Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1955

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0080|log31

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

2

80

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 80 • Č. 2 • STR. 133—260 • PRAHA 31. V. 1955

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky“*)

SVAZEK 80 (1955)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Vedoucí redaktor:

IVO BABUŠKA

Redakční rada:

O. FISCHER, VL. KNICHAL, J. KURZWEIL, J. MAŘÍK, L. MIŠÍK, ZB. NÁDENÍK, FR. NOŽIČKA, L. RIEGER, ANT. ŠPAČEK, O. VEJVODA, FR. VYČICHLO, M. ZLÁMAL a J. HOLUBÁŘ (výkonný redaktor)

Obsah:

Články:

Upozorňujeme čtenáře na zprávu o IV. sjezdu československých matematiků v Praze, která je otištěna na str. 259.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 80 * PRAHA, 31. V. 1955 * ČÍSLO 2

ČLÁNKY

O ROVINNÝCH KONFIGURACÍCH $(12_4, 16_3)$

JOSEF METELKA, Olomouc.

(Došlo dne 14. ledna 1955.) DT:513.84

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

Článek je nejprve referátem, který líčí historii a dnešní stav bádání o rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$. Pak je přikročeno k plnění prvního bodu programu, který je navržen za tím účelem, aby byl získán přehled o všech možných konfiguracích $(12_4, 16_3)$: Jsou hledány všecky konfigurace, které mají aspoň jednu čtveřinu bodů typu A. V literatuře byly z těchto konfigurací známy dosud jen čtyři, v článku jsou připojeny ještě další čtyři a je podán důkaz, že tím jsou vyčerpány všechny možnosti.

1. Historie a nynější stav problému. Rovinnými konfiguracemi $(12_4, 16_3)$ — t. j. skupinami 12 bodů a 16 přímek v rovině, jejichž vzájemný vztah je ten, že každým z bodů procházejí čtyři přímky, na každé přímce leží tři body — se začal zabývat akademik BYDŽOVSKÝ v r. 1939.[1]) Tehdy byly známy pouze dvě takové konfigurace, tradičně označované A I a A II a zvané konfigurace DE VRIESOVY,[2]) ačkoliv první z nich znali už HESSE[3]), SALMON[4]) a REYE.[5]) Obě

[1]) *B. Bydžovský*: „Über eine ebene Konfiguration $(12_4, 16_3)$", Věstník Král. čes. spol. nauk, roč. 1939.

[2]) *J. de Vries*: „Über gewisse ebene Konfigurationen" Acta mathematica, 12 (1889), str. 67.

[3]) *O. Hesse*: „Über Curven dritter Ordnung..." J. reine angew. Math. 36, 1848, str. 153—176. Sebrané spisy, str. 155 a násl. Viz též „Eine Bemerkung zum Pascalschen Theorem" J. reine angew. Math. 41, 1851, str. 270, Sebrané spisy (Mnichov 1897), str. 254.

[4]) *G. Salmon* (něm. překl. W. FIEDLER): Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 1873, čl. 151, 152.

[5]) *Th. Reye*: „Konstruction der Konfigurationen" Acta Math. 1 (1882), str. 97 a další, viz též Geometrie der Lage, 3. díl, 1910, str. 234.

byly několikrát popsány různými spisovateli, na př. H. Schroeterem,[6]) Zachariasem[7]) a j. V dalších řádcích zavedeme jisté třídění do typů a pak uvidíme, že obě konfigurace *A* I, *A* II jsou téhož typu A_{12}. Akademik Bydžovský byl první, který objevil nový typ konfigurací, typ A_4B_8, až dosud označovaný *B* I. Konfigurace $(12_4, 16_3)$ pak zůstaly v ohnisku jeho zájmu a vedl o nich se mnou čilou korespondenci po větší část války i po válce. Odtud vznikl můj článek,[8]) v němž se poprvé vyskytla čtvrtá konfigurace *B* II rovněž typu A_4B_8. V dalším průběhu se pak začal počet konfigurací $(12_4, 16_3)$ mimo nadání rychle zvětšovat a všecka kriteria pro třídění, která navrhoval akad. Bydžovský, nepostačovala. Upustili jsme proto od uveřejňování dalších konfigurací, dokud nebude nalezen pořádací princip. Akad. Bydžovský sám se k problému vrátil ještě na sjezdu čsl.-polských matematiků r. 1949[9]) a nejnověji v českém i mezinárodním znění Časopisu.[10])

Dnes je bezpečně známo kolem 50 konfigurací $(12_4, 16_3)$ vesměs geometricky realisovaných a je téměř jisto, že jich bude nalezeno ještě několik desítek. Dnešní můj článek je částí programu, který jsme na sebe vzali s mým bratrem: Sestavit úplnou tabulku všech možných konfigurací $(12_4, 16_3)$, které se dají v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel realisovat. Pokud se speciálně týče tohoto článku, je to zároveň splnění programu, který jsem uvedl na závěr svého článku citovaného výše.

2. Několik obecných poznámek, typy konfigurací. Body konfigurace budeme značit číslicemi *1*, …, *12*. Okolnost, že tři z nich — na př. *1*, *11*, *12* — leží na konfigurační přímce, budeme značit *1*—*11*—*12*. Okolnost, že dva body — na př. *2* a *3* — nejsou spojeny konfigurační přímkou, budeme značit *2* : *3* a číst „*bod 2 je oddělen od bodu 3*“.

Každý konfigurační bod je oddělen od tří dalších bodů. Nechť na př. platí: *1* : *2*, *1* : *3*, *1* : *4*. Podle toho, jaký je vzájemný vztah bodů *2*, *3*, *4*, zařadíme bod *1* do jednoho z pěti typů:

Typ *A*: *2* : *3*, *3* : *4*, *2* : *4*. V tomto případě jsou také body *2*, *3*, *4* typu *A* a tvoří spolu s *1* čtveřici navzájem oddělených bodů.

Typ *B*: *2*—*3*, *3*—*4*, *2*—*4* není však *2*—*3*—*4*. (Body *2*, *3*, *4* jsou „spojeny do trojúhelníka“.)

---

[6]) *H. Schroeter*: Über ebene Konfigurationen. J. reine angew. Math. 108, 1891, str. 297.

[7]) *M. Zacharias*: „Untersuchungen über ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$“, Deutsche Mathematik, roč. 6, č. 2/3. — Z dalších autorů lze jmenovat *J. M. Felda, Morleye, Martinettiho* (podrobněji viz v cit. práci Zachariasově).

[8]) *J. Metelka*: O jistých konfiguracích $(12_4, 16_3)$ v rovině. Věstník Král. čes. spol. nauk, roč. 1944.

[9]) *B. Bydžovský*: „Poznámky k theorii konfigurace $(12_4, 16_3)$“, Časopis pro pěst. matem. 74, 1950 (Zprávy ze společného sjezdu matematiků čsl. a polských).

[10]) *B. Bydžovský*: „O dvou nových konfiguracích $(12_4, 16_3)$“, Časopis pro pěst. matem. 79, 1954 a „Über zwei neue ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$“ — Чехословацкий математический журнал — Czechoslovak Mathematical Journal, 4 (79), 1954.

Typ C: *2—3*, *2—4*, *3 : 4* nebo případ vzniklý permutací čísel *2, 3, 4*.

Typ D: *2 : 3*, *2 : 4*, *3—4* nebo případ vzniklý permutací čísel *2, 3, 4*.

Typ E: *2—3—4*.

První třídění konfigurací bude tedy podle typů jejich bodů. Srozumitelný symbol A_{12} udává, že všech 12 konfiguračních bodů je typu A. To jsou — jak již řečeno — obě de Vriesovy konfigurace A I a A II. Konfigurace v článcích citovaných sub [1]) a [8]) jsou typu A_4B_8.

Poznámka. Uspořádání typů a jejich označení se vyvinulo v průběhu korespondence mezi akad. Bydžovským a mnou a je zdůvodněno jen historicky. V tomto pořadí totiž byly nové typy skutečně nalézány. Nyní jsou již zjištěny konfigurace, v nichž se vyskytují body všech typů.

Jak ukazují hoření příklady — a desítky jiných — nestačí typ konfigurace k úplné klasifikaci. Obě konfigurace A I a A II jsou téhož typu, ale liší se *incidenčním schematem*, t. j. schematem, udávajícím, jakým způsobem jsou body mezi sebou spojovány. Při řešení problému najít všecky možné konfigurace je tedy nejprve nutno najít všecka možná incidenční schemata. Tím vznikají další otázky: Mohou dvě různá incidenční schemata představovat tutéž konfiguraci? Mohou dvě různé konfigurace mít totéž incidenční schema?

A tu je vidět, že musíme neprve definovat, které konfigurace budeme pokládat za různé. Podle posledních našich výsledků se jeví jako nejvhodnější tato definice:

Definice: *Dvě incidenční schemata jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, jestliže jedno přechází v druhé permutací číslic 1, ..., 12. Dvě konfigurace jsou ekvivalentní právě tehdy, jsou-li jejich incidenční schemata ekvivalentní.*

Jen touto definicí dosáhneme toho, že nebudeme mít nekonečně mnoho typů konfigurací. Kdybychom za ekvivalentní považovali jen takové dvě konfigurace, které se na sebe dají převést projektivními transformacemi, měli bychom na př. nekonečnou dvouparametrickou množinu de Vriesových konfigurací A I.

Abychom tedy získali přehled o všech možných (různých) konfiguracích, najdeme nejprve všecka možná různá incidenční schemata a budeme pak jednotlivě zkoumat, zda ke každému z nich patří skutečně *geometrická konfigurace*, t. j. zda se schema dá nad tělesem čísel komplexních realisovat body a projektivními přímkami.

Pro konkretní provádění tohoto programu jsme si stanovili studium konfigurací v tomto pořadí:

1. Konfigurace, které mají aspoň jeden bod typu A. (To znamená aspoň jednu čtveřici bodů typu A.)
2. Konfigurace, které mají aspoň jeden bod typu D a nemají body typu A.
3. Konfigurace s aspoň jedním bodem typu E a bez bodů typu A, D.
4. Zbývající konfigurace, t. j. konfigurace složené z bodů typu B a C.

Toto pořadí bylo zvoleno po prvních zkušenostech, když se ukázalo, že konfigurace s body typu A jsou nejsnáze přehledné a body typu D, E přicházejí mnohem méně často než body typu B a C. (Ve skutečnosti není mezi skoro 50 dosud známými typy konfigurací kromě obou de Vriesových ani jediná, která by neměla body typu B.)

Tento článek ve své další části přináší úplnou odpověď na první bod plánovaného postupu. Je to výsledek již více než deset let starý. Naproti tomu druhý článek, který připojil můj bratr[11]), obsahuje výsledky zcela nové a týká se druhého bodu programu, který však toho času není ještě úplně uzavřen.

Chtěl bych ještě nakonec připomenout, že jsme se u všech konfigurací spokojili zjištěním jejich existence a rozdílnosti od předešlých a jen výjimečně uvádíme některé vlastnosti, na př. tehdy, není-li konfigurace „čistá". Tento termín zavedl akad. Bydžovský a míní tím případ, kdy se v konfiguraci vyskytují „cizí" přímky nebo body. (Viz článek citovaný sub [10]).)

3. Schemata a čtveřiny čísel. Nechť jsou *9, 10, 11, 12* navzájem oddělené body typu A. Ze 16 přímek konfigurace prochází každá jedním a jen jedním z bodů *9, 10, 11, 12*, takže každá z hledaných konfigurací má schema tvaru podobného tomuto

$$9\begin{pmatrix}1, 3, 5, 7\\2, 4, 6, 8\end{pmatrix}\quad 10\begin{pmatrix}1, 2, 4, 6\\3, 5, 7, 8\end{pmatrix}\quad 11\begin{pmatrix}1, 2, 5, 6\\4, 3, 8, 7\end{pmatrix}\quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\5, 6, 7, 8\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Schema má tento smysl: Jedna konfigurační přímka je *9—1—2*, další *9—3—4*, podobně *10—1—3* atd.

Všecka možná incidenční schemata dostaneme, když v závorkách uvedeme všecky možné sestavy čísel $1, \ldots, 8$, při čemž nesmí ve dvou závorkách stát současně tatáž čísla nad sebou (tvořit *pár*). Tato všecka schemata však jistě nejsou navzájem různá. Abychom si usnadnili přehled, zavedeme pojem „čtveřina".

Definice. *Čtveřinu tvoří čtyři různá čísla z čísel $1, \ldots, 8$, která tvoří dva páry v jedné závorce a ještě aspoň jeden pár v některé jiné závorce incidenčního schematu.*

V příkladě (1) jsou čísla *1, 2, 3, 4* čtveřinou, ale čísla *1, 2, 7, 8* čtveřinou nejsou. Snadno se ukáže, že v každém schematu musí být aspoň jedna čtveřina.

Čtveřiny si rozdělíme na několik druhů. Říkáme, že čtveřina je druhu

„**a**", jestliže její čísla tvoří právě po dvou párech ve dvou závorkách. V příkladě (1) je toho druhu čtveřina *1, 4, 5, 8*.

„**b**", jestliže její čísla tvoří kromě dvou párů v jedné závorce ještě po jednom páru ve dvou dalších závorkách a jestliže tyto dva poslední páry mají společné

[11]) *V. Metelka*: „O jistých rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$, které obsahují aspoň jeden bod typu D". Časopis pro pěstování matematiky, *80* (1955).

číslo. (Ve čtvrté závorce může ještě přicházet libovolně další pár.) Tohoto druhu je čtveřina *1, 2, 3, 5* v (1).

„**ab**", jestliže její čísla tvoří po dvou párech ve dvou závorkách, a ve třetí (případně ještě čtvrté) závorce další pár. Příklad je čtveřina *1, 2, 3, 4* v (1).

„**aa**", jestliže její čísla tvoří po dvou párech ve třech závorkách. Ve schematu (1) není čtveřina tohoto druhu.

„**c**", jestliže její čísla netvoří více párů, než kolik minimálně žádá definice, anebo tvoří sice páry ve více než dvou závorkách, avšak jinak než v druhu „**b**". Ve schematu (1) je čtveřina *1, 3, 5, 7* druhu „**c**".

Věta 1. *Druh čtveřiny se nemění žádnou permutací čísel 1, ..., 8 mezi sebou a žádnou permutací čísel 9, ..., 12 mezi sebou.*

Věta nepotřebuje důkazu. Podle druhu a počtu čtveřin ve schematech lze tedy posuzovat možnost ekvivalence dvou schemat.

4. Schemata, v nichž přichází aspoň jedna čtveřina druhu „aa". O těchto schematech dokážeme větu:

Věta 2. *Existuje jediná konfigurace, v jejímž incidenčním schematu je čtveřina druhu* „**aa**". *Konfigurace je typu* A_4B_8[12]*), není čistá, všech osm bodů typu B leží na kuželosečce.*

Důkaz. Schemata se čtveřinou druhu „**aa**" se dají vždy psát takto:

$$9\begin{pmatrix}1, 3, 5, 7\\2, 4, 6, 8\end{pmatrix}\quad 10\begin{pmatrix}1, 2, 5, 6\\3, 4, 7, 8\end{pmatrix}\quad 11\begin{pmatrix}1, 2, 5, 6\\4, 3, 8, 7\end{pmatrix}\quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\5, ., ., .\end{pmatrix}.$$

Na poslední tři místa lze položit libovolnou ze šesti permutací čísel *6, 7, 8*, takže můžeme dostat celkem šest schemat. Avšak provedením permutace *(23)(67)(9,10)* a permutace *(24)(68)(9,11)* se snadno přesvědčíme, že skutečně různá mohou být jen tři, jež mají čtvrtou závorku

$$12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\5, 6, 7, 8\end{pmatrix}\quad \text{nebo}\quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\5, 6, 8, 7\end{pmatrix}\quad \text{nebo}\quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\5, 7, 8, 6\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Je jasné, že z bodů *1, 2, 3, 4* nemohou žádné tři ležet na přímce, takže tyto body jsou vrcholy čtyřrohu, jehož diagonální vrcholy jsou body *9, 10, 11*. Ani tyto tři body nemohou ležet na přímce a lze tedy volit souřadnicový systém takto

$$9(1, 0, 0),\quad 10(0, 1, 0),\quad 11(0, 0, 1),\quad 1(1, 1, 1)\,.$$

Ostatní body pak mají souřadnice

$$2(-1, 1, 1),\quad 3(1, -1, 1),\quad 4(1, 1, -1),\quad 5(a_1, a_2, a_3),\quad 6(-a_1, a_2, a_3),$$
$$7(a_1, -a_2, a_3),\quad 8(a_1, a_2, -a_3)\,.$$

Tím je vyhověno incidencím, předepsaným v prvních třech závorkách schematu. Zvolíme-li dále $12(b_1, b_2, b_3)$, dostáváme pro každou z možností (2) čtyři

[12]) Tato konfigurace je různá od obou dosud známých konfigurací BI, BII typu A_4B_8.

bilineární rovnosti mezi a_i a b_i. Protože musí být $a_1 . a_2 . a_3 \neq 0$ a $a_i \neq a_j$, přesvědčí se čtenář obyčejným počtem, že první a třetí možnost je nesplnitelná, neboť žádá $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Druhá z možností (2) pak je splnitelná, jestliže je $a_2 = a_1^2$, $a_3 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -a_1$, $b_3 = 1$. Pak pro libovolné a_1 s výjimkou konečného počtu hodnot (0, 1, —1, i, —i) existuje konfigurace $(12_4, 16_3)$ tvořená body *1*, ..., *12*. Body *1*, ..., *8* jsou typu *B*, body *9, 10, 11, 12* typu *A*. Protože body *10, 11, 12* leží na „cizí" přímce $x_1 = 0$, není konfigurace čistá. Body *1*, ..., *8* leží na kuželosečce o rovnici

$$(a_1^2 + 1)\, x_1^2 - x_2^2 - a_1^2 x_3^2 = 0\,.$$

Tím je věta v celém rozsahu dokázána.

Konfigurace tohoto typu dosud v literatuře popsána nebyla.

5. Schemata, jejichž všechny čtveřiny jsou druhu „a". O těchto schematech lze rovněž dokázat jednoduchou větu

Věta 3. *Existuje jediná konfigurace, v jejímž incidenčním schematu jsou všecky čtveřiny druhu „*a*". Je to de Vriesova konfigurace A I.*

Důkaz. Protože v každé konfiguraci existuje vždy aspoň jedna čtveřina — a to v našem případě čtveřina „a" — můžeme předpokládat, že touto čtveřinou je čtveřina *1, 2, 3, 4*. Pak se čtenář lehce přesvědčí, že lze jen jediným způsobem sestavit incidenční schema, aby bylo vyhověno podmínce věty. Schema je

$$9\begin{pmatrix}1, 3, 5, 7\\ 2, 4, 6, 8\end{pmatrix} \quad 10\begin{pmatrix}1, 2, 5, 6\\ 3, 4, 7, 8\end{pmatrix} \quad 11\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 6, 7, 8\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 8, 7, 6, 5\end{pmatrix}.$$

Všechna ostatní zde možná schemata jsou ekvivalentní s tímto tvarem, jak je vidět téměř na první pohled. Konfigurace, která patří k tomuto schematu je geometrická, t. j. realisovatelná a má všecky body typu *A*. Je to tedy jedna z *de Vriesových konfigurací* a to konfigurace *A* I. T. zv. *Hesseova podmínka*, podle níž se odlišuje konfigurace *A* I od *A* II je právě podmínka, aby všechny čtveřiny byly druhu „a" (srovnej článek [8]), str. 4).

6. Schemata bez čtveřin druhu „b". Postup, který jsme až dosud volili, dovoluje učinit tento závěr: Každé další schema musí mít aspoň jednu čtveřinu jiného druhu než „a" a to čtveřinu odlišnou od „**aa**". Vždy můžeme předpokládat, že *1, 2, 3, 4* je tato čtveřina, a pak lze každé další schema psát takto

$$9\begin{pmatrix}1, 3, 5, 7\\ 2, 4, 6, 8\end{pmatrix} \quad 10\begin{pmatrix}1, 2, 4, 6\\ 3, 5, 7, 8\end{pmatrix} \quad 11\begin{pmatrix}1, 2, ., .\\ ., ., ., .\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, ., .\\ ., ., ., .\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Zvolíme si tedy další postup, jak doplňovat poslední dvě závorky. Hledejme nejprve taková schemata, v nichž není čtveřina „**b**" ani „**ab**".

Věta 4. *Existuje jen jediné schema tvaru* (3) *bez čtveřin druhu „*b*" a „*ab*". Odpovídá mu de Vriesova konfigurace A II.*

Důkaz. Ve třetí a čtvrté závorce schematu (3) může být bod *1* spojen do páru s body *4, 5, 6, 7, 8*. Bod *4* však odpadá, protože by existovala čtveřina *1, 2, 3, 4* druhu „**b**“ (nebo „**ab**“). Právě tak odpadá bod *5* vzhledem ke čtveřině *1, 2, 3, 5*. Avšak ani bod *8* není přípustný, neboť kdyby bylo na př. *11—1—7, 12—1—8*, existovala by čtveřina *1, 2, 7, 8* druhu „**b**“, podobně při *11—1—6, 12—1—8* by čtveřina *1, 3, 6, 8* byla druhu „**b**“. Je tedy jediná možnost (až na permutaci (*11, 12*)) *11—1—6* a *12—1—7*. Postupujeme-li obdobně u ostatních bodů, zjistíme, že lze napsat jediné schema tvaru (3) bez čtveřin „**b**“ a „**ab**“ a to schema

$$9\begin{pmatrix}1, 3, 5, 7\\ 2, 4, 6, 8\end{pmatrix} \quad 10\begin{pmatrix}1, 2, 4, 6\\ 3, 5, 7, 8\end{pmatrix} \quad 11\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\ 6, 4, 8, 7\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 7, 8, 5, 6\end{pmatrix}.$$

Konfigurace patřící k tomu schematu je známa a je to *de Vriesova* konfigurace *A II* typu A_{12}.

7. Schemata se čtveřinami „ab“. Všechna další schemata mají čtveřiny „**b**“ nebo „**ab**“. Zkoumejme nejprve případ, kdy ve schematu je aspoň jedna čtveřina „**ab**“ a předpokládejme, že je to právě čtveřina *1, 2, 3, 4*. Třetí závorka schematu (3) se pak doplní takto:

$$11\begin{pmatrix}1, 2, 5, 6\\ 4, 3, 8, 7\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Věta 5. *Jsou-li splněny incidence předepsané schematy* (3) *a* (4), *leží body* *1, ..., 11 na kubické křivce* c^3.

Důkaz. Všimněme si složené kubiky *9—1—2, 10—4—7, 11—5—8* a další složené kubiky *9—7—8, 10—2—5, 11—1—4*. Je vidět, že body *1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11* jsou basí svazku kubik, lze tedy proložit určitou kubiku c^3 těmito body a ještě bodem *3*. Další dvě složené kubiky *9—3—4, 10—2—5, 11—6—7* a *9—5—6, 10—4—7, 11—2—3* ukazují, že na c^3 musí ležet také bod *6*, čímž je věta dokázána.

Žádejme nyní, aby čtveřina *1, 2, 3, 4* druhu „**ab**“ měla ještě ve čtvrté závorce poslední možný pár *2—4*, takže *12—2—4* je konfigurační přímka. Pak máme větu:

Věta 6. *Schemata* (3) *a* (4) *spolu s incidencí 12—2—4 vedou k jediné konfiguraci a to konfiguraci B I typu* A_4B_8.

Důkaz. Čtvrtou závorku lze doplnit dvojím způsobem

$$12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\ 6, 4, 8, 7\end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\ 8, 4, 6, 7\end{pmatrix}.$$

Všimneme-li si dvou složených kubik *9—3—4, 11—6—7, 12—1—8* a *9—7—8, 11—1—4, 12—3—6* a dalších dvou kubik *9—1—2, 11—6—7, 12—3—8* a *9—7—8, 11—2—3, 12—1—6*, vidíme, že v obou možnostech musí i bod *12* ležet na kubice c^3 z věty 5. Protože však obě možnosti mají dvě přímky společné, nemohou existovat jako geometrické konfigurace obě dvě, nýbrž nanejvýš jen jedna. Srovnáním s předešlými pracemi se zjistí, že první možnost je schema existující a známé konfigurace B I typu A_4B_8.

Poznámka. Konfigurace B I se liší od konfigurace téhož typu, uvedené ve větě 2 tím, že nemá cizí přímku, a od konfigurace B II se liší podmínkou uvedenou v práci [8]) str. 5. Tato podmínka v terminologii tohoto článku znamená přítomnost čtveřiny druhu „**ab**", která má pár i ve čtvrté závorce.

Když dále nepřipustíme incidenci *12—2—4*, je poslední závorka

$$12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ ., ., ., .\end{pmatrix}$$

a lze ji doplnit 24 způsoby, t. j. všemi permutacemi čísel *5, 6, 7, 8*. Protože však incidence *12—2—5* a *12—4—7* už nejsou možny, zbývá 14 možností. Použijeme-li však permutací $(2, 4)(5, 7)(9, 11)$ a $(1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8)$ zbude nám jen 6 možností a to

$$\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 6, 7, 8\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 7, 6, 8\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 7, 8, 6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 8, 7, 6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 6, 7, 8, 5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 8, 7, 6, 5\end{pmatrix}.$$

Věta 7. *Právě zjištěné možnosti pro čtvrtou závorku dávají spolu se schematy* (3) *a* (4) *dvě konfigurace a to B* II *typu A_4B_8 a novou konfiguraci typu $A_4B_2C_6$.*

Důkaz. První možnost dává spolu s (3) a (4) schema známé konfigurace B II, což se zjistí srovnáním se schematy práce [8]), kde je tato konfigurace poprvé uvedena. Druhá, čtvrtá, pátá a šestá možnost nemohou vést ke geometrické konfiguraci. Důkaz je přesně obdobný důkazu věty 6 a provedeme ho na ukázku jen pro poslední možnost. Přímky *X—1—8* a *X—3—6* se protínají v bodě X na kubice c^3 z věty 5, což jsme již dokázali v důkaze věty 6. Označme Y průsečík *Y—1—8* a *Y—4—5*. Ze složené kubiky *Y—1—8, 9—5—6, 10—4—7* a z existence přímek *Y—4—5, 9—7—8* usuzujeme, že kdyby bod Y ležel na c^3, musely by body *10, 1, 6* ležet na přímce, což není pravda. Neleží tedy Y na c^3 a proto je $X \neq Y$ a poslední možnost nemůže vést ke konfiguraci. Obdobný důkaz je i v ostatních případech.

