformně a vzájemně jednoznačně jisté mezikruží $r \leq |t| \leq R$ ($r < 1 < R$); označme C obraz kružnice $|t| = 1$, t. j. množinu všech bodů $g(e^{i\varphi})$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. Potom lze nalézti posloupnost funkcí $b_1(z), b_2(z), \ldots$, regulárních uvnitř C a na C,[1]) s těmito vlastnostmi: Je-li F libovolná funkce regulární uvnitř křivky C a na ní, existuje posloupnost čísel A_k tak, že je

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\, b_k(z) \tag{2}$$

v každém bodě z uvnitř C, při čemž konvergence je absolutní a stejnoměrná na každé kompaktní množině, ležící uvnitř C. Funkce $b_k(z)$ a čísla A_k jsou defi-

[1]) Říkám, že analytická funkce f je regulární v nějaké množině, jestliže ji lze v okolí každého bodu této množiny rozvinouti v Taylorovu řadu; terminologie v literatuře poněkud kolísá. V dalším jde výhradně o jednoznačné větve analytických funkcí.

nována jistými křivkovými integrály (připomínajícími vzorce pro koeficienty Laurentova rozvoje). Závažnou je otázka, zda rozvoj (2) je jediný tohoto tvaru — jinak řečeno, zda existuje řada tvaru $\Sigma B_k\, b_k(z)$, mající aspoň jeden koeficient B_k různý od nuly, jejíž součet by byl roven nule všude uvnitř C. Kössler řeší tuto otázku v některých důležitých případech; odpověď je někdy kladná, někdy záporná. Na druhé straně se ukazuje, že funkce $b_k(z)$ lze i při daném C voliti mnoha způsoby. Jako zvláštní případ jsou v Kösslerových rozvojích obsaženy na př. Faberovy polynomické rozvoje. Podobné výsledky platí také pro rozvoje funkcí, platné vně křivky C.

Další práce Kösslerovy z teorie analytických funkcí se týkají převážně teorie mocninných řad (výjimku tvoří hlavně práce o funkci ζ, o nichž se zmíním v odstavci, věnovaném teorii čísel). Poloměr konvergence mocninné řady

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{3}$$

je, jak známo, roven převrácené hodnotě čísla $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Poznamenejme, že Kössler ve své práci [29] (1949) upozornil na to, že v mnohých otázkách teorie funkcí je výhodno užíti prostě čísla $\sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Tímto způsobem se v řadě otázek dostanou přesné odhady, na př. pro poloměr konvergence řady pro funkci inversní k f, pro nejmenší vzdálenost nulového bodu funkce f od počátku atd. Vraťme se však k starším pracím Kösslerovým.

Společnou thematiku mají práce [13], [14], [15], [16], [17] (1923—24), pojednávající o singularitách mocninné řady na konvergenční kružnici. Nechť řada (3) má poloměr konvergence rovný jedné. Potom na kružnici $|z| = 1$ leží aspoň jeden singulární bod funkce f. Jak nyní rozhodnout, zda daný bod kružnice, na př. bod $z = 1$, je singulárním bodem? Kössler dosazuje do (3)

$$z = x + \tfrac{3}{4}x^2\,, \tag{4}$$

čímž dostane novou řadu

$$F(x) = f(x + \tfrac{3}{4}x^2) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots \tag{5}$$

Kruh $|x| \leqq \frac{2}{3}$ se zobrazuje transformací (4) na obor, který s výjimkou bodu $z = 1$ (odpovídajícího hodnotě $x = \frac{2}{3}$) leží celý uvnitř kružnice $|z| = 1$. Řada (5) má tedy poloměr konvergence $\geqq \frac{2}{3}$, při čemž znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, nelze-li f analyticky pokračovati přes bod $z = 1$. Tedy: bod $z = 1$ je singulárním bodem funkce $f(z)$ tehdy a jen tehdy, jestliže

$$\limsup_{n\to\infty} |A_n|^{\frac{1}{n}} = \tfrac{3}{2}\,.$$

Tuto podmínku lze napsati pomocí koeficientů a_k.[2]) Výraz, který takto vyjde,

[2]) Substitucí $z = te^{i\varphi}$ lze ovšem ihned napsati podmínku pro singulárnost bodu $e^{i\varphi}$ (φ reálné).

vypadá na pohled značně složitě; ale vhodnou úpravou dostává z něho Kössler postačující podmínku pro singulárnost bodu $z = 1$, ze které s překvapující snadností plynou podstatná zobecnění vět předtím známých. Uveďme jen jeden příklad. Známá věta Vivanti-Dienesova praví: Jestliže existuje reálné ψ a $\delta > 0$ tak, že všechny vektory $a_n = |a_n| e^{i\varphi_n}$ leží v úhlu $-\frac{1}{2}\pi + \delta < \varphi_n - \psi < \frac{1}{2}\pi - \delta$, je $z = 1$ singulárním bodem. Z Kösslerových úvah plyne toto zobecnění: Bod $z = 1$ je singulárním bodem funkce f, jestliže existuje $\mu > 0$, $\delta > 0$, posloupnost reálných čísel $\psi_1, \psi_2, \ldots$ a posloupnost indexů $n_1 < n_2 < \ldots$, mající tyto vlastnosti

I. $\lim\limits_{q \to \infty} |a_{n_q}|^{\frac{1}{n_q}} = 1$,

II. $|\psi_q - \varphi_n| < \frac{1}{2}\pi - \delta$ pro $|n - n_q| \leqq \mu n_q$.

Je vidět charakter zobecnění: Podmínka II nemusí být splněna pro všechny indexy n, nýbrž jen pro n z jistých skupin indexů $n_q - \mu n_q \leqq n \leqq n_q + \mu n_q$, při čemž čísla n_q mohou ležeti libovolně „řídko" (jen když splňují podmínku I); mimoto poloha úhlu, v němž leží koeficienty a_n z q-té skupiny, se může měnit od skupiny ke skupině (ψ_q závisí na q). Podmínka II je ostatně u Kösslera nahrazena podmínkou ještě mnohem obecnější

IIa. $|\psi_q - \varphi_n| \leqq \frac{1}{2}\pi$ pro $|n - n_q| \leqq \mu n_q$, $\lim\limits_{q \to \infty} (\cos(\psi_q - \varphi_{n_q}))^{\frac{1}{n_q}} = 1$.

Podobně lze obdržeti další kriterium Szászovo, dále větu Fatou-Pólyovu (změnou znamení u některých a_n lze dosáhnouti toho, že všechny body kružnice $|z| = 1$ jsou singulární) a věty Hadamardovu a Fabryovu o „mezerovitých řadách" (je-li v (3) „příliš mnoho" koeficientů rovných nule, je každý bod kružnice $|z| = 1$ singulárním) — vše ovšem stále za předpokladu, že řada (3) má poloměr konvergence rovný jedné.

V dalších pracích se Kössler zabýval t. zv. „ohraničenými řadami". I. Schur nalezl nutné a postačující podmínky, které musí splňovati koeficienty $a_0, a_1, \ldots$, aby pro funkci (3) platilo toto:

$$f(z) \text{ je regulární a } |f(z)| \leqq 1 \text{ pro } |z| < 1 . \tag{7}$$

Z těchto podmínek plyne na př., že žádný nulový bod funkce f nemůže ležeti v kruhu $|z| < |a_0|$ (je-li $a_0 \neq 0$). Kössler v práci [20] (1930) řeší tuto obecnou otázku: Kde mohou ležeti nulové body funkcí (3), splňujících podmínku (7), u kterých prvních n koeficientů

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \tag{8}$$

je předepsáno? Kössler nachází pro každé n oblast K_n, závislou pouze na číslech (8) a ohraničenou algebraickou křivkou, která má tuto vlastnost: Funkce (3) s vlastnostmi (7) a s danými koeficienty (8) nemá nulových bodů v K_n, může však — při vhodně zvolených dalších koeficientech $a_n, a_{n+1}, \ldots$ — míti nulový bod v kterémkoliv předem daném bodě hranice oblasti K_n.

V práci [24] (1935) vyšetřuje Kössler funkci

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (\text{tedy } f(0) = 0)$$

a ptá se, kdy tato funkce je pro $|z| < 1$ regulární a splňuje tam všude nerovnosti

$$-b \leqq \mathfrak{I} f(z) \leqq \pi - b\,;^{3)}$$

přitom b je dané číslo, $0 < b < \pi$. Odpověď zní: tehdy a jen tehdy, jestliže existuje reálná funkce g tak, že

$$0 \leqq g(\varphi) \leqq \pi \text{ pro } 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 2\pi b\,,$$

$$f(z) = \frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)}{e^{i\varphi} - z}\, d\varphi \text{ pro } |z| < 1\,; \tag{9}$$

místo (9) lze též psáti

$$a_n = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi)\, e^{-ni\varphi}\, d\varphi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Tím jsou určeny podmínky pro a_n; Kössler přetvořuje tyto podmínky též na aritmetický tvar.

Předešlé dvě práce se týkaly funkcí $f(z)$, které jsou jistým způsobem ohraničeny v kruhu $|z| < 1$. Práce [21], [22] (1931—32) a [23] (1934) se týkají t. zv. funkcí prostých (однолистные ф., schlichte F.). Budeme říkat, že funkce $f(z)$ je prostá v otevřeném kruhu $|z| < r$, je-li tam regulární a jestliže pro $|z_1| < r$, $|z_2| < r$, $z_1 \neq z_2$ je vždy $f(z_1) \neq f(z_2)$. Budiž nyní f prostá v kruhu $|z| < 1$; potom funkce f zobrazuje tento kruh na jistou oblast jednoduše souvislou. Přitom je stále $f'(z) \neq 0$ pro $|z| < 1$; bez újmy obecnosti můžeme předpokládati $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, takže

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \text{ pro } |z| < 1\,. \tag{10}$$

Vezměme libovolný bod z ($|z| < 1$), přejděme do „blízkého" bodu $z + \Delta z$ a vyšetřujme, jaký je vztah mezi Δz a $\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z)$. Pro malá Δz bude přibližně $\Delta f(z) = f'(z) \,.\, \Delta z$ a tedy (srovnáním jednak absolutních hodnot, jednak amplitud)

$$|\Delta f(z)| = |f'(z)| \,.\, |\Delta z|, \text{ ampl } \Delta f(z) = \text{ampl } f'(z) + \text{ampl } \Delta z\,.$$

Tedy $|f'(z)|$ měří „poměr zvětšení," ampl $f'(z)$ měří „otočení," které musíme provésti, abychom od Δz přešli k $\Delta f(z)$ (přibližně). Jestliže nyní funkce (10) je prostá pro $|z| < 1$, platí pro $|z| < 1$ tyto Bieberbachovy odhady (Bieberbach jim říká „Verzerrungssatz" a „Drehungssatz"):

---

[3]) $\mathfrak{R}z$, $\mathfrak{I}z$ značí reálnou a imaginární část čísla z.

