O JISTÝCH ROVINNÝCH KONFIGURACÍCH $(12_4, 16_3)$, KTERÉ OBSAHUJÍ ASPOŇ JEDEN BOD TYPU D

VÁCLAV METELKA, Liberec.

(Došlo dne 14. ledna 1955.) DT:513.84

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

Úkolem tohoto článku je stručně informovat čtenáře o jistých nových konfiguracích $(12_4, 16_3)$, které obsahují aspoň jeden bod typu D a navázat tak na předchozí článek mého bratra.[1] Výsledky, které zde uvádím jsou původní a dosud neuveřejněné, přesto se však omezuji pouze na jejich citaci bez důkazů, jež podám v nejbližší době.

V předchozím článku[1] nastínil můj bratr program, který jsme si stanovili pro sestavení tabulky všech možných konfigurací $(12_4, 16_3)$, jež se dají realisovat body a přímkami v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel. Ačkoliv druhý bod tohoto programu není ještě zcela uzavřen, chtěl bych přesto v tomto článku čtenáře aspoň stručně informovat o některých nových konfiguracích $(12_4, 16_3)$, obsahujících body typu D a naznačit postup hledání příslušných schemat.

1. Schemata. Vycházíme z předpokladu existence aspoň jednoho bodu typu D (dále stručně D-bodu). Nechť *9* je D-bodem a nechť je oddělen od bodů *10, 11, 12,* při čemž body *10, 11* jsou spojeny konfigurační přímkou. Pak také bod *12* je D-bodem, odděleným od bodů *9, 10, 11.* Třetí bod na spojnici *10, 11* označme *1.* Stručně to zapíšeme *9* : *10*; *9* : *11*; *9* : *12*; *12* : *10*; *12* : *11*; *1*—*10*—*11.*

Z těchto vztahů především plyne, že bod *10* musí být oddělen ještě od jednoho bodu, kterým nemůže být bod *1* ani *11* (neboť s nimi je spojen) a označme ho tedy *2* (čili *10* : *2*).

Dokažme nyní, že za těchto předpokladů musí být bod *11* spojen s bodem *2* konfigurační přímkou.

Ze 4 konfiguračních přímek incidentních s bodem *9* prochází jediná bodem *2* (čili *9*—*2*);

[1]) *J. Metelka*: „O rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$". Časopis pro pěstování matematiky *80* (1955), 133—145. — Užívám zde symboliky a terminologie článku právě citovaného.

ze 4 konfiguračních přímek incidentních s bodem *12* prochází jediná bodem *2* (čili *12—2*);

ze 4 konfiguračních přímek bodem *10* neprochází žádná bodem *2* (protože *10* : *2*), a tedy

ze 4 konfiguračních přímek incidentních s bodem *11* musí jediná procházet bodem *2*, což plyne takto:

Z právě uvedených šestnácti konfiguračních přímek je patnáct navzájem různých (přímku *1—10—11* jsme počítali dvakrát) a z nich tedy musí (aspoň) tři být incidentní s bodem *2*. Tím je proveden důkaz, že skutečně *11—2*. Prozatím víme, že bod *11* je oddělen od bodů *9*, *12* a musí být tudíž oddělen ještě od jednoho dalšího bodu (různého od bodů *1*, *2*, *10*). Nazveme si tento bod *3* (tedy *11* : *3*). Z uvedených patnácti různých konfiguračních přímek procházejí právě tři bodem *2* a musí jím také procházet přímka šestnáctá, kterou si zatím nazveme p. Bodem *3* procházejí z těchto patnácti konfiguračních přímek (různých od p) jen tři, totiž *3—9*, *3—10*, *3—12* (neboť *11* : *3*), z čehož plyne, že bod *3* je incidentní také s přímkou p. Právě tak bodem *1* procházejí jen tři z konfiguračních přímek různých od přímky p (totiž přímky *1—9*, *1—12*, *1—10—11*) a nalezli jsme tak třetí bod na přímce p a konfigurační přímka $p \equiv$ *1—2—3* je tím určena.

Bodem *9* procházejí *4* (navzájem různé) konfigurační přímky *9—1—a*, *9—2—b*, *9—3—c*, *9—d—e*, kde o číslicích a, b, c, d, e ovšem platí, že jsou navzájem různé a také různé od *1, 2, 3, 9, 10, 11, 12*. Možno je tedy nahradit dosud neobsazenými číslicemi *4, 5, 6, 7, 8*, což učiníme a zjistíme, že každá z hledaných konfigurací má schema tvaru podobného tomuto:

$$9\begin{pmatrix}1, 2, 3, 7\\4, 5, 6, 8\end{pmatrix};\quad 1\begin{pmatrix}2, 10\\3, 11\end{pmatrix};\quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\6, 7, 5, 8\end{pmatrix};\quad 10\begin{pmatrix}3, 4, 6\\7, 5, 8\end{pmatrix};\quad 11\begin{pmatrix}2, 4, 5\\8, 6, 7\end{pmatrix}.$$