Třetí možnost vede ke konfiguraci, jejíž úplné schema tedy je

$$9\begin{pmatrix}1, 3, 5, 7\\ 2, 4, 6, 8\end{pmatrix} \quad 10\begin{pmatrix}1, 2, 4, 6\\ 3, 5, 7, 8\end{pmatrix} \quad 11\begin{pmatrix}1, 2, 5, 6\\ 4, 3, 8, 7\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 5, 7, 8, 6\end{pmatrix}.$$

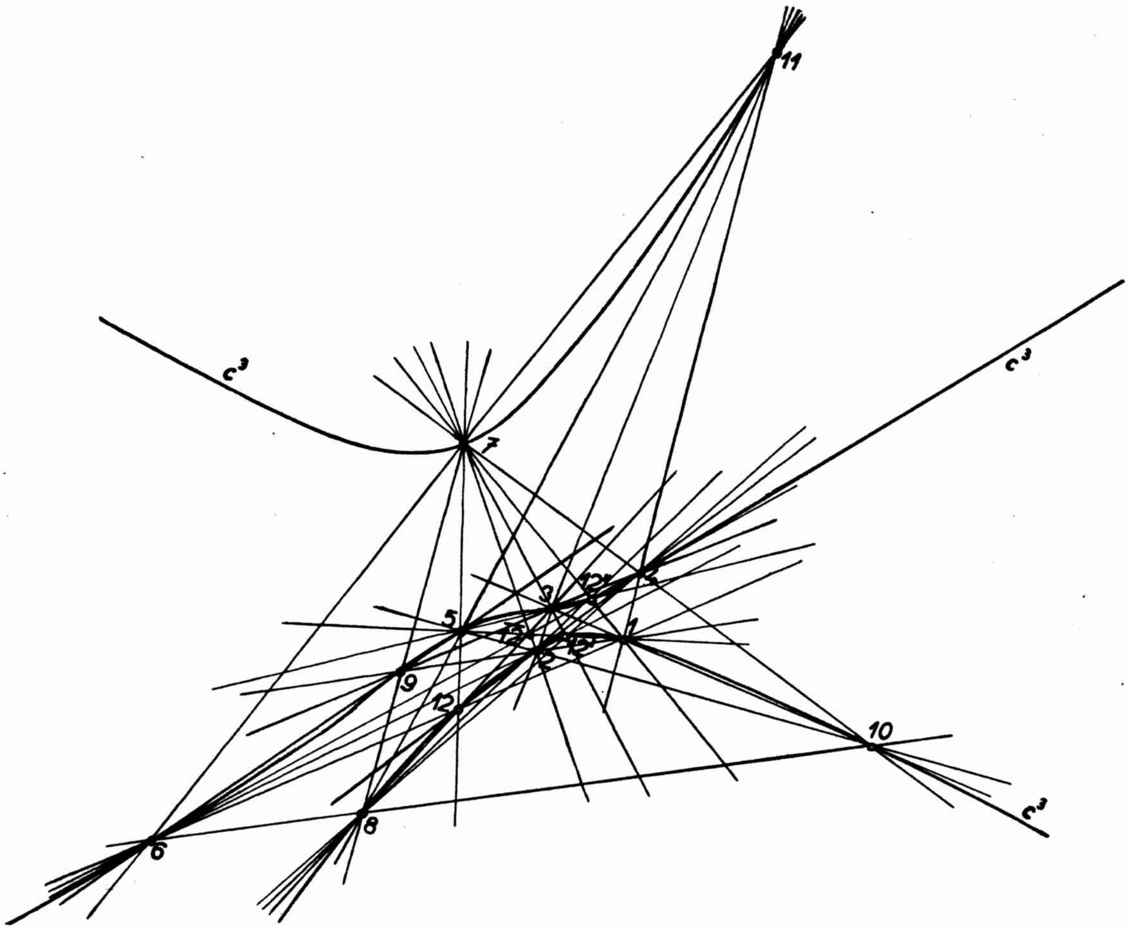
Konfigurace se dá realisovat takto:

$$1(1, \alpha, 1);\ 2(1, \alpha, \alpha);\ 3(1, 1, 1);\ 4(\alpha, \alpha, 1);\ 5(2 + \alpha, \alpha, 5 + 2\alpha);$$
$$6(5 + 2\alpha, 5, -5 - 2\alpha);\ 7(5 + 2\alpha, -\alpha, 2 + \alpha);\ 8(-5 - 2\alpha, \alpha, 5 + 2\alpha);$$
$$9(0, 0, 1);\ 10(0, 1, 0);\ 11(1, 0, 0);\ 12(10 + 4\alpha, 15 + 5\alpha, 15 + 7\alpha),$$

kde α je kořen rovnice $\xi^2 - 5 = 0$. Konfigurace je typu $A_4B_2C_6$. Body typu A jsou body *9, 10, 11, 12* body typu B jsou *1, 6*, ostatní jsou typu C.

Poznámka 1. Existenci této poslední konfigurace poprvé zjistil a její body spočítal akad. BYDŽOVSKÝ v jednom ze svých dopisů v r. 1944.

Poznámka 2. Poloha bodů *1*, ..., *8*, které patří této poslední konfiguraci, je velmi pozoruhodná. Spojíme-li tyto body všemi možnými přímkami, zjistí-



Obr. 1.

me, že sedmkrát nastane případ, že čtyři z těchto přímek procházejí jedním bodem. Situace je nakreslena na obrázku, kde zmíněných sedm bodů má označení *9*, *10*, *11*, *12*, *12'*, *12"*, $\overline{12}$. Všechny tyto body kromě posledního leží spolu s body *1*, ..., *8* na kubice c^3. Nepoužijeme-li bodu $\overline{12}$, lze vypuštěním vždy dvou z bodů *9*, *10*, *11*, *12*, *12'*, *12"* získat celkem 15 konfigurací $(12_4, 16_3)$, z nichž jedna je *A* I, dvě *A* II, čtyři *B* I a osm *B* II, jak o tom pojednává práce [8]). Přidáním bodu $\overline{12}$ a vynecháním bodů *12*, *12'*, *12"* dostaneme šestnáctou konfiguraci $A_4B_2C_6$, o níž jsme se právě zmínili (při srovnávání posledního schematu s obrázkem je tedy nutno místo bodu *12* vzít bod $\overline{12}$).

8. Zbývající schemata. Všechna zbývající schemata mají aspoň jednu čtveřinu typu „**b**" a žádnou čtveřinu druhu „**ab**". Můžeme přirozeně předpokládat, že právě čtveřina *1, 2, 3, 4* je druhu „**b**".

Věta 8. *Existují ještě tři různá další schemata, která jsme dosud neuvedli.*

Důkaz. První dvě závorky každého dalšího schematu jsou dány tvarem (3). Použijeme-li okolnosti, že ve schematu nesmí být čtveřina druhu „**ab**", a jestliže aplikujeme permutace *(1 3)(2 4)(5 7)(6 8)*, *(1 4)(2 7)(5 8)(9 10)* a *(1 3)(2 8 5 6)(9 11)*, můžeme zjistit — což už nebudu blíže rozvádět — že pro třetí závorku zbývají dvě možnosti

$$11\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\ 4, 6, 8, 7\end{pmatrix}, \quad (5) \qquad 11\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\ 4, 8, 6, 7\end{pmatrix}. \quad (6)$$

Možnost (5) se dá ve čtvrté závorce doplnit 14 způsoby, z nichž některé odpadnou, protože vedou ke čtveřinám „**ab**", jiné se dají navzájem ztotožnit permutacemi *(3 4)(5 6)(7 8)(10 11)*, *(1 2)(3 5)(4 6)(7 8)* a *(1 2)(3 6)(4 5)(10 11)*. Nakonec zůstávají jen tři navzájem nepřeveditelná schemata (uvádíme jen čtvrté závorky, jako třetí závorky je třeba použít závorky (5)):

$$12\begin{pmatrix}1, 2, 4, 5\\ 7, 3, 6, 8\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 5\\ 7, 4, 6, 8\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 7, 8, 5, 6\end{pmatrix}. \quad (7)$$

Jestliže použijeme na třetím místě závorky (6), je možno doplnit čtvrtou závorku opět 14 způsoby. Vyškrtáme-li schemata s čtveřinou druhu „**ab**" a použijeme-li permutací *(3 4)(5 8)(6 7)(10 11)*, *(1 4 3)(2 7 6)(9 10 11)* a *(1 3)(2 6)(5 8)(9 11)* zbudou nakonec jen dvě možnosti pro čtvrtou závorku (jestliže třetí je (6)):

$$12\begin{pmatrix}1, 2, 4, 5\\ 7, 3, 6, 8\end{pmatrix} \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 7, 6, 5, 8\end{pmatrix}. \quad (8)$$

Avšak schemata sestavená ze (3), (6) a kterékoli možnosti (8) nedávají už nic nového, neboť první z nich se převádí permutací *(1 5)(3 6)(4 8)(9 10)(11 12)* na schema sestavené ze (3), (5) a druhé možnosti (7). Právě tak druhé uvažované schema se převádí na první schema (7) permutací *(1 4)(2 6 5 8)(3 7)(9 12)*.

Protože víc možností už vůbec není a protože s druhé strany tři nově získaná schemata se ukáží (na př. zjišťováním čtveřin) skutečně různá jak mezi sebou tak od všech předešlých, je věta 8 dokázána.

Dále je tedy třeba zjistit, zda získaná schemata představují geometrické konfigurace. Na to odpovídá následující věta:

Věta 9. *Schemata sestavená ze* (3), (5) *a první respektive druhé možnosti* (7) *představují nové konfigurace a to typu $A_4B_2C_6$ respektive $A_4B_5C_3$. Schema sesta-*

vené z (3), (5) *a poslední možnosti* (7) *se nedá realisovat nad tělesem komplexních čísel projektivními přímkami.*

Důkaz. První dvě tvrzení dokážeme snadno. Body o souřadnicích

$$\mathit{1}(1, 0, 0);\ \mathit{2}(1, 1, 1);\ \mathit{3}(0, 1, 0);\ \mathit{4}(0, 0, 1);\ \mathit{9}(0, 1, 1);$$
$$\mathit{5}(2c^2 + b - bc - c, c^2, bc);\ \mathit{6}(2c^2 + b - bc - c, 2c^2 - bc, c^2);$$
$$\mathit{10}(2c - 1, c, 0);\ \mathit{7}(2c - 1, c, bc);\ \mathit{8}(2c - 1, 2c^2 - bc, 2c^2 - c);\ \mathit{11}(1, 0, c)$$

splňují všecky incidence předepsané prvními třemi závorkami a to pro každé b, c kromě konečného počtu výjimek. Má-li být splněna první z možností (7), musí být dále $\mathit{12}(b, 1, b)$ a pro čísla b, c dostáváme vztahy;

$$b = 2c - c^2\ ; \quad c^3 - c^2 - 1 = 0\ .$$

To lze vždy splnit a konfigurace tedy existuje. Pro splnění druhé možnosti (7) je nutno klást $\mathit{12}(1, 1, b)$ a pro čísla b, c máme:

$$b = 3c - 1\ ; \quad 3c^3 - 9c^2 + 6c - 1 = 0\ .$$

Také tato konfigurace tedy existuje. Při zkoumání třetí možnosti zjistíme, že incidence čtvrté závorky nemohou být splněny, nepřipustíme-li triviální případ, že některé konfigurační přímky splývají. Prosím čtenáře, aby si ještě ověřil, že z bodů *1, 2, 3, 4*, které jsme vzali za základní souřadnicové body, nemohou žádné tři ležet na přímce, aniž by nastalo zmíněné splynutí konfiguračních přímek. Tato podrobná úvaha je nutná, protože jinak bychom mohli být v pochybách, zda i poslední konfigurace není realisovatelná s tím, že by obsahovala některou „cizí" přímku spojující body *1, 2, 3, 4*. Volbou zmíněných bodů za základní souřadnicové body jsme totiž potlačili každou takovou přímku.

Poznámka. Konfigurace typu $A_4B_2C_6$, kterou jsme právě dostali, je odlišná od konfigurace téhož typu z odst. 7.

Poznámka 2. Konfigurace $A_4B_5C_3$ je první (a myslím, že dosud jediný) známý příklad konfigurace, u níž dva body (bod *1* a *4*) jsou odděleny od téže trojice bodů (*5, 6, 8*). Není nesnadné ukázat obecně, že v takovém případě oba zmíněné body musí být typu B.

Můžeme tedy uzavřít tímto zjištěním:

Přijmeme-li definici ekvivalence z odstavce 2, existuje osm tříd konfigurací $(12_4, 16_3)$, *u nichž se vyskytuje aspoň jedna čtveřice bodů typu A. Dvakrát se vyskytují konfigurace typu* A_{12} (DE VRIESOVY), *třikrát typu* A_4B_8, *dvakrát typu* $A_4B_2C_6$ *a jednou typu* $A_4B_5C_3$.

Резюме

О ПЛОСКИХ КОНФИГУРАЦИЯХ $(12_4, 16_3)$

ЙОЗЕФ МЕТЕЛКА (Josef Metelka), Оломоуц.

(Поступило в редакцию 14/I 1955 г.)

В предыдущей статье прежде всего излагается история и современное состояние исследований в области плоских конфигураций $(12_4, 16_3)$, которые были у нас начаты академиком Б. Быджовским в 1939 г. В настоящее время известно более 50 конфигураций (из которых опубликовано весьма мало), так что представляется необходимым ввести некоторый принцип для их классификации и составить удобообозримую таблицу всех возможных конфигураций. С этой целью была разработана подробная программа, первая часть которой и предлагается здесь вниманию читателя. Мы ищем все конфигурации $(12_4, 16_3)$, содержащие хоть одну четверку таких точек конфигурации, из которых ни одна пара не соединена прямой конфигурации (точки типа A).

Перенумеруем по порядку все двенадцать точек, что позволит нам ставить шестнадцать прямых в виде схемы инциденций, см. напр. схему (1). Затем ищем все схемы этого вида, которые нельзя перевести одну в другую никакой перестановкой чисел *1*, ..., *12*. Имеется всего восемь таких схем, различных в этом смысле и приводящих к конфигурациям, которые можно действительно геометрически осуществить. Четыре из этих конфигураций были уже известны и ранее (см. литературу, [1, ..., 8]) остальные же публикуются впервые.

На рисунке изображено весьма интересное положение точек *1*, ..., *8*, причем путем присоединения дальнейших точек, можно получить всего 16 конфигураций $(12_4, 16_3)$.

Zusammenfassung

ÜBER EBENE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$

JOSEF METELKA, Olomouc.

(Eingegangen am 14. Jänner 1955.)

Im vorliegenden Artikel erklärt man zuerst die Geschichte und den heutigen Zustand der Forschung über die ebenen Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, welche bei uns durch die Arbeiten des Akademikers B. Bydžovský i. J. 1939 begonnen wurde. Heute sind mehr als 50 Konfigurationen bekannt (jedoch nicht ver-

öffentlicht) und es zeigte sich notwendig einen Ordnungsprinzip einzuführen und eine übersichtliche Tafel aller möglichen Konfigurationen zu schaffen. Dazu wurde ein ausführliches Programm vorbereitet, dessen ersten Teil man eben vorlegt. Man sucht alle Konfigurationen (12_4, 16_3), welche mindestens einen Vierer von Konfigurationspunkten enthalten, von denen nicht zwei durch eine Konfigurationsgerade verbunden sind (Punkten vom Typus A).

Die zwölf Punkte werden durchlaufig numeriert, was die Möglichkeit liefert die sechzehn Geraden in der Form eines Inzidenzschemas — wie z. B. (1) — vorzustellen. Nun werden alle Schemata von dieser Form gesucht, die nicht durch etwaige Permutation der Ziffern *1*, ..., *12* einander überführbar sind. Es gibt im Ganzen acht Schemata, die in angegebenem Sinne verschieden sind und ausserdem zu den geometrisch realisierbaren Konfigurationen führen. Vier von diesen Konfigurationen wurden schon vorher bekannt (siehe die Fussnoten No 1, ..., 8), die anderen kommen in der Literatur zum erstenmal vor.

Das Bild zeigt eine sehr interessante Position der Punkte *1*, ..., *8*, bei der durch Zufügung anderer Punkte insgesamt 16 Konfigurationen (12_4, 16_3) entstehen können.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O JISTÝCH ROVINNÝCH KONFIGURACÍCH $(12_4, 16_3)$, KTERÉ OBSAHUJÍ ASPOŇ JEDEN BOD TYPU D

VÁCLAV METELKA, Liberec.

(Došlo dne 14. ledna 1955.) DT:513.84

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

Úkolem tohoto článku je stručně informovat čtenáře o jistých nových konfiguracích $(12_4, 16_3)$, které obsahují aspoň jeden bod typu D a navázat tak na předchozí článek mého bratra.[1]) Výsledky, které zde uvádím jsou původní a dosud neuveřejněné, přesto se však omezuji pouze na jejich citaci bez důkazů, jež podám v nejbližší době.

V předchozím článku[1]) nastínil můj bratr program, který jsme si stanovili pro sestavení tabulky všech možných konfigurací $(12_4, 16_3)$, jež se dají realisovat body a přímkami v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel. Ačkoliv druhý bod tohoto programu není ještě zcela uzavřen, chtěl bych přesto v tomto článku čtenáře aspoň stručně informovat o některých nových konfiguracích $(12_4, 16_3)$, obsahujících body typu D a naznačit postup hledání příslušných schemat.

1. Schemata. Vycházíme z předpokladu existence aspoň jednoho bodu typu D (dále stručně D-bodu). Nechť *9* je D-bodem a nechť je oddělen od bodů *10, 11, 12,* při čemž body *10, 11* jsou spojeny konfigurační přímkou. Pak také bod *12* je D-bodem, odděleným od bodů *9, 10, 11.* Třetí bod na spojnici *10, 11* označme *1.* Stručně to zapíšeme *9* : *10*; *9* : *11*; *9* : *12*; *12* : *10*; *12* : *11*; *1*—*10*—*11*.

Z těchto vztahů především plyne, že bod *10* musí být oddělen ještě od jednoho bodu, kterým nemůže být bod *1* ani *11* (neboť s nimi je spojen) a označme ho tedy *2* (čili *10* : *2*).

Dokažme nyní, že za těchto předpokladů musí být bod *11* spojen s bodem *2* konfigurační přímkou.

Ze 4 konfiguračních přímek incidentních s bodem *9* prochází jediná bodem *2* (čili *9*—*2*);

---

[1]) *J. Metelka*: „O rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$". Časopis pro pěstování matematiky *80* (1955), 133—145. — Užívám zde symboliky a terminologie článku právě citovaného.

ze 4 konfiguračních přímek incidentních s bodem *12* prochází jediná bodem *2* (čili *12—2*);

ze 4 konfiguračních přímek bodem *10* neprochází žádná bodem *2* (protože *10 : 2*), a tedy

ze 4 konfiguračních přímek incidentních s bodem *11* musí jediná procházet bodem *2*, což plyne takto:

Z právě uvedených šestnácti konfiguračních přímek je patnáct navzájem různých (přímku *1—10—11* jsme počítali dvakrát) a z nich tedy musí (aspoň) tři být incidentní s bodem *2*. Tím je proveden důkaz, že skutečně *11—2*. Prozatím víme, že bod *11* je oddělen od bodů *9*, *12* a musí být tudíž oddělen ještě od jednoho dalšího bodu (různého od bodů *1*, *2*, *10*). Nazveme si tento bod *3* (tedy *11 : 3*). Z uvedených patnácti různých konfiguračních přímek procházejí právě tři bodem *2* a musí jím také procházet přímka šestnáctá, kterou si zatím nazveme p. Bodem *3* procházejí z těchto patnácti konfiguračních přímek (různých od p) jen tři, totiž *3—9*, *3—10*, *3—12* (neboť *11 : 3*), z čehož plyne, že bod *3* je incidentní také s přímkou p. Právě tak bodem *1* procházejí jen tři z konfiguračních přímek různých od přímky p (totiž přímky *1—9*, *1—12*, *1—10—11*) a nalezli jsme tak třetí bod na přímce p a konfigurační přímka $p \equiv$ *1—2—3* je tím určena.

Bodem *9* procházejí *4* (navzájem různé) konfigurační přímky *9—1—a*, *9—2—b*, *9—3—c*, *9—d—e*, kde o číslicích a, b, c, d, e ovšem platí, že jsou navzájem různé a také různé od *1*, *2*, *3*, *9*, *10*, *11*, *12*. Možno je tedy nahradit dosud neobsazenými číslicemi *4*, *5*, *6*, *7*, *8*, což učiníme a zjistíme, že každá z hledaných konfigurací má schema tvaru podobného tomuto:

$$9\begin{pmatrix}1, 2, 3, 7\\ 4, 5, 6, 8\end{pmatrix}; \quad 1\begin{pmatrix}2, 10\\ 3, 11\end{pmatrix}; \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 6, 7, 5, 8\end{pmatrix}; \quad 10\begin{pmatrix}3, 4, 6\\ 7, 5, 8\end{pmatrix}; \quad 11\begin{pmatrix}2, 4, 5\\ 8, 6, 7\end{pmatrix}.$$

Toto schema má obdobný smysl, jako schema uvedené v odstavci 3 citovaného článku. Všechna incidenční schemata pak dostaneme, když v závorkách za čísly *12*, *10*, *11* najdeme všechny možné sestavy čísel v těchto závorkách se vyskytujících (ovšem s příslušnou opatrností, jako v citovaném třetím odstavci předchozího článku). Poznamenávám zde výslovně, že vzhledem k daným předpokladům (*1—2—3*, *1—10—11*, ... atd.) nemůžeme již přemísťovat čísla v závorce za jedničkou a není třeba ani měnit čísla v závorce za devítkou.

Podrobný výpočet těchto schemat zde neprovádím, neboť je velmi rozsáhlý a pracný; po vyloučení schemat ekvivalentních[2]) konfigurací dostaneme ještě značný počet (přes 90) možností. Veliká část těchto schemat se však nedá geometrickými konfiguracemi realisovat, což se ovšem musí dokazovat téměř u každého schematu zvlášť.[3]) Přesto se mně podařilo najít asi 40 realisovatel-

---

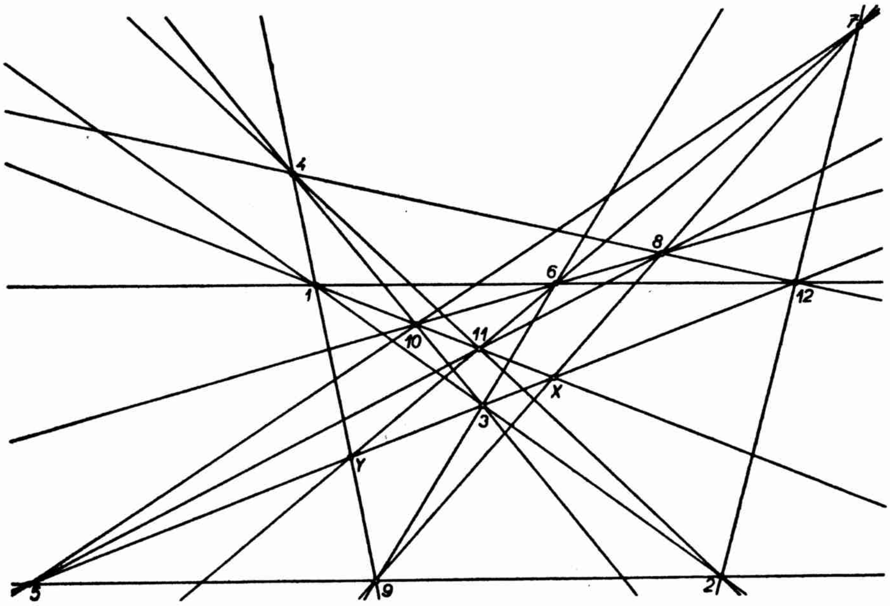
[2]) „*Ekvivalentní*“ ve smyslu definice z citovaného článku.

[3]) Tyto důkazy se provádějí ve vhodně zvoleném souřadnicovém systému obdobným způsobem, jako je proveden důkaz věty 9 v citovaném článku mého bratra.

ných schemat a tento počet bude — jak se předběžným zkoumáním jeví — ještě překročen.

2. Některé konfigurace ($12_4, 16_3$) s D-body. Současně s D-body se ve všech schematech vyskytují vždy C-body a aspoň jeden B-bod, nikdy však A-body, jak ostatně ukazují také výsledky mého bratra. D-body vystupují v těchto schematech vždy jen dva, s výjimkou jediného případu:

$$9\begin{pmatrix}1, 2, 3, 7\\ 4, 5, 6, 8\end{pmatrix}; \quad 1\begin{pmatrix}2, 10\\ 3, 11\end{pmatrix}; \quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\ 6, 7, 5, 8\end{pmatrix}; \quad 10\begin{pmatrix}3, 4, 6\\ 7, 5, 8\end{pmatrix}; \quad 11\begin{pmatrix}2, 4, 5\\ 8, 7, 6\end{pmatrix},$$



Obr. 1.

který je typu $B_1C_7D_4$ (D-body jsou $1, 5, 9, 12$), k němuž patří geometrická konfigurace s těmito body:

$$1(a, 1, a);\ 2(0, 1, 0);\ 3(1, 1, 1);\ 4(7a^2 - 6a + 3, 2, 2a);\ 5(1, 1, 0);$$
$$6(a, 1, 1);\ 7(0, -7a^2 + 2a + 1, 1);\ 8(1 - a, -7a^2 + 2a + 1, 1);$$
$$9(1, 0, 0);\ 10(1, -7a^2 + 2a + 2, 2);\ 11(1 - a, 2 - 2a, 1);\ 12(0, 0, 1),$$

kde a je kořenem rovnice $7x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$.

Ve všech ostatních schematech (i v těch, která dosud nejsou prozkoumána) jsou již jen dva D-body a počet E-bodů není vyšší než dvě.

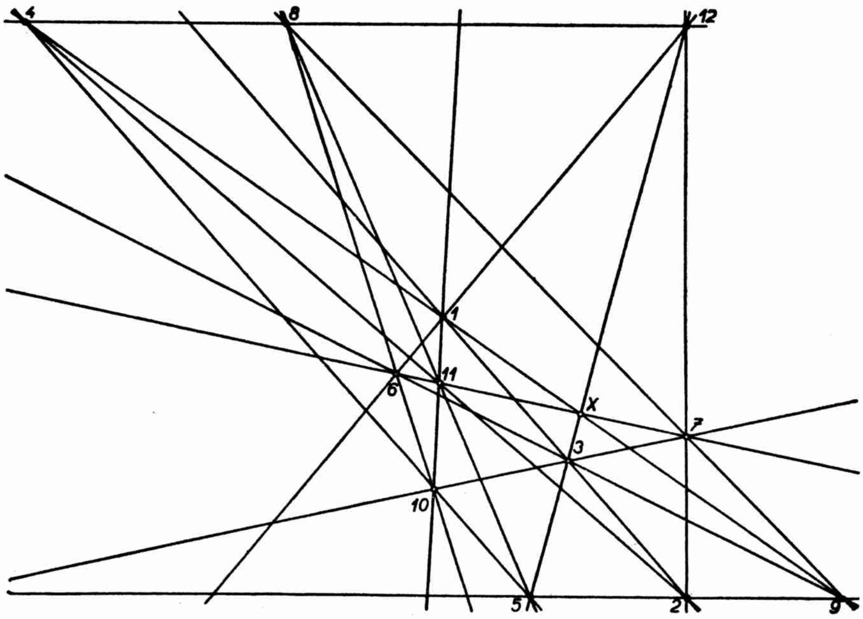
Existují pouze tři konfigurace se dvěma E-body (jež obsahují zároveň D-body). Uvádím zde dvě z nich. Jedna z těchto konfigurací má body o souřadnicích:

$$1(1, 2, 1);\ 2(0, 1, 0);\ 3(1, 1, 1);\ 4(4, 10, 5);\ 5(1, 1, 0);\ 6(1, 2, 2);$$
$$7(0, 2, 3);\ 8(4, 10, 15);\ 9(1, 0, 0);\ 10(8, 14, 9);\ 11(4, 6, 5);\ 12(0, 0, 1)\,,$$

jejíž úplné schema zní:

$$9\begin{pmatrix}1, 2, 3, 7\\4, 5, 6, 8\end{pmatrix};\quad 1\begin{pmatrix}2, 10\\3, 11\end{pmatrix};\quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\6, 7, 5, 8\end{pmatrix};\quad 10\begin{pmatrix}3, 5, 6\\4, 7, 8\end{pmatrix};\quad 11\begin{pmatrix}2, 5, 6\\4, 8, 7\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Nakreslil jsem tuto konfiguraci na obr. 1. Chtěl bych na tomto místě čtenáře upozornit na další „náhodné" incidence, které se u této konfigurace objevují.