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqq |f'(z)| \leqq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \quad |\mathrm{ampl}\, f'(z)| \leqq 2 \lg \frac{1+|z|}{1-|z|}.^{4)} \tag{11}$$

Odhad pro $|f'|$ je přesný,[5]) avšak odhad pro $|\mathrm{ampl}\, f'(z)|$ nikoliv a Kössler jej zlepšuje v pracích [21], [22]; přesný odhad byl později (1936) dán GOLUZINEM a VASILJEVIČEM. Vedle toho dokazuje Kössler v práci [21] novou nerovnost

$$1 + \Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqq \frac{1 - |a_2 z| - 6|z^2| - |a_2 z^3| + |z^4|}{(1-|z^2|)(1+|a_2 z| + |z^2|)};$$

tato nerovnost je přesná (pro prosté funkce (10) s libovolně předepsaným $|a_2| \leqq 2$). Význam této nerovnosti je patrný z této poznámky: Obraz kružnice $|z| = r$ (t. j. množina všech bodů $f(re^{i\varphi})$, φ reálné) je konvexní tehdy a jen tehdy, je-li

$$1 + \Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqq 0$$

v každém bodě kružnice $|z| = r$.

V práci [23] sestrojuje Kössler tři značně obecné třídy prostých funkcí. Na př. jedna z nich je definována takto: Vezměme libovolnou funkci $\varrho(z)$, kde ϱ je regulární a $|\varrho(z)| \leqq 1$ pro $|z| < 1$ a definujme funkci $f(z)$ rovnicí

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \int_0^z \varrho(t)\, \mathrm{d}t;$$

potom f je regulární a prostá pro $|z| < 1$ a píšeme-li f ve tvaru (10), je

$$|a_n| \leqq 1 \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Podobně u jiné z těchto tří tříd dokazuje Kössler

$$|a_n| \leqq n \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Je dosud nedokázanou domněnkou, že (13) platí pro každou funkci prostou pro $|z| < 1$ tvaru (10); dlouho se udržovala domněnka, že (12) platí pro každou funkci prostou pro $|z| < 1$ tvaru (10), která je lichá (t. j. $a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = 0$), ale tato domněnka byla vyvrácena r. 1943. Přesto však (13) resp. (12) platí pro rozsáhlé třídy prostých (resp. lichých prostých) funkcí.

Speciálním případem mocninných řad jsou polynomy

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n; \tag{14}$$

píšeme-li zde $z = e^{i\varphi}$, dostáváme t. zv. trigonometrický polynom, t. j. funkci tvaru

$$T(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi). \tag{15}$$

[4]) Ježto $f'(z) \neq 0$ pro $|z| < 1$, existuje **spojitá** větev funkce $\mathrm{ampl}\, f'(z)$ v kruhu $|z| < 1$. V poslední nerovnosti (11) je míněna ona spojitá větev, pro kterou je $\mathrm{ampl}\, f'(0) = \mathrm{ampl}\, 1 = 0$ (a nikoliv $= 2k\pi$ pro některé celé $k \neq 0$).

[5]) T. j. existují prosté funkce tvaru (10), pro něž platí znamení rovnosti; stačí vzíti funkci $\dfrac{z}{(1+z)^2}$ s derivací $\dfrac{1-z}{(1+z)^3}$ a dosadit jednou $1 > z > 0$, podruhé $-1 < z < 0$.

Polynomy a trigonometrickými polynomy se zabývají dvě významné práce Kösslerovy [28], [30]. Jestliže v (15) není $a_n = b_n = 0$, říkáme, že T je n-tého stupně. Pouhým „fázovým posunutím" (t. j. zavedením nové proměnné $\varphi' = \varphi - \text{const}$) lze docíliti toho, že $b_n = 0$. Kössler pak (viz [28], 1949) řeší tuto otázku: Nechť polynom (15) ($a_n \neq 0$, $b_n = 0$) má reálné koeficienty; kdy je $T(\varphi) \geqq 0$ pro všechna reálná φ? Tehdy a jen tehdy, lze-li psáti

$$T(\varphi) = A \prod_{k=1}^{n} (\gamma_k + \cos(\varphi - \psi_k)) , \tag{16}$$

$A > 0$, $\gamma_k \geqq 1$, ψ_k reálná, $\psi_1 + \ldots + \psi_n = 0$. Je-li nyní dán (algebraický) polynom $P(z)$ a ptáme-li se, za jakých podmínek je $\Re\, P(z) \geqq 0$, resp. $|P(z)| \leqq 1$ v kruhu $|z| < 1$, můžeme postupovati takto: k tomu, aby uvedené nerovnosti byly splněny pro $|z| < 1$, stačí, aby byly splněny pro $|z| = 1$, t. j. $z = e^{i\varphi}$, φ reálné. Jde tedy o nerovnosti

$$\Re P(e^{i\varphi}) \geqq 0 , \quad 1 - P(e^{i\varphi}) . \overline{P(e^{i\varphi})} \geqq 0$$

($\bar{z}$ značí číslo komplexně sdružené k z), kde vlevo jsou trigonometrické polynomy s reálnými koeficienty. Problém je tedy v podstatě řešen vzorcem (16). Obdobný problém pro mocninné řady byl řešen již dříve (Carathéodory, Toeplitz, I. Schur). Nutné a postačující podmínky jsou dány soustavou nekonečně mnoha nerovností mezi koeficienty řady. Je zajímavo, že ve speciálním případě polynomu se tyto podmínky neredukují na konečný počet nerovností, kdežto řešení Kösslerovo je dáno konečným počtem podmínek.

Práce [30] se zabývá otázkou: Jaká je nutná a postačující podmínka, aby polynom

$$P(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0) \tag{17}$$

(s komplexními koeficienty) byl prostý v některém kruhu $|z| < r$ s poloměrem > 1. Sestrojme rovnice

$$\left.\begin{aligned} 1 + \sum_{k=2}^{n} a_k (z_1^{k-1} + z_1^{k-2} z_2 + \ldots + z_2^{k-1}) &= 0 , \\ z_1^{n-1} z_2^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \bar{a}_k z_1^{n-k} z_2^{n-k} (z_1^{k-1} + z_1^{k-2} z_2 + \ldots + z_2^{k-1}) &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Nutná a postačující podmínka je, aby pro žádné řešení z_1, z_2 nebylo $|z_1| = |z_2| = 1$. Jiný tvar nutné a postačující podmínky: pro žádné řešení z_1, z_2 není ani $|z_1| \leqq 1$, $|z_2| \leqq 1$, ani $|z_1| \geqq 1$, $|z_2| \geqq 1$. Zavedeme-li do (18) substituce $z_1 = xy$, $z_2 = \dfrac{x}{y}$ a potom ještě $y + \dfrac{1}{y} = u$, dostaneme místo (18) rovnice tvaru

$$1 + \sum_{k=2}^{n} a_k x^{k-1} P_{k-1}(u) = 0 , \quad x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \bar{a}_k x^{n-k} P_{k-1}(u) = 0 , \tag{19}$$

kde polynomy $P_1(u) = u$, $P_2(u) = u^2 - 1$, $P_3(u) = u^3 - 2u$ atd. se snadno vypočtou. Nutná a postačující podmínka má pak tvar: Rovnice (19) nemají žádné řešení x, u, kde $-2 \leqq u \leqq 2$. Rovnice (19) pojímejme jako rovnice v x; potom tyto rovnice mají (při určitém u) společné řešení tehdy a jen tehdy, je-li jejich resultant $R(u)$ (to je polynom v u) roven nule. Ukazuje se: Hledaná nutná a postačující podmínka je, aby $R(u) \neq 0$ pro $-2 \leqq u \leqq 2$. To je tedy v zásadě velmi jednoduchá podmínka algebraického rázu. Ovšem efektivní zjištění, zda je v daném případě splněna, je obtížné, jak ukazuje již případ $n = 3$, v práci podrobně prodiskutovaný.

Druhým oborem matematiky, ve kterém Kössler dosáhl významných úspěchů, je *theorie čísel*. Hlavní interes Kösslerův je zde věnován jednak problémům rozdělení prvočísel, jednak problému dělitelů.

Označme znakem $\pi(x)$ počet prvočísel, jež jsou $\leqq x$. Slavná prvočíselná věta praví, že

$$\pi(x) = \frac{x}{\lg x} + R(x)\,, \quad \text{kde} \quad R(x) = o\left(\frac{x}{\lg x}\right).^{6)} \tag{20}$$

Další vývoj analytické theorie prvočísel vedl mimo jiné k přesnějším odhadům funkce $R(x)$ v „asymptotickém" vzorci (20). V tomto problému hraje hlavní úlohu t. zv. Riemannova funkce $\zeta(s)$ $(s = \sigma + it)$, definovaná v polorovině $\sigma > 1$ rovnicí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}\,; \tag{21}$$

součin vpravo (kde se násobí přes všechna prvočísla p)[7]) ukazuje zřetelně na souvislost funkce ζ s prvočísly.

Označme nyní znakem $d(n)$ počet dělitelů čísla n; položme

$$T(x) = \sum_{n \leqq x} d(n)\,. \tag{22}$$

Snadno se dokáže vzorec

$$T(x) = x \lg x + (2C - 1)\, x + R_1(x), \text{ kde } R_1(x) = O(\sqrt{x}) \tag{23}$$

(C je Eulerova konstanta). Na rozdíl od vzorce (20) se zde „hlavní člen" v rovnici (23) odvodí snadno; obtíže vznikají teprve při stanovení řádové velikosti funkce $R_1(x)$ — tento problém není dosud definitivně rozřešen (podobně jako u funkce $R(x)$ v (20)).

Kösslerovy práce, mající vztah k theorii čísel, se rozpadají methodicky ve dvě skupiny. První skupina stojí na rozhraní theorie funkcí a theorie čísel; druhá pak má ráz vysloveně číselně theoretický a užívá více elementárních

---

[6]) Znak $f(x) = o(g(x))$ značí, že $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$; znak $f(x) = O(g(x))$ značí, že funkce $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ je omezená v jistém intervalu $(a, +\infty)$; předpokládá se $g(x) > 0$.

[7]) Písmenem p budu označovati výhradně prvočísla.

method (matematik ovšem ví, že „elementární" v matematice neznamená „snadný" — často spíše naopak). Abych nerozptyloval čtenářovu pozornost, vyberu z každé skupiny jen dvě práce.

Z první skupiny jsem vybral práce [6], [25], týkající se především funkce $\zeta(s)$ (nemluvím o jistých zobecněních, obsažených v těchto pracích). Při otázce o řádové velikosti „zbytku" R ve vzorci (20) je lhostejné, vyšetřuji-li funkci $\pi(x)$ nebo funkci

$$f(x) = \pi(x) + \tfrac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots$$

Pro funkci f udal již Riemann vyjádření určitým integrálem, z něhož Kössler v práci [6] (1916) odvozuje vyjádření nekonečnou řadou absolutně konvergentní; přitom užívá za integračním znamením Lagrangeovy řady (sluší ostatně poznamenati, že zobecnění Lagrangeovy řady se zajímavými aplikacemi na řešení rovnic věnoval Kössler zvláštní práci [12] (1922)). Práce [25] (1941) nemá mnoho souvislosti s theorií čísel; jde v ní na př. o řešení této otázky: Hodnoty $\zeta(2k)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) lze snadno vyjádřiti Bernoulliovými čísly, neznáme však jednoduchého vyjádření hodnot $\zeta(2k + 1)$. Užitím funkcionální rovnice pro funkci ζ odvozuje Kössler asymptotické rozvoje pro $\zeta(s)$, vhodné pro numerické výpočty.