Toto schema má obdobný smysl, jako schema uvedené v odstavci 3 citovaného článku. Všechna incidenční schemata pak dostaneme, když v závorkách za čísly *12, 10, 11* najdeme všechny možné sestavy čísel v těchto závorkách se vyskytujících (ovšem s příslušnou opatrností, jako v citovaném třetím odstavci předchozího článku). Poznamenávám zde výslovně, že vzhledem k daným předpokladům (*1—2—3*, *1—10—11*, ... atd.) nemůžeme již přemísťovat čísla v závorce za jedničkou a není třeba ani měnit čísla v závorce za devítkou.

Podrobný výpočet těchto schemat zde neprovádím, neboť je velmi rozsáhlý a pracný; po vyloučení schemat ekvivalentních[2]) konfigurací dostaneme ještě značný počet (přes 90) možností. Veliká část těchto schemat se však nedá geometrickými konfiguracemi realisovat, což se ovšem musí dokazovat téměř u každého schematu zvláště.[3]) Přesto se mně podařilo najít asi 40 realisovatel-

---

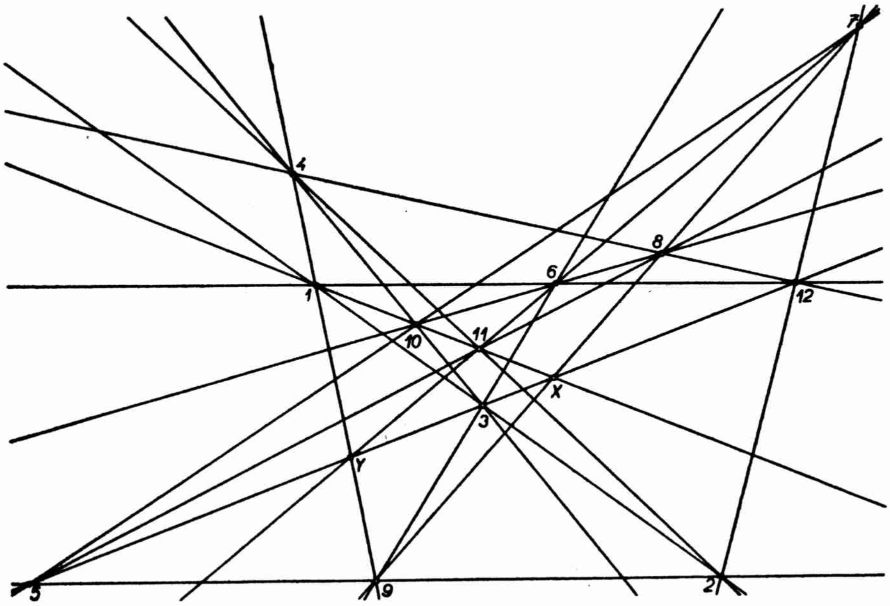
[2]) „*Ekvivalentní*" ve smyslu definice z citovaného článku.

[3]) Tyto důkazy se provádějí ve vhodně zvoleném souřadnicovém systému obdobným způsobem, jako je proveden důkaz věty 9 v citovaném článku mého bratra.

ných schemat a tento počet bude — jak se předběžným zkoumáním jeví — ještě překročen.

2. Některé konfigurace (12_4, 16_3) s D-body. Současně s D-body se ve všech schematech vyskytují vždy C-body a aspoň jeden B-bod, nikdy však A-body, jak ostatně ukazují také výsledky mého bratra. D-body vystupují v těchto schematech vždy jen dva, s výjimkou jediného případu:

$$9\begin{pmatrix}1, 2, 3, 7\\ 4, 5, 6, 8\end{pmatrix};\quad 1\begin{pmatrix}2, 10\\ 3, 11\end{pmatrix};\quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 6, 7, 5, 8\end{pmatrix};\quad 10\begin{pmatrix}3, 4, 6\\ 7, 5, 8\end{pmatrix};\quad 11\begin{pmatrix}2, 4, 5\\ 8, 7, 6\end{pmatrix},$$



Obr. 1.

který je typu $B_1C_7D_4$ (D-body jsou *1, 5, 9, 12*), k němuž patří geometrická konfigurace s těmito body:

$$1(a, 1, a);\ 2(0, 1, 0);\ 3(1, 1, 1);\ 4(7a^2 - 6a + 3, 2, 2a);\ 5(1, 1, 0);$$
$$6(a, 1, 1);\ 7(0, -7a^2 + 2a + 1, 1);\ 8(1 - a, -7a^2 + 2a + 1, 1);$$
$$9(1, 0, 0);\ 10(1, -7a^2 + 2a + 2, 2);\ 11(1 - a, 2 - 2a, 1);\ 12(0, 0, 1),$$

kde a je kořenem rovnice $7x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$.