Obr. 2.

Tři z konfiguračních přímek (*1—10—11*, *7—8—9*, *3—5—12*) se zde protínají v jediném bodě, který jsem na obrázku označil X, a další tři přímky (*6—7—11*, *1—4—9*, *3—5—12*) procházejí jediným bodem, označeným na obr. Y. (Doporučuji čtenáři, aby si tuto incidenci ověřil výpočtem.)

Druhá z konfigurací se dvěma E-body, jež obsahuje zároveň D-body, jest

$$1(3, 2, 3);\ 2(0, 1, 0);\ 3(1, 1, 1);\ 4(4, 2, 3);\ 5(1, 1, 0);\ 6(3, 2, 2);$$
$$7(0, 2, 5);\ 8(4, 2, 5);\ 9(1, 0, 0);\ 10(8, 6, 3);\ 11(20, 14, 15);\ 12(0, 0, 1);$$

její úplné schema zní

$$9\begin{pmatrix}1, 2, 3, 7\\4, 5, 6, 8\end{pmatrix};\quad 1\begin{pmatrix}2, 10\\3, 11\end{pmatrix};\quad 12\begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\\6, 7, 5, 8\end{pmatrix};\quad 10\begin{pmatrix}3, 4, 6\\7, 5, 8\end{pmatrix};\quad 11\begin{pmatrix}2, 5, 6\\4, 8, 7\end{pmatrix} \qquad (2)$$

a tuto jsem nakreslil na obr. 2. Také zde třeba upozornit na „náhodnou" incidenci konfiguračních přímek *6—7—11*, *3—5—12*, *1—4—9*, protínajících se v jediném bodě, označeném X.

Tyto dvě poslední konfigurace se dají konstruovat *lineárně* (pravítkem bez odměřování), protože při nich není žádná adjunkce iracionality.

Obě jmenované konfigurace jsou typu $B_3C_5D_2E_2$ a jejich schemata až na dvě přímky bodem *10* jsou shodná. Přesto však tyto konfigurace nejsou ekvivalentní, neboť neexistuje permutace čísel 1, ..., 12, která by schema (1) převáděla na schema (2), protože žádnou takovou permutací nemůže se změnit počet incidencí — ani „náhodných". Že obě konfigurace skutečně nejsou ekvivalentní, lze dokázat znovu ještě jiným způsobem, jak zde naznačím.

Kdyby existovala permutace čísel *1*, ..., *12* převádějící schema (1) na schema (2), musely by se touto permutací zřejmě také převádět E-body jednoho schematu na E-body druhého. Ve schematu (1) jsou dva E-body a to *2*, *8*. Bod *8* je oddělen od bodů *1*, *2*, *3* a existují právě dvě konfigurační přímky, na kterých neleží ani bod *8* ani body *1*, *2*, *3*. Jsou to přímky *5—7—10*, *6—7—11*, obě incidentní s konfiguračním bodem *7*. Bod *2* je oddělen od bodů *6*, *8*, *10* a opět existují právě dvě konfigurační přímky, na kterých body *2*, *6*, *8*, *10* neleží. Jsou to přímky *1—4—9*, *3—5—12*, které se však neprotínají v žádném konfiguračním bodě. Zřejmě jsou oba E-body *2*, *8* dle tohoto jemnějšího třídění různého druhu.[4]) Velmi snadno zjistíme, že ve schematu (2) jsou oba E-body (také *2*, *8*) stejného druhu (a to téhož, jako bod *2* ve schematu (1)). Neexistuje však permutace číslic *1*, ..., *12*, kterou by se měnil druh bodu[5]) a tím je opět důkaz proveden.

Rád bych ještě čtenáře upozornil, že všechny tři konfigurace, které zde uvádím, jsou „čisté" a tak je tomu u převážné většiny konfigurací s body typu D (zatím jsem nalezl jen dvě konfigurace s „cizími" přímkami), což dokáži spolu s úplným řešením tohoto bodu programu v nejbližší době.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КОНФИГУРАЦИЯХ (12_4, 16_3), СОДЕРЖАЩИХ ХОТЯ БЫ ОДНУ ТОЧКУ ТИПА D

ВАЦЛАВ МЕТЕЛКА (Václav Metelka), Либерец.

(Поступило в редакцию 14/I 1955 г.)

Автор приводит здесь (пока без доказательства) несколько новых результатов из области плоских конфигураций (12_4, 16_3) и строит два новых

[4]) Viz obdobu jemnějšího dělení čtveřin v 3. odstavci citovaného článku mého bratra.

[5]) Viz obdobu věty první citovaného článku.

примера этих конфигураций (см. рис. 1 и 2 и соответственно схемы инциденций (1) и (2)), при которых не требуется адъюнкции иррациональности. Подробное описание последует в ближайшее время.

Zusamenfassung

ÜBER GEWISSE EBENE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$, WELCHE MINDESTENS EINEN D-PUNKT ENTHALTEN

VÁCLAV METELKA, Liberec.

(Eingegangen am 14. Jänner 1955.)

Autor zitiert hier (vorläufig ohne Beweis) einige neue Ergebnisse über ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ und konstruiert besonders zwei neue Beispiele von diesen Konfigurationen (siehe Fig. 1, resp. 2 und Inzidenzschema (1), resp. (2)) in welchen keine Irrationalitätsadjunktion gebrauchen wird. Eine Detailbeschreibung wird bald nachfolgen.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O JEDNOM DRUHU GRUP INVOLUTORNÍCH CREMONOVÝCH TRANSFORMACÍ V ROVINĚ

LADA VAŇATOVÁ, Praha.

(Došlo dne 11. června 1954.) DT:513.17

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

V práci „Sur une espèce particulière de groupes d'involutions planes de Cremona" předložil prof. B. BYDŽOVSKÝ problém, zda existuje v rovině šest bodů, které by tvořily současně skupinu hlavních bodů více než jedné symetrické involuce pátého stupně prvního, resp. druhého druhu.*) V této své práci dokázal, že skupina šesti bodů se může vyskytovat v druhé charakteristické poloze dvojím nebo trojím způsobem současně, což dává vznik grupě transformací 4. nebo 6. řádu. Na tuto práci navázal J. METELKA svou prací „O jistých konečných grupách složených z Cremonových transformací prvního a pátého stupně", v níž dokázal, že skupina šesti bodů v rovině může být v první charakteristické poloze dvěma, třemi, čtyřmi, šesti nebo konečně desíti různými způsoby. Ukázal také, že jiné možnosti již neexistují.

Nerozřešena zůstala ještě otázka, zda je možné, aby skupina šesti bodů byla v první i v druhé charakteristické poloze, jaké jsou tu možnosti a které grupy transformací tak vznikají. Upozorněna prof. Bydžovským na tento problém, došla jsem k následujícím výsledkům: Je-li skupina šesti bodů v rovině současně v první i v druhé charakteristické poloze, potom je v každé z těchto poloh buď dvěma, nebo šesti různými způsoby (věty 2 a 15). Jiné možnosti neexistují (poznámky 4 a 5). První možnost vede ke grupě $\mathfrak{G}_8$ řádu 8 (věta 3) a druhá ke grupě $\mathfrak{G}_{72}$ řádu 72 (věta 16), které se skládají z involucí a cyklických transformací prvního a pátého stupně. Vůči všem transformacím obou grup existují jednoduché invariantní sextiky (věty 8, 10, 14, 17).

I.

Než přikročím k vlastnímu výkladu, uvedu ještě některé základní poznatky z theorie symetrických involucí pátého stupně.

*) Polohu hlavních bodů symetrické involuce prvního druhu nazval prof. Bydžovský první charakteristickou polohou, skupinu hlavních bodů symetrické involuce druhého druhu druhou charakteristickou polohou.

V involuci pátého stupně odpovídá síti přímek v rovině síť racionálních kvintik (homaloidních křivek), jejichž basi tvoří šest pevných dvojnásobných bodů (z nichž žádné tři neleží v přímce), které jsou hlavními body symetrické involuce. Těchto šest bodů, označíme je číslicemi *1, 2, 3, 4, 5, 6*, neurčuje jedinou kuželosečku, můžeme proto jimi proložit celkem šest kuželoseček k_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$), kde k_i značí kuželosečku neprocházející bodem i. Kuželosečky k_i jsou hlavní kuželosečky symetrické involuce.

Hlavní body symetrické involuce pátého stupně jsou dvojího druhu:

1. Hlavní bod prvního druhu i leží na hlavní kuželosečce k_j ($i \neq j = 1, \ldots, 6$), která mu v symetrické involuci odpovídá. Říkáme, že hlavní body i, j tvoří *dvojici hlavních bodů prvního druhu.*

2. Hlavní bod druhého druhu i neleží na hlavní kuželosečce k_i, která mu odpovídá v symetrické involuci.

Podle druhu a polohy hlavních bodů rozeznáváme dva druhy symetrických involucí:

a) Involuce prvního druhu má tři páry hlavních bodů prvního druhu. Nutná a postačující podmínka, aby šest bodů v rovině tvořilo skupinu hlavních bodů této involuce je, aby ležely po dvou na třech přímkách procházejících týmž bodem M.

b) Involuce druhého druhu má čtyři hlavní body druhého druhu a pár hlavních bodů prvního druhu. Nutná a postačující podmínka, aby šest bodů v rovině tvořilo skupinu hlavních bodů involuce druhého druhu je, aby hlavní body prvního druhu byly polárně sdruženy vzhledem ke svazku kuželoseček určenému čtveřicí hlavních bodů druhého druhu. Involuce prvního druhu označíme J^{I}, involuce druhého druhu J^{II}.

Samodružné body involuce prvního druhu J^{I} vyplňují kubickou křivku c^3, která prochází všemi hlavními body a v každém z nich se dotýká té hlavní kuželosečky k_i, která mu odpovídá involucí. Vedle toho existuje ještě isolovaný samodružný bod M.

Involuce druhého druhu J^{II} má tyto samodružné body: všecky body spojnice hlavních bodů prvního druhu a diagonální vrcholy čtyrrohu určeného hlavními body druhého druhu.

II.

Předpokládejme, že body *1, 2*, ..., *6* jsou v první charakteristické poloze, t. j. že dvojice bodů *1, 2; 3, 4; 5, 6* tvoří páry hlavních bodů involuce J_1^{I}. Přímky *12, 34, 56* se protínají v jediném bodě M_1.

Poznámka 1. Mají-li být hlavní body involuce J_1^{I} současně v druhé charakteristické poloze, nemůžeme zvolit žádný z párů hlavních bodů této involuce za hlavní body prvního druhu involuce J^{II}. Kdybychom tak učinili, byl by bod M_1 jedním samodružným bodem Desarguesovy involuce vyťaté svazkem kuželoseček s basí ve zbývajících čtyřech hlavních bodech J_1^{I} na spojnici zvoleného páru a nemohly by jimi být tyto body.

Za hlavní body prvního druhu involuce J^{II} zvolme body *3, 6*. Složená kuželosečka *45, 12* svazku určeného body *1, 2, 4, 5* musí protnout přímku *36* v dvojici bodů, které harmonicky oddělují body *3, 6*. Z této podmínky a z vlastností úplného čtyrrohu určeného body *3, 6, 4, 5* plyne, že body *1, 2* leží na diagonální straně úplného čtyrrohu, protilehlé k diagonálnímu vrcholu $S_1 = 36 \cap 45$.

Věta 1: *Nutná podmínka, aby šest bodů v rovině bylo současně v první i v druhé charakteristické poloze je, aby dva z těchto šesti bodů ležely na některé straně diagonálního trojúhelníka úplného čtyrrohu zbývajících čtyř bodů.*

Tato podmínka není postačující, neboť zvolíme-li body *1, 2* libovolně na zmíněné diagonální straně, nemusí ještě složená kuželosečka *14,25* protínat přímku *36* v bodech, jež by harmonicky oddělovaly body *3, 6*. Je však nutná a postačující pro to, aby šest bodů tvořilo dvojím způsobem první charakteristickou polohu a to tak, že pár ležící na diagonální straně je pro obě polohy společný.

Abychom vyšetřili, jaké další podmínce musí vyhovovat body *1, 2*, zvolené dle věty 1, aby body *1, …, 6* byly v druhé charakteristické poloze, přiřadíme bodům *3, 4, 5, 6* souřadnice *3*(1, 1, 1), *4*(—1, 1, 1), *5*(1, —1, 1), *6*(1, 1, —1). Body *1, 2* leží na jedné ze souřadných os. Tuto osu zvolme za o_3, takže souřadnice bodů *1, 2* jsou *1*$(y_1, y_2, 0)$, *2*$(z_1, z_2, 0)$.

Aby body *3, 6* byly hlavními body involuce J^{II} prvního druhu, musí složená kuželosečka *14, 25* protínat *36* v bodech, které oddělují body *3, 6* harmonicky.

$$14 \equiv y_2x_1 - y_1x_2 + (y_1 + y_2)\, x_3 = 0\,,$$
$$25 \equiv z_2x_1 - z_1x_2 - (z_1 + z_2)\, x_3 = 0\,.$$

Vezmeme-li na přímce *36* body *3, 6* za základní, jsou parametry průsečíků $14 \cap 36$ vzhledem k těmto bodům $\mu = y_1$, $\lambda = y_2$ a parametry průsečíku $25 \cap 36$ $\bar{\mu} = z_2$, $\bar{\lambda} = z_1$. Aby tyto dva průsečíky oddělovaly body *3, 6* harmonicky, musí platit

$$z_2 = y_1\,, \quad z_1 = -y_2\,. \tag{1}$$

Jestliže souřadnice bodů *1, 2* vyhovují podmínce (1), dá se snadno ukázat, že současně body *4, 5* jsou samodružnými body Desarguesovy involuce, vyťaté na jejich spojnici svazkem kuželoseček s basí v bodech *1, 2, 3, 6*. Body *1, …, 6* tvoří proto skupinu hlavních bodů dvou různých involucí druhého druhu $J_1^{\mathrm{II}}, J_2^{\mathrm{II}}$. J_1^{II} má body *3, 6* a J_2^{II} body *4, 5* za hlavní body prvního druhu.

Věta 2: *Nutná a postačující podmínka, aby body 1, …, 6 byly současně v první i v druhé charakteristické poloze je, aby souřadnice bodů 1*(y_1, y_2, y_3), *2*(z_1, z_2, z_3) *při uvedené volbě systému souřadnic splňovaly rovnice*

$$z_i = -y_j\,, \; z_j = y_i,\; z_l = y_l = 0 \;\; (i \neq j \neq l \text{ probíhají čísla } 1, 2, 3)\,. \tag{2}$$

Je-li tato podmínka splněna, jsou body 1, ..., 6 v první i v druhé charakteristické poloze dvěma různými způsoby.

Poznámka 2. Rovnice (2) říkají, že bod *1*, resp. *2* můžeme na diagonální straně úplného čtyrrohu *3, 4, 5, 6* protější k diagonálnímu vrcholu S_1 volit zcela libovolně. Dá se proto očekávat, omezíme-li volbu bodu *1*, resp. *2* další podmínkou, že body *1, ..., 6* budou v první i v druhé charakteristické poloze více než dvěma různými způsoby. Vyšetření této možnosti provedeme v dalším.

III. Grupa $\mathfrak{G}_8$

Mají-li body *1, ..., 6* polohu uvedenou ve větě 2, tvoří skupinu hlavních bodů těchto symetrických involucí

$$J_1^{\mathrm{I}}\ 12, 34, 56\,, \quad J_1^{\mathrm{II}}\ 36, 1245\,,$$
$$J_2^{\mathrm{I}}\ 12, 35, 46\,, \quad J_2^{\mathrm{II}}\ 45, 1236\,.$$

Skládáním involucí po dvou obdržíme kolineace, neboť takto složené transformace přiřazují přímkám opět přímky.

a) Složením dvou involucí téhož druhu dostaneme středovou involutorní kolineaci H_1. Neboť přímky *36* a *45* si odpovídají v obou involucích J_1^{I} i J_2^{I} navzájem, jsou proto obě samodružné pro H_1 a jejich průsečík S_1 je samodružný pro všechny tři transformace. Přímky *34, 56* jsou samodružné pro J_1^{I} a odpovídají si navzájem v J_2^{I}, a tedy i v H_1. Jejich průsečík M_1, který leží na *12* je samodružný pro $J_1^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{I}}$, i H_1. Totéž platí pro bod M_2, průsečík přímek *12, 35, 46*. Bodu *1* odpovídá v J_1^{I} kuželosečka k_2 a té v J_2^{I} bod *1*. Je to tedy další samodružný bod pro H_1. Kolineace H_1 má tři samodružné body na přímce *12*, jsou proto všechny body této přímky pro ni samodružné a H_1 je středovou kolineací s osou *12* a středem S_1. Tutéž středovou kolineaci H_1 obdržíme složením obou involucí druhého druhu, jak se snadno dokáže. Poněvadž involuce $J_1^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{I}}$ jsou záměnné, stejně jako involuce $J_1^{\mathrm{II}}, J_2^{\mathrm{II}}$ platí (podle práce [1], [2]):

$$J_1^{\mathrm{I}}J_2^{\mathrm{I}} = H_1 = J_2^{\mathrm{I}}J_1^{\mathrm{I}}\,, \quad J_1^{\mathrm{II}}J_2^{\mathrm{II}} = H_1 = J_2^{\mathrm{II}}J_1^{\mathrm{II}}\,.$$

b) Složením jedné involuce prvního druhu a jedné druhého druhu obdržíme dvě cyklické kolineace U_1, V_1 s periodou čtyři. V složené transformaci $U_1 = J_1^{\mathrm{I}}J_1^{\mathrm{II}}$ si totiž hlavní body odpovídají následujícím způsobem. Bodu *1* odpovídá v J_1^{I} kuželosečka k_2 a té v J_1^{II} bod *2*; odpovídá proto v U_1 bodu *1* bod *2*. Stejně zjistíme, že U_1 přiřazuje bodu *2* bod *1*, $4 \sim 5$, $5 \sim 3$, $6 \sim 5$. Zapíšeme-li odpovídání v cyklech, platí *(3465)(12)*. Má tedy U_1 jeden nepřímočarý čtyrbodový cyklus a tudíž podle známých vět o cyklických kolineacích, je U_1 cyklická s periodou čtyři. Jeden samodružný bod U_1 je S_1, neboť v U_1 odpovídá přímce *36* přímka *45* a obráceně, přímce *45* přímka *36*. Přímka *12* je samodružná jak v J_1^{I}, tak i v J_1^{II}; je proto samodružná i v U_1 a U_1 na ní indukuje involuci, jejíž dva páry jsou *1, 2* a I, I', kde $I = 45 \cap 12$ a $I' = 12 \cap 36$. Samodružné body této involuce S_I a S_{II} jsou další dva samodružné body kolineace $\mathbf{U}_1$. Kolineace $\mathbf{V}_1 = (\mathbf{U}_I)^3$ má tytéž samodružné body jako kolineace $\mathbf{U}_1$.

Jaké vztahy platí mezi jednotlivými transformacemi, ukazuje nejlépe tato tabulka:

$\mathbf{E}$	J_1^I	J_2^I	J_1^{II}	J_2^{II}	$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{V}_1$
J_1^I	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{V}_1$	J_2^I	J_1^{II}	J_2^{II}
J_2^I	$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{U}_1$	J_1^I	J_2^{II}	J_1^{II}
J_1^{II}	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}_1$	J_2^{II}	J_2^I	J_1^I
J_2^{II}	$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{E}$	J_1^{II}	J_1^I	J_2^I
$\mathbf{H}_1$	J_2^I	J_1^I	J_2^{II}	J_1^{II}	$\mathbf{E}$	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{U}_1$
$\mathbf{U}_1$	J_2^{II}	J_1^{II}	J_1^I	J_2^I	$\mathbf{V}_1$	$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{E}$
$\mathbf{V}_1$	J_1^{II}	J_2^{II}	J_2^I	J_1^I	$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}_1$

Věta 3: *Involuce pátého stupně* $J_1^I, J_2^I, J_1^{II}, J_2^{II}$ *a kolineace* $\mathbf{H}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1$ *s identickou transformací* $\mathbf{E}$ *tvoří grupu rovinných transformací osmého řádu* $\mathfrak{G}_8$.

Grupa $\mathfrak{G}_8$ není Abelova, má však tři Abelovy podgrupy řádu čtyři:

$$\mathfrak{G}_4(J_1^I, J_2^I, \mathbf{H}_1, \mathbf{E})\,, \quad \mathfrak{G}_4'(J_1^{II}, J_2^{II}, \mathbf{H}_1, \mathbf{E})\,, \quad \mathfrak{G}_4''(\mathbf{H}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1, \mathbf{E})\,.$$

Kleinovy čtyřgrupy   cyklická grupa

V dalším pod pojmem „*samodružný element pro grupu* $\mathfrak{G}$" rozumíme element, který je samodružný pro všechny transformace této grupy. Pod pojmem „*invariantní křivka pro* $\mathfrak{G}$" rozumíme křivku, která je invariantní vzhledem ke všem transformacím grupy $\mathfrak{G}$.

IV. Samodružné elementy pro grupu $\mathfrak{G}_8$.

Podgrupa $\mathfrak{G}_4$ má podle práce [2] jen tři samodružné body S_1, M_1 a $M_2 = $ $= \mathit{12} \cap \mathit{35}$ a jedinou samodružnou přímku *12*.

Podgrupa $\mathfrak{G}_4'$ má podle práce [1] tři samodružné body I, I', S_1 a tři samodružné přímky *12, 36, 45.*

Z vlastností kolineací $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$ plyne, že podgrupa $\mathfrak{G}_4''$ má samodružný bod S_1 a dva samodružné body S_I a S_{II} kolineací $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$. Tři samodružné přímky jsou spojnice zmíněných samodružných bodů.

Věta 4: *Grupa* $\mathfrak{G}_8$ *má jediný samodružný bod* S_1 *a jedinou samodružnou přímku 12.*

V. Invariantní křivky pro grupu $\mathfrak{G}_8$.

Podgrupa $\mathfrak{G}_4$ má podle práce [2] celý svazek invariantních kuželoseček a to svazek s basí v bodech *3, 4, 5, 6.* Abychom ukázali, které kuželosečky tohoto svazku se reprodukují $\mathfrak{G}_8$, stačí určit ty kuželosečky ze zmíněného svazku, které jsou invariantní pro jednu z involucí J^{II}, třeba J_1^{II}, poněvadž $\mathfrak{G}_4$ je v $\mathfrak{G}_8$ indexu dvě. Aby se kuželosečka svazku *3, 4, 5, 6* reprodukovala involucí J_1^{II}, musí protínat přímku *12* v bodech, které harmonicky oddělují samodružné body I a I' involuce J_1^{II} na této přímce. Body I, I' jsou proto polárně sdružené pro hledanou invariantní kuželosečku, a poněvadž přímka *12* je polárou bodu S_1 pro všechny kuželosečky svazku *3, 4, 5, 6*, je přímka IS_1 polárou bodu I' naší invariantní kuželosečky.

Věta 5: *Existuje jediná kuželosečka invariantní vůči grupě* $\mathfrak{G}_8$. *Je to kuželosečka* k_I *jdoucí body 3, 4, 5, 6 s tečnami 3I, 4I', 5I', 6I v těchto bodech.*

Studium nerozložitelných kubik invariantních pro $\mathfrak{G}_8$ nevede ke kladnému výsledku. Vyšetřování neprovedeme, není na něm nic zajímavého.

Dříve než přikročíme ke studiu invariantních sextik pro $\mathfrak{G}_8$, definujme si nejprve pojem bodové osmice a uveďme několik pomocných vět.

Definice: *Osm bodů, které obdržíme, když na libovolný bod roviny* Q_1 *aplikujeme všechny transformace* $\mathfrak{G}_8$, *tvoří bodovou osmici* (Q).

Nechť bodu Q_1 odpovídají transformacemi $J_1^I, J_2^I, J_1^{II}, J_2^{II}, \mathbf{H}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1$ postupně body $Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8$. Z grupových zákonů $\mathfrak{G}_8$ se snadno odvodí věta:

Věta 6: *Zvolíme-li za bod* Q_1 *samodružný bod* S_1 *grupy* $\mathfrak{G}_8$ *redukuje se osmice bodů* (Q) *na jediný bod, na dva body, je-li* Q_1 *samodružný bod jen jedné z podgrup* $\mathfrak{G}_4$, $\mathfrak{G}_4'$, $\mathfrak{G}_4''$ *(nebo bod 1, či 2), na čtyři body, je-li* Q_1 *samodružný bod pouze jedné z transformací grupy* $\mathfrak{G}_8$, *různé od* E.

Platí i věta obrácená.

Neredukovaná osmice (Q) nemůže ležet v přímce, neboť jenom přímka *12* je samodružná v $\mathfrak{G}_8$, a pro její body se osmice redukuje na čtveřici nebo na dvojici (podle věty 6). Leží na regulární kuželosečce tehdy a jen tehdy, zvolíme-li za bod osmice (Q) bod kuželosečky k_I, která je invariantní pro $\mathfrak{G}_8$. Poněvadž všechny kuželosečky svazku s basí v hlavních bodech *3, 4, 5, 6* jsou invariantní pro $\mathfrak{G}_4$, znamená to, že kuželosečka k_{II} tohoto svazku, obsahující bod Q_1, obsahuje ještě další tři body Q_2, Q_3, Q_6 osmice (Q). Této kuželosečce odpovídá však v ostatních transformacích $\mathfrak{G}_8$ kuželosečka téhož svazku k_{II}', která prochází body Q_4, Q_5, Q_7, Q_8. Můžeme proto vyslovit větu:

Věta 7: *Každá neredukovaná osmice* (Q) *leží na dvojici kuželoseček svazku, který má basi v bodech 3, 4, 5, 6. Tato dvojice kuželoseček splyne v jedinou, zvolíme-li za bod osmice bod kuželosečky* k_I, *která je invariantní pro* $\mathfrak{G}_8$.