Z druhé skupiny jsem vybral práce [26], [27] (1942—43), které patří k nejzajímavějším. V práci [26] odvozuje Kössler dvě elementární identity. První z nich vypadá takto: Budiž dána posloupnost přirozených čísel $q_1 < q_2 < \ldots$ a dvě funkce $f(n)$, $v(n)$. Zvolme přirozené číslo N a sestrojme funkce $V(k) = \sum_{n=1}^{m} v(nk)$, $m = \left[\frac{N}{k}\right]$, $F(n) = \sum_{q_k/n} f(q_k)$. Přitom $[x]$ značí největší celé číslo $\leqq x$; znak q_k/n při součtu značí, že se sčítá přes ona čísla q_k, jež jsou děliteli čísla n. Potom platí

$$\sum_{q_k \leqq N} f(q_k)\, V(q_k) = \sum_{n=1}^{N} F(n)\, v(n)\,. \tag{24}$$

Identity tohoto druhu (mezi součty) jsou v theorii čísel často důležité: ať proto, že přímo ukazují jisté zajímavé zákonitosti, ať proto, že umožňují důkaz asymptotických vzorců pro součty v nich obsažené. Kösslerova identita (24) je velmi obecného rázu. To by ovšem ještě mnoho neříkalo o jejím významu; ukazuje se však, že z ní plyne specialisací mnoho důležitých a významných identit. Zvolíme-li na př. za $q_1, q_2, \ldots$ všechny mocniny prvočísel, t. j. čísla tvaru p^k (k přirozené číslo) a klademe-li $f(p^k) = \lg p$, obdržíme z (24) identitu

$$\sum_{p \leqq N} \lg p \sum_{k} V(p^k) = \sum_{n=1}^{N} v(n) \lg n\,; \tag{25}$$

přitom ve vnitřním součtu vlevo se sčítá při pevném p přes všechna přirozená k, pro která je $p^k \leqq N$. Speciální volbou funkce $v(n)$ dostává Kössler řadu zajímavých identit, které dovolují počítati různé součty, obsahující prvočísla (uvědomme si, že pravá strana v (25) — na rozdíl od levé — neobsahuje „explicitně“ prvočísla: je to výraz, který při nepříliš složité funkci $v(n)$ je poměrně jednoduchý a pro který často můžeme udati velmi přesné asymptotické vzorce). Vedle (24) odvozuje Kössler ještě tuto obecnou identitu:

$$\sum_{k=1}^{N} g(k)\, f\left(\left[\frac{N}{k}\right]\right) = \sum_{k=1}^{r} g(k)\, f\left(\left[\frac{N}{k}\right]\right) + \sum_{k=1}^{\varrho} (f(k) - f(k-1))\, G\left(\left[\frac{N}{k}\right]\right) - f(\varrho)\, G(r)\,; \tag{26}$$

přitom N, ϱ jsou přirozená čísla, $\varrho < N$, $r = \left[\frac{N}{\varrho + 1}\right]$, $f(0) = 0$, $G(k) = \sum_{n=1}^{k} g(n)$. Z četných důsledků této identity uveďme pro ilustraci jen jeden: Budiž $d_{0,1}(n)$ počet oněch dělitelů čísla n, kteří jsou $\equiv 0$ nebo $\equiv 1 \pmod 4$; obdobný význam nechť má $d_{2,3}(n)$. Potom je[8])

$$\sum_{n=1}^{N} (d_{0,1}(n) - d_{2,3}(n)) = \tfrac{1}{4}(\pi - 2 \lg 2)\, N + O(\sqrt{N})\,. \tag{27}$$

Zajímavé je srovnání s (23); píšeme-li v (27) vlevo $+$ místo $-$, dostaneme výraz $T(N)$, který podle (23) je řádu $N \lg N$. Další velmi četné důsledky identit (24), (26), uvedené v práci [26], nebudu uváděti.

Na identitě (26) je založena též práce [27]. Označme znakem $\sigma_t(n)$ součet t-tých mocnin všech dělitelů čísla n; Kössler vyšetřuje funkci

$$T(N, t, s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sigma_t(k)}{k^s}\,;$$

je zřejmě $\sigma_0(k) = d(k)$, takže (viz (22))

$$T(N, 0, 0) = T(N)\,.$$

Kdežto problém zbytku R_1 v (23) je dosud nerozřešen, ukazuje Kössler mimo jiné, že pro některé hodnoty $t \neq 0$ lze dosáhnouti výsledků již celkem definitivních. Jako příklad vezměme případ $t > 1$. Budiž $r_k = \frac{N}{k} - \left[\frac{N}{k}\right]$ t. zv. lomená část čísla $\frac{N}{k}$ a položme $\Theta(N, t) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{r_k}{k^t} : \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k^t}$, kde celé číslo $\nu > 0$ je určeno nerovnostmi $\nu(\nu + 1) \leqq N < (\nu + 1)(\nu + 2)$ (tedy přibližně $\nu = \sqrt{N}$ pro velká N; číslo N je celé). Potom je pro $t > 1$

$$N^s\, T(N, t, s) = N^s\, \zeta(s)\, \zeta(s - t) + N \frac{\zeta(1 - t)}{1 - s} + N^{1+t} \frac{\zeta(1 + t)}{1 + t - s} + \\ + \zeta(t)\, N^t(\tfrac{1}{2} - \Theta(N, t)) + O(N^{\frac{1}{2}(1+t)} + N^{t-1}) \tag{28}$$

(pro $s = 1$ a $s = t + 1$ pozbývá pravá strana smyslu a je nutno provésti

---

[8]) Znak O se zde i v následujícím týká případu $N \to +\infty$.

jistý limitní přechod). Velikost funkce $\Theta(N, t)$ závisí na aritmetické povaze čísla N. Jestliže číslo N' je dělitelno čísly $1, 2, 3, \ldots, n$, kde n je „velké" číslo, platí pro $N = N'$ rovnice $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$; naopak pro $N = N' - 1$ je $r_k = 1 - \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Odtud plyne, že $\Theta(N', t)$ je přibližně rovno nule, a $\Theta(N' - 1, t)$ je přibližně rovno $1 - \frac{\zeta(1 + t)}{\zeta(t)} > 0$. Odtud pak je patrno toto: Ve výrazu (28) vpravo tvoří první tři členy velmi jednoduchou analytickou funkci proměnné N, poslední dva členy tvoří pak jakýsi oscilující „zbytek"; jeho oscilace mají velikost řádu N^t. Je zajímavé, že tento oscilující člen — až na O-člen, který je řádu nižšího než N^t — nezávisí na s. Charakter funkce $T(N, t, s)$ je tím popsán s úplností, která není častá v analytické theorii čísel.

Význam Kösslerův není, jak poznamenal akademik Čech ve svém článku, vyčerpán jeho původními pracemi. Kössler přistupoval také ke svým učitelským úkolům s velkou svědomitostí, spojenou s vřelým zájmem o žáka a s vrozeným pedagogickým nadáním. Tyto jeho vlastnosti se odrážejí v jeho nevelké knížce „Úvod do počtu diferenciálního" (1926), ve které látka jeho úvodních universitních přednášek je vyložena způsobem dokonale promyšleným, pedagogicky vytříbeným a při velké „otřepanosti" thematu překvapivě netradičním a původním.

Prof. Kössler intensivně pokračuje ve své vědecké i učitelské práci; právě nyní má v tisku novou práci o mocninných řadách, která možná vyjde dříve než tento článek.*) Naše matematická veřejnost vzpomíná vděčně jeho díla a přeje mu do další práce mnoho zdaru.

* * *

SEZNAM VĚDECKÝCH PRACÍ PROFESORA DR M. KÖSSLERA

A) Původní vědecká pojednání:

1. *O zonální funkci harmonické.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, XLII, 1913, s. 7.
2. *Řešení algebraické rovnice výrazy meznými.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, XLIII, 1914, s. 8.
3. *Vztah mezi počtem prvočísel v daných mezích a větou Wilsonovou.* Čas. pro pěst. mat. a fys., XLIV, 1915, s. 6.
4. *Součet řady Lambertovy a počet dělitelů celistvého čísla.* Čas. pro pěst. mat. a fys., XLV, 1916, s. 11.
5. *O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru.* Část I a II. Rozpravy České akademie, II. tř., XXIV, N. 41, 1915 a XXV, N. 54, 1916. S. 34 a 38.
6. *Nový rozvoj pro Riemannovu funkci prvočíselnou.* Rozpravy České akademie, II. tř., XXV, N. 26, 1916, s. 23.

*) Viz Seznam vědeckých prací profesora Dr M. Kösslera, č. 31.

7. *O rekurentním vzorci pro prvočísla.* Rozpravy České akademie, II. tř., XXVI, N. 48, 1917, s. 6.

8. *Integrál Cauchyův a Dirichletův problém v rovině.* Čas. pro pěst. mat. a fys., LI, 1922, s. 5.

9. *Příspěvek k teorii Borelova pokračování funkcí.* Věstník Král. české společ. nauk. Třída mat.-přír. 1921—1922, N. 7, s. 14.

10. *O úhlech nesouměřitelných.* Čas. pro pěst. mat. a fys., LII, 1923, s. 5.

11. *Potenční řady s přirozenou hranicí a jejich pokračování ve smyslu Borelově.* Rozpravy České akademie, II. tř., XXXI, N. 19, 1922, s. 8.

12. *On a generalization of the Lagrange series.* Proceedings of the London Mathematical Society (2) XX, 1922, s. 9.

13. *O singularitách řady mocninné, ležících na kružnici konvergenční.* Rozpravy Čes. akademie, II. tř., XXXII, N. 35, 1923, s. 15.

14. *Sur les singularités des séries entières.* Accademia dei Lincei. Rendiconti (5), XXXII, 1923, s. 26—29.

15. *Nouveaux théorèmes sur les singularités des séries entières.* Accademia dei Lincei. Rendiconti (5), XXXII, 1923, s. 3.

16. *Sur les singularités des séries entières.* Accademia dei Lincei. Rendiconti (5), XXXII, 1923, s. 528—531.

17. *On a generalization of Fabry and Szász's theorems concerning the singularities of power series.* Proceedings Congress Toronto, I, s. 10.

18. *Součtový vzorec* $S = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-n}^{+n} e^{-h^2k^2}$. Čas. pro pěst. mat. a fys., LIII, 1924, s. 5.

19. *Dvě poznámky k theorii číselné.* Čas. pro pěst. mat. a fys., LVIII, 1929, s. 7.

20. *Über die α-Stellen von beschränkten Potenzreihen.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1930, N. 11, s. 12.

21. *Ein Beitrag zur Theorie der schlichten Potenzreihen.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1932, N. 5, s. 8.

22. *Eine Verschärfung des Drehungssatzes von L. Bieberbach.* Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinig., B. 41, 1931, s. 3.

23. *Über besondere Klassen von schlicht abbildenden Potenzreihen.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1934, N. 14, s. 7.

24. *Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile.* Věstník Král. čes. společ. nauk. Tř. mat.-přír. 1935, N. 2, s. 8.

24′. *Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile,* Zprávy o druhém sjezdu matematiků zemí slovanských, Praha, 23.—28. IX. 1934, s. 1.

25. *Asymptotické rozvoje pro funkce $\zeta(s)$ a $\zeta(a, s)$.* Rozpravy Čes. akademie, II. tř., LI, 1941, N. 32, s. 10.

26. *Einige Sätze aus der elementaren Zahlentheorie.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1942, N. 20, s. 18.

27. *Über ein Teilerproblem.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1943, N. 11, s. 18.

28. *Some properties of trigonometric and algebraic polynomials.* Věstník Král. čes. spol. nauk. Tř. mat.-přír. 1948, N. 15, s. 6.

29. *O významu čísla* $\sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ *v teorii mocninných řad.* Čas. pro pěst. mat. a fys., LXXIV, 1949, s. 7.