Ve všech ostatních schematech (i v těch, která dosud nejsou prozkoumána) jsou již jen dva D-body a počet E-bodů není vyšší než dvě.

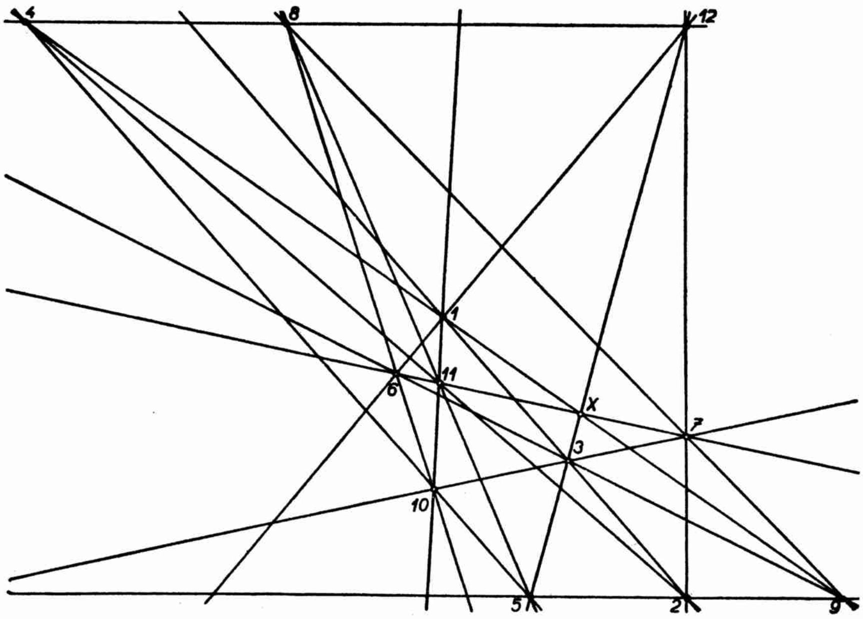
Existují pouze tři konfigurace se dvěma E-body (jež obsahují zároveň D-body). Uvádím zde dvě z nich. Jedna z těchto konfigurací má body o souřadnicích:

1(1, 2, 1); *2*(0, 1, 0); *3*(1, 1, 1); *4*(4, 10, 5); *5*(1, 1, 0); *6*(1, 2, 2);
7(0, 2, 3); *8*(4, 10, 15); *9*(1, 0, 0); *10*(8, 14, 9); *11*(4, 6, 5); *12*(0, 0, 1) ,

jejíž úplné schema zní:

$$9\begin{pmatrix}1, 2, 3, 7\\ 4, 5, 6, 8\end{pmatrix};\quad 1\begin{pmatrix}2, 10\\ 3, 11\end{pmatrix};\quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 6, 7, 5, 8\end{pmatrix};\quad 10\begin{pmatrix}3, 5, 6\\ 4, 7, 8\end{pmatrix};\quad 11\begin{pmatrix}2, 5, 6\\ 4, 8, 7\end{pmatrix}. \quad (1)$$

Nakreslil jsem tuto konfiguraci na obr. 1. Chtěl bych na tomto místě čtenáře upozornit na další „náhodné" incidence, které se u této konfigurace objevují.



Obr. 2.

Tři z konfiguračních přímek (*1—10—11*, *7—8—9*, *3—5—12*) se zde protínají v jediném bodě, který jsem na obrázku označil X, a další tři přímky (*6—7—11*, *1—4—9*, *3—5—12*) procházejí jediným bodem, označeným na obr. Y. (Doporučuji čtenáři, aby si tuto incidenci ověřil výpočtem.)

Druhá z konfigurací se dvěma E-body, jež obsahuje zároveň D-body, jest

1(3, 2, 3); *2*(0, 1, 0); *3*(1, 1, 1); *4*(4, 2, 3); *5*(1, 1, 0); *6*(3, 2, 2);
7(0, 2, 5); *8*(4, 2, 5); *9*(1, 0, 0); *10*(8, 6, 3); *11*(20,14, 15); *12*(0, 0, 1);

její úplné schema zní

$$9\begin{pmatrix}1, 2, 3, 7\\ 4, 5, 6, 8\end{pmatrix};\quad 1\begin{pmatrix}2, 10\\ 3, 11\end{pmatrix};\quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 6, 7, 5, 8\end{pmatrix};\quad 10\begin{pmatrix}3, 4, 6\\ 7, 5, 8\end{pmatrix};\quad 11\begin{pmatrix}2, 5, 6\\ 4, 8, 7\end{pmatrix} \quad (2)$$