Pro lepší přehled důkazů uvádíme tabulku, jak sobě odpovídají spojnice hlavních bodů v jednotlivých transformacích $\mathfrak{G}_8$

	J_1^{I}	J_2^{I}	J_1^{II}	J_2^{II}	H_1	U_1	V_1
13	*24*	*25*	*16*	*13*	*16*	*24*	*25*
14	*23*	*26*	*14*	*15*	*15*	*26*	*23*
15	*26*	*23*	*15*	*14*	*14*	*23*	*26*
16	*25*	*24*	*13*	*16*	*13*	*25*	*24*
23	*14*	*15*	*26*	*23*	*26*	*14*	*15*
24	*13*	*16*	*24*	*25*	*25*	*16*	*13*
25	*16*	*13*	*25*	*24*	*24*	*13*	*16*
26	*15*	*14*	*23*	*26*	*23*	*15*	*14*
34	*34*	*56*	*46*	*35*	*56*	*46*	*35*
35	*46*	*35*	*56*	*34*	*46*	*34*	*56*
36	*45*	*45*	*36*	*36*	*36*	*45*	*45*
45	*36*	*36*	*45*	*45*	*45*	*36*	*36*
46	*35*	*46*	*34*	*56*	*35*	*56*	*34*
56	*56*	*34*	*35*	*46*	*34*	*35*	*46*

(3)

V dalších pomocných větách nebereme v úvahu hlavní body *1, ..., 6*.

Pomocná věta I: *Spojnice hlavních bodů jdoucí bodem M_1, resp. M_2, různé od 12, obsahují každá jediný bod, pro nějž se (Q) redukuje na čtveřici.*

Kubika samodružných bodů c_1^3 involuce J_1^{I}, resp. c_2^3 involuce J_2^{I} prochází hlavními body *1, ..., 6* a bodem M_2, resp. M_1 [3]. Protíná proto spojnice hlavních bodů jdoucí bodem M_1, resp. M_2 v jediném bodě, kdežto spojnice hlavních bodů jdoucí M_2, resp. M_1 již vůbec neprotíná. Samodružné body ostatních transformací $\mathfrak{G}_8$ na těchto přímkách již neleží.

Pomocná věta II: *Spojnice hlavních bodů neprocházející ani bodem M_1 ani bodem M_2 a různé od přímek samodružných bodů involucí J_1^{II} a J_2^{II} obsahují každá tři body, pro něž se (Q) redukuje na čtveřici. Dva z těchto bodů náleží téže čtveřici.*

Kubiky c_1^3 a c_2^3 se protínají v bodech *1, ..., 6*, S_1 a v bodech *1, 2* se dotýkají [2]. Protíná je proto uvažovaná spojnice hlavních bodů ve dvou různých bodech, které náleží téže čtveřici (podle [3]). Každá z těchto přímek je stranou čtyrrohu *1, 2, 4, 5*, resp. čtyrrohu *1, 2, 3, 6*, obsahuje proto isolovaný samodružný bod $II = 14 \cap 25$, nebo $III = 24 \cap 15$, resp. $II' = 13 \cap 26$, nebo $III' = 16 \cap 23$ involuce J_1^{II}, resp. involuce J_2^{II}. Body II, II', III, III' náleží téže čtveřici, jak plyne z (3).

Pomocná věta III: *Kuželosečka k_{I} obsahuje tři redukované osmice, a to jednu dvojici $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$ a dvě čtveřice II, III, II', III' a C_1, C_2, C'_1, C'_2, kde C_1, C_2, resp. C'_1, C'_2 jsou průsečíky k_{I} s kubikou c_1^3, resp. c_2^3.*

Kuželosečka k_{I}, poněvadž je pro $\mathfrak{G}_8$ invariantní, protíná přímku *12* v redukované dvojici. Na přímce *12* leží tři dvojice, totiž I, I'; M_1, M_2; $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$. Nemůže to být dvojice I, I', ani M_1, M_2, zbývá proto jen dvojice $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$. Bod S_1 a přímka *12* jsou pól a polára pro k_{I}, proto tečny k_{I} v bodech $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$ jsou přímky

S_1S_{I}, S_1S_{II}. Spojnice hlavních bodů z pomocné věty II protínají k_{I} v jednom hlavním bodě a ještě v dalším bodě, takovém, že body mu odpovídající v transformacích $\mathfrak{G}_8$ neleží na téže přímce. Tuto podmínku splňují pouze isolované samodružné body involucí J_1^{II}, J_2^{II} totiž *II, III, II', III'*, které tedy všechny leží na invariantní k_{I}. Kubika c_1^3, resp. c_2^3 protíná k_{I} vedle hlavních bodů ještě v bodech C_1, C_2, resp. C_1', C_2'. Vzhledem k invariantnosti k_{I} náleží body C_1, C_2, C_1', C_2' téže čtveřici.

Uvažujme nejprve podgrupu $\mathfrak{G}_4'$ grupy $\mathfrak{G}_8$. Tato podgrupa je téhož typu jako grupa prostudovaná v práci [1] prof. Bydžovským. V této práci je uvedena věta: Každá sextika s dvojnásobnými body *1, ..., 6* procházející dvěma libovolnými dvojicemi jedné involuce J_1^{II} a stejně tak dvěma dvojicemi (různými od prvních dvou), které jim odpovídají v J_2^{II}, je invariantní pro $\mathfrak{G}_4$. (Připomínáme čtenáři, že sextika procházející šesti hlavními body přechází involucemi $J_1^{\mathrm{I}}, J_1^{\mathrm{II}}, J_2^{\mathrm{I}}, J_2^{\mathrm{II}}$ opět v sextiku.)

Nechť sextika s^6 mající dvojnásobné body *1, ..., 6* prochází neredukovanou osmicí (Q). Poněvadž body (Q) tvoří čtyři dvojice (Q_1, Q_4), (Q_2, Q_7), (Q_3, Q_8), (Q_5, Q_6) pro J_1^{II} a současně čtyři dvojice (Q_1, Q_5), (Q_2, Q_8), (Q_3, Q_7), (Q_4, Q_6) pro J_2^{II} (dle (3)), lze mezi nimi vybrat vždy dvě dvojice jedné involuce tak, aby jim odpovídající dvojice druhé involuce grupy $\mathfrak{G}_4'$ byly různé od prvních dvou. Sextika s^6 splňuje předpoklady citované věty, a proto je invariantní pro všechny transformace $\mathfrak{G}_4'$. Invariantnost s^6 vůči $\mathfrak{G}_8$ bude dokázána, ukážeme-li, že s^6 je invariantní alespoň pro jednu involuci J^{I}. Kubika samodružných bodů c_i^3 involuce J_i^{I} má s s^6 společných šest hlavních bodů *1, ..., 6* a ještě dalších šest bodů, kterými musí procházet $\bar{s}^6$ odpovídající s^6 v J_i^{I}. Tyto body jsou různé od bodů neredukované (Q), neboť pro ně se osmice redukuje na čtveřici. Křivky s^6 a $\bar{s}^6$ se protínají v hlavních bodech *1, ..., 6*, které jsou pro obě dvojnásobné, v bodech osmice (Q) a v šesti bodech c_i^3, což dává dohromady 38 průsečíků t. j. $\bar{s}^6 = s^6$.

Věta 8: *Všechny sextiky určené dvojnásobnými body 1, ..., 6 a procházející neredukovanou osmicí (Q), jsou invariantní pro $\mathfrak{G}_8$.*

Invariantní sextiky s^6 určené dvojnásobnými body *1, ..., 6* a jednoduchými body $Q_1, \ldots, Q_8$ určité neredukované (Q) tvoří svazek s basí v těchto bodech, které dávají dohromady $6 \cdot 4 + 8 = 32$ průsečíků. Zbývá určit ještě další čtyři body base. Všechny křivky s^6 protínají k_{I} v bodech *3, 4, 5, 6*, které dávají osm průsečíků a v dalších čtyřech bodech, které tvoří redukovanou osmici, poněvadž s^6 jsou invariantní. Takových bodů je na k_{I} pouze konečný počet (dle pomocné věty III), musíme proto mezi nimi hledat body base svazku invariantních sextik s^6. Současně však mají křivky s^6 všecky se samodružnou přímkou *12* společnou, kromě hlavních bodů *1, 2,* tutéž redukovanou dvojici bodů, která také patří basi svazku. Poněvadž svazek sextik může mít pouze 36 bodů base, dotýkají se všecky s^6 kuželosečky k_{I} v bodech S_{I}, S_{II}, v nichž mají společné tečny S_1S_{I}, S_1S_{II}, které si odpovídají v $\mathfrak{G}_8$.

Věta 9: *Invariantní sextiky určené dvojnásobnými body 1, ..., 6 a jednoduchými body určité neredukované* (Q), *tvoří svazek sextik, které mají v bodech* S_{I}, S_{II} *společné tečny* S_1S_{I}, $S_1 S_{\text{II}}$.

Aby tyto sextiky byly rozložitelné, musely by se rozpadat na invariantní křivky, nebo na křivky, které se transformacemi $\mathfrak{G}_8$ vyměňují, stupně nižšího než šestého. Jsou možné tyto případy:

a) Přímka *12* a kvintika s dvojnásobnými body *3, 4, 5, 6* a jednoduchými *1, 2,* $Q_1, \ldots, Q_8$. Neredukovaná osmice nemůže ležet na přímce *12*, a proto ji uvažovaná kvintika protíná kromě bodů *1, 2* ještě ve třech bodech (nikoli nutně vesměs různých od bodů *1, 2*), které se reprodukují $\mathfrak{G}_8$. Z těchto tří bodů by dva v každém případě tvořily dvojici a zbývající bod by byl samodružný pro $\mathfrak{G}_8$. Takový bod však na přímce *12* neexistuje, a proto tento případ nemůže nastat.

b) Kvartika q_i z invariantního svazku kvartik s basí v bodech *1, 2* dvojnásobných, *3, 4, 5, 6, II, III, II', III'* jednoduchých a kuželosečka k_{I}. Kvartika q_i má s kuželosečkou k_{I} společné body *3, 4, 5, 6, II, III, II', III'*. Podmínku, aby kvartika q_i procházela danou neredukovanou osmicí, splňuje jediná kvartika svazku. (O osmici bodů tu předpokládáme, že neleží na k_{I}, kdyby tomu tak bylo, obsahovala by kvartika q_i kuželosečku k_{I} jako součást.)

c) Kvartika q_i a dvě přímky. Aby tato rozložitelná sextika patřila do svazku invariantních sextik, musely by dvě přímky, které by byly jejími součástmi, obsahovat body *3, 4, 5, 6,* S_{I}, S_{II}, což není možné.

d) Dvě kubiky. Poněvadž neexistuje dle kapitoly V kubika invariantní pro $\mathfrak{G}_8$, musely by to být kubiky, které se transformacemi $\mathfrak{G}_8$ vyměňují. Aby kubika přecházela opět v kubiku symetrickými involucemi pátého stupně, musí obsahovat 1. jeden hlavní bod jako dvojnásobný a čtyři hlavní body jako jednoduché, 2. všechny hlavní body jako jednoduché. Případ 1. nepřichází pro naše vyšetřování v úvahu, neboť byl-li by jeden z hlavních bodů *3, 4, 5, 6* dvojnásobným bodem, musely by jimi být i všechny ostatní z těchto bodů ($\mathbf{U}_1$(*3465*) $\mathbf{V}_1$(*3564*) $\mathbf{H}_1$(*36*) (*45*)). Ale ani body *1, 2*, které si navzájem odpovídají, nevyhovují. Na př. v $\mathbf{J}_{\text{I}}^{\text{II}}$ odpovídá kubice, mající bod *1* za dvojnásobný a bod S_{I}, resp. S_{II} za jednoduchý, kubika, pro niž je bod *1* opět dvojnásobný, ale která prochází bodem S_{II}, resp. S_{I}. Musela by proto tato kubika obsahovat jak bod S_{I}, tak bod S_{II}, což není možné. Zbývá proto vyšetřit pouze případ 2. V tomto případě by jedna sextika obsahovala body *1, ..., 6* a v bodě S_{I} by se dotýkala přímky S_1S_{I} a druhá by procházela body *1, ..., 6* a v bodě S_{II} by se dotýkala přímek S_1S_{II}. Takto určené kubiky by se však protínaly ještě ve třech bodech, které by se musely grupou $\mathfrak{G}_8$ reprodukovat. To je možné jen tehdy, kdyby jeden z těchto bodů byl bod S_1 a druhé dva body body redukované dvojice. Redukované dvojice leží však pouze na přímce *12*, a proto přímka *12* by byla součástí obou kubik.

e) Tři kuželosečky, a to kuželosečka k_{I} a dvě kuželosečky svazku s basí v bodech *3, 4, 5, 6*, které se jediné vyměňují grupou $\mathfrak{G}_8$. Tato sextika však nemá body *1, 2* za dvojnásobné.

f) Dvě kuželosečky a dvě přímky. Tento případ splňují pouze dvě kuželosečky svazku s basí v bodech *3, 4, 5, 6*, které obsahují, dle věty 7, neredukovanou osmici, a přímka *12* dvakrát počítaná.

g) Kuželosečka k_{I} a čtyři přímky. Pro čtveřici přímek existují dle (3) tyto možnosti: buď přímky *13, 24, 25, 16*, nebo *23, 14, 26, 15*, resp. *36, 45* a přímka *12* dvakrát počítaná. Ovšem, tyto případy nastanou pouze tehdy, leží-li body neredukované osmice na přímkách spojujících hlavní body.

h) Šest přímek. Tomuto případu vyhovuje pouze přímka *12* dvakrát počítaná a některá ze čtveřic přímek dle (3) reprodukujících se grupou $\mathfrak{G}_8$.

Z těchto úvah plyne: *Ve svazku invariantních sextik uvažovaném ve větě 9, když body neredukované osmice (Q) neleží ani na k_{I}, ani na spojnicích hlavních bodů, existují dvě rozložitelné sextiky. Sextika složená z kvartiky q_i obsahující neredukovanou osmici a kuželosečky k_{I} a sextika obsahující jako součásti dvě kuželosečky svazku s basí v bodech 3, 4, 5, 6, které procházejí body neredukované osmice a přímku 12 dvakrát počítanou.*

Má-li mít sextika invariantní pro $\mathfrak{G}_8$ vedle hlavních bodů ještě další dvojnásobné body, musí mít všechny ostatní body příslušné osmice (*Q*) za dvojnásobné. To je možné jen pro ty body, pro něž se osmice redukuje, požadujeme-li, aby sextika byla nerozložitelná.

Sextiky se sedmi dvojnásobnými body.

Za sedmý dvojnásobný bod invariantní sextiky můžeme vzít pouze bod S_1, který je jediným samodružným bodem pro $\mathfrak{G}_8$. Taková sextika protíná přímku *12* v redukované dvojici bodů. Poněvadž na této přímce (dle věty 6) leží tři takové dvojice S_{I}, S_{II}; I, I'; M_1, M_2, existují celkem tři možnosti:

a) S_{I}, S_{II} — uvažovaná sextika potom náleží do systému sextik s dvojnásobnými body *1, ..., 6*, dotýká se proto v bodech S_{I}, S_{II} přímek S_1S_{I}, S_1S_{II}. Invariantní sextiky s_i^6 svazku určeného dvojnásobnými body *1, ..., 6* a neredukovanou (*Q*) protínají přímku *36* samodružných bodů involuce J_1^{II}, resp. přímku *45* samodružných bodů involuce J_2^{II}, kromě v hlavních bodech ještě ve dvou bodech A_{i1}, A'_{i1}, resp. A_{i2}, A'_{i2}, které tvoří páry involuce $\boldsymbol{H}_1$ na těchto přímkách. Poněvadž s^6 je invariantní pro $\mathfrak{G}_8$ a bodům přímky *36* odpovídají v $\mathfrak{G}_8$ jednak body téže přímky a jednak přímky *45* (dle (3)), náleží body A_{i1}, A'_{i1}, A_{i2}, A'_{i2} téže čtveřici. Požadujeme-li, aby s^6 uvažovaného svazku procházela bodem S_1, je tento bod pro obě přímky *36* a *45* dvojnásobným průsečíkem s s^6, tudíž jejím dalším singulárním bodem.

Věta 10: *V každém svazku sextik určeném dvojnásobnými body 1, ..., 6 a jednoduchými body neredukované osmice (Q) existuje jediná sextika se sedmým dvojnásobným bodem S_1, totiž sextika svazku, určená tímto bodem.*

b) I, I' — v tomto případě se sextika s^6 rozpadá na přímky *36*, *45* a kvartiku q^4 s dvojnásobnými body *1*, *2* a jednoduchými *3*, *4*, *5*, *6*. Aby tato kvartika byla invariantní pro $\mathfrak{G}_8$, musí protínat spojnice hlavních bodů pomocné věty II kromě hlavních bodů, z nichž jeden je dvojnásobný a druhý jednoduchý, ještě v dalším bodě takovém, že body jemu odpovídající v transformacích $\mathfrak{G}_8$ již neleží na této přímce. Z (3) a pomocné věty II plyne, že tento bod je isolovaným samodružným bodem J_i^{II}. Invariantní kvartika q^4 obsahuje proto body II, II', III, III'. Dvojnásobnými body *1*, *2* a jednoduchými *3*, *4*, *5*, *6*, II, II', III, III', je určen svazek kvartik q_i^4, které jsou všechny invariantní pro $\mathfrak{G}_8$, neboť svazek obsahuje tři invariantní kvartiky

$$q_1^4 = 14, 15, 23, 26 \qquad q_2^4 = 25, 24, 16, 13 \qquad q_3^4 = k_I, 12, 12\,.$$

Věta 11: *Invariantní sextiky grupy* $\mathfrak{G}_8$ *se sedmi dvojnásobnými body* S_1, *1*, ..., *6 protínající přímku 12 v bodech* I, I' *se skládají z přímek 36, 45 a invariantní kvartiky* q_i^4 *svazku určeného dvojnásobnými body 1, 2 a jednoduchými 3, 4, 5, 6,* II, III, II', III'.

c) M_1, M_2 — má-li být sextika takto určená invariantní pro $\mathfrak{G}_8$, musí protínat spojnice hlavních bodů jdoucí body M_1, resp. M_2, kromě v těchto a v hlavních bodech, ještě v dalším bodě, pro nějž se osmice redukuje na čtveřici (dle (3)). Takový bod je však na této přímce podle pomocné věty I, právě jeden. Invariantní sextika obsahuje proto body $P_1 = c_1^3 \cap 34$, $P_1' = c_1^3 \cap 56$, $P_2 = c_2^3 \cap 46$, $P_2' = c_2^3 \cap 35$. Invariantní kuželosečku k_I protíná v hlavních bodech *3*, *4*, *5*, *6*, které dávají osm průsečíků a ještě v dalších čtyřech bodech, které náleží téže redukované osmici. Nemohou to být body II, III, II', III', neboť na př. hlavní přímka *15* by měla se sextikou společné dvojnásobné body *1*, *5*, jednoduchý III a ještě jeden bod, jemuž odpovídající v ostatních transformacích $\mathfrak{G}_8$ by už nesměl ležet na téže přímce. Takový bod však již dle tabulky (3) a pomocné věty II neexistuje. Má proto invariantní sextika s kuželosečkou k_I společné body C_1, C_1', C_2, C_2' (dle pomocné věty III). Uvažovaná sextika však protíná každou z kubik c_1^3 a c_2^3 v devatenácti bodech a tudíž se na ně rozpadá.

Věta 12: *Existuje jediná invariantní sextika se sedmi dvojnásobnými body 1, ..., 6,* S_1, *která protíná přímku 12 v bodech* M_1, M_2. *Tato sextika se rozpadá na kubiky* c_1^3 *a* c_2^3.

Tím jsou všechny sextiky se sedmi dvojnásobnými body vyčerpány. Studium hypereliptických invariantních sextik a invariantních sextik rodu jedna nepřináší žádných zajímavostí. Snadno se dá dokázat věta.

Věta 13: *V grupě* $\mathfrak{G}_8$ *neexistují nerozložitelné invariantní sextiky rodu dvě a rodu jedna. Hypereliptické sextiky se rozpadají na dvojnásob počítanou přímku 12 a dvě kuželosečky* k_{II}, k_{II}' *svazku 3, 4, 5, 6, které si odpovídají ve všech trans-*

formacích $\mathfrak{G}_8$. Invariantní sextiky rodu jedna jsou složeny z dvojnásob počítané přímky 12, přímek 36 a 45 a invariantní kuželosečky k_{I}.

Racionální sextiky.

Požadujeme-li, aby racionální sextika byla invariantní pro $\mathfrak{G}_8$, musí její dvojnásobné body být hlavní body *1*, ..., *6* a další čtyři body T_1, T_2, T_3, T_4, které náleží téže čtveřici reprodukující se grupou $\mathfrak{G}_8$. Osmice se redukuje na čtveřici, zvolíme-li za bod T_i samodružný bod (různý od bodů S_1, M_1, M_2, $I, I', S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{I}}$) jedné z involucí $\mathfrak{G}_8$. Snadno se ukáže, že neexistují jednoduché invariantní racionální sextiky s dvojnásobnými body v bodech *1*, ..., *6* a v bodech čtveřice samodružných bodů involucí $\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{II}}$, $\boldsymbol{J}_2^{\mathrm{II}}$, $\boldsymbol{H}_1$.

Jinak je tomu pro involuce prvního druhu.

Je-li bod T_1 samodružným bodem involuce $\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{I}}$, t. j. bod kubické křivky c_1^3 (ovšem různý od M_2, S_1), odpovídá mu v $\boldsymbol{J}_2^{\mathrm{I}}$ bod $T_2 \neq T_1$ ležící opět na c_1^3. V $\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{II}}, \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{II}}$ odpovídá c_1^3 křivka c_2^3 a proto body T_3, T_4 odpovídající v těchto involucích bodu T_1, leží na této křivce a jsou samodružné pro $\boldsymbol{J}_2^{\mathrm{I}}$. c_1^3 i c_2^3 jsou invariantní pro $\boldsymbol{H}_1$ a body $T_1, \ldots, T_4$ tvoří pro ni páry (T_1, T_2), (T_3, T_4). Přímky T_1T_2, T_3T_4 procházejí bodem S_1 a odpovídají si navzájem kolineací $\boldsymbol{U}_1$.

O poloze dvojnásobných bodů racionální sextiky, jichž jak známo je deset, odvodil prof. Bydžovský v [4] větu: Sestrojme kterékoliv dvě křivky kubické, které obsahují dohromady všech těchto deset bodů: osm z nich mají společných, mimo to každá obsahuje jeden další bod jako devátý. Tečna v každém z těchto dvou bodů k příslušné kubice, protne ji v témže bodě, ve kterém ji protne tečna vedená v devátém průsečíku obou křivek.

Zkusíme, zda skupina bodů *1*, ..., *6*, T_1, T_2, T_3, T_4 vyhovuje podmínce uvedené v této větě. Body *1*, ..., *6*, T_1, T_2, T_3 a *1*, ..., *6*, T_1, T_2, T_4 proložíme kubické křivky c_3^3 a c_4^3. Obě tyto kubiky patří do svazku kubik, určeného kubikou c_1^3 samodružných bodů involuce $\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{I}}$ a kubikou složenou z kuželosečky k_{III} určené body *3*, *4*, *5*, *6*, T_1, která obsahuje také bod T_2 a přímky *12*. Tyto dvě kubiky se protínají ještě v bodě M_2 a stejně tak i křivky c_3^3 a c_4^3, které jsou invariantní pro $\boldsymbol{J}_2^{\mathrm{I}}$ dle práce [2], [3] tudíž obecně eliptické. Označíme-li eliptické parametry bodů *1*, ..., *6*, T_1, T_2, T_3, M_2 na křivce c_3^3 postupně písmeny $a_1, \ldots, a_6, t_1, t_2, t_3, m$ a eliptický parametr tečnového bodu k M_2 písmenem t, platí:

$$2m + t \equiv 0\,, \quad a_3 + a_5 + m \equiv 0\,, \quad a_4 + a_6 + m \equiv 0\,. \tag{4}$$

Protože c_3^3 je invariantní a bod T_3 samodružný pro $\boldsymbol{J}_2^{\mathrm{I}}$, existuje kuželosečka svazku *3*, *4*, *5*, *6* invariantní pro $\boldsymbol{J}_2^{\mathrm{I}}$, která se dotýká v bodě T_3 kubiky c_3^3. Platí proto

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 2t_3 \equiv 0\,. \tag{5}$$

Dosazením do (5) z (4) dostáváme

$$t + 2t_3 \equiv 0\,.$$

Čili kubika c_3^3 má týž tečnový bod pro M_2 jako pro bod T_3. Stejným způsobem se dokáže, že i kubika c_4^3 má pro body M_2 a T_4 týž tečnový bod.

Věta 14: *Racionální sextiky s dvojnásobnými body 1, ..., 6 T_1, T_2, T_3, T_4, kde body T_1, T_2 jsou průsečíky kubiky c_1^3 a libovolné přímky (která neprochází žádným z hlavních bodů) jdoucí bodem S_1, a body T_3, T_4, průsečíky kubiky c_2^3 a přímky, která odpovídá přímce T_1T_2 v kolineaci U_1, jsou invariantní pro $\mathfrak{G}_8$.*

Podrobným rozborem případů, kdy by se racionální sextika věty 14 mohla rozpadnout, prováděným stejným způsobem jako při zkoumání rozložitelnosti invariantních sextik se šesti dvojnásobnými body, dojdeme k výsledku.

Neleží-li body čtveřice T_1, T_2, T_3, T_4 na kuželosečce k_{I}, nebo na spojnicích hlavních bodů, jsou racionální sextiky věty 14 nerozložitelné.

Poněvadž pro samodružné body kolineace U_1 a V_1 se osmice redukuje na menší počet, než na čtyři body, jsou probranými případy vyčerpány všechny invariantní racionální sextiky grupy $\mathfrak{G}_8$.

VI. Specialisace podmínek kapitoly II.

V dalším předpokládáme, že body *1, ..., 6* mají polohu uvedenou ve větě 2.

Vyšetříme nyní (viz poznámku 2), zda body *1, ..., 6* nemohou být při speciální volbě bodů *1* a *2* na diagonální straně čtyrrohu *3, 4, 5, 6* v první i v druhé charakteristické poloze více než dvěma různými způsoby současně.

Poznámka 3. Body *1, ..., 6* nemohou být v další první charakteristické poloze tím způsobem, aby involuce J_3^{I} mající je za hlavní body, měla s involucemi J_1^{I} a J_2^{I} společný pár *1, 2*. V tom případě by se diagonální trojúhelník čtyrrohu *3, 4, 5, 6* musel redukovat na přímku, což nenastane, poněvadž žádné tři z bodů *3, 4, 5, 6* neleží podle předpokladu v přímce.