30. *Простые многочлены.* Чехословацкий матем. журнал. *Simple Polynomials.* Czechoslovak Math. Journal, Vol. 1 (76) 1951, s. 11.

31. *Über reelle Charakteristiken von Potenzreihen.* Чехословацкий матем. журнал, 4(79) 1954, s. 9.

32. *O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů;* společně s *V. Jarníkem,* Čas. pro pěst. mat. a fys. LXIII (1934), s. 13.

B) Knižní publikace:

33. *Úvod do počtu diferenciálního.* Jednota Čs. mat. a fys., Praha, 1926, s. 147.

34. *Karel Petr. Stručný nástin jeho života a stručný přehled jeho prací.* Napsali Frant. Nušl a M. Kössler. Sborník prací matematických a fysikálních, vydaný na počest šedesátého výročí narozenin dr Karla Petra. Jednota Čs. mat. a fys., Praha, 1928, s. 14.

C) Výtahy z prací, otištěných v Rozpravách České akademie II. tř. (Čísla se vztahují k části A) tohoto seznamu.)

Über Entwicklungen für analytische Funktionen (výtah z práce č. 5), Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême XXI (1917), s. 20.

Eine neue Reihe für die Riemannsche Primzahlfunktion (výtah z práce č. 6), Bulletin XXI (1917), s. 4.

Sur une formule de récurrence relative aux nombres premiers (výtah z práce č. 7), Bulletin XXII (1918), s. 3.

Sur les singularités des séries entières situées sur le cercle de convergence (výtah z práce č. 13), Bulletin XXIV (1924), s. 3.

Redakce.

ZA PROFESOREM GINO LORIOU

Dne 30. ledna 1954 skonal v Janově jeden z nejvýznamnějších italských geometrů a historiků matematiky světového jména, profesor Gino Loria. I česká věda vzdala profesoru Loriovi svůj hold, zvolivši ho zahraničním členem České Královské společnosti nauk.

Profesor Loria se narodil 19. května 1862 v Mantově jako syn bankéře. Jsa hospodářsky nezávislý, mohl se ihned po universitních studiích v Turině a Pavii věnovati vědecké činnosti. Po dvouleté asistentuře na universitě v Turině se tam habilitoval r. 1886 a stal se téhož roku mimořádným a r. 1891 řádným profesorem university v Janově pro vyšší geometrii, kterou přednášel až do r. 1935, kdy odešel do výslužby. Nevzdal se však úplně své učitelské činnosti, nýbrž přednášel dále dějiny matematiky na Janovské universitě, kterýž předmět tam byl zavedl.

Literární vědecká činnost profesora Lorii je ohromná. V letech 1883 až 1937 napsal 278 spisů, mezi nimi četná i několikasvazková díla knižní, a to nejen v jazyce italském, nýbrž i v jazycích anglickém, francouzském, německém a španělském. K tomu přistupují četné spisy napsané v letech 1937—1953. V zasedacích zprávách České Král. společnosti nauk otiskl tato pojednání: „*I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali*" (1896), „*Integrali euleriani e spirali sinusoidi*" (1897), „*Sopra una classe notevole di alternanti di ordine qualsivoglia*" (1897) a „*Le curve panalgebriche*" (1901).

Ačkoli prof. Loria napsal několik cenných prací z algebry a analysy, přece jeho hlavními obory byly vyšší geometrie včetně geometrie deskriptivní a zvláště dějiny matematiky. Prvním velkým spisem, kterým se rázem vyšinul na světovou úroveň, byl spis „*Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*" (1887, 2. vyd. 1897, 3. vyd. 1907, 4. vyd. 1931), přeložený do polštiny a do němčiny. Dalšími spisy, známými všem matematikům, jsou knihy věnované zvláštním křivkám. R. 1900 zadal prof. Loria do soutěže Král. akademie věd v Madridě španělský rukopis o rovinných křivkách, který byl poctěn zlatou medailí. Po dvou letech vyšel německý překlad tohoto spisu pod názvem „*Spezielle algebraische und transcendente Curven, Theorie und Geschichte*" (2. vyd. 1910—11). Italské zpracování tohoto spisu ve dvou dílech vyšlo r. 1930. Dvoudílné pokračování vyšlo již o 5 let dříve s nadpisem „*Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti*".

Četné Loriovy spisy jsou věnovány deskriptivní geometrii. Uvedu z nich jen tyto: „*Vorlesungen über darstellende Geometrie*" (1907—13), jehož látka byla italsky zpracována ve spise „*Metodi di geometria descrittiva*" (1909, 2. vyd. 1919, 3. vyd. 1925), „*Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva*" (1911) a „*Complementi di geometria descrittiva*" (1924).

Avšak zvláště významná byla Loriova činnost na poli dějin matematických věd, zahrnující jak matematiku ryzí, tak její aplikace i vědy příbuzné, od dob nejstarších až po nejnovější, od Portugalska až po Dálný Východ. Loriovy historické práce vynikají širokým rozhledem nejen po různých oborech matematických, nýbrž i po vědách příbuzných, velkou sčetlostí jak odbornou, tak filosofickou a v krásné literatuře a skvělým slohem, který se nebojí ani poetického zabarvení.

Ke studiu dějin matematiky přivedl Loriu jeho učitel na universitě v Pavii, známý matematik Eugenio Beltrami, když jej vyzval, aby se ucházel o cenu vypsanou Král. ústavem věd v Benátkách na příručku dějin matematických věd, provázenou chrestomatií z klasických prací. Loria se tak důkladně zahloubal do studia dějin matematických věd, že nebyl v předepsané lhůtě hotov se soubornou prací, avšak uveřejňoval v následujícím desítiletí výsledky studia řeckých věd v publikacích Král. akademie věd v Turině. Tyto práce byly vyznamenány r. 1907 cenou Binoux. Souborně byly nově zpracovány r. 1914 ve spise „*Le scienze esatte nell'antica Grecia*". Z ostatních Loriových knih, obírajících se dějinami matematických věd, buďtež uvedeny tyto: „*Guida allo studio delle matematiche*" (1916, rozhojněné 2. vyd. 1946), „*Storia della geometria descrittiva*" (1921), dílo základního významu, vyznamenané zase cenou Binoux, které s uznáním hovoří i o českých deskriptivářích, „*Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*" (1929) a obšírná „*Storia delle matematiche*" (ve 3 dílech 1929—33), 2. vyd. v 1 díle 1950).

Prof. Loria věnoval i mnoho zájmu otázkám filosofie matematiky a matematického vyučování, jak o tom svědčí jeho četné referáty na mezinárodních sjezdech matematiků a jeho činnost v „Mezinárodní komisi pro matematické vyučování". Jako první president „Mezinárodní akademie pro dějiny matematických a přírodních věd" získal si velké zásluhy o organisaci mezinárodní spolupráce v dějinách těchto oborů. Byl skvělým řečníkem vybroušeného společenského chování, jehož přednášky a projevy uchvacovaly jak svým hlubokým obsahem, tak svou krásnou formou. Naši odborníci měli vzácnou příležitost ho osobně poznat, když se účastnil r. 1937 „Čtvrtého mezinárodního sjezdu pro dějiny matematických a přírodních věd" v Praze.

Čest budiž jeho památce! *Q. Vetter*, Praha.

ZPRÁVA O SCHŮZÍCH MATEMATIKŮ POŘÁDANÝCH I. SEKCÍ ČSAV

Po schůzi matematiků dne 7. května 1954, o jejímž průběhu jsme čtenáře informovali v předešlém čísle tohoto časopisu, následovaly další dvě schůze, a to dne 3. července a 18. září 1954.

Schůze zahájil a řídil předseda I. sekce akademik V. Jarník.

Hlavním bodem programu byla diskuse o spolupráci vědeckých pracovníků v matematice v ČSAV, na vysokých školách i ústavech ministerstev podle směrnic daných referátem s. A. Novotného na X. sjezdu KSČ.

Úvodní referát na první schůzi přednesl akademik E. ČECH. Na počátku uvedl,*) že na rozdíl od ostatních naukových předmětů vyučuje se matematice a mateřskému jazyku celých jedenáct let, a začátky výuky spadají vlastně již do doby předškolní. Pro tento široký rozsah matematického vyučování na jedenáctiletce je stav matematického vyučování na škole velmi důležitý pro matematickou vědu. Ministr LAD. ŠTOLL ve svém referátu řekl, že nikdo jiný než ministerstvo školství nemůže býti zodpovědný za to, jak bude vypadat škola. Akademik Čech prohlásil, že tento výrok ministrův nemůže zbavovat odpovědnosti jiné činitele. Tento výrok zřejmě nebyl míněn na vysoké školy. Za jejich úroveň odpovídá jejich vedení daleko více než v nižších školách. S. Novotný požaduje zvyšovat úroveň prospěchu žáků a snižovat procento propadajících. Tento problém je snad nejvážnější na vysokých školách. Je otázka, zda jsme na universitách plánovanou úroveň nepostavili příliš vysoko, takže se podstatně liší od úrovně skutečné.

Nesmíme zapomínat na to, že abstraktní myšlení je důležitým, ale ne jediným znakem matematiky. V nejbližších desetiletích budeme asi potřebovat osoby s vysokým matematickým vzděláním, které však nebudou specialisty v matematice, nýbrž v jiných oborech. Je také nutno si všimnout jednostranné záliby v abstrakcích u některých studentů.

Zdá se, že na vysokých školách není všude splněn požadavek s. Novotného, aby každý učitel měl kvalifikaci pro ten stupeň, na kterém učí. Otázka odborné kvalifikace je velmi důležitá. Nejlepší vyhlídky výchovné má učitel, kterého si studenti váží pro jeho odbornou úroveň.

V mnohých vědách je hlad po úzkých specialistech, kteří potom po celý život dělají stejnou práci. Matematika mezi tyto obory nepatří; matematik musí mít široký obzor.

Pokyny presidia ČSAV požadující zajištění vyšší úrovně aspirantů, jsou celkem v souhlasu s tím, co říkal prof. B. GNĚDĚNKO: Raději neobsadit aspiranturu, než přijmout slabšího kandidáta. Nejdůležitější u aspirantů i asistentů matematiky je, aby se naučili samostatně studovat a zvykli si myšlence, že musí mít široký obzor, že se musí celý život učit.

S. Novotný mluvil o tom, že byly vytvořeny příznivé podmínky pro soudružskou kolektivní spolupráci, pro plánování, dělbu a koordinaci práce. Dále s. Novotný uvádí, že byly vytvořeny příznivé podmínky pro výměnu zkušeností. To je zvlášť důležité pro matematika, pro něhož výměna zkušeností znamená totéž, jako pro chemika laboratoř. Dosud je to pouze Matematický ústav Akademie, který dává příležitost odborníkům z jiných pracovišť, aby viděli do jeho práce.

S. Novotný požaduje, aby vědečtí pracovníci všude pracovali podle jednotně sladěného plánu, ať jde o pracoviště Akademie, vysokých škol, resortů atd. S. Novotný žádá od vědy, aby jednak odhalovala a řešila nové základní vědecké problémy, jednak aby uplatňovala hotové výsledky v praxi. Sovětská věda věnuje velkou péči theoretické práci i v nejabstraktnějších oborech matematiky. Je třeba hájit nebojácně důležitost theorie, ale při tom řešit vskutku základní problémy, t. j. dbát zájmů celku vědy a ne jen svých osobních koníčků.