Stejně tak nemůžeme za pár hlavních bodů involuce J_3^{I} volit body *3, 6* nebo *4, 5* (viz poznámku 1). Zbývají proto pro seskupení jejich hlavních bodů do párů tyto možnosti:

$$\begin{array}{cccc} 13,\,24,\,56 & 14,\,35,\,26 & 15,\,23,\,46 & 16,\,25,\,34 \\ 13,\,25,\,46 & 14,\,23,\,46 & 15,\,26,\,34 & 16,\,24,\,35 \end{array} \tag{6}$$

Vyberme jednu z nich, t. j. předpokládejme, že body *1, ..., 6* jsou v další první charakteristické poloze tím způsobem, aby *13, 24, 56* byly páry hlavních bodů involuce J_3^{I}. Potom se musí přímky

$$\begin{aligned} 13 &\equiv y_2x_1 - y_1x_2 + (y_1 - y_2)\,x_3 = 0 \\ 24 &\equiv y_1x_1 + y_2x_2 + (y_1 - y_2)\,x_3 = 0 \\ 56 &\equiv x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

protínat v jednom bodě M_3. Nutná a postačující podmínka pro to je, aby souřadnice bodů *1, 2* splňovaly rovnici

$$y_1^2 + y_2^2 - y_1y_2 = 0\,. \tag{7}$$

Přímkám *13, 24, 56* odpovídají postupně (podle tabulky (3)) kolineací $\mathbf{H}_1$ přímky *16, 25, 34*, v cyklické kolineaci $\mathbf{V}_1 = J_2^{\mathrm{I}} J_1^{\mathrm{II}}$ přímky *25, 13, 46* a v cyklické kolineaci $\mathbf{U}_1 = J_1^{\mathrm{I}} J_1^{\mathrm{II}}$ přímky *24, 16, 35*. Poněvadž *24, 13, 56* procházejí jediným bodem M_3, protínají se také přímky *16, 25, 34*, resp. *25, 13, 46*, resp. *24, 16, 35* v jediném bodě M_4, resp. M_5, resp. M_6. To však znamená, že body *1, ..., 6*, je-li splněna podmínka (7), jsou ještě třemi dalšími různými způsoby v první charakteristické poloze, čili, že existují ještě tři involuce prvního druhu

$$J_4^{\mathrm{I}}\ 16, 25, 34\,,\quad J_5^{\mathrm{I}}\ 13, 25, 46\,,\quad J_6^{\mathrm{I}}\ 16, 24, 35\,.$$

Poznámka 4. Další involuce prvního druhu s týmiž hlavními body neexistuje. Její hlavní body by musely tvořit skupinu jedné z dalších možností (6). Potom by ale nutně tři involuce prvního druhu měly společný pár, což není podle poznámky 3 možné.

Složením dvou involucí prvního druhu se společným párem obdržíme středovou kolineaci $\mathbf{H}$ (obdobně jako v $\mathfrak{G}_8$). Existuje celkem devět případů:

Úvahy v dalším provedené jsou v podstatě téhož druhu jako úvahy v předchozích kapitolách a proto uvádíme většinou jen výsledky.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1 &= J_1^{\mathrm{I}} J_2^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_1 = 12 \text{ a středem } S_1 = 36 \cap 45\\
\mathbf{H}_2 &= J_1^{\mathrm{I}} J_3^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_2 = 56 \text{ a středem } S_2 = 23 \cap 14\\
\mathbf{H}_3 &= J_1^{\mathrm{I}} J_4^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_3 = 34 \text{ a středem } S_3 = 26 \cap 15\\
\mathbf{H}_4 &= J_2^{\mathrm{I}} J_5^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_4 = 46 \text{ a středem } S_4 = 23 \cap 15\\
\mathbf{H}_5 &= J_2^{\mathrm{I}} J_6^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_5 = 35 \text{ a středem } S_5 = 26 \cap 14\\
\mathbf{H}_6 &= J_3^{\mathrm{I}} J_5^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_6 = 13 \text{ a středem } S_6 = 26 \cap 54\\
\mathbf{H}_7 &= J_3^{\mathrm{I}} J_6^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_7 = 24 \text{ a středem } S_7 = 36 \cap 15\\
\mathbf{H}_8 &= J_4^{\mathrm{I}} J_5^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_8 = 25 \text{ a středem } S_8 = 36 \cap 14\\
\mathbf{H}_9 &= J_4^{\mathrm{I}} J_6^{\mathrm{I}} \text{ s osou } o_9 = 16 \text{ a středem } S_9 = 23 \cap 45
\end{aligned}$$

Hlavní kuželosečka k_1 je invariantní pro $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_6$ i $\mathbf{H}_9$, poněvadž bod *1* je pro tyto kolineace samodružný a body *2, 3, 4, 5, 6* si odpovídají navzájem. Bodu *4* odpovídá ve všech těchto kolineacích bod *5*. To znamená, že tečny k_1 v bodech *4, 5* se protínají v průsečíku os kolineací o_1, o_6, o_9, t. j. v bodě *1*. Je tedy přímka $p_1 \equiv 45$ polárou bodu *1* vzhledem ke k_1. Obdobně se dokáže, že poláry bodů *2, 3, 4, 5, 6* vzhledem ke kuželosečkám k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 jsou přímky *36, 26, 15, 14, 23*. Označme je po řadě p_2, p_3, p_4, p_5, p_6. Přímka p_i je tedy polárou hlavního bodu i vzhledem ke kuželosečce k_i. Z toho plyne, že body *2, 3*, resp. *2, 6*, resp. *1, 4*, resp. *1, 5* jsou samodružnými body Desarguesovy involuce vyťaté na jejich spojnici svazkem kuželoseček s basí v bodech *1, 4, 5, 6*, resp. *1, 3, 4, 5*, resp. *2, 3, 5, 6*, resp. *2, 3, 4, 6*, t. j. že body *1, ..., 6* jsou, je-li splněna podmínka (7) ještě čtyřmi různými způsoby v druhé charakteristické poloze a tvoří skupinu hlavních bodů dalších čtyř involucí druhého druhu:

$$J_3^{\mathrm{II}}\ 23, 1456,\ J_4^{\mathrm{II}}\ 26, 1345,\ J_5^{\mathrm{II}}\ 14, 2346,\ J_6^{\mathrm{II}}\ 15, 2346\,.$$

Poznámka 5. Další involuce druhého druhu s týmiž hlavními body neexistuje, neboť by musela mít za pár hlavních bodů prvního druhu pár hlavních bodů některé z involucí J_i^{I} $(i = 1, \ldots, 6)$ a to není (dle poznámky 1) možné.

Věta 15: *Šest bodů v rovině 1, ..., 6 je současně šesti různými způsoby v první a šesti různými způsoby v druhé charakteristické poloze tehdy a jen tehdy, když souřadnice bodů 1, 2 při dané volbě systému souřadného splňují rovnice:*

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 0\,, \quad x_3 = 0\,.$$

Požadujeme-li tedy, aby body *1*, ..., *6* byly v první i v druhé charakteristické poloze současně více než dvěma různými způsoby, plyne z předchozích úvah, že jsou v každé z těchto poloh nutně právě šesti různými způsoby. Poznámky 4 a 5 pak říkají, že jiné možnosti už neexistují.

VII. Příslušná grupa $\mathfrak{G}_{72}$.

Nejprve vyšetříme, jaké rovinné transformace obdržíme skládáním involucí téhož druhu mezi sebou. Jak jsme se již zmínili, složením dvou involucí J^{I} se společným párem hlavních bodů, obdržíme devět středových kolineací H_i. Tytéž kolineace dostaneme složením dvou involucí J^{II} a to těch, které nemají žádný společný hlavní bod prvního druhu.

Dvě involuce J^{I} bez společného páru dávají cyklickou kolineaci S_i periody tři.

$$S_1 = J_1^{\mathrm{I}}J_5^{\mathrm{I}} = J_5^{\mathrm{I}}J_6^{\mathrm{I}} = J_6^{\mathrm{I}}J_1^{\mathrm{I}}, \quad (S_1)^2 = S_2\,, \quad S_3 = J_2^{\mathrm{I}}J_3^{\mathrm{I}} = J_4^{\mathrm{I}}J_2^{\mathrm{I}} = J_3^{\mathrm{I}}J_4^{\mathrm{I}}\,, \quad (S_3)^2 = S_4\,.$$

Spojováním J^{I} po třech obdržíme

a) nemají-li žádný společný pár hlavních bodů

$J_i^{\mathrm{I}}J_k^{\mathrm{I}}J_l^{\mathrm{I}} = J_k^{\mathrm{I}}$ (kde $i \neq k \neq l \neq i$ probíhají buď čísla 2, 3, 4, nebo 1, 5, 6);

b) mají-li společné páry hlavních bodů, dvanáct příbuzností pátého stupně P s periodou šest. Každou z těchto příbuzností je možno utvořit devíti různými způsoby (což plyne z trojího různého určení S_i). Na př.

$$P_1 = J_1^{\mathrm{I}}J_2^{\mathrm{I}}J_6^{\mathrm{I}}\,, \quad (P_1)^2 = S_1\,, \quad (P_1)^3 = J_2^{\mathrm{I}}\,, \quad (P_1)^4 = S_2\,, \quad (P_1)^5 = P_2\,, \quad (P_1)^6 = E\,.$$

Další transformace různé od předchozích dostaneme, přidáme-li k trojici b) involucí prvního druhu involuci J_i^{I} tak, aby v této čtveřici neexistovaly tři involuce bez společného páru hlavních bodů. Tyto transformace jsou kolineace T s periodou tři a každou z nich můžeme vytvořit opět devíti různými způsoby.

$$T_1 = S_1S_4 = S_4S_1\,, \; T_2 = S_2S_3 = S_3S_2\,, \; T_3 = S_2S_4 = S_4S_2\,, \; T_3 = S_1S_3 = S_3S_1\,.$$

Tytéž kolineace obdržíme, jestliže složíme J^{II} s jedním společným hlavním bodem prvního druhu po dvou. Tím jsou všechny prvky, které dostaneme spojováním J_i^{I}, vyčerpány.

Složením involucí J_i^{II} po dvou obdržíme buď středové kolineace H_i, nebo cyklické kolineace T_i s periodou tři. Tři involuce J_i^{II} dávají

a) mají-li každé dvě z nich společný hlavní bod prvního druhu $J_i^{\mathrm{II}}J_k^{\mathrm{II}}J_l^{\mathrm{II}} = J_k^{\mathrm{II}}$ (kde $i \neq k \neq l \neq i$ probíhají buď čísla 1, 3, 4 nebo 2, 5, 6);

b) obsahuje-li trojice dvě involuce bez společných hlavních bodů prvního druhu, dvanáct transformací R pátého stupně s periodou šest. Na př.:

$$R_1 = J_5^{\mathrm{II}}J_6^{\mathrm{II}}J_3^{\mathrm{II}}, \quad (R_1)^2 = T_2, \quad (R_1)^3 = J_3^{\mathrm{II}}, \quad (R_1)^4 = T_1, \quad (R_1)^5 = R_2, \quad (R_1)^6 = E.$$

Přiřadíme-li další J_i^{II} k transformacím a), b) nedostaneme již žádné nové příbuznosti.

Další transformace dostaneme již jen složením jedné involuce J^{I} a jedné involuce J^{II}. S těmito transformacemi jsme se setkali už při grupě $\mathfrak{G}_8$, a tak podobně i zde obdržíme ještě osmnáct cyklických kolineací V_i, U_i ($i = 1, \ldots, 9$), čímž jsou všechny transformace, které můžeme skládáním J^{I} a J^{II} vytvořit, určeny.

Věta 16: *Jsou-li body 1, …, 6 šesti různými způsoby v první a současně šesti různými způsoby v druhé charakteristické poloze, vzniká grupa rovinných transformací $\mathfrak{G}_{72}$ řádu sedmdesát dva. Tato grupa obsahuje mimo identitu E a dvanáct involucí $J_i^{\mathrm{I}}, J_i^{\mathrm{II}}$ ($i = 1, \ldots, 6$), devět centrálních kolineací H_i, osm cyklických kolineací S_i, T_i ($i = 1, \ldots, 4$) periody tři, osmnáct cyklických kolineací V_i, U_i ($i = 1, \ldots, 9$) periody čtyři a dvacetčtyři cyklických příbuzností pátéto stupně P_i, R_i ($i = 1, \ldots, 12$) s periodou šest.*

Grupa $\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje kromě jiných, devět podgrup $\mathfrak{H}_{8i}$ řádu osm, které jsou téhož typu jako $\mathfrak{G}_8$ prostudovaná v III. Šest J_i^{I}, resp. šest J_i^{II} dává podgrupu $\mathfrak{H}_{36}$, resp. $\mathfrak{H}'_{36}$, která obsahuje všechny prvky, které lze dostati složením jenom involucí J_i^{I}, resp. pouze J_i^{II}.

VIII. Invariantní křivky pro grupu $\mathfrak{G}_{72}$.

Grupa $\mathfrak{G}_{72}$ neobsahuje invariantní křivky stupně nižšího než šestého. Neboť jediná invariantní kuželosečka pro $\mathfrak{H}_{8i}$ (viz V) prochází těmi čtyřmi hlavními body, které neleží na ose o_i příslušné středové kolineace H_i. Tyto body jsou však pro každou podgrupu různé, tudíž i invariantní kuželosečka. Totéž platí i pro invariantní kvartiky podgrup $\mathfrak{H}_{8i}$. V podgrupě $\mathfrak{H}_{36}$ existuje podle práce [2] pouze svazek invariantních sextik s dvojnásobnými body *1, …, 6* a tečnami p_i v těchto bodech. Tento svazek sextik je invariantní též pro naši grupu $\mathfrak{G}_{72}$. Poněvadž $\mathfrak{H}_{36}$ je v $\mathfrak{G}_{72}$ indexu dvě, stačí vyšetřiti, zda je tento svazek sextik invariantní pro jedinou transformaci $\mathfrak{G}_{72}$, která není obsažena v $\mathfrak{H}_{36}$. Vyšetříme to třeba pro cyklickou kolineaci U_1 periody čtyři. Svazek sextik obsahuje dle práce [3] tři složené sextiky:

s_1^6 složenou ze šesti přímek p_i $(i = 1, \ldots, 6)$

s_2^6 složenou ze dvou kubik: c_{II}^3 určenou body	*1, 2, 3, 4, 5, 6*
a tečnami v těchto bodech........................	*15, 26, 23, 14, 45, 36*
c_{III}^3 určenou body...............................	*1, 2, 3, 4, 5, 6*
a tečnami v těchto bodech........................	*14, 23, 36, 45, 15, 26*
s_3^6 složenou ze dvou kubik: c_{IV}^3 určenou body	*1, 2, 3, 4, 5, 6*
a tečnami v těchto bodech........................	*15, 23, 36, 14, 45, 26*
c_V^3 určenou body................................	*1, 2, 3, 4, 5, 6*
a tečnami v těchto bodech........................	*14, 26, 23, 45, 15, 36*

V kolineaci $\mathbf{U}_1$ tvoří body *1, ..., 6* cykly *(1, 2)(3, 4, 6, 5)*. Sextika s_1^6 odpovídá sama sobě, kubice c_{II}^3 odpovídá kubika c_{IV}^3 a kubice c_{III}^3 kubika c_V^3. Jsou tedy pro kolineaci $\mathbf{U}_1$ sextiky s_1^6, s_2^6, s_3^6 také invariantní a tudíž i celý svazek sextik jimi určený.

Věta 17: *V grupě $\mathfrak{G}_{72}$ existuje svazek invariantních sextik s dvojnásobnými body 1, ..., 6, při čemž tečny v těchto bodech jsou přímky $p_1, \ldots, p_6$, každá ve dvou bodech. Jiné invariantní sextiky pro $\mathfrak{G}_{72}$ již neexistují.*

Touto prací je tedy thema předložené prof. Bydžovským v práci [1], probírané dále Dr Metelkou v práci [2] zcela vyčerpáno.

LITERATURA

[1] *B. Bydžovský*: Sur une espèce particulière de groupes d'involutions planes de Cremona. Věstník Král. čes. spol. nauk, tř. II, 1929.

[2] *Josef Metelka*: O jistých konečných grupách složených z Cremonových transformací 1. a 5. stupně. Věstník Král. čes. spol. nauk, třída matematicko-přírodovědecká, roč. 1946.

[3] *B. Bydžovský*: Sur les involutions symmétriques du 5e ordre. Rozpravy II. tř. České akademie, sv. XXXVIII, č. 2.

[4] *B. Bydžovský*: Dvojnásobné body křivek šestého stupně. Rozpravy II. tř. České akademie, sv. XXI, č. 42.

Резюме

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ГРУПП ИНВОЛЮЦИОННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КРЕМОНЫ В ПЛОСКОСТИ

ЛАДА ВАНЯТОВА (Lada Vaňatová), Прага

(Поступило в редакцию 11/VI 1954 г.)

В своей работе я исследую, может ли система шести точек в плоскости находиться одновременно и в первом и во втором характеристическом положении, какие здесь представляются возможности и какие группы преобразований возникают таким образом. Я получила следующие результаты:

Для того, чтобы шесть точек в плоскости было одновременно в первом и во втором характеристическом положении, необходимо и достаточно, чтобы две из этих точек, напр. *1*, *2*, лежали на диагональной стороне полного четырехугольника, определенного остальными четырьмя точками, и чтобы их координаты *1*(y_1, y_2, y_3), *2*(z_1, z_2, z_3) удовлетворяли соотношениям

$$z_i = -y_k\ , \quad z_k = y_i\ , \quad z_l = y_l = 0\ ,$$

где $i \neq k \neq l$ пробегают значения 1, 2, 3, (если выбрать систему координат так, чтобы точки *3*, *4*, *5*, *6* имели координаты *3*$(1,1,1)$, *4*$(-1, 1, 1)$, *5*$(1, -1, 1)$, *6*$(1, 1, -1)$).

Если это условие выполнено, то точки находятся в первом и во втором характеристическом положении двумя различными способами, т. е. образуют систему главных точек двух инволюций первого рода J_1^{I}, J_2^{I} и двух инволюций второго рода J_1^{II}, J_2^{II}.

Инволюции J_i^{I} и J_i^{II} $(i = 1,2)$ образуют группу плоских преобразований $\mathfrak{G}_8$ восьмого порядка, содержащую преобразования J_1^{I}, J_2^{I}, J_1^{II}, J_2^{II}, центральную коллинеацию $\boldsymbol{H}_1$, две циклические коллинеации $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V}_1$ и тождественное преобразование $\boldsymbol{E}$.

Подвергнув произвольную точку плоскости всем преобразованиям группы $\mathfrak{G}_8$, мы получим восемь точек, которые обозначим символом (Q). Если выбранная нами точка является неподвижной (самосопряженной) точкой хотя бы одного преобразования группы $\mathfrak{G}_8$, то (Q) сводится к четырем, соотв. двум, соотв. одной точке.

Существуют следующие неразложимые кривые, инвариантные относительно всех преобразований группы $\mathfrak{G}_8$: коническое сечение k_1, определенное главными точками *3*, *4*, *5*, *6* с сопряженными полюсами в точках $I = 12 \cap 45$ и $I' = 12 \cap 36$, секстики с шестью двойными точками *1*, ..., *6*, проходящие далее через неприведенную (Q), секстики с семью двойными точками *1*, ..., *6*, S_1 (S_1 есть центр коллинеации $\boldsymbol{H}_1$) и рациональные секстики с двойными точками в точках *1*, ..., *6* и в четырех самосопряженных точках инволюций J_1^{I}, J_2^{I}.

Если координаты точек *1*, *2* удовлетворяют кроме условий (1) уравнению

$$x_i + x_k - x_i x_k = 0$$

при указанном выборе системы координат, то точки *1*, ..., *6* находятся в первом и во втором характеристическом положении одновременно шестью различными способами, т. е. образуют систему главных точек шести инволюций первого рода J_i^{I} и шести инволюций второго рода J_i^{II}.

Инволюции J_i^{I} и J_i^{II} $(i = 1, \ldots, 6)$ приводят к группе плоских преобразований $\mathfrak{G}_{72}$, содержащей 36 преобразований пятой степени и 36 коллинеаций. Все эти преобразования воспроизводят связку секстик с двойными точками *1*, ..., *6* и касательными *14*, *15*, *45*, *26*, *36*, *23* в этих точках. Кривых степени ниже шестой, инвариантных относительно всех преобразований $\mathfrak{G}_{72}$, не существует.

Итак, если система шести точек в плоскости занимает одновременно первое и второе характеристическое положение, то она занимает каждое из этих положений или двумя различными способами или шестью различными способами. Этим исчерпываются все возможности. Первая возможность приводит к группе $\mathfrak{G}_8$, вторая — к группе $\mathfrak{G}_{72}$, состоящей из инволюций и циклических преобразований первой и пятой степени. Существуют простые секстики, инвариантные относительно всех преобразований групп $\mathfrak{G}_8$ и $\mathfrak{G}_{72}$.

Zusammenfassung

ÜBER EINE GATTUNG VON GRUPPEN DER INVOLUTORISCHEN EBENEN TRANSFORMATIONEN VON CREMONA

LADA VAŇATOVÁ, Praha.

(Eingegangen am 11. Juni 1954.)

In meiner Arbeit studiere ich die Frage, ob eine Gruppe von sechs Punkten in der Ebene gleichzeitig in der ersten und auch in der zweiten charakteristischen Lage liegen kann, welche Möglichkeiten vorkommen können und welche Gruppen von Transformationen so entstehen. Ich habe folgende Resultate erhalten:

Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass sich sechs Punkte in der Ebene *1*, ..., *6* gleichzeitig in der ersten und zweiten charakteristischen Lage befinden, ist: zwei von diesen Punkten, zum Beispiel *1*, *2* liegen auf der Diagonalen des vollständigen Vierecks, das durch die übrigen vier Punkte bestimmt ist und seine Koordinaten $1(y_1, y_2, y_3)$, $2(z_1, z_2, z_3)$ genügen der Gleichung

$$z_i = -y_k\,,\quad z_k = y_i\,,\quad z_l = y_l = 0 \qquad (1)$$
$$(i \neq k \neq l \neq i \text{ laufen die Werte } 1, 2, 3 \text{ durch})\,.$$

(Wenn die Punkte *3*, *4*, *5*, *6* folgende Koordinaten $3(1, 1, 1)$, $4(-1, 1, 1)$, $5(1, -1, 1)$, $6(1, 1, -1)$ besitzen.)

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, befinden sich die Punkte *1*, ..., *6* in der ersten und auch in der zweiten charakteristischen Lage auf zwei verschiedenen Weisen, d. h. sie bilden eine Gruppe der Hauptpunkte von zwei Involutionen erster Gattung J_1^{I}, J_2^{I} und von zwei Involutionen zweiter Gattung J_1^{II}, J_2^{II}.

Die Involutionen J_i^{I} und J_i^{II} $(i = 1, 2)$ erzeugen die Gruppe der ebenen Trans-

formationen $\mathfrak{G}_8$ der achten Ordnung. Die Gruppe $\mathfrak{G}_8$ enthält folgende Transformationen: $\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{J}_1^{\mathrm{II}}, \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{II}}$, eine Zentralkollineation $\boldsymbol{H}_1$, zwei zyklische Kollineationen $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{V}_1$ und die identische Transformation $\boldsymbol{E}$.

Wenn wir auf einen beliebigen Punkt der Ebene alle Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_8$ anwenden, bekommen wir acht Punkte, welche wir mit dem Symbol (Q) bezeichnen. Ist der gewählte Punkt für wenigstens eine der Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_8$ selbstadjungiert, dann reduziert sich (Q) auf vier, resp. zwei, resp. einen Punkt.

Für alle Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_8$ existieren folgende unzerlegbare invariante Kurven: Ein Kegelschnitt k_{I}, der durch die Hauptpunkte $3, 4, 5, 6$ bestimmt ist und die Punkte $I = 12 \cap 45$ und $I' = 12 \cap 36$ als konjugierte Pole hat, die Kurven sechsten Grades mit sechs Doppelpunkten $1, \ldots, 6$, die durch irreduzierte (Q) gehen, die Kurven sechsten Grades mit sieben Doppelpunkten $1, \ldots, 6, S_1$ (S_1 ist das Zentrum der Kollineation $\boldsymbol{H}_1$) und rationale Kurven sechsten Grades mit Doppelpunkten in den Punkten $1, \ldots, 6$ und in vier selbstadjungierten Punkten der Involutionen $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{I}}$ und $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{II}}$.

Wenn die Koordinaten der Punkte $1, 2$, ausser den Bedingungen (1) auch der Gleichung

$$x_i^2 - x_k^2 - x_i x_k = 0$$

bei der vorstehenden Wahl des Koordinatensystems genügen, so sind die Punkte $1, \ldots, 6$ gleichzeitig auf sechs verschiedene Weisen in der ersten und auch in der zweiten Lage, d. h., sie bilden eine Gruppe der Hauptpunkte von sechs Involutionen der ersten Gattung $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{I}}$ und sechs Involutionen der zweiten Gattung $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{II}}$.

Die Involutionen $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{I}}$ und $\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{II}}$ ($i = 1, \ldots, 6$) führen zur Gruppe der ebenen Transformationen $\mathfrak{G}_{72}$, die 36 Transformationen fünften Grades und 36 Kollineationen enthält. Alle diese Transformationen geben Sextikbüschel mit Doppelpunkten $1, \ldots, 6$ und Tangenten $14, 15, 45, 26, 36, 23$ in diesen Punkten wieder. Es gibt keine Kurven niedrigeren Grades als des sechsten, die für alle Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_{72}$ invariant wären.

Wenn sich also in der Ebene eine Gruppe von sechs Punkten gleichzeitig in der ersten und auch in der zweiten charakteristischen Lage befindet, dann geschieht dies in jeder dieser Lage entweder auf zwei verschiedene Weisen, oder auf sechs verschiedene Weisen. Andere Möglichkeiten können nicht vorkommen. Die erste Möglichkeit gibt die Gruppe $\mathfrak{G}_8$ und die zweite die Gruppe $\mathfrak{G}_{72}$, welche die Involutionen und zyklische Transformationen ersten und fünften Grades enthalten. Es gibt unzerlegbare invariante Kurven sechsten Grades für alle Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_8$ und auch der Gruppe $\mathfrak{G}_{72}$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

SOUVISLOST HLAVNÍCH ELEMENTŮ ROVINNÉ SYMETRICKÉ INVOLUCE 5. STUPNĚ S PŘÍMKAMI KUBICKÉ PLOCHY

SVATAVA KUBÁLKOVÁ, Praha.

(Došlo dne 22. prosince 1954.) DT:513.17

Věnováno akademiku Bohumilu Bydžovskému k jeho 75. narozeninám.

Obsah předloženého článku navazuje na práci L. VAŇATOVÉ „*O jednom druhu grup involutorních Cremonových transformací v rovině*". Hlavní elementy rovinné symetrické involuce 5. stupně lze totiž pokládat, vzhledem k jejich seskupení, za rovinné obrazy 27 přímek jisté kubické plochy $\varkappa^3$ bez dvojnásobných bodů. V práci jsou uvedeny podmínky, kterým musí vyhovovat kubická plocha $\varkappa^3$, aby se její přímky zobrazovaly do konfigurace hlavních bodů *1*, ..., *6*, vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, resp. $\mathfrak{G}_{72}$ rovinných transformací.[1]) Během vyšetřování se ukázalo, že grupa $\mathfrak{G}_8$, resp. $\mathfrak{G}_{72}$ rovinných transformací, reprodukujících trojrozměrný systém rovinných kubik s jednoduchými body *1*, ..., *6*, je podgrupou jistých grup rovinných transformací $\mathfrak{G}_{24}$, $\mathfrak{G}_{120}$, resp. $\mathfrak{G}_{648}$, které mají tutéž vlastnost. V článku jsou dále určeny všechny rovinné transformace, které jsou prvky grup $\mathfrak{G}_{24}$, $\mathfrak{G}_{120}$, $\mathfrak{G}_{648}$.