Z ostatních partií referátu s. Novotného, které nejsou zaměřeny přímo na vědu, se dotknul akademik Čech stručně několika bodů.

Po referátu akademika Čecha se rozvinula ostrá kritika knihoven a distribuce odborných časopisů. Bylo usneseno provést na všech pracovištích soupis veškeré matematické časopisecké literatury s bibliografickými údaji. Vzhledem k široké problematice předneseného referátu bylo usneseno odložit další diskusi na příští schůzi.

Akademik V. JARNÍK referoval krátce o svých poznatcích a dojmech z cesty do Sovětského svazu jakožto člen delegace ČSAV.

---

*) Bylo použito záznamů akademika *V. Jarníka.*

Do schůze se dostavil člen korespondent Maďarské akademie věd a ředitel ústavu aplikované matematiky v Budapešti ALFRÉD RÉNYI, který přijel do Prahy na první pracovní konferenci československých matematických statistiků.

Prof. Rényi přednesl *referát o stavu matematiky v Maďarsku.* Napřed požádal, aby mu byly položeny otázky, načež na tyto otázky odpověděl v rámci souvislého referátu. V podstatě řekl toto:*)

V Maďarsku je veliká a slavná tradice matematiků. Avšak před osvobozením byly tu hlavně výsledky jednotlivců, pomoc vlády matematice byla nepatrná. Po osvobození se poskytuje matematice velká podpora. Matematikové si pak uvědomili, že je nutno matematické výsledky aplikovat v praxi. Odtud radikální změna v plánování matematické práce. Směrodatným činitelem je Akademie, reorganisovaná roku 1949. V roce 1950 byl založen ústav aplikované matematiky, který má nyní oddělení: 1. Mechanika a pružnost; 2. Pravděpodobnost; 3. Matematická statistika; 4. Numerické a grafické methody; 5. Diferenciální rovnice; 6. Elektrotechnika; 7. Funkce reálné proměnné. Až na poslední zabývají se všechna oddělení částečně aplikovanými problémy. Od založení dostal ústav zvenčí na 450 praktických problémů. Velkou část vyřešil. Mezi nimi byly některé jednoduché problémy rázu spíše znaleckého, ale také mnohé problémy, které vyžadovaly vytvoření nových matematických method. Bylo správné, že se ústav vytvořil právě v této formě. Ale nyní se musí rozšířit i na otázky čistě theoretické. Jinak by se část matematiků věnovala jen theorii, druhá část jen praxi. Domníváme se, že neexistuje zvláštní čistá a zvláštní aplikovaná matematika, nýbrž, že existuje jedna matematika, které se dá různým způsobem použít v praxi. To ovšem nesmí znamenat oslabení práce vědecké na universitách. Akademie nyní podporuje, a to částečně i hmotně, vědecké pracovníky na vysokých školách.

Při třetí sekci akademie existuje stálá matematická komise, kde jsou zástupci skoro všech matematických institucí universit. Cílem této komise je udávat směr matematické práce v celé zemi. Všechny matematické ústavy jsou povinny předkládat této komisi své plány a komise je schvaluje. Kromě vysokých škol a ústavů akademie není jiných matematických pracovišť.

Jednou z hlavních činností akademie, vedle práce v ústavech, je vydávání knih a časopisů. Máme tyto časopisy:

Acta mathematica. Je to cizojazyčný časopis, ruské résumé je u všech článků. Všechny práce tohoto časopisu vycházejí též maďarsky ve Věstníku třetí sekce. Akademie též podporuje mezinárodní časopisy *Acta scientiarum* (Szeged) a *Publicationes mathematicae* (Debrecen), které vydávají instituty universit. Maďarská matematická společnost Bolyaiova vydává další tři časopisy v maďarském jazyku: *Matematikai lapok*, vydávaný s podporou akademie, dále *Középiskolai matematikai lapok* pro žáky středních škol a konečně didaktický časopis *Matematika tanitása*; dva poslední jsou vydávány společně s ministerstvem školství. Kromě toho vydává ústav ještě ročenku s podporou akademie. Zatím vyšlo jedno číslo, druhé je v tisku. Dospěli jsme k tomu, že některé články z aplikací matematiky budeme vydávat v odborných časopisech technických, aby si jich inženýři více všímali. Proč máme tři mezinárodní časopisy? Především Acta scientiarum mají velký mezinárodní zvuk. Za druhé každý z těchto časopisů udržuje výměnu asi se 120 zahraničními časopisy.

Pokud se týče vydávání knih, vydáváme především překlady, hlavně ze sovětské literatury, abychom dosáhli přístupnosti hlavních matematických disciplin v maďarském jazyce. Nyní začínáme vydávati též monografie maďarských autorů. Mnohé vědecky závažné publikace maďarských autorů vydáváme buďto ve dvou řečech nebo jen v cizí

*) Bylo použito záznamů akademika V. JARNÍKA.

řeči. Dosud vydané knihy v cizích řečech měly velký úspěch; na př. RIESZ-NAGY: *Leçons de l'Analyse fonctionnelle*. V minulosti bylo psaní jen v cizích řečech samozřejmé. Dnes se počet lidí, kteří se zajímají o matematiku do té míry zvětšil, že je nutno publikovati i maďarsky. Vydávání cenných knih v cizích řečech je pravým opakem kosmopolitismu. Znamená to propagaci maďarské vědy i příspěvek k obraně míru a také získání cenných valut. V této věci následujeme příkladu polských matematiků.

Jak řídí akademie vědeckou práci? U nás byly nedávno tendence, přenést na matematiku průmyslové methody plánování. To je ovšem nemožné. Ale zásadní plánování je nutné, a to je úloha akademie. Těžký problém jest, jak vést jednotlivce žádoucím směrem. Zde jsme postupovali velmi obezřetně. Nelze říci úspěšnému matematiku, aby opustil směr své práce a začal dělat něco jiného. Ale je nutno upozorňovat na otázky, na kterých má stát zájem, a dávat podněty, aby o ně pracovníci rozšířili svou práci. Lehčí je otázka u začátečníků, na př. aspirantů, kteří často přímo žádají o udání směru. Tak jsme již dosáhli jistých úspěchů v aplikacích a v některých oborech, kde jsme dosud neměli tradici. Přijímání a usměrňování aspirantů je důležitý úkol. Přijímání aspirantů akademie i vysokých škol provádí akademie, rozmisťuje je, ale disertace se obhajují všechny v akademii. Tuto práci koná komise pro aspiranty při akademii.

Konference pořádá zpravidla akademie spolu s Bolyaiovou společností, na př. první kongres maďarských matematiků, Bolyaiův týden, kolokvia. Byly již konference o pravděpodobnosti, o konstruktivní theorii funkcí, o geometrii. Zúčastnilo se jich vždy asi třicet lidí, trvání — tři dny na venkově. Kolokvia jsou neformální, mají formu semináře, diskutuje se již během přednášky. Letos budou tato kolokvia: 1. Matematická statistika; 2. Diferenciální, integrální a funkcionální rovnice; 3. Algebra; 4. Funkce reálné proměnné a funkcionální analysa. Dvě z konferencí se budou konat na Blatenském jezeře v domě vědeckých pracovníků akademie; jedna v menším městě Pécs a jedna v hotelu v horách v Jósvafö. Druhý kongres maďarských matematiků bude roku 1956, abychom se vyhnuli kolisi s kongresem československých matematiků v roce 1955.

Cesty maďarských matematiků do zahraničí i návštěvy zahraničních matematiků v Maďarsku v poslední době velmi stoupají. Minulého roku vyslala celá akademie za hranice 80 osob, nyní má Rényi už číslo 100. A další cesty jsou plánovány. Letos byli zatím v cizině: TURÁN — dva měsíce v Číně, HAJÓS — šest neděl v SSSR, FUCHS — v Německé demokratické republice, ACZÉL — v Polsku, RÉNYI — v Československu. V Maďarsku byli letos KNICHAL, KURATOWSKI, POPOVICI, ČAKALOV — poslední tři na valném shromáždění akademie.

Spolupráce matematiků v celé zemi je velmi dobrá, je zde dobrá tradice, snad lepší než v mnohých jiných odvětvích vědních. Matematikové si dávají problémy a projednávají nejrůznější otázky. To je zčásti také dílem společnosti Bolyaiovy, která spojuje všechny matematiky celé země. Do osvobození byla společná matematicko-fysikální společnost, založená EÖTVÖSEM před rokem 1900. Po válce zanikla a vznikly dvě společnosti, matematická a fysikální. Eötvösova společnost byla spíše společností vědecké elity, dnešní matematická společnost Bolyaiova je více masová, má asi 1600 členů a organisační jednotky v 15 městech. Má dvě oddělení, vědecké a didaktické. Oddělení vědecké je ovšem schopno života jen v universitních městech. Společnost patří do svazu technických a přírodovědeckých společností. Má široký obor působnosti. Důležitou roli hraje v ní řada matematických soutěží. Nyní existuje těchto šest celostátních soutěží:

1. *Soutěž D. Arany* pro první až druhou třídu středních škol (devátý a desátý ročník).
2. *Soutěž M. Rákosiho* pro třetí a čtvrtou třídu středních škol, společná pro gymnasia i průmyslové školy.
3. *Soutěž Jósefa Kürscháka* pro absolventy gymnasií. Ta je již obtížnější a má velkou tradici; svého času v ní zvítězili FEJÉR a RIESZ.

4. Pro posluchače university je *soutěž Schweitzera-Miklóse*, mladého talentovaného studenta, který se za války stal obětí fašismu. Analogické soutěže jsou pro posluchače

5. vysokých škol technických a

6. pedagogických fakult.

Učitelé nižších středních škol se školí na pedagogických fakultách, učitelé gymnasií na universitě.

Společnost každoročně uděluje dvě ceny: *cenu Grünwalda-Gézy*, popraveného v koncentračním táboře, pro mladého matematika za jednu z jeho prvních prací, a *cenu Beke Manó* pro nejlepšího popularisátora i pedagoga.

Společnost vyvíjí intensivní činnost pro učitelstvo ve spolupráci s ministerstvem školství. Před třemi léty začala společnost boj o zvýšení úrovně a proti formalismu vyučování gymnasiálních profesorů. Společnost pořádá vědecké přednášky v Budapešti asi jednou za čtrnáct dní, v provincii asi jednu za tři až čtyři týdny. Za poslední tři roky uspořádala více než dvacet konferencí v provincii. Na tyto konference jsou zváni též učitelé z jiných měst. Tak vedoucí matematikové se třikrát až čtyřikrát ročně účastní takových přednášek v provincii. Účastní se jich též aspiranti a mladší pracovníci, hlavně tam, kde je nedostatek domácích pracovníků. Ve větších městech pojednávají přednášky o nových vlastních výsledcích, jinde o nových knihách a podobně. Výsledky a vědecký život v Sovětském svazu byly ve společnosti předmětem asi 30 až 40 přednášek ročně, především v měsíci přátelství. Za poslední rok uspořádala společnost celkem 370 přednášek; do toho jsou také započteny přednášky na konferencích.

Matematická společnost zprostředkuje styk mezi matematiky. Pokud se týká spolupráce matematiků s jinými obory, je tu jistý pokrok. Ale situace není ještě uspokojivá, ne vždy vinou matematiků. Fysikové jsou málo v těchto stycích iniciativní a raději si problémy řeší po svém. S chemiky to jde daleko lépe, asi proto, že si méně myslí o své matematice. Spolupráce s inženýry záleží velmi na jednotlivcích. Všeobecně má matematický ústav lepší styky s techniky v praxi než s techniky ve výzkumných ústavech. Velmi se zlepšila spolupráce matematické statistiky s lékařstvím, hydrologií, chemií. Nedávno jsem na radě vysoké školy přednášel o počtu pravděpodobnosti v přírodních vědách a řada profesorů projevila zájem o spolupráci. Každý z přítomných tvrdil, že právě u něho lze nejvíce počtu pravděpodobnosti použít.

Z toho, co bylo uvedeno, vyplývá, že se matematický život v Maďarsku po osvobození zdárně vyvíjí. To však není důvod ke spokojenosti, neboť úkoly rostou den ode dne a je ještě mnoho vykonat.

Nakonec vyslovil prof. Rényi naději, že spolupráce matematiků československých a maďarských přispěje k řešení těchto problémů.

—

Na programu druhé schůze dne 18. září 1954 byly tyto body:

1. Diskuse o spolupráci vědeckých pracovníků v matematice podle směrnic daných referátem s. A. Novotného na X. sjezdu KSČ.

2. Příprava sjezdu čsl. matematiků v roce 1955.

3. Referát o činnosti matematické komise a perspektiva další činnosti.

4. Diskuse o zaměření činnosti JČMF v souvislosti s přidružováním vědeckých společností k Československé akademii věd.

K referátu akademika E. Čecha se rozpředla živá diskuse. Zástupce slovenských matematiků upozornil na nízký věk absolventů jedenáctiletek při nástupu na vysoké školy a na potíže z toho vznikající; domnívá se, že by i na technikách měla býti matematika prohloubena. Byla diskutována naprosto nedostatečná směrná čísla posluchačů oboru matematiky a fysiky na universitách. Bylo usneseno požádat V. sekci ČSAV o společné návrhy na zvýšení těchto směrných čísel. Dále byly v diskusi probírány plány vědecké práce na vysokých školách a osnovy přednášek matematiky na vysokých školách technických. Mnoho se diskutovalo o výuce matematiky na technikách. Byla zvolena komise, která se bude zabývat těmito otázkami. Byl doporučen návrh, aby I. sekce ČSAV si vyžádala materiál od ministerstva školství.

Akademik V. Jarník diskusi shrnul a referoval pak o přípravách a organisaci matematického sjezdu, který se má konat od 1. do 8. září 1955 v Praze. Sjezd bude přísně vědecký s thematickým zaměřením: *Stav a rozvoj matematické vědy v lidovědemokratických státech.* Na toto thema přednesou zástupci jednotlivých států asi půlhodinový referát. Vedle toho budou ještě hodinové přednášky a asi dvacetiminutová sdělení.

Po diskusi bylo usneseno, aby akademik Jarník přednesl na sjezdu půlhodinový referát, na nějž naváže hodinová přednáška akademika Čecha z oboru diferenciální geometrie.

V dalším průběhu schůze informoval stručně akademik Čech přítomné matematiky o činnosti matematické komise. Aby se činnost komise usnadnila, bylo zvoleno čtyřčlenné vedení: akademik E. Čech, akademik V. Jarník, prof. V. Knichal a prof. F. Vyčichlo.

Na konec pak referoval prof. F. Vyčichlo o budoucím programu JČMF a o návrhu stanov, jež se liší částečně od návrhů vědeckých společností, které budou přidruženy k Československé akademii věd.

Průměrný počet účastníků na obou schůzích byl asi 28 matematiků ze zemí českých i ze Slovenska. *J. Novák*, Praha.

PRVNÍ PRACOVNÍ KONFERENCE ČS. MATEMATICKÝCH STATISTIKŮ

V minulém čísle našeho časopisu byla uveřejněna zpráva o první konferenci matematických statistiků, konané v Praze ve dnech 27. až 30. června 1954. Dnes uveřejňujeme stručné výtahy z jednotlivých referátů a sdělení s tím, že některé z nich budou v plném znění publikovány v jednotlivých odborných časopisech.

Referáty zahraničních hostí

B. V. Gněděnko: O neparametričeskich zadačach v matematičeskoj statistike.

Referát B. V. Gněděnka obsahoval přehled některých neparametrických metod matematické statistiky, založených na výsledcích V. Romanovského, N. Kolmogorova, N. V. Smirnova a B. V. Gněděnka. Gněděnko ve svém referátu zdůraznil význačné místo těchto metod, jak s hlediska gnoseologického tak aplikačního. Zdůraznil hlavní podstatu této metody, která spočívá v tom, že nemusíme při její aplikaci předpokládat znalost distribuční funkce v základním souboru, čímž nevnášíme do výsledků subjektivní prvek, jako je tomu u metod parametrických. Prof. Gněděnko pojednal zevrubněji o Smirnovově-Kolmogorovově testu a uvedl jeho aplikaci při řešení nejrůznějších praktických problémů v přírodních a technických vědách a nakonec informoval o otázkách, kterými se nyní v tomto směru zabývá sovětská škola theorie pravděpodobnosti.

(Zpracování a rozšíření tohoto referátu viz SV, MFA, IV, č. 5, 1954, str. 671—676.)

A. Rényi: Über neue axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Při vybudování základů počtu pravděpodobnosti vychází prof. Rényi ze systému axiomů, ve kterých pojem podmíněné pravděpodobnosti vystupuje jako základní pojem. Pomocí několika výsledků z theorie limitních zákonů a z theorie čísel ukazuje, že uvedený systém axiomů je skutečně širší než systém Kolmogorovův, t. j. že z Kolmogorovova systému nelze zmíněné výsledky odvodit. Jak uvedl prof. Rényi, nemá jeho vlastní axiomatika ještě definitivní formu.

H. Steinhaus: Über einige grundsätzliche Fragen der mathematischen Statistik.

Referát byl rozdělen na několik částí; v každé z nich podal H. Steinhaus výklad jistého důležitého pojmu z theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Na několika příkladech z kinetické theorie plynů, ze statistické kontroly jakosti a z theorie statistických her vyložil pojem náhody, pravděpodobnosti, informace, důležitý pojem pravděpodobnosti „à priori" a oprávněnost Bayesova principu. Ukázal, že v některých případech je Bayesův princip oprávněný, jak lze odvodit použitím theorie rozhodovacích funkcí.

V průběhu konference pozdravil shromáždění P. C. Mahalanobis a při tom přednesl krátký referát, kde podal stručný přehled o statistických metodách používaných ve výběrových šetřeních v Indii a zmínil se o důležitosti těchto prací pro hospodářský život země. Uvedl některé konkretní výsledky těchto aplikací v zemědělství.

Ideologický referát

F. Fabian, J. Hájek: O některých základních otázkách matematické statistiky.

Celý referát byl rozdělen na tři části. V první části referátu učinili přednášející pokus vystihnout hlavní změny, na jejichž základě se matematická statistika stala exaktní vědou. Zejména byla vyzdvižena důležitost theorie výběrů a byla doložena dosud ještě mnohdy zanedbávaná skutečnost, že matematická statistika musí být důsledně budována na základech theorie pravděpodobnosti. V tomto směru byla vyzdvižena zásluha sovětské pravděpodobnostní školy. Druhá část referátu byla věnována filosofickým otázkám, při čemž byl především vyzdvižen gnoseologický význam matematické statistiky v souvislosti s induktivním myšlením. Značná část referátu byla věnována kritice positivismu (machismu) v matematické statistice a doložena objektivnost pravděpodobnostních zákonitostí v přírodních vědách. Třetí část byla věnována některým výhledům do budoucna jak po stránce theoretického výzkumu, tak po stránce výuky matematické statistiky a jejích aplikací.

Theoretické referáty a sdělení

F. Fabian: Theorie limitních zákonů.

Po vyložení reálného smyslu limitního zákona pro součet nezávislých náhodných proměnných, byly uvedeny některé nové podmínky pro konvergenci distribučních funkcí součtů nezávislých náhodných proměnných k normálnímu, k Poissonovu a k jednotkovému rozdělení. Byla uvedena nová zobecňující podmínka pro konvergenci náhodné proměnné ζ_n, která je funkcí libovolně závislých náhodných proměnných ξ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, při $n \to \infty$, k náhodné proměnné ζ podle pravděpodobnosti.

O. Fischer: Lineární odhad faktorů ve vícenásobné faktorové analyse.

Byl ukázán odhad pro získávání t. zv. společných faktorů z hodnot, které nabývají pozorované náhodné proměnné tak, aby byl maximalisován příslušný koeficient mnohonásobné korelace. Byly ukázány podmínky, kdy je tento problém identický se stanovením první hlavní komponenty prostoru společných faktorů. Byly dokázány různé další důležité věty o těchto faktorech.

J. Hájek: Vydatnost pořadových testů.

Přednášející definoval pojem α-testu a podrobil tento test všestrannému rozboru. Upozornil na praktické provádění a použití tohoto testu. Dokázal, že příslušná α-statistika má asymptoticky normální rozdělení, a stanovil asymptotickou vydatnost α-testu, která je 0,955, zatím co asymptotická vydatnost znaménkového testu je 0,637. Nakonec ukázal některé výsledky experimentálního zkoumání citlivosti α-testu a t-testu.

J. Janko: Vývojové tendence ve statistické indukci.

Prof. Janko ukázal velmi podrobně na vývoj a postupné propracování statistické indukce od původního problému ověřování hypotéz a problémů bodového a intervalového odhadu k nejobecnějším metodám, spjatým s theorií rozhodovacích funkcí. Ukázal na kriteria při volbě těchto rozhodovacích funkcí, založených na požadavcích stále rozsáhlejších potřeb praxe. Zevrubně srovnával případy parametrických a neparametrických hypotéz a poukázal na důležitost určování síly testů pro jednotlivé případy. Rovněž byla zdůrazněna důležitost zavedení sekvenčních výběrových metod. Konečně se zabýval problémem specifikace, při čemž nastínil řadu problémů, zejména pak prediktivní odhad při změněné struktuře. Bylo podáno řešení tohoto problému v konkretních případech výroby strojní a hutní. Rovněž řada dalších důležitých pojmů v referátě uvedených byla ilustrována na konkretních případech.

M. Jiřina: Regulární podmíněné pravděpodobnosti.

Byly uvedeny postačující podmínky pro to, aby podmíněná pravděpodobnost vzhledem k měřitelné transformaci byla pravděpodobnostní míra. Jedna z těchto podmínek je, že σ-algebra náhodných jevů má spočetnou basi a že pravděpodobnost je v jistém smyslu kompaktní.

A. Kotzig: Príspevok k problému hodnotenia odhadu poradia.

Referát obsahoval řešení tohoto problému: Pozorujme na prvcích daného souboru určitý kvantitativní znak. Dejme potom seřadit tyto prvky podle velikosti pozorovaného znaku určitému počtu osob. Tím získáme posloupnost permutací prvků daného souboru a úkolem je určit pravděpodobnosti takto získaných jednotlivých permutací. V referátu byly ukázány dva způsoby stanovení těchto pravděpodobností. Dále byly ukázány možnosti využití těchto metod. Ukázalo se, že takto vyhodnocené odhady pořadí umožňují zkoumat vztahy mezi znaky i tehdy, kdy jeden zkoumaný znak bylo možno měřit, kdežto u druhého jsme měli k disposici pouze informace ve formě permutací, popisující odhady pořadí.