1. Rovinné řezy kubické plochy $\varkappa^3$ bez dvojnásobných bodů (v této práci budeme písmenem $\varkappa^3$ označovat vždy kubickou plochu bez dvojnásobných bodů), která obsahuje dvacet sedm přímek, se zobrazují do roviny známým způsobem[2]) v trojrozměrný systém rovinných kubik, které procházejí šesti pevnými body *1*, ..., *6*, jež jsou hlavními body zobrazení v obrazové rovině. Těchto šest bodů neleží na téže kuželosečce a žádné tři z nich neleží na téže přímce.

Body *1*, ..., *6* určují tedy šest kuželoseček k_i^2 (k_i^2 označujeme kuželosečku neprocházející bodem i, $i = 1, \ldots, 6$) a patnáct přímek $\overline{ik}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \ldots, 6$). Dvaceti sedmi přímkám kubické plochy $\varkappa^3$ odpovídá při tomto zobrazení do

[1]) Viz *L. Vaňatová* [2]. (Seznam literatury je uveden na konci článku.)

[2]) Viz na příklad *B. Bydžovský* [1], str. 651 a dál. Pokud je v tomto článku kdykoli řeč o zobrazení kubické plochy (resp. přímek kubické plochy) do roviny, je tím vždy míněno algebraické zobrazení právě citované.

roviny právě šest hlavních bodů $1, \ldots, 6$, šest kuželoseček k_i^2 ($i = 1, \ldots, 6$) a patnáct přímek $\overline{ik}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \ldots, 6$).

Protnou-li se v obrazové rovině dvě přímky $\overline{ik}$, $\overline{jl}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \ldots, 6$; $j \neq l$; $j, l = 1, \ldots, 6$), nebo dvě kuželosečky k_i^2, k_j^2 ($i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, 6$), nebo přímka $\overline{ik}$ a kuželosečka k_i^2 mimo hlavní bod zobrazení $1, \ldots, 6$, potom přímky kubické plochy $\varkappa^3$, odpovídající těmto elementům zobrazení, se rovněž protínají. Neboť každé z přímek $\overline{ik}$, $\overline{jl}$ odpovídá přímka kubické plochy $\varkappa^3$; společnému bodu obou přímek $\overline{ik}$, $\overline{jl}$, který není, podle předpokladu, hlavním bodem, odpovídá bod kubické plochy $\varkappa^3$, který leží na obou odpovídajících přímkách plochy $\varkappa^3$. Obdobně pro zbývající dva případy.

Procházejí-li přímky $\overline{ik}$ (nebo kuželosečky k_i^2) hlavními body $1, \ldots, 6$, znamená to, že se přímka kubické plochy $\varkappa^3$, odpovídající takovému hlavnímu bodu a přímka kubické plochy $\varkappa^3$, odpovídající přímce $\overline{ik}$ (nebo kuželosečce k_i^2) protínají, což je evidentní.

Protnou-li se přímky $\overline{ik}$, $\overline{ij}$ nebo kuželosečky k_i^2, k_j^2 v hlavním bodě $1, \ldots, 6$ bez dotyku, jsou příslušné odpovídající přímky na ploše $\varkappa^3$ mimoběžné. To plyne takto: přímka p kubické plochy $\varkappa^3$ odpovídající přímce $\overline{ik}$, protíná přímku q plochy $\varkappa^3$, odpovídající hlavnímu bodu i. Rovina ϱ, určená těmito dvěma přímkami, protne plochu $\varkappa^3$ ještě v další přímce r, která odpovídá kuželosečce k_k^2. Přímka s plochy $\varkappa^3$, odpovídající přímce $\overline{ij}$ obrazové roviny, protíná přímku q, leží tedy v rovině, která jde přímkou q a je různá od roviny ϱ. Jsou proto přímky p a s mimoběžné. Analogicky by se dokázalo druhé tvrzení o průsečíku dvou kuželoseček k_i^2, k_j^2.

Dotýká-li se kuželosečka k_i^2 přímky $\overline{ik}$ v hlavním bodě k, protínají se tři přímky plochy $\varkappa^3$, které odpovídají těmto třem prvkům zobrazení, v jediném bodě a leží v téže rovině. Toto tvrzení je mezním případem tvrzení uvedeného v předcházejícím odstavci.

Regulární bod kubické plochy, v němž se protínají tři její přímky, nazýváme jejím *planárním bodem.*

Z toho, co bylo řečeno, plyne: planární bod na kubické ploše $\varkappa^3$ existuje tehdy a jen tehdy, jestliže v jejím obraze v rovině buďto:

1. tři přímky $\overline{ik}$, jejichž indexy jsou různé, procházejí jedním bodem, nebo
2. kuželosečka k_i^2 se dotýká přímky $\overline{ik}$ v bodě k.

Uvažujme nyní seskupení šesti bodů $1, \ldots, 6$ v rovině, vedoucí ke grupě rovinných transformací $\mathfrak{G}_{72}$.[3]) Mají-li body $3, 4, 5, 6$ postupně souřadnice $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$, jsou souřadnice bodů $1, 2$ dány rovnicemi

$$x_1^2 \pm x_1 x_2 + x_2^2 = 0\,, \qquad x_3 = 0\,. \tag{1}$$

[3]) Veškerá terminologie a symbolika je tu převzata z práce *L. Vaňatové* [2], kde čtenář nalezne definice potřebných pojmů i důkazy, které zde vynechávám (pokud ovšem není uvedena jiná literatura).

Vyhovují-li body *1, ..., 6* této podmínce, tvoří skupinu hlavních bodů šesti symetrických involucí 5. stupně J_i^{I} $(i = 1, \ldots, 6)$ prvního druhu

$$\begin{array}{ll} J_1^{\mathrm{I}} \ldots 12, 34, 56\,, & J_4^{\mathrm{I}} \ldots 16, 25, 34 \\ J_2^{\mathrm{I}} \ldots 12, 35, 46\,, & J_5^{\mathrm{I}} \ldots 13, 25, 46 \\ J_3^{\mathrm{I}} \ldots 13, 24, 56\,, & J_6^{\mathrm{I}} \ldots 16, 24, 35 \end{array}$$

a zároveň šesti symetrických involucí 5. stupně J_i^{II} $(i = 1, \ldots, 6)$ druhého druhu

$$\begin{array}{ll} J_1^{\mathrm{II}} \ldots 14, 2356\,, & J_4^{\mathrm{II}} \ldots 23, 1456 \\ J_2^{\mathrm{II}} \ldots 15, 2346\,, & J_5^{\mathrm{II}} \ldots 26, 1345 \\ J_3^{\mathrm{II}} \ldots 45, 1236\,, & J_6^{\mathrm{II}} \ldots 36, 1245\,. \end{array}$$

V celém odstavci **1** předpokládáme, že body *1, ..., 6* mají uvedenou už polohu, takže na př. souřadnice bodů *1, 2* vyhovují podmínce (1). Existuje tedy v rovině bodů *1, ..., 6* šest bodů $\overline{M}_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$, jimiž prochází po třech přímkách spojujících páry hlavních bodů involucí J_i^{I} $(i = 1, \ldots, 6)$. Kuželosečky k_i^2 se dotýkají přímek $\overline{ij}, \overline{ik}$ v bodech j, k $(i \neq k \neq j \neq i$ probíhají buď čísla 1, 4, 5 nebo 2, 3, 6). Protože tedy nutná a postačující podmínka pro existenci planárního bodu na ploše je splněna celkem *osmnáctkrát*, můžeme body *1, ..., 6*, přímky $\overline{ik}$ $(i \neq k;\ i, k = 1, \ldots, 6)$ a kuželosečky k_i^2 $(i = 1, \ldots, 6)$ pokládat za rovinné obrazy přímek kubické plochy α^3, která má osmnáct planárních bodů.

Kubická plocha α^3 s osmnácti planárními body má při vhodné volbě soustavy souřadnic rovnici

$$\alpha^3 \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 \text{ [4]} \tag{2}$$

a nazývá se kubická plocha *ekvianharmonická*. Z této úvahy plyne věta:

Věta 1. *Seskupení bodů 1, ..., 6, přímek* $\overline{ik}$ $(i \neq k;\ i, k = 1, \ldots, 6)$ *a kuželoseček* k_i^2 $(i = 1, \ldots, 6)$, *vedoucí ke grupě* $\mathfrak{G}_{72}$ *z práce* [2], *dostaneme zobrazením přímek kubické plochy ekvianharmonické* α^3 *do roviny.*

Poznámka 1. Planární bod kubické plochy α^3 je dvojnásobným bodem jejího Hessiánu H[5])

$$H \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 = 0\,,$$

který se rozpadá ve čtyři roviny.

Na základě této poznámky lze určit souřadnice všech osmnácti planárních bodů kubické plochy α^3. Souřadnice dvojnásobného bodu Hessiánu H jsou řešením rovnic

$$x_2x_3x_4 = 0\,,\quad x_1x_2x_4 = 0\,,\quad x_1x_3x_4 = 0\,,\quad x_1x_2x_3 = 0\,,$$

které jsou splněny na př. pro $x_1 = 0$, $x_4 = 0$. Souřadnice planárního bodu plochy α^3 musí pak vyhovovat rovnici plochy α^3 pro $x_1 = x_4 = 0$, t. j. rovnici

$$x_2^3 + x_3^3 = 0\,.$$

---

[4]) *J. Metelka* [3], str. 155.
[5]) *J. Metelka* [3], str. 148 a 155.

Tato rovnice jest splněna pro $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, resp. $x_2 = 1$, $x_3 = -\varepsilon$, resp. $x_2 = \varepsilon$, $x_3 = -1$, kde ε je imaginární třetí odmocnina z jedné. Jsou tedy souřadnice tří planárních bodů plochy α^3, ležících na hraně o_{23} souřadného čtyřstěnu, $(0, 1, -1, 0)$, $(0, 1, -\varepsilon, 0)$, $(0, \varepsilon, -1, 0)$. Obdobně dostaneme souřadnice dalších patnácti planárních bodů kubické plochy α^3.

Kubická plocha α^3 má tedy těchto osmnáct planárních bodů

$$\begin{array}{llll} M_1(0, 1, -1, 0)\,, & M_2(1, 0, 0, -1)\,, & M_3(\varepsilon, 0, 0, -1)\,, & M_4(1, 0, 0, -\varepsilon)\,, \\ M_5(0, 1, -\varepsilon, 0)\,, & M_6(0, \varepsilon, -1, 0)\,, & M_7(1, 0, -1, 0)\,, & M_8(0, 0, \varepsilon, -1)\,, \\ M_9(1, -1, 0, 0)\,, & M_{10}(0, \varepsilon, 0, -1)\,, & M_{11}(1, 0, -\varepsilon, 0)\,, & M_{12}(0, 0, 1, -1)\,, \\ M_{13}(0, 1, 0, -1)\,, & M_{14}(1, \varepsilon, 0, 0)\,, & M_{15}(0, 0, 1, -\varepsilon)\,, & M_{16}(\varepsilon, 0, -1, 0)\,, \\ M_{17}(0, 1, 0, -\varepsilon)\,, & M_{18}(\varepsilon, -1, 0, 0)\,. & & \end{array} \tag{3}$$

Poznámka 2. Tři přímky kubické plochy α^3, které se protínají v jejím planárním bodě, leží v tečné rovině τ tohoto bodu.[6])

Pomocí této poznámky můžeme snadno napsat rovnice všech dvaceti sedmi přímek kubické plochy α^3. Tečná rovina τ_1 kubické plochy α^3 v planárním bodě $M_1(0, 1, -1, 0)$ má rovnici

$$x_2 + x_3 = 0$$

a protne plochu α^3 v těchto třech přímkách

$$\left.\begin{array}{r} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \varepsilon x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x_2 + x_3 = 0 \\ \varepsilon x_1 + x_4 = 0 \end{array}\right\}.$$

Analogickým způsobem, pomocí dalších planárních bodů M_i ($i = 2, 3, \ldots, 18$), obdržíme rovnice zbývajících přímek kubické plochy α^3. Rovnice všech dvaceti sedmi přímek této plochy, sestaveny přehledně v tabulku, jsou

$$\begin{array}{lll} p_1 \equiv & x_1 + x_3 = 0\,, & x_2 + x_4 = 0 \\ p_2 \equiv & \varepsilon x_1 + x_2 = 0\,, & x_3 + \varepsilon x_4 = 0 \\ p_3 \equiv & x_1 + x_2 = 0\,, & \varepsilon x_3 + x_4 = 0 \\ p_4 \equiv & x_1 + \varepsilon x_3 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_4 = 0 \\ p_5 \equiv & \varepsilon x_1 + x_3 = 0\,, & \varepsilon x_2 + x_4 = 0 \\ p_6 \equiv & x_1 + \varepsilon x_2 = 0\,, & x_3 + x_4 = 0 \\ p_7 \equiv & \varepsilon x_1 + x_3 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_4 = 0 \\ p_8 \equiv & x_1 + x_2 = 0\,, & x_3 + x_4 = 0 \\ p_9 \equiv & x_1 + \varepsilon x_2 = 0\,, & x_3 + \varepsilon x_4 = 0 \\ p_{10} \equiv & x_1 + x_3 = 0\,, & \varepsilon x_2 + x_4 = 0 \\ p_{11} \equiv & x_1 + \varepsilon x_3 = 0\,, & x_2 + x_4 = 0 \\ p_{12} \equiv & \varepsilon x_1 + x_2 = 0\,, & \varepsilon x_3 + x_4 = 0 \\ p_{13} \equiv & x_1 + x_4 = 0\,, & x_2 + x_3 = 0 \\ p_{14} \equiv & x_1 + \varepsilon x_4 = 0\,, & \varepsilon x_2 + x_3 = 0 \end{array} \tag{4}$$

[6]) Srovnej *B. Bydžovský* [1], str. 513 a *J. Metelka* [3], str. 143.

$$
\begin{array}{ll}
p_{15} \equiv \ \ x_1 + \ x_3 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_4 = 0 \\
p_{16} \equiv \varepsilon x_1 + \ x_3 = 0\,, & x_2 + \ x_4 = 0 \\
p_{17} \equiv \varepsilon x_1 + \ x_4 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_3 = 0 \\
p_{18} \equiv \ \ x_1 + \ x_2 = 0\,, & x_3 + \varepsilon x_4 = 0 \\
p_{19} \equiv \ \ x_1 + \varepsilon x_4 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_3 = 0 \\
p_{20} \equiv \varepsilon x_1 + \ x_4 = 0\,, & \varepsilon x_2 + \ x_3 = 0 \\
p_{21} \equiv \varepsilon x_1 + \ x_2 = 0\,, & x_3 + \ x_4 = 0 \\
p_{22} \equiv \varepsilon x_1 + \ x_4 = 0\,, & x_2 + \ x_3 = 0 \\
p_{23} \equiv \ \ x_1 + \ x_4 = 0\,, & x_2 + \varepsilon x_3 = 0 \\
p_{24} = \ \ x_1 + \varepsilon x_2 = 0\,, & \varepsilon x_3 + \ x_4 = 0 \\
p_{25} \equiv \ \ x_1 + \varepsilon x_3 = 0\,, & \varepsilon x_2 + \ x_4 = 0 \\
p_{26} \equiv \ \ x_1 + \ x_4 = 0\,, & \varepsilon x_2 + \ x_3 = 0 \\
p_{27} \equiv \ \ x_1 + \varepsilon x_4 = 0\,, & x_2 + \ x_3 = 0\,.
\end{array}
\tag{4}
$$

Přiřazení přímek kubické plochy $\varkappa^3$ a jejich obrazů v rovině provedeme takto: planárnímu bodu M_1, průsečíku přímek p_{13}, p_{22}, p_{27}, přiřadíme v rovině průsečík přímek $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$, který označíme $\overline{M}_1$; obdobně dále, jak ukazuje snadno srozumitelné schema (vlnovka $\sim$ symbolisuje naše přiřazení)

$$
\begin{array}{l}
M_2 = p_{13} \cdot p_{23} \cdot p_{26} \sim \overline{M}_2 = \overline{12}\,.\,\overline{35}\,.\,\overline{46} \\
M_3 = p_{14} \cdot p_{19} \cdot p_{27} \sim \overline{M}_3 = \overline{13}\,.\,\overline{24}\,.\,\overline{56} \\
M_4 = p_{17} \cdot p_{20} \cdot p_{22} \sim \overline{M}_4 = \overline{16}\,.\,\overline{25}\,.\,\overline{34} \\
M_5 = p_{14} \cdot p_{20} \cdot p_{26} \sim \overline{M}_5 = \overline{13}\,.\,\overline{25}\,.\,\overline{46} \\
M_6 = p_{17} \cdot p_{19} \cdot p_{23} \sim \overline{M}_6 = \overline{16}\,.\,\overline{24}\,.\,\overline{35}\,.
\end{array}
\tag{5}
$$

Přímky p_{13}, p_{14}, p_{17} protínají přímku p_1; z uvedeného schematu je vidět, že přímka p_1 odpovídá tedy bodu *1*. Analogicky se dokáže, že přímka p_i odpovídá bodu i, pro $i = 2, \ldots, 6$.

Zbývajícím planárním bodům M_r $(r = 7, \ldots, 18)$ odpovídá v rovině dotyk kuželosečky k_i^2 s přímkou $\overline{ij}$ v bodě j. Tak planárnímu bodu M_7, průsečíku přímek p_{10}, p_{15}, p_1 odpovídá dotyk kuželosečky k_4^2 a přímky $\overline{14}$ v bodě *1*; analogicky

$$
\begin{array}{l}
M_8 \ = p_9 \ \cdot p_{18} \cdot p_2 \sim \text{dotyk } k_3^2 \text{ a přímky } \overline{23} \text{ v bodě } 2 \\
M_9 \ = p_8 \ \cdot p_{18} \cdot p_3 \sim \text{dotyk } k_2^2 \text{ a přímky } \overline{23} \text{ v bodě } 3 \\
M_{10} = p_7 \ \cdot p_{15} \cdot p_4 \sim \text{dotyk } k_1^2 \text{ a přímky } \overline{14} \text{ v bodě } 4 \\
M_{11} = p_7 \ \cdot p_{16} \cdot p_5 \sim \text{dotyk } k_1^2 \text{ a přímky } \overline{15} \text{ v bodě } 5 \\
M_{12} = p_8 \ \cdot p_{21} \cdot p_6 \sim \text{dotyk } k_2^2 \text{ a přímky } \overline{26} \text{ v bodě } 6 \\
M_{13} = p_{11} \cdot p_{16} \cdot p_1 \sim \text{dotyk } k_5^2 \text{ a přímky } \overline{15} \text{ v bodě } 1 \\
M_{14} = p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_2 \sim \text{dotyk } k_6^2 \text{ a přímky } \overline{26} \text{ v bodě } 2 \\
M_{15} = p_{12} \cdot p_{24} \cdot p_3 \sim \text{dotyk } k_6^2 \text{ a přímky } \overline{36} \text{ v bodě } 3 \\
M_{16} = p_{11} \cdot p_{25} \cdot p_4 \sim \text{dotyk } k_5^2 \text{ a přímky } \overline{45} \text{ v bodě } 4 \\
M_{17} = p_{10} \cdot p_{25} \cdot p_5 \sim \text{dotyk } k_4^2 \text{ a přímky } \overline{45} \text{ v bodě } 5 \\
M_{18} = p_9 \ \cdot p_{24} \cdot p_6 \sim \text{dotyk } k_3^2 \text{ a přímky } \overline{36} \text{ v bodě } 6\,.
\end{array}
\tag{6}
$$

Výsledné přiřazení přímek kubické plochy α^3 bodům i ($i = 1, \ldots, 6$), přímkám $\overline{ik}$ ($i \neq k$; $i, k = 1, \ldots, 6$) a kuželosečkám k_i^2 ($i = 1, \ldots, 6$) v obrazové rovině je tedy toto

$$\begin{array}{lll} p_i \sim i \text{ pro } i = 1, \ldots, 6 & & \\ p_7 \sim k_1^2, & p_{14} \sim \overline{13}, & p_{21} \sim \overline{26}, \\ p_8 \sim k_2^2, & p_{15} \sim \overline{14}, & p_{22} \sim \overline{34}, \\ p_9 \sim k_3^2, & p_{16} \sim \overline{15}, & p_{23} \sim \overline{35}, \\ p_{10} \sim k_4^2, & p_{17} \sim \overline{16}, & p_{24} \sim \overline{36}, \\ p_{11} \sim k_5^2, & p_{18} \sim \overline{23}, & p_{25} \sim \overline{45}, \\ p_{12} \sim k_6^2, & p_{19} \sim \overline{24}, & p_{26} \sim \overline{46}, \\ p_{13} \sim \overline{12}, & p_{20} \sim \overline{25}, & p_{27} \sim \overline{56}. \end{array} \tag{7}$$

Při tomto zobrazení kubické plochy α^3 do roviny odpovídá jejím rovinným řezům trojrozměrný systém kubik, procházejících jednoduše body *1, …, 6*. Všechny rovinné symetrické involuce 5. stupně $J_i^{\mathrm{I}}, J_i^{\mathrm{II}}$ ($i = 1, \ldots, 6$) s hlavními body *1, …, 6*, reprodukují trojrozměrný systém rovinných kubik procházejících jednoduše všemi těmito hlavními body. To znamená, že v prostoru odpovídají involucím $J_i^{\mathrm{I}}, J_i^{\mathrm{II}}$ ($i = 1, \ldots, 6$) algebraické transformace (involuce), které každé rovině přiřazují opět rovinu; jsou to tedy involutorní kolineace. Z této úvahy plyne věta

Věta 2. *Grupě $\mathfrak{G}_{72}$, která vznikne v rovině skládáním rovinných symetrických involucí 5. stupně $J_i^{\mathrm{I}}, J_i^{\mathrm{II}}$ ($i = 1, \ldots, 6$), odpovídá v prostoru jistá podgrupa grupy kolineací a to té grupy kolineací, která reprodukuje ekvianharmonickou kubickou plochu α^3.*

Věta 3. *Kubická plocha ekvianharmonická α^3 je v prostoru reprodukována 648 kolineacemi, které tvoří grupu $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$.*

Důkaz. Kubická plocha α^3 určená rovnicí (2) se totiž reprodukuje kolineacemi tvaru

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_i' : x_j' : x_k' : x_l',$$

kde i, j, k, l je libovolná permutace indexů 1, 2, 3, 4. Kolineací tohoto tvaru je $4! = 24$. Z každé z nich dostaneme kolineaci téže vlastnosti tím, že kterékoli z členů x_i', x_j', x_k', x_l' v posledních rovnicích násobíme číslem ε nebo ε^2, kde ε je imaginární třetí odmocnina z jedné. To vede u každého případu k dvaceti sedmi různým kolineacím, jak se snadno přesvědčíme. Existuje tedy celkem $24 \cdot 27 = 648$ kolineací, které reprodukují naši plochu a které zřejmě tvoří grupu; označme ji $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$.

Tím známe řád grupy prostorových kolineací, které reprodukují kubickou plochu α^3, periodu jednotlivých transformací i způsob, jak se skládají. To vše se beze změny přenáší do obrazové roviny. Grupě $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ prostorových kolineací odpovídá v rovině grupa rovinných transformací $\mathfrak{G}_{648}$, která je s $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ co do skladby isomorfní. Každá transformace grupy $\mathfrak{G}_{648}$ reprodukuje trojrozměrný systém rovinných kubik, procházejících jednoduše body $1, \ldots, 6$. Platí proto věta

Věta 4. *Trojrozměrný lineární systém rovinných kubik, procházejících jednoduše body $1, \ldots, 6$ z věty 1, je zachováván rovinnými transformacemi, které tvoří grupu $\mathfrak{G}_{648}$.*

Grupa $\mathfrak{G}_{72}$ je ovšem podgrupou grupy $\mathfrak{G}_{648}$, jak ostatně vyplývá i z dalšího. Rovinné transformace, které tvoří grupu $\mathfrak{G}_{72}$, známe:[7]) je to třicet šest transformací 5. stupně a třicet šest kolineací. Jde nyní o to, určit ty rovinné transformace, které leží v grupě $\mathfrak{G}_{648}$, ale nikoliv v její podgrupě $\mathfrak{G}_{72}$. Tyto transformace odpovídají těm prostorovým kolineacím grupy $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$, které neleží v podgrupě $\overline{\mathfrak{G}}_{72}$, odpovídající v prostoru grupě $\mathfrak{G}_{72}$.

Dle (5), (6), (7) není těžké napsat rovnice prostorových kolineací, které odpovídají základním transformacím grupy $\mathfrak{G}_{72}$ v rovině. Na př. involuce J_1^{I} má samodružné body $\overline{M}_1$ a $\overline{M}_2$, invariantní přímky $\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}$ a přímky $\overline{36}, \overline{45}$ tvoří pár. Protože obrazy těchto prvků v prostoru musí mít pro hledanou kolineaci tytéž vlastnosti jako jejich vzory v rovině, má prostorová kolineace, odpovídající involuci J_1^{I}, rovnice

$$x_1 = x_1', \; x_2 = x_3', \; x_3 = x_2', \; x_4 = x_4' \, .$$

Podobně najdeme, že rovnice prostorové kolineace odpovídající involuci J_2^{I}, jsou

$$x_1 = x_4', \; x_2 = x_2', \; x_3 = x_3', \; x_4 = x_1' \, ;$$

složením obou uvedených kolineací dostaneme prostorovou kolineaci o rovnicích

$$x_1 = x_4', \; x_2 = x_3', \; x_3 = x_2', \; x_4 = x_1' \quad \text{atd.}$$

Obráceně, k rovnicím prostorové kolineace grupy $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ určíme příslušnou rovinnou transformaci grupy $\mathfrak{G}_{648}$ tímto způsobem: nejprve zjistíme periodu uvažované prostorové kolineace, potom zkoumáme, jak transformuje přímky $p_1, \ldots, p_6$ a podle (5), (6), (7) určíme, jaké elementy odpovídají v hledané rovinné transformaci z grupy $\mathfrak{G}_{648}$ bodům $1, \ldots, 6$. Na př. kolineace

$$x_1 = x_1', \; x_2 = x_2', \; x_3 = x_4', \; x_4 = x_3'$$

je periody dvě; přímky $p_1, \ldots, p_6$ transformuje v $p_{13}, p_{12}, p_{18}, p_{19}, p_{20}, p_6$. Odpovídající transformace v rovině, označme ji třeba L_1, přiřazuje bodům $1, 3, 4, 5$ přímky $\overline{12}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}$, bodu 2 kuželosečku k_6^2 a bod 6 je pro ni samodružný. Body $1, 2, 3, 4, 5$ jsou hlavními body: čtyři z nich jsou jednoduché a jeden dvojnásobný, takže L_1 je transformace stupně třetího, periody dvě.