J. Likeš: Příspěvek k theorii uspořádaných výběrů z exponenciálního základního souboru.

Byl řešen problém testování hypotéz o parametrech exponenciálního rozdělení a sestrojena kriteria založená na r nejmenších hodnotách ve výběru, na výběrovém rozpětí a skupinovém rozpětí. Byly odvozeny silofunkce jednotlivých testů a v případě skupinového rozpětí nejvýhodnější dělení výběru do skupin.

J. Machek: Rozdělení průměru r krajních hodnot v uspořádaném výběru.

Bylo odvozeno výběrové rozdělení za předpokladu normálního základního souboru, při čemž získaná distribuční funkce byla vyjádřena jako dvojnásobný integrál součinu již tabelovaných funkcí. Potom bylo poukázáno na výhodnost aplikací tohoto testu při některých destruktivních zkouškách.

J. Nedoma: Poznámka k McMillanově článku „Základní věty z theorie informací“ (AMS, 1954, 24, 196—219).

Citovaný článek se zabývá otázkami theorie informace v případě t. zv. diskretního kanálu. Po zavedení základních pojmů přednášející uvedl jistou základní větu z citovaného článku a ukázal, že v jejím důkaze je jistý krok, který je nesprávný, a dá se sestavit příklad, ze kterého plyne, že nejen v tomto místě důkazu je podstatná mezera, ale dokonce že věta za předpokladů užitých v důkaze není správná.

J. Novák: O spojitosti množinových funkcí a spojitém rozšíření pravděpodobnosti.

Přednášející uvedl definici pojmu spojitosti množinové funkce a předvedl vlastní způsob spojitého rozšiřování spojitých množinových funkcí z algebry na minimální σ-algebru, která ji obsahuje, bez doposud užívaných poměrně složitých pojmů vnější míry a měřitelných množin.

A. Pérez: Incertitude, entropie, information.

Pojem entropie a informace je definován bez obvyklého omezení na t. zv. konečné případy pomocí pojmu nejistoty, což je funkce Radon-Nikodymovy hustoty splňující jisté přirozené požadavky. Entropie má obdobné vlastnosti jako v konečném případě. Informace se definuje v kartézském součinu dvou abstraktních pravděpodobnostních polí jako zmenšení průměrné nejistoty, když jednu souřadnici známe. Je uvedena nutná a postačující podmínka pro existenci informace a řada vlastností informace, jako na př. její invariance právě jen vzhledem k suficientním transformacím.

Z. Režný: Použití maticové formulace vícerozměrného normálního rozdělení a theorie normální regrese na některé úlohy analysy rozptylu.

V referátě bylo ukázáno řešení problémů z Wilksovy theorie normální regrese a lineárních hypotéz pomocí maticové formulace; pak ukázány výhody tohoto způsobu vyjadřování zejména ve vícerozměrném případě. Poté bylo poukázáno na možnost řešení některých úloh z analysy rozptylu vhodným převedením problémů na test lineárních hypotéz, a to metodami uvedenými v prvé části sdělení.

J. Seitz: Poznámka ke spojité transformaci náhodných veličin.

Bylo podáno řešení problému, který je možno formulovat takto: Nechť $F_1(x)$ a $F_2(x)$ jsou spojité, stále rostoucí distribuční funkce, z nichž první je distribuční funkcí náhodné proměnné ξ. Jest úkolem stanoviti spojitou funkci $f(x)$ tak, aby veličina $f(\xi)$ měla distribuční funkci $F_2(x)$.

O. Šefl: Poznámka k theorii spojitých stacionárních procesů.

E. Sluckij nalezl postačující podmínku pro spojitost s pravděpodobností jedna stacionárního náhodného procesu. Jelikož každý náhodný proces lze konstruovat v prostoru nespojitých funkcí, neplyne ze spojitosti skoro jistě náhodného procesu spojitost skoro jistě jeho konkretních representací. Přednášející udal příklad konkretní representace skoro jistě spojitého stacionárního procesu pomocí dvojné řady náhodných proměnných, pro který spektrální hustota není rovna nule vně konečného intervalu.

A. Špaček: O zkušenosti v theorii statistického rozhodování.

Známe-li distribuční funkci v prostoru parametrů, je Bayesovo řešení statistického rozhodovacího problému nejlepší vzhledem k danému způsobu zhodnocení ztrát. Ve sdělení byla ukázána metoda konstrukce posloupnosti rozhodovacích funkcí (náhodného rozhodovacího procesu) tak, že posloupnost průměrných ztrát skoro jistě konverguje k Bayesově ztrátě. Postupnému získávání zkušeností odpovídá posloupnost empirických distribučních funkcí, které skoro jistě konvergují k distribuční funkci parametrů.

L. Truksa: Inverse stochastických procesů a fiduciální rozložení pravděpodobnosti.

Ve sdělení bylo ukázáno odvození fiduciálního rozložení parametru (t) v definitním stochastickém procesu $X(t)$ plynoucí z inverse procesu $X(t)$. Výsledky odvozené v konkretních případech procesu Poissonova, procesu binomického a posloupnosti binomické, se shodují s výsledky plynoucími z theorie konfidenčních mezí. Jsou uvedeny příklady reálných protějšků inverse zmíněných procesů týkajících se radioaktivního rozpadu a statistické kontroly jakosti v hromadné výrobě.

M. Ullrich: O odlehlých pozorováních.

Grubbsovo kriterium pro vyloučení dvou t. zv. odlehlých pozorování je zobecněno na případ k takových pozorování; pro případ normální distribuční funkce je kriterium pro vyloučení k pozorování stanoveno explicitně a umožňuje sestavit numerické tabulky.

K. Winkelbauer: Poznámka k sekvenční analyse.

Ve svém sdělení předvedl přednášející zobecnění Waldovy fundamentální identity, která tvoří základ podílového sekvenčního testu, na případ jednorozměrné náhodné procházky s pohyblivými mezemi, jež při každém kroku putují po reálné ose na obě strany od počátku přibližně aritmetickou řadou. Důkaz fundamentální identity pro uvedený případ je založen na vhodné transformaci dané posloupnosti náhodných proměnných v takovou, pro kterou lze dokázat, že transformovaná náhodná procházka skončí po konečně mnoha krocích s pravděpodobností rovnou jedné.

Theorie pravděpodobnosti a matematická statistika v přírodních vědách

J. Beránek: Statistická theorie turbulence.

Byl podán přehled klasických metod theorie turbulence s aplikacemi na hydrodynamiku a aerodynamiku. Rovněž bylo poukázáno na možnost aplikací na př. v astronomii a jinde. Autor poukázal ve svém referátu především na zásluhu A. N. Kolmogorova, který použil metod matematické statistiky v theorii turbulence k dalšímu systematickému rozvíjení této theorie. V referátu byla také ukázána řešení některých problémů turbulence matematicko-statistickými metodami.

A. Liška: Poznámky k zániku větvících se procesů a použití v chemii.

Bylo poukázáno na důležitost vypracování matematické theorie průběhu chemických reakcí, která ještě není celkově vybudována. Přednášející také ukázal způsob řešení některých problémů v tomto oboru pomocí theorie větvících se stochastických procesů.

J. Pantelopulos: Quelques résultats de mesure des fluctuations des vitesses et du débit solide sur le Danube.

Přednášející ve svém sdělení podal zprávu o způsobu měření kolísání podélné rychlosti a pevného nánosu a o výsledcích měření. Zjistilo se, že kolísání rychlosti tvoří stacionární Gaussův proces; byla změřena jeho korelační funkce a přibližně odhadnuta nutná doba měření, která odpovídá požadované přesnosti. Také se zjistilo, že doba měření pro jistou přesnost musí být delší, než které se užívalo doposud. Uvedená měření jsou důležitá pro stavbu vodních děl na Dunaji.

Theorie pravděpodobnosti a matematická statistika v technice

M. Bilwachs: Necentrální t-test s použitím rozpětí.

Byla ukázána možnost zjednodušení praktické aplikace uvedeného testu nahrazením směrodatné odchylky výběrovým rozpětím. Byly nalezeny potřebné distribuční funkce a ukázán výpočet hodnot mezí pro zvolené pravděpodobnosti.

V. Horálek: Operační charakteristika přejímky jedním výběrem při několika jakostních znacích.

Bylo ukázáno na výhody a nevýhody přejímacích postupů, kde buď každý prvek výběru kontrolujeme vzhledem k několika jakostním vlastnostem najednou, nebo kde nejprve všechny prvky zkontrolujeme vzhledem k jednomu znaku, potom ke druhému atd. Byly určeny operační charakteristiky pro oba postupy, proveden jejich rozbor a srovnání.

V. Klega: Metody kontroly seřízení automatisovaných operací ve strojírenství.

Byly uvedeny tři metody kontroly seřízení automatů a poloautomatů, na nichž se provádí celý cyklus opracování bez zásahu dělníka. Bylo poukázáno na výhody aplikace statistických metod za předpokladu, že kriterium přesnosti výroby je menší než 1 a uvažovalo se seřízení pomocí universálního měřicího přístroje, podle znamének odchylek a podle iterací.

M. Knotek: Aplikace matematické statistiky na hutní výrobu a metalurgické procesy.

Přednášející se zabýval především základní problematikou sledování metalurgických procesů a jejich rozborem s hlediska metod matematické statistiky. Ukázal na základní rysy a rozdíly mezi aplikací matematické statistiky ve výrobě strojírenské a ve výrobě hutní. Zdůraznil především daleko větší komplikovanost v procesech, které v hutnictví máme sledovat a podrobovat rozborům. Byla také zdůvodněna důležitost a aktuálnost aplikací matematicko-statistických metod jednak přímo v kontrole, jednak v metodice výzkumu a při objasňování důležitých theorií vlastností kovů (statistická theorie lomu a únavy materiálu).

Z. Koutský: Reléový stroj pro statistické rozhodování.

Byl popsán stroj k provádění Waldovy sekvenční analysy a předveden v činnosti. Stroj byl sestaven s běžných součástek, kterých se používá v telefonních ústřednách; žádaný sekvenční test lze do stroje nastavit. Kromě praktického použití v závodech pro skutečné provádění sekvenčních testů lze stroje použít také na př. pro experimentální stanovení operačních charakteristik sekvenčních testů a průměrných rozsahů výběrů.

J. Křepela: Přejímání partií rozdělených do stejných podskupin.

V technické praxi se často vyskytuje otázka stanovení přejímacího postupu v případě, kdy partie postoupená ke kontrole je rozdělena do stejných podskupin. Běžné přejímací postupy takové rozdělení nerespektují. Ukázalo se, že pro rektifikační i nerektifikační případy lze vhodně formulovat požadavky na přejímací postupy, které respektují rozdělení dodávky do podskupin a tyto přejímací postupy lze podle nich jednoznačně stanovit.

B. Pardubský: Použití matematické statistiky při rozboru výrobních chyb.

Každý výrobní proces podléhá celé řadě vlivů jak náhodných tak systematických, které způsobují výrobní chybu. Ve sdělení byly sledovány frekvenční funkce výrobních chyb, které vznikají při automatické výrobě součástí na plnoautomatických tyčových soustruzích a byly (za jistých předpokladů) provedeny odhady příslušných parametrů. Bylo ukázáno, že změny rozměrů obráběného povrchu při soustružení možno považovat za stochastický proces, takže potom lze takový výrobní postup charakterisovat parciálními diferenciálními rovnicemi Kolmogorovovými.