Není ovšem možné vypsati rovnice všech 648 transformací, obsažených v grupě $\mathfrak{G}_{648}$. Lze však přesto zjistit, kolik má grupa $\mathfrak{G}_{648}$ transformací toho kterého stupně a udat ty známé rovinné transformace, jejichž složením obdržíme všechny transformace grupy $\mathfrak{G}_{618}$.

[7]) *L. Vaňatová* [2].

Grupa $\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje třicet šest kolineací a třicet šest transformací 5. stupně. Utvořme rozklad grupy $\mathfrak{G}_{648}$ ve *třídy* podle podgrupy $\mathfrak{G}_{72}$. Transformace $\mathbf{L}_1$ neleží v grupě $\mathfrak{G}_{72}$, neboť je to transformace třetího stupně, tvoří tedy $\mathbf{L}_1\mathfrak{G}_{72}$ jednu třídu.

Věta 5. *Třída $\mathbf{L}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje sedmdesát dvě transformace třetího stupně s jednoduchými hlavními body v bodech 1, 3, 4, 5; z tohoto počtu má jedna polovina transformací dvojnásobný bod v bodě 2 a druhá polovina v bodě 6.*

Důkaz. Kubická transformace $\mathbf{L}_1$ má body *1, 3, 4, 5* za jednoduché hlavní body a bod *2* za dvojnásobný. Skládáme-li tuto transformaci s třiceti šesti kolineacemi grupy $\mathfrak{G}_{72}$, dostaneme třicet šest kubických transformací, které mají tytéž hlavní body jako $\mathbf{L}_1$, neboť kolineací odpovídá bodu bod, přímce přímka a kuželosečce kuželosečka. Složíme-li $\mathbf{L}_1$ s libovolnou transformací 5. stupně z grupy $\mathfrak{G}_{72}$, obdržíme opět kubickou transformaci s jednoduchými hlavními body *1, 3, 4, 5* a s dvojnásobným hlavním bodem v bodě *6*. Transformace 5. stupně transformuje totiž přímky $\overline{ik}$ opět v přímky $\overline{jl}$, body i v kuželosečky k_i^2 a kuželosečky k_i^2 v body i ($i \neq k, j \neq l$ probíhají indexy $1, \ldots, 6$). Tím je tvrzení věty 5 dokázáno.

Prostorové kolineaci

$$x_1 = x_1', \; x_2 = x_4', \; x_3 = x_3', \; x_4 = x_2',$$

odpovídá v rovině kubická transformace $\mathbf{L}_2$ s jednoduchými hlavními body *2, 3, 4, 6* a s dvojnásobným hlavním bodem v bodě *5*. $\mathbf{L}_2$ neleží ve třídě $\mathbf{L}_1\mathfrak{G}_{72}$, určuje tedy analogicky další třídu $\mathbf{L}_2\mathfrak{G}_{72}$, která obsahuje sedmdesát dvě kubické transformace s týmiž jednoduchými hlavními body jako má $\mathbf{L}_2$; polovina z nich má dvojnásobný hlavní bod v bodě *5*, druhá polovina v bodě *1*.

Úmluva. Rovinnou kubickou transformaci $\mathbf{L}$ s jednoduchými hlavními body i, j, k, l a dvojnásobným hlavním bodem m, budeme značit $\mathbf{L}(i, j, k, l; m)$ nebo stručně $(i, j, k, l; m)$.

Další čtyři třídy různé od tříd $\mathbf{L}_1\mathfrak{G}_{72}$, $\mathbf{L}_2\mathfrak{G}_{72}$, jsou

$$\mathbf{L}_3\mathfrak{G}_{72}, \quad \mathbf{L}_4\mathfrak{G}_{72}, \quad \mathbf{L}_5\mathfrak{G}_{72}, \quad \mathbf{L}_6\mathfrak{G}_{72};$$

kde $\mathbf{L}_3(1, 4, 5, 6; 2)$, $\mathbf{L}_4(3, 4, 5, 6; 2)$, $\mathbf{L}_5(1, 2, 4, 5; 3)$, $\mathbf{L}_6(1, 2, 3, 6; 4)$ jsou kubické transformace rovinné, odpovídající postupně prostorovým kolineacím

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2', & x_2 &= x_1', & x_3 &= x_3', & x_4 &= x_4', \\
x_1 &= x_3', & x_2 &= x_2', & x_3 &= x_1', & x_4 &= x_4', \\
x_1 &= \varepsilon x_1', & x_2 &= x_3', & x_3 &= x_4', & x_4 &= x_2', \\
x_1 &= x_4', & x_2 &= x_1', & x_3 &= \varepsilon x_2', & x_4 &= \varepsilon x_3'.
\end{aligned}$$

Kolineaci

$$x_1 = x_2', \quad x_2 = x_1', \quad x_3 = x_4', \quad x_4 = x_3'$$

odpovídá v rovině kvadratická transformace $\mathbf{Q}_1$, periody dvě, s hlavními body *2, 3, 6*. Třída $\mathbf{Q}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje třicet šest transformací druhého stupně s hlavními body *2, 3, 6* a třicet šest transformací čtvrtého stupně s dvojnásobnými hlavními body *1, 4, 5* a jednoduchými hlavními body *2, 3, 6*.

Kolineaci

$$x_1 = \varepsilon x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = x_4'$$

odpovídá v rovině transformace $\mathbf{B}_1$ čtvrtého stupně, pro niž jsou hlavní body *1, 4, 5* jednoduché a hlavní body *2, 3, 6* dvojnásobné. Třída $\mathbf{B}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje třicet šest transformací čtvrtého stupně s týmiž hlavními body jako má $\mathbf{B}_1$ a třicet šest transformací druhého stupně s hlavními body *1, 4, 5*.

Tím dostaneme následující rozklad grupy $\mathfrak{G}_{648}$ ve třídy podle podgrupy $\mathfrak{G}_{72}$

$\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 5. stupně a
36 transformací 1. stupně;

$\mathbf{L}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*1, 3, 4, 5; 6*) a
36 transformací 3. stupně (*1, 3, 4, 5; 2*);

$\mathbf{L}_2\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*2, 3, 4, 6; 1*) a
36 transformací 3. stupně (*2, 3, 4, 6; 5*);

$\mathbf{L}_3\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*1, 4, 5, 6; 3*) a
36 transformací 3. stupně (*1, 4, 5, 6; 2*);

$\mathbf{L}_4\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*2, 3, 5, 6; 1*) a
36 transformací 3. stupně (*2, 3, 5, 6; 4*);

$\mathbf{L}_5\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*1, 2, 4, 5; 6*) a
36 transformací 3. stupně (*1, 2, 4, 5; 3*);

$\mathbf{L}_6\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 3. stupně (*1, 2, 3, 6; 5*) a
36 transformací 3. stupně (*1, 2, 3, 6, 4*);

$\mathbf{Q}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 2. stupně s jedn. hlav. body *2, 3, 6* a
36 transformací 4. stupně s jedn. hlav. body *2, 3, 6* a
s dvojn. hlav. body *1, 4, 5*;

$\mathbf{B}_1\mathfrak{G}_{72}$ obsahuje 36 transformací 2. stupně s jedn. hlav. body *1, 4, 5* a
36 transformací 4. stupně s jedn. hlav. body *1, 4, 5* a
s dvojn. hlav. body *2, 3, 6*.

Tím je dokázána

Věta 6. *Grupa $\mathfrak{G}_{648}$ rovinných transformací, které zachovávají trojrozměrný systém rovinných kubik, procházejících jednoduše body 1, ..., 6 z věty 1, obsahuje třicet šest transformací 5. stupně, sedmdesát dvě transformace 4. stupně, 432 transformací 3. stupně, sedmdesát dvě transformace 2. stupně a třicet šest transformací 1. stupně.*

Tím je prostudována grupa $\mathfrak{G}_{648}$ rovinných transformací, která má za podgrupu grupu $\mathfrak{G}_{72}$ z práce L. VAŇATOVÉ [2].

Poznámka 3. Při rozkladu grupy $\mathfrak{G}_{648}$ ve třídy podle podgrupy $\mathfrak{G}_{72}$ se zjistí, že podgrupa $\mathfrak{G}_{72}$ není normální, neboť kdyby byla normální, muselo by na př. platit $\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{U}_1\mathbf{L}_1 = \mathbf{U}_1$, t. j. $\mathbf{U}_1\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1$, kde $\mathbf{U}_1 = \mathbf{J}_1^{\mathrm{I}}\mathbf{J}_1^{\mathrm{II}}$ seřazuje body $1, \ldots, 6$ v cykly $(1, 2)$, (3465).[8]) Ale tomu tak není, neboť transformace $\mathbf{U}_1\mathbf{L}_1$ přiřazuje bodu $1 \sim k_6^2$, $2 \sim \overline{12}$, $3 \sim \overline{24}$, $4 \sim 6$, $5 \sim \overline{23}$, $6 \sim \overline{25}$, kdežto transformace $\mathbf{L}_1\mathbf{U}_1$ přiřazuje bodu $1 \sim \overline{12}$, $2 \sim k_5^2$, $3 \sim \overline{14}$, $4 \sim \overline{16}$, $5 \sim \overline{13}$, $6 \sim 5$.

2. Jestliže jsme našli grupu rovinných transformací $\mathfrak{G}_{648}$, jejíž podgrupou je grupa rovinných transformací $\mathfrak{G}_{72}$ z práce [2], lze očekávat, že i grupa rovinných transformací $\mathfrak{G}_8$ z téže práce [2] bude podgrupou jisté širší grupy rovinných transformací stejného významu.

Vyšetřování provedeme opět pomocí kubické plochy. Nejdříve zjistíme, která kubická plocha má tu vlastnost, že se její přímky zobrazují do roviny do seskupení bodů $1, \ldots, 6$, přímek $\overline{ik}$ $(i \neq k;\ i, k = 1, \ldots, 6)$ a kuželoseček k_i^2 $(i = 1, \ldots, 6)$ příslušného ke grupě $\mathfrak{G}_8$. Analogie s odstavcem 1 dovoluje vyjadřovat se zde už stručněji.

V grupě $\mathfrak{G}_8$ jsou dvě symetrické involuce 5. stupně prvního druhu $\mathbf{J}_i^{\mathrm{I}}$ $(i = 1, 2)$, a to

$$\mathbf{J}_1^{\mathrm{I}} \ldots \mathit{12, 34, 56}\,, \quad \mathbf{J}_2^{\mathrm{I}} \ldots \mathit{12, 35, 46}\,,$$

a dvě symetrické involuce 5. stupně druhého druhu $\mathbf{J}_i^{\mathrm{II}}$ $(i = 1, 2)$, a to

$$\mathbf{J}_1^{\mathrm{II}} \ldots \mathit{45, 1236}\,, \quad \mathbf{J}_2^{\mathrm{II}} \ldots \mathit{36, 1245}\,.$$[9])

To znamená, že přímky $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$, resp. $\overline{12}$, $\overline{35}$, $\overline{46}$ procházejí jedním bodem M_1, resp. M_2, kuželosečka k_4^2, resp. k_5^2 se dotýká přímky $\overline{45}$ v bodě 5, resp. v bodě 4, a kuželosečka k_3^2, resp. k_6^2 se dotýká přímky $\overline{36}$ v bodě 6, resp. v bodě 3. To je celkem šest případů, jež vedou k planárním bodům na kubické ploše. Jestliže další takové případy už nenastanou (druhá možnost je probrána v odst. 3), můžeme body $1, \ldots, 6$, přímky $\overline{ik}$ $(i \neq k; i, k = 1, \ldots, 6)$ a kuželosečky k_i^2 $(i = 1, \ldots, 6)$ pokládat za obrazy přímek kubické plochy φ^3, která obsahuje právě šest planárních bodů. Taková plocha φ^3 skutečně existuje a má rovnici

$$\varphi^3 \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ax_4^3 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 = 0\,, \quad \text{kde } a \neq 1\,. \tag{8}$$[10])

Její příslušné zobrazení do roviny ihned provedeme.

Šest planárních bodů kubické plochy φ^3 dané rovnicí (8) určíme podobně jako u plochy α^3 v odstavci 1. Zjistíme, že mají souřadnice

$$M_1(1, 0, 0, 0)\,, \quad M_2(0, 1, -1, 0)\,, \quad M_3(0, 0, 1, 0)\,,$$
$$M_4(1, -1, 0, 0)\,, \quad M_5(1, 0, -1, 0)\,, \quad M_6(0, 1, 0, 0)\,.$$

Přiřazení přímek kubické plochy φ^3 bodům $1, \ldots, 6$, přímkám $\overline{ik}$ $(i \neq k;$ $i, k = 1, \ldots, 6)$ a kuželosečkám k_i^2 $(i = 1, \ldots, 6)$ v obrazové rovině provedeme

---

8) *L. Vaňatová* [2].
9) *L. Vaňatová* [2].
10) *J. Metelka* [3], str. 151.

takto: jediné tři přímky kubické plochy φ^3, které obsahují po dvou planárních bodech, jsou přímky

$$x_2 + x_3 = 0\,, \quad x_4 = 0 \quad \text{(jež obsahuje body } M_1, M_2)\,,$$
$$x_1 + x_3 = 0\,, \quad x_4 = 0 \quad \text{(jež obsahuje body } M_5, M_6)\,,$$
$$x_1 + x_2 = 0\,, \quad x_4 = 0 \quad \text{(jež obsahuje body } M_3, M_4)\,.$$

Těmto přímkám přiřadíme v obrazové rovině postupně přímky $\overline{12}, \overline{36}, \overline{45}$ (pořadí by mohlo být i jiné). Dalším dvěma přímkám kubické plochy φ^3, které procházejí planárním bodem M_1, přiřadíme v obrazové rovině přímky $\overline{34}$, resp. $\overline{56}$; konečně těm dvěma přímkám kubické plochy φ^3, které procházejí planárním bodem M_2, přiřadíme přímky $\overline{35}$, resp. $\overline{46}$. Ze dvou dalších přímek kubické plochy φ^3, které jdou planárním bodem M_6, jedna neprotíná v prostoru přímku, které jsme přiřadili přímku $\overline{46}$; té přiřadíme bod *3*. Druhá ji protíná, té přiřadíme kuželosečku k_6^2 atd. Tedy platí

Věta 7. *Seskupení bodů 1, ..., 6, přímek* $\overline{ik}$ $(i \neq k;\ i, k = 1, \ldots, 6)$ *a kuželoseček* k_i^2 $(i = 1, \ldots, 6)$ *v rovině, vedoucí ke grupě rovinných transformací* $\mathfrak{G}_8$, *dostaneme zobrazením přímek kubické plochy* φ^3 *se šesti planárními body do roviny.*

Věta 8. *Kubická plocha* φ^3 *se šesti planárními body se reprodukuje dvaceti čtyřmi prostorovými kolineacemi (pokud* $a \neq 1$*).*

D ů k a z. Šest prostorových kolineací, které zachovávají kubickou plochu (8), má tvar

$$x_1 = x_i'\,, \quad x_2 = x_j'\,, \quad x_3 = x_k'\,, \quad x_4 = x_4'\,,$$

kde i, j, k jsou permutace čísel 1, 2, 3. Další kolineace s touto vlastností jsou

$$x_1 = -(x_1' + x_2' + x_3' + x_4')\,, \quad x_2 = x_r'\,, \quad x_3 = x_s'\,, \quad x_4 = x_4'\,,$$

kde r, s jsou variace druhé třídy z čísel 1, 2, 3. Těch je také šest. Potom lze čtyřčlen $[-(x_1' + x_2' + x_3' + x_4')]$ položit roven x_2 a x_3; tak dostaneme dalších dvanáct kolineací, které reprodukují kubickou plochu φ^3. Tím je důkaz věty 8 proveden.

Existuje tedy grupa rovinných transformací $\mathfrak{G}_{24}$, řádu dvacet čtyři, která reprodukuje trojrozměrný systém rovinných kubik, procházejících jednoduše body *1, ..., 6* z věty 7. $\mathfrak{G}_{24}$ má za podgrupu grupu $\mathfrak{G}_8$ rovinných transformací, která má tutéž vlastnost.

Na problém lze však jíti také jinou, výhodnější cestou. Kubická plocha φ^3 se šesti planárními body se dá zobrazit ještě jiným způsobem.[11]) Tento druhý způsob zobrazení kubické plochy φ^3 vede k takové konfiguraci bodů *1, ..., 6*, která dává současně vznik šesti prvním charakteristickým polohám, t. j. body *1, ..., 6* jsou hlavními body šesti symetrických involucí 5. stupně prvního druhu J_i^{I} $(i = 1, \ldots, 6)$

---

[11]) *J. Metelka* [3], str. 151.

$$J_1^{\mathrm{I}} \ldots 12, 34, 56\,, \quad J_4^{\mathrm{I}} \ldots 15, 24, 36$$
$$J_2^{\mathrm{I}} \ldots 12, 35, 46\,, \quad J_5^{\mathrm{I}} \ldots 14, 25, 36$$
$$J_3^{\mathrm{I}} \ldots 13, 26, 45\,, \quad J_6^{\mathrm{I}} \ldots 16, 23, 45\,.$$

Těchto šest symetrických involucí 5. stupně prvního druhu dává vznik grupě $\mathfrak{G}_{24}$, řádu dvacet čtyři, kterou plně prostudoval J. METELKA v práci [4], jakožto čtvrtý případ.

Poněvadž seskupení bodů $1, \ldots, 6$, vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, a seskupení bodů $\overline{1}, \ldots, \overline{6}$, vedoucí ke grupě $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$, dostaneme různým zobrazením téže kubické plochy φ^3 se šesti planárními body do roviny, jsou tato seskupení biracionálně ekvivalentní. Existuje proto Cremonova transformace S, která převádí jedno seskupení bodů $1, \ldots, 6$ ve druhé. Abychom obdrželi hledanou grupu $\mathfrak{G}_{24}$, mající $\mathfrak{G}_8$ za podgrupu, stačí aplikovat na každou známou transformaci grupy $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$ příbuznost S, neboť grupy $\mathfrak{G}_{24}$ a $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$ jsou spolu isomorfní.

Písmenem ϱ, resp. σ označme rovinu, ve které leží konfigurace šesti bodů $1, \ldots, 6$, vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, resp. $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$. Transformace S má v rovině ϱ dvojnásobný bod 1 a jednoduché body $3, 4, 5, 6$ za hlavní body. Je to kubická transformace a body $1, \ldots, 6$ roviny ϱ se transformují do roviny σ postupně v k_2^2, $\overline{2}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{16}$. Transformace S^{-1} je totožná s S, je proto S involutorní příbuznost. Můžeme vyslovit větu

Věta 9. *Seskupení bodů $1, \ldots, 6$ z věty 7, vedoucí ke grupě rovinných transformací $\mathfrak{G}_8$ a seskupení bodů $\overline{1}, \ldots, \overline{6}$, vedoucí ke grupě $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$, jsou biracionálně ekvivalentní a dají se na sebe převést kubickou involutorní transformací S.*

Na příklad: involuci $J_3^{\mathrm{I}} \in \overline{\mathfrak{G}}_{24}$ v rovině σ odpovídá v rovině ϱ kubická transformace $SJ_3^{\mathrm{I}}S^{-1}$ s jednoduchými hlavními body $1, 2, 4, 5$ a s dvojnásobným hlavním bodem 6; involuci $J_4^{\mathrm{I}} \in \overline{\mathfrak{G}}_{24}$ v rovině σ, odpovídá v rovině ϱ opět kubická transformace $SJ_4^{\mathrm{I}}S^{-1}$ s jednoduchými hlavními body $1, 2, 3, 6$ a s dvojnásobným hlavním bodem 4.

Abychom určili všechny prvky grupy $\mathfrak{G}_{24}$ utvoříme její rozklad ve *třídy* podle podgrupy $\mathfrak{G}_8$. Kubická transformace $SJ_3^{\mathrm{I}}S^{-1}$ neleží v grupě $\mathfrak{G}_8$, určuje proto třídu $SJ_3^{\mathrm{I}}S^{-1}\mathfrak{G}_8$, která obsahuje osm kubických transformací s jednoduchými hlavními body $1, 2, 4, 5$, z nichž čtyři mají dvojnásobný bod v bodě 3 a čtyři v bodě 6. Poněvadž kubická transformace $SJ_4^{\mathrm{I}}S^{-1}$ neleží v této třídě, je $SJ_4^{\mathrm{I}}S^{-1}\mathfrak{G}_8$ další třída, která obsahuje osm kubických transformací s jednoduchými hlavními body $1, 2, 3, 6$. Polovina z těchto transformací má bod 5, druhá polovina bod 4 za dvojnásobný hlavní bod. Přihlédneme-li k výsledkům práce [2], můžeme vyslovit větu

Věta 10. *Grupa $\mathfrak{G}_8$ rovinných transformací, které zachovávají systém kubik, procházejících jednoduše body $1, \ldots, 6$ z věty 7, je podgrupou grupy rovinných transformací $\mathfrak{G}_{24}$, řádu dvacet čtyři, jejíž prvky reprodukují tytéž kubiky. Grupa $\mathfrak{G}_{24}$ obsahuje: dvě symetrické involuce 5. stupně prvního druhu J_i^{I} ($i = 1, 2$), dvě symetrické involuce 5. stupně druhého druhu J_i^{II} ($i = 1, 2$), jednu centrální ko-*

lineaci $\mathbf{H}_1$, *dvě kolineace* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *s periodou čtyři, šestnáct kubických transformací (a to čtyři involuce, osm transformací s periodou tři a čtyři s periodou šest) a transformaci identickou.*

3. Skupina šesti bodů, vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, se dá ještě specialisovat. To je vidět z toho, že s ní biracionálně ekvivalentní skupina bodů *1*, ..., *6*, která dává čtvrtý případ z práce [4], se dá specialisovat na skupinu bodů, vedoucí ke grupě rovinných transformací $\mathfrak{G}_{120}$.[12]) Tato vlastnost vyplývá také z toho, že kubická plocha φ^3 se šesti planárními body, jejímž zobrazením do roviny tuto speciální skupinu obdržíme, má ještě jeden neurčený koeficient a. Položíme-li $a = 1$, přejde plocha (8) v kubickou plochu Clebschovu (diagonální) s desíti planárními body o rovnici

$$\psi^3 \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 = 0\,.^{13)} \qquad (9)$$

Věta 11. *Kubická plocha* ψ^3 *s desíti planárními body se reprodukuje sto dvaceti prostorovými kolineacemi, které tvoří grupu* $\mathfrak{G}_{120}$.

Důkaz. Dvacet čtyři kolineací, které reprodukují plochu (9), má tvar

$$x_1 = x_i', \quad x_2 = x_j', \quad x_3 = x_k', \quad x_4 = x_m',$$

kde i, j, k, m jsou permutace čísel 1, 2, 3, 4; dalších dvacet čtyři kolineací s toutéž vlastností má tvar

$$x_1 = -(x_1' + x_2' + x_3' + x_4')\,, \quad x_2 = x_r', \quad x_3 = x_s', \quad x_4 = x_t',$$

kde r, s, t jsou variace třetí třídy z čísel 1, 2, 3, 4. Plocha (9) je dále reprodukována sedmdesáti dvěma kolineacemi, které dostaneme, když čtyřčlen $[-(x_1' + x_2' + x_3' + x_4')]$ položíme roven x_2, resp. x_3, resp. x_4. Tím je důkaz věty 11 proveden.

Ukažme nyní, že skupinu bodů *1*, ..., *6*, vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, lze tak specialisovat, aby tato skupina byla biracionálně ekvivalentní se skupinou šesti bodů, vedoucí k šestému případu z práce [4], t. j. aby tato skupina byla zobrazením přímek kubické plochy ψ^3 Clebschovy s desíti planárními body.

Existuje-li taková speciální skupina bodů *1*, ..., *6* vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$ (její rovinu označíme písmenem ϱ), pak ji lze převést v konfiguraci bodů *1*, ..., *6* vedoucí k šestému případu z práce [4] (její rovinu označme σ) toutéž Cremonovou transformací $\mathbf{S}$ jako v předcházejícím případě (srovnej s odst. 2). Přitom involuci $\mathbf{J}_7^{\mathrm{I}}$ s páry hlavních bodů *13*, *24*, *56* z roviny σ, odpovídá v rovině ϱ kubická transformace $\mathbf{S}\mathbf{J}_7^{\mathrm{I}}\mathbf{S}^{-1}$ (*1*, *2*, *5*, *6*; *4*), involuci $\mathbf{J}_8^{\mathrm{I}}$ s páry hlavních bodů *16*, *25*, *34* z roviny σ, odpovídá v rovině ϱ kubická transformace $\mathbf{S}\mathbf{J}_8^{\mathrm{I}}\mathbf{S}^{-1}$ (*1*, *2*, *3*, *4*; *5*), dále involuci $\mathbf{J}_9^{\mathrm{I}}$ s páry hlavních bodů *14*, *26*, *35* z roviny σ, odpovídá v rovině ϱ kubická transformace $\mathbf{S}\mathbf{J}_9^{\mathrm{I}}\mathbf{S}^{-1}$ (*1*, *2*, *3*, *5*; *6*) a analogicky involuci $\mathbf{J}_{10}^{\mathrm{I}}$

[12]) *J. Metelka* [4], šestý případ.
[13]) *J. Metelka* [3], str. 152.

s páry hlavních bodů *15, 23, 46* z roviny σ, odpovídá v rovině ϱ kubická transformace $\mathbf{S}J^{\mathrm{I}}_{10}\mathbf{S}^{-1}$ *(1, 2, 4, 6; 3)*.

Aby v rovině ϱ existovaly kubické transformace $\mathbf{S}J^{\mathrm{I}}_{7}\mathbf{S}^{-1}$, resp. $\mathbf{S}J^{\mathrm{I}}_{8}\mathbf{S}^{-1}$, resp. $\mathbf{S}J^{\mathrm{I}}_{9}\mathbf{S}^{-1}$, resp. $\mathbf{S}J^{\mathrm{I}}_{10}\mathbf{S}^{-1}$, musí se kuželosečky k_4^2, resp. k_5^2, resp. k_6^2, resp. k_3^2 dotýkati přímky $\overline{34}$ v bodě *3*, resp. přímky $\overline{56}$ v bodě *6*, resp. přímky $\overline{46}$ v bodě *4*, resp. přímky $\overline{35}$ v bodě *3*, t. j. přímky $\overline{35}$, $\overline{46}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$, jsou postupně polárami bodů *4, 5, 6, 3* vzhledem ke kuželosečkám k_4^2, k_5^2, k_6^2, k_3^2. To vše lze realisovat zobrazením plochy ψ^3 do roviny ϱ.

Obrazy desíti planárních bodů kubické plochy ψ^3 Clebschovy jsou jednak dotykové body j, k přímek $\overline{ij}$, $\overline{ik}$ na kuželosečce k_i^2 (kde $i \neq j \neq k \neq i$ probíhají čísla 3, 4, 5, 6), jednak průsečík přímek $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$ a průsečík přímek $\overline{12}$, $\overline{35}$, $\overline{46}$.

Přiřadíme-li postupně bodům *3, 4, 5, 6* souřadnice (1, 1, 1), (1, −1, 1), (1, 1, −1), (−1, 1, 1), má kuželosečka k_4^2, dotýkající se přímky $\overline{34}$ v bodě *3* a přímky $\overline{45}$ v bodě *5*, rovnici

$$k_4^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 = 0 .$$

Aby body *1, …, 6* tvořily seskupení vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$, musí body *1, 2* ležet na jedné ze souřadných os, na př. na ose o_1.[14]) Protože body *1, 2* leží také na kuželosečce k_4^2, vyhovují rovnicím

$$x_2^2 - x_3^2 - x_2x_3 = 0 , \quad x_1 = 0 .$$

V těchže bodech protínají osu o_1 také kuželosečky k_3^2, k_5^2, k_6^2.

Body *1, 2* jsou tím jednoznačně určeny a existence i konstrukce příslušné speciální skupiny bodů *1, …, 6* vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$ potvrzena. Zapišme to stručně následující větou:

Věta 12. *Ke skupině šesti bodů, vedoucí k šestému případu z práce* [4], *existuje biracionálně ekvivalentní skupina bodů 1, …, 6, vedoucí ke grupě $\mathfrak{G}_8$; lze ji určit zobrazením přímek kubické plochy Clebschovy ψ^3 do roviny.*

Grupě kolineací z věty 11 odpovídá touto cestou grupa $\mathfrak{G}_{120}^*$ rovinných transformací $\mathbf{T}_i$ roviny σ a ovšem i grupa $\mathfrak{G}_{120}$ rovinných transformací $\mathbf{ST}_i\mathbf{S}^{-1}$ v rovině ϱ. Všechny tyto grupy jsou mezi sebou isomorfní. Tedy

Věta 13. *Budiž $\mathfrak{G}_8$ grupa transformací z věty 12. Potom $\mathfrak{G}_8$ je podgrupou grupy $\mathfrak{G}_{120}$ rovinných transformací, jež reprodukují kubiky procházející jednoduše body 1, …, 6 z věty 12. Grupa $\mathfrak{G}_{120}$ obsahuje tyto transformace: tři kolineace; osm kvadratických transformací periody dvě, šestnáct kvadratických transformací periody čtyři, osm kvadratických transformací periody pět; dvanáct kubických transformací periody dvě, dvanáct kubických transformací periody tři, dvanáct kubických transformací periody čtyři, dvanáct kubických transformací periody šest; osm bikvadratických transformací periody tři, šestnáct bikvadratických transformací periody pět, osm bikvadratických transformací periody šest; čtyři transformace 5. stupně periody dvě a identickou transformaci.*

[14]) L. *Vaňatová* [2].

Tvrzení věty 13 o tom, které transformace grupa $\mathfrak{G}_{120}$ obsahuje, lze dokázat rozkladem grupy $\mathfrak{G}_{120}$ ve třídy podle podgrupy $\mathfrak{G}_8$, jejíž všechny transformace známe.

4. Výsledky této práce můžeme stručně shrnout takto:

Jsou-li body *1*, ..., *6* hlavními body právě dvou symetrických involucí J_i^{I} ($i = 1, 2$) 5. stupně prvního druhu a současně dvou symetrických involucí J_i^{II} ($i = 1, 2$) 5. stupně druhého druhu, existuje grupa $\mathfrak{G}_{24}$ rovinných transformací, reprodukující trojrozměrný systém rovinných kubik, procházejících jednoduše pevnými body *1*, ..., *6*, jejíž podgrupou je grupa $\mathfrak{G}_8$, mající tytéž vlastnosti.

Jestliže tyto body *1*, ..., *6* mají speciální polohu, charakterisovanou větou 12, je grupa $\mathfrak{G}_8$ rovinných transformací, reprodukujících trojrozměrný systém kubik, které procházejí jednoduše body *1*, ..., *6*, podgrupou grupy $\mathfrak{G}_{120}$, jejíž každá transformace má tutéž vlastnost.

Grupa $\mathfrak{G}_{72}$, jejíž prvky (které obdržíme složením šesti symetrických involucí J_i^{I} 5. stupně prvního druhu a šesti symetrických involucí J_i^{II} ($i = 1, \ldots, 6$) 5. stupně druhého druhu) reprodukují trojrozměrný systém rovinných kubik, procházejících jednoduše body *1*, ..., *6* z věty 1, je podgrupou grupy $\mathfrak{G}_{648}$ rovinných transformací, které všechny mají tutéž vlastnost.

LITERATURA

[1] *B. Bydžovský:* Úvod do algebraické geometrie, JČMF Praha, 1948.

[2] *L. Vaňatová:* O jednom druhu grup involutorních Cremonových transformací v rovině. Časopis pro pěstování matematiky, ročník *80* (1955), č. 2.

[3] *J. Metelka*: Sur les points planaires des surfaces cubiques. Académie royale de Belgique; Bulletin de la classe des sciences, 5e série — Tome XXXIII.

[4] *J. Metelka*: O jistých konečných grupách složených z Cremonových transformací prvého a pátého stupně. Věstník Král. české společnosti nauk, třída matematicko-přírodovědecká, 1946.

Резюме

СВЯЗЬ ГЛАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ИНВОЛЮЦИИ 5-ОЙ СТЕПЕНИ С ПРЯМЫМИ КУБИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

СВАТАВА КУБАЛКОВА (Svatava Kubálková), Прага.

(Поступило в редакцию 22/XII 1954 г.)

Статья является продолжением работы Л. Ванятовой, помещенной в настоящем номере журнала (Časopis pro pěstování matematiky, т. *80* (1955), No 2).

Главные элементы плоской симметрической инволюции 5-ой степени можно считать, по их группировке, плоскими образами 27 прямых некоторой кубической поверхности $\varkappa^3$, не имеющей двойных точек. В статье исследуются условия, которым должна удовлетворять кубическая поверхность $\varkappa^3$, для того, чтобы ее прямые отображались в конфигурацию главных точек *1*, ..., *6*, приводящую к группе $\mathfrak{G}_8$ или $\mathfrak{G}_{72}$ из упомянутой статьи Л. Ванятовой. Оказалось, что группы $\mathfrak{G}_8$ и $\mathfrak{G}_{72}$ плоских преобразований, сохраняющих трехмерное семейство плоских кубик с неподвижными точками *1*, ..., *6*, являются подгруппами некоторых групп плоских преобразований высших порядков с теми же свойствами.

Работа состоит из трех глав. В первой главе изучена связь группы плоских преобразований $\mathfrak{G}_{72}$ с группой плоских преобразований $\mathfrak{G}_{648}$ при помощи эквиангармонической кубической поверхности α^3. Глава содержит следующие результаты

I. Главные элементы симметрической инволюции 5-ой степени, приводящие к группе $\mathfrak{G}_{72}$ плоских преобразований, получаются путем отображения прямых кубической эквиангармонической поверхности α^3, данной уравнением

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

на плоскость.

II. Эквиангармоническая кубическая поверхность α^3 воспроизводится в пространстве 648-ью коллинеациями, образующими группу $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$. Группе $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ соответствует в плоскости группа плоских преобразований $\mathfrak{G}_{648}$, изоморфная с $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$. Каждое преобразование группы $\mathfrak{G}_{648}$ сохраняет трехмерное семейство плоских кубик, проходящих по одному разу через точки 1, ..., 6. Группа $\mathfrak{G}_{72}$, обладающая тем же свойством, является подгруппой группы $\mathfrak{G}_{648}$.

Группа $\mathfrak{G}_{648}$ содержит следующие плоские преобразования: 36 преобразований 1-ой степени, 72 преобразования 2-ой степени, 432 преобразования 3-ьей степени, 72 преобразования 4-ой степени и 36 преобразований 5-ой степени.

Во второй главе исследуются свойства группы $\mathfrak{G}_{24}$ плоских преобразований, содержащей группу $\mathfrak{G}_8$ из работы Л. Ванятовой в виде своей подгруппы. Справедливы следующие теоремы

III. Группировку главных элементов, приводящую к группе $\mathfrak{G}_8$, можно получить отображением прямых кубической поверхности φ^3 с шестью планарными точками на плоскость.

IV. Кубическая поверхность φ^3 в пространстве воспроизводится 24-мя коллинеациями, образующими группу $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$. Группе $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$ отвечает в плоскости изоморфная ей группа $\mathfrak{G}_{24}$ плоских преобразований, сохраняющих трех-

мерное семейство плоских кубик. Группа $\mathfrak{G}_8$ является подгруппой группы $\mathfrak{G}_{24}$.

Группа $\mathfrak{G}_{24}$ содержит следующие плоские преобразования: 2 инволюции 5-ой степени первого рода, 2 инволюции 5-ой степени второго рода, одну центральную коллинеацию, 2 циклические коллинеации, 16 кубических преобразований и тождественное преобразование.

Третья глава содержит следующие результаты

V. Если координаты главных точек 3, 4, 5, 6 суть соответственно (1, 1, 1), (1, —1, 1), (1, 1, —1), (—1, 1, 1) и если *координаты главных точек 1, 2 удовлетворяют уравнению*

$$x_2^2 - x_3^2 - x_2x_3 = 0\,, \quad x_1 = 0\,,$$

то главные элементы соответствующей симметрической инволюции 5-ой степени можно считать проекциями прямых кубической поверхности Клебша ψ^3 с десятью планарными точками.

VI. Кубическая поверхность ψ^3 воспроизводится 120-ью пространственными коллинеациями, образующими группу $\overline{\mathfrak{G}}_{120}$. Ей соответствует в плоскости группа $\mathfrak{G}_{120}$ плоских преобразований, сохраняющих трехмерное семейство плоских кубик, которые проходят по одному разу через шесть неподвижных точек 1, ..., 6. Каждое преобразование группы $\mathfrak{G}_8$ обладает тем же свойством, и $\mathfrak{G}_8$ является подгруппой группы $\mathfrak{G}_{120}$.

Группа $\mathfrak{G}_{120}$ содержит 3 коллинеации, 32 преобразования 2-ой степени, 48 преобразований 3-ьей степени, 32 преобразования 4-ой степени, 4 симметрические инволюции 5-ой степени и тождественное преобразование.

Zusammenfassung

ZUSAMMENHANG DER HAUPTELEMENTE EINER SYMMETRISCHEN INVOLUTION 5-TEN GRADES MIT DEN GERADEN EINER KUBISCHEN FLÄCHE

SVATAVA KUBÁLKOVÁ, Prag.

(Angenommen den 22. Dezember 1954.)

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung des Aufsatzes von L. VAŇATOVÁ, der in dieser Nummer des Zeitschriftes publiziert ist (Časopis pro pěstování matematiky 80 (1955), Nr. 2).

Die Hauptelemente einer symmetrischen Involution 5-ten Grades können wir für die Abbilde der 27 Geraden einer kubischen Fläche $\varkappa^3$ ohne Doppelpunkte auf die Ebene halten. In dieser Arbeit untersucht man die Bedingungen, welche eine kubische Fläche $\varkappa^3$ erfüllen muss, damit sich ihre Geraden in die Konfiguration der Hauptpunkte *1, ..., 6* abbilden, die zur Gruppe $\mathfrak{G}_8$ oder $\mathfrak{G}_{72}$ aus der vorstehenden Arbeit von L. Vaňatová führt. Bei der Untersuchung hat man festgestellt, dass die Gruppen $\mathfrak{G}_8$ und $\mathfrak{G}_{72}$ der Transformationen die Untergruppen bestimmter Gruppen von höherer Ordnung sind.

Die eigene Arbeit besteht aus drei Kapiteln. Im ersten Kapitel studiert man, mit Hilfe der ekvianharmonischen kubischen Fläche α^3, den Zusammenhang der Gruppe $\mathfrak{G}_{72}$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}_{648}$ der Transformationen. Das Kapitel enthält folgende Ergebnisse

I. *Die Hauptelemente der symmetrischen Involution 5-ten Grades, die zur Gruppe $\mathfrak{G}_{72}$ der Transformationen führen, gewinnen wir durch die Abbildung der Geraden der ekvianharmonischen kubischen Fläche α^3 mit der Gleichung*

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

auf die Ebene.

II. *Die ekvianharmonische kubische Fläche α^3 ist im Raume durch 648 Kollineationen, die die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ bilden, reproduziert. In der Ebene entspricht der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ die Gruppe $\mathfrak{G}_{648}$ der Transformationen, die mit $\overline{\mathfrak{G}}_{648}$ isomorph ist. Jede Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}_{648}$ reproduziert ein dreidimensionales System der ebenen Kurven dritten Grades, die einfach durch die Punkte 1, ..., 6 gehen. Die Gruppe $\mathfrak{G}_{72}$, die dieselbe Eigenschaft besitzt, ist eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}_{648}$.*

$\mathfrak{G}_{648}$ enthält folgende Transformationen: 36 Transformationen ersten Grades, 72 Transformationen zweiten Grades, 432 Transformationen dritten Grades, 72 Transformationen vierten Grades und 36 Transformationen fünften Grades.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit untersucht man die Eigenschaften der Gruppe $\mathfrak{G}_{24}$, die die Gruppe $\mathfrak{G}_8$ aus der vorstehenden Arbeit von L. Vaňatová als Untergruppe enthält. Man hat festgestellt

III. *Die zur Gruppe $\mathfrak{G}_8$ führende Gruppe der Hauptelemente gewinnen wir durch Abbildung der Geraden der kubischen Fläche φ^3 mit sechs Planarpunkten auf die Ebene.*

IV. *Die kubische Fläche φ^3 ist durch 24 Raumkollineationen, die die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$ bilden, reproduziert. In der Ebene entspricht der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{24}$ eine isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}_{24}$ der Transformationen. Ihre Elemente reproduzieren ein dreidimensionales System der ebenen Kurven dritten Grades und $\mathfrak{G}_8$ ist die Untergruppe dieser Gruppe.*

Die Gruppe $\mathfrak{G}_{24}$ enthält folgende Transformationen: zwei Involutionen fünften Grades erster Gattung, zwei Involutionen fünften Grades zweiter Gattung, eine Zentralkollineation, zwei zyklische Kollineationen, sechzehn Transformationen dritten Grades und eine identische Transformation.

Im dritten Kapitel sind diese Ergebnisse enthalten

V. *Wenn die Hauptpunkte 3, 4, 5, 6 fortschreitend die Koordinaten* (1, 1, 1),

$(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ *und* $(-1, 1, 1)$ *haben und die Koordinaten der Hauptpunkte 1, 2 der Gleichung*

$$x_2^2 - x_3^2 - x_2 x_3 = 0\,, \quad x_1 = 0$$

genügen, können wir die Hauptelemente der erwägten symmetrischen Involution fünften Grades für die Abbilde der Geraden der kubischen Fläche ψ^3 mit 10 Planarpunkten auf die Ebene halten.

VI. *Die kubische Fläche ψ^3 ist durch 120 Raumkollineationen, die die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{120}$ bilden, reproduziert. In der Ebene entspricht der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{120}$ die Gruppe $\mathfrak{G}_{120}$ der Transformationen, die das dreidimensionale System der ebenen Kurven dritten Grades reproduzieren. Diese kubischen Kurven gehen einfach durch sechs feste Punkte 1, ..., 6. Jedes Element der Gruppe $\mathfrak{G}_8$ besitzt dieselbe Eigenschaft wie die Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}_{120}$ und $\mathfrak{G}_8$ ist die Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}_{120}$.*

Die Gruppe $\mathfrak{G}_{120}$ enthält diese Transformationen: 3 Kollineationen, 32 Transformationen zweiten Grades, 48 Transformationen dritten Grades, 32 Transformationen vierten Grades, 4 symmetrische Involutionen fünften Grades und eine identische Transformation.

VÝPOČET SOUČTU ŘAD

BEDŘICH KÖNIG, Praha.

(Došlo dne 18. března 1953.)

DT - 517.522

V článku je podána metoda pro numerický výpočet součtu jistých řad a odhad chyby při této metodě (§ 1 a 2). V § 3 jsou jako ukázka propočteny tři příklady.

1.

Budiž $s = \alpha + i\beta$ ($\alpha > 1$, β reálné); $\varrho \geqq 0$.

Řada

$$f(z) = a_0 z^s + a_1 z^{s-1} + a_2 z^{s-2} + \dots \quad (a_0 \neq 0,\ z = x + iy) \tag{1}$$

budiž konvergentní a $f(z) \neq 0$ pro $|z| > \varrho$. Pro $|z| > \varrho$ máme tedy konvergentní rozvoj

$$\frac{1}{f(z)} = b_0 z^{-s} + b_1 z^{-s-1} + b_2 z^{-s-2} + \dots, \quad b_0 = \frac{1}{a_0} \neq 0\,. \tag{2}$$

Je-li $k_0 > \varrho$ přirozené číslo, je řada $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{f(k)}$ absolutně konvergentní (ježto $\frac{1}{f(k)} = O\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$); jde o stanovení jejího součtu.

Přitom $k^s = e^{s \log k}$, kde $\log k$ značí hlavní hodnotu logaritmu čísla k.

$\frac{1}{f(k)}$ můžeme rozvinout ve tvaru

$$\frac{1}{f(k)} = A_{-1}\left[\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{s-1}} - \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^{s-1}}\right] + A_0\left[\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{s}} - \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^{s}}\right] + \dots$$
$$\dots + A_r\left[\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{s+r}} - \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^{s+r}}\right] + \dots + A_d\left[\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{s+d}} - \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^{s+d}}\right] +$$
$$+ \varphi(k)\,. \tag{3}$$

Rozvoje

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^{-(s+r)} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{-s-r}{i} \frac{1}{2^i} k^{-(s+r+i)},$$
$$\left(k + \frac{1}{2}\right)^{-(s+r)} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-s-r}{i} \frac{1}{2^i} k^{-(s+r+i)}$$

jsou pro všechna r a $k \geqq 1$ absolutně konvergentní.

Rovnici (3) můžeme pak psáti ve tvaru (3a):

$$b_0 k^{-s} + b_1 k^{-s-1} + b_2 k^{-s-2} + \ldots + b_n k^{-s-n} + \ldots =$$

$$= -A_{-1}\left[(-s+1)k^{-s} + \binom{-s+1}{3}\frac{1}{2^2}k^{-s-2} + \ldots + \binom{-s+1}{2r+1}\frac{1}{2^{2r}}k^{-s-2r} + \ldots\right] -$$

$$- A_0\left[-sk^{-s-1} + \binom{-s}{3}\frac{1}{2^2}k^{-s-3} + \ldots + \binom{-s}{2r+1}\frac{1}{2^{2r}}k^{-s-2r-1} + \ldots\right] -$$

$$- A_1\left[(-s-1)k^{-s-2} + \binom{-s-1}{3}\frac{1}{2^2}k^{-s-4} + \ldots + \binom{-s-1}{2r+1}\frac{1}{2^{2r}}k^{-s-2r-2} + \ldots\right] - \ldots$$

$$\ldots - A_n\left[(-s-n)k^{-s-n-1} + \binom{-s-n}{3}\frac{1}{2^2}k^{-s-n-3} + \ldots\right.$$

$$\left. + \binom{-s-n}{2r+1}\frac{1}{2^{2r}}k^{-s-n-2r-1} + \ldots\right] - \ldots$$

$$\ldots - A_d\left[(-s-d)k^{-s-d-1} + \binom{-s-d}{3}\frac{1}{2^2}k^{-s-d-3} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + \binom{-s-d}{2r+1}\frac{1}{2^{2r}}k^{-s-d-2r-1} + \ldots\right] + \varphi(k).$$

Srovnáním koeficientů vyjde $\varphi(k)$ ve tvaru konvergentní řady

$$\varphi(k) = \alpha_0 k^{-s} + \alpha_1 k^{-s-1} + \alpha_2 k^{-s-2} + \ldots$$

Koeficienty $A_{-1}, A_0, A_1, \ldots, A_d$ lze stanoviti jednoznačně tak, že $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{d+1} = 0$, načež

$$\varphi(k) = \alpha_{d+2} k^{-s-d-2} + \alpha_{d+3} k^{-s-d-3} + \ldots,$$

a máme

$$\sum_{k=k_0}^{n} \frac{1}{f(k)} = A_{-1}\left[\frac{1}{(k_0-\frac{1}{2})^{s-1}} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^{s-1}}\right] + A_0\left[\frac{1}{(k_0-\frac{1}{2})^{s}} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^{s}}\right] + \ldots$$

$$\ldots + A_r\left[\frac{1}{(k_0-\frac{1}{2})^{s+r}} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^{s+r}}\right] + \ldots + A_d\left[\frac{1}{(k_0-\frac{1}{2})^{s+d}} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^{s+d}}\right] + R;$$

$$R = \sum_{k=k_0}^{n} \frac{\alpha_{d+2}}{k^{s+d+2}} + \frac{\alpha_{d+3}}{k^{s+d+3}} + \ldots \qquad (4)$$

Je vidět, že koeficienty $A_{-1}, A_0, \ldots, A_d$ nezávisí na volbě d. Rovnice (4) můžeme použít též pro $\alpha < 1$, pokud $\alpha + d + 2 > 1$.

Pro $n \to \infty$, $\alpha > 1$ obdržíme

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{f(k)} = A_{-1}\frac{1}{(k_0-\frac{1}{2})^{s-1}} + A_0\frac{1}{(k_0-\frac{1}{2})^{s}} + \ldots + A_r\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^{s+r}} + \ldots$$

$$\ldots + A_d\frac{1}{(k_0-\frac{1}{2})^{s+d}} + R;$$

$$R = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\alpha_{d+2}}{k^{s+d+2}} + \frac{\alpha_{d+3}}{k^{s+d+3}} + \ldots \qquad (5)$$

Touto rovnicí je funkce $\Phi(s)$ definovaná pro $\alpha > 1$ řadou

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{f(k)} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{f(k)}$$

analyticky prodloužena pro $\alpha < 1$, pokud $\alpha + d + 2 > 1$.

Z rovnice (3a) plyne:

$$A_{-1} = \frac{1}{a_0(s-1)}, \quad A_0 = \frac{b_1}{s}, \quad A_1 = \frac{12b_2 - \binom{s+1}{2} b_0}{12(s+1)},$$

$$A_2 = \frac{12b_3 - \binom{s+2}{2} b_1}{12(s+2)}, \quad A_3 = \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 2^4 b_4 + 7b_0 \binom{s+3}{4} - 20 \binom{s+3}{2} b_2}{3 \,.\, 5 \,.\, 2^4 (s+3)}, \text{ atd.}$$

Pro $r = 1, 2, 3, \ldots$ je

$$\alpha_{d+2r} = b_{d+2r} + A_{d-1} \binom{-s-d+1}{2r+1} \frac{1}{2^{2r}} + A_{d-3} \binom{-s-d+3}{2r+3} \frac{1}{2^{2r+2}} + \ldots$$

$$\ldots + A_\nu \binom{-s-\nu}{d+2r-\nu} \frac{1}{2^{d+2r-\nu-1}} + \ldots + \begin{cases} A_0 \dbinom{-s}{d+2r} \dfrac{1}{2^{d+2r-1}} \text{ (pro lichá } d\text{)}; \\ A_{-1} \dbinom{-s+1}{d+2r+1} \dfrac{1}{2^{d+2r}} \text{ (pro sudá } d\text{)}; \end{cases}$$

$$\alpha_{d+2r+1} = b_{d+2r+1} + A_d \binom{-s-d}{2r+1} \frac{1}{2^{2r}} + A_{d-2} \binom{-s-d+2}{2r+3} \frac{1}{2^{2r+2}} + \ldots$$

$$\ldots + A_\nu \binom{-s-\nu}{d+2r-\nu+1} \frac{1}{2^{d+2r-\nu}} + \ldots + \begin{cases} A_{-1} \dbinom{-s+1}{d+2r+2} \dfrac{1}{2^{d+2r+1}} \text{ (pro lichá } d\text{)} \\ A_0 \dbinom{-s}{d+2r+1} \dfrac{1}{2^{d+2r}} \text{ (pro sudá } d\text{)}. \end{cases} \tag{6}$$

Pro zbytek R obdržíme odhad, platný pro každé $k_0 > \varrho$.

$$|R| < \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{|k^{s+d+2}|} \Bigg\{ |b_{d+2}| \left[1 + \frac{|b_{d+4}|}{|b_{d+2}|\, k_0^2} + \frac{|b_{d+6}|}{|b_{d+2}|\, k_0^4} + \ldots \right] +$$

$$+ |A_{d-1}| \frac{1}{2^2} \left[\left| \binom{-s-d+1}{3} \right| + \left| \binom{-s-d+1}{5} \right| \frac{1}{4k_0^2} + \left| \binom{-s-d+1}{7} \right| \frac{1}{4^2 k_0^4} + \ldots \right] +$$

$$+ |A_{d-3}| \frac{1}{2^4} \left[\left| \binom{-s-d+3}{5} \right| + \left| \binom{-s-d+3}{7} \right| \frac{1}{4k_0^2} + \left| \binom{-s-d+3}{9} \right| \frac{1}{4^2 k_0^4} + \ldots \right] + \ldots$$

$$\ldots + |A_\nu| \frac{1}{2^{d+1-\nu}} \left[\left| \binom{-s-\nu}{d+2-\nu} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \binom{-s-\nu}{d+4-\nu} \right| \frac{1}{4k_0^2} + \left| \binom{-s-\nu}{d+6-\nu} \right| \frac{1}{4^2 k_0^4} + \ldots \right] + \ldots$$

$$\ldots + \left\langle \begin{array}{l} |A_0| \dfrac{1}{2^{d+1}} \left[\left| \dbinom{-s}{d+2} \right| + \left| \dbinom{-s}{d+4} \right| \dfrac{1}{4k_0^2} + \left| \dbinom{-s}{d+6} \right| \dfrac{1}{4^2 k_0^4} + \ldots \right] \Big\} \text{(pro lichá } d) + \\ |A_{-1}| \dfrac{1}{2^{d+2}} \left[\left| \dbinom{-s+1}{d+3} \right| + \left| \dbinom{-s+1}{d+5} \right| \dfrac{1}{4k_0^2} + \left| \dbinom{-s+1}{d+7} \right| \dfrac{1}{4^2 k_0^4} + \ldots \right] \Big\} \end{array} \right.$$

$$\text{(pro sudá } d) +$$

$$+ \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{|k^{s+d+3}|} \left\{ |b_{d+3}| \left[1 + \frac{|b_{d+5}|}{|b_{d+3}| k_0^2} + \frac{|b_{d+7}|}{|b_{d+3}| k_0^4} + \ldots \right] + \right.$$

$$+ |A_d| \frac{1}{2^2} \left[\left| \binom{-s-d}{3} \right| + \left| \binom{-s-d}{5} \right| \frac{1}{4k_0^2} + \left| \binom{-s-d}{7} \right| \frac{1}{4^2 k_0^4} + \ldots \right] +$$

$$+ |A_{d-2}| \frac{1}{2^4} \left[\left| \binom{-s-d+2}{5} \right| + \left| \binom{