L. Prášek: Statistická theorie únavy materiálu.

Bylo pojednáno o určení vztahů mezi zatížením a počtem cyklů, po kterých nastane znehodnocení určitého zkoumaného vzorku v případě, kdy na součástku působí cyklické zatěžování; při tom totiž znehodnocení únavou materiálu nastane při zatížení nižším, než je zatížení kritické. Byl udán úplný únavový diagram, metody pro určení meze únavy a dolní meze všech únavových křivek.

L. Prouza: Některé nové statistické problémy v hromadné výrobě.

Přednášející uvedl řadu problémů souvisících s použitím přejímacích postupů. Ukázal, že jedním z hlavních problémů je stanovení risikových funkcí, které odpovídají skutečným poměrům. Z dalších problémů se zmínil především o získávání pro praxi užitečných řešení rozhodovací úlohy a o problému stanovení závislosti velikosti výběru na velikosti základního souboru. Potom nastínil problematiku souvisící s technikou náhodného výběru, s použitím plynulých přejímacích postupů a s automatisací statistické kontroly prováděné Waldovým sekvenčním testem. Nakonec rozebral možnost zlepšení kontroly výrobních procesů použitím theorie stochastických procesů.

J. Sedláček: Theorie jakostního třídění.

Ve sdělení byla podána metoda konstrukce regulačního diagramu pro případ, že znak je klasifikován podle dvou mezí do tří tříd, při čemž hodnocení znaku se provádí podle jedné zkoušky, jednak s ohledem na maximální, jednak na minimální hodnotu. Byly ukázány výhody zavedení tohoto regulačního diagramu pro provozní mezioperační kontrolu — zejména ve strojírenství.

A. Žaludová: O současném stavu aplikací matematické statistiky ve strojírenství.

Ve svém referátu poukázala přednášející na velmi širokou problematiku, kterou se zabývá skupina pro matematickou statistiku theoretického výzkumu VÚTT. Bylo ukázáno na všechny regulační metody, jichž se používá ve výrobních provozech čsl. strojírenství. Především pak bylo podtrženo, že každému zavádění regulace vždy předchází statistický rozbor výrobních podmínek. Bylo ukázáno na široké uplatnění statistických výběrových přejímacích postupů. Přednášející se dále zabývala výsledky, kterých bylo dosaženo v oboru funkčních zkoušek sdělovacích kabelů, při používání theorie plánovaných pokusů, lineární a vícenásobné regrese, při řešení otázek stanovení tolerancí uzavírajícího článku rozměrového obvodu atd. Uvedla také práce z oboru zkoumání únavy materiálu.

Theorie pravděpodobnosti a matematická statistika v chemickém a potravinářském průmyslu

A. Robek: Potravinářská výroba a metody matematické statistiky.

Byl zhodnocen význam matematicko-statistických metod v potravinářském průmyslu a uvedeny některé výsledky dosažené pomocí těchto metod. Na závěr byly nastíněny úkoly, před kterými stojí matematičtí statistikové v potravinářském průmyslu.

V. Rýpar: Statistická kontrola jakosti výroby v chemickém průmyslu.

Bylo ukázáno na dosud nedostatečné využití metod matematické statistiky v chemickém průmyslu a naznačeny cesty využívání statistických metod jak při zavádění regulace výroby, tak při ověřování tolerancí, při zjišťování rozsahu závadnosti, míst vzniku a příčin různých vad atd.

Theorie pravděpodobnosti a matematická statistika ve zdravotnictví

O. Benešová: Zkušenosti z jednoroční spolupráce statistika v biologické kontrole léčiv.

Bylo ukázáno na konkretních příkladech, jak vlivem statistických rozborů titračních výsledků se začala objektivně hodnotit přesnost jednotlivých titrací a jak byly titrace na základě toho zlepšovány a zpřesňovány.

M. Josífko: Statistické metody pro hodnocení biologických zkoušek.

Byl podán rozbor použitelnosti statistické metody při hodnocení biologických zkoušek, při čemž bylo konstatováno zaostávání theoretické práce v tomto směru u nás proti potřebám diktovaným praxí. Dále byla vysvětlena metodika provádění biologických zkoušek a definován pojem biologické zkoušky kvantální a kvantitativní. V referátu byly podrobně rozebrány statistické metody hodnocení kvantálních biologických zkoušek pomocí odhadů různých charakteristik příslušných distribučních funkcí. Nakonec byla zdůrazněna základní otázka, kterou je pro přípustnost biologických zkoušek problém přesnosti získaných odhadů.

F. Link: Odhad významnosti kvantálných odpovedí pri rutinných prácach.

Byl podán návrh aplikace χ^2-testu na složenou hypothesu, že mezi standardem a zkoušeným přípravkem není rozdílu a že závislost odpovědí (vyjádřených v probitech) na logaritmu dávky je dána lineární regresní funkcí. Při aplikaci se používá střídavě dávek standardu a zkoušeného přípravku.

V. Malý: Logaritmicko-normální rozdělení.

Byla ukázána a zdůvodněna nutnost aplikace tohoto rozdělení v biologii a zdravotnictví a uvedena normalisační transformace, kterou je transformace logaritmická. Byl nastíněn historický vývoj tohoto problému a uvedené rozdělení podrobně analysováno. Konečně bylo ukázáno, který materiál a za jakých podmínek vyhovuje uvedené distribuční funkci.

M. Špačková: Aplikace statistických metod v biologické kontrole léčiv.

Bylo referováno o kvantálních a kvantitativních metodách jednodávkových a vícedávkových, a to přímých nebo takových, které hodnotí pokus na základě srovnání se standardním preparátem. Uvedené metody byly ukázány na pokusech krátkodobých, dlouhodobých, případně křížových. K celkovému obrazu pokusu bylo použito analysy rozptylu. Nakonec bylo pojednáno o použití regresních přímek a různých testů významnosti.

V. Trčka: Praktické zkušenosti s hodnocením LD 50 různými metodami.

Bylo provedeno srovnání většího počtu výsledků hodnocení *LD* 50 různých látek metodou probitovou s výsledky některých jednodušších metod. Bylo ukázáno, že výsledky dosažené jednotlivými metodami vesměs leží uvnitř intervalu spolehlivosti hodnoty *LD* 50 vypočítané probitovou metodou. Bylo provedeno srovnání několika užívaných metod.

M. Vacek: Dnešní stav zdravotnické statistiky.

Byl uveden rozdíl mezi použitím statistických metod ve zdravotnictví dříve a dnes a ukázáno, že hlavním úkolem zdravotnické statistiky je sledovat vyvoj stavu zdraví obyvatelstva a být nástrojem k prohlubování léčebně preventivní péče. Byla podtržena nutnost přesné a metodicky jednotně vedené zdravotnické evidence. Bylo zdůrazněno, že při zpracování získaného statistického materiálu má největší význam technicky správné využití výběrových metod. V praxi se ukazuje, že závažnou nesnází u mnohých statistických šetření je dosud neúplnost, nepřesnost a metodická nejednotnost některých podkladů pro zdravotnickou statistiku. Poměrně dobrá situace při aplikacích statistických metod byla konstatována ve zdravotnickém výzkumu. Ke konci referátu byly shrnuty dnešní úkoly naší zdravotnické statistiky. *Fr. Fabian*, Praha.

STUDIJNÍ POBYT AKADEMIKA EDUARDA ČECHA V BUDAPEŠTI

V rámci československo-maďarské kulturní dohody došlo v listopadu 1954 ke čtrnáctidennímu studijnímu pobytu akad. E. ČECHA v Budapešti. E. Čech přednášel 12. listopadu v Matematické společnosti J. Bolyaie na thema *Pojem styku jako základní pojem diferenciální geometrie* a 16. listopadu v Matematickém ústavu university na thema *Diferenciální geometrie transformací*. Obě přednášky byly spojeny s živou diskusí. Kromě toho došlo průběhem návštěvy k řadě plodných rozhovorů jednak o různých speciálních vědeckých problemech, jednak o prohloubení trvalé spolupráce mezi matematiky obou spřátelených států. *E. Čech*, Praha.

IV. SJEZD ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ V PRAZE

Československá akademie věd schválila a k dalšímu řízení předložila návrh matematicko-fysikální sekce, aby byl ve dnech 1. až 8. září 1955 v Praze uspořádán IV. sjezd československých matematiků s početnou zahraniční účastí.

Na sjezdu budou prosloveny půlhodinové referáty o stavu a perspektivě matematických věd v jednotlivých lidově demokratických státech, dále hodinové odborné přednášky vynikajících matematiků a konečně kratší vědecká sdělení, jež budou přednesena ve zvláštních sekcích.

Podrobnější zprávu o organisaci sjezdu přineseme v příštím čísle.

J. Novák, Praha

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

V matematické obci pražské pokračovaly i letos od začátku studijního roku 1954/55 pravidelné pondělní přednášky a diskuse (od 17 hod. 15 min.). Účast na nich byla značná a diskuse byly živé.

Konaly se tyto přednášky a diskuse:

25. 10. 1954: *V. Jarník, M. Katětov, Vl. Knichal*, O mezinárodním matematickém kongresu v Amsterodamu. (Viz referát na str. 89.)

1. 11. 1954: *E. Čech, M. Fiedler, Z. Nádeník, F. Vyčichlo*, O matematické konferenci v Berlíně, pořádané na oslavu B. Riemanna ve dnech 10. až 16. 10. 1954. (Viz referát na str. 90.)

3. 11. 1954: *Jos. Novák, Lad. Truksa, Ant. Špaček*, O sjezdu pro počet pravděpodobnosti a matematickou statistiku (Berlín 19. 12. 1954).

8. 11. 1954: *Miloslav Jůza*, O spojitých funkcích, které nemají derivace.

15. 11. 1954: *G. F. Rybkin*, O vydávání matematické literatury v SSSR. (Viz referát na str. 90.)

22. 11. 1954: *Jar. Kurzweil*, O metrické theorii čísel. (Viz referát na str. 92.)

24. 11. 1954: *Józef Lukaszewicz*, O práci skupiny pro aplikace matematiky ve Wroclawi.

25. 11. 1954: Akad. *L. Kalmár*, O spojitých funkcích v Baierově prostoru a jejich souvislosti s matematickou logikou. (Viz referát na str. 94.)

29. 11. 1954: *Ladislav Procházka*, Některé sovětské výsledky z theorie grup.

6. 12. 1954: *E. Čech*, Pojem styku jako základ diferenciální geometrie.

Redakce.

ČINNOST BRNĚNSKÉHO ODBORU JČMF

Brněnský odbor Jednoty československých matematiků a fysiků zahájil svou činnost v tomto školním roce přednáškou prof. O. Borůvky „O vědeckém díle Matyáše Lercha" konanou dne 28. října 1954. Další přednášku měl dne 11. XI. 1954 prof. dr. A. Vašíček pod názvem „Měření indexu lomu a tloušťky tenkých vrstev" a 25. XI. dr. J. Kopřiva „Několik zajímavostí z theorie čísel".

Kromě těchto přednášek, které se konají pravidelně jednou za čtrnáct dní, pořádá JČMF v Brně každý čtvrtek „Diskuse o nových pracích brněnských matematiků". Zatím byly na pořadu tři referáty: „K problému Zarankiewicze" (dr. K. Čulík) „Srovnávací oscilační theorémy" (dr. M. Laitoch), „Svazy s metrikou" (dr. M. Mikulík).

Miloš Zlámal, Brno.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova 40, telefon 2462-41. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. Účet Státní banky československé č. 38-161-0087, číslo směrovací 0152-1. Novinové výplatné povoleno Okrskovým poštovním úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Vyšlo 31. III. 1955. D 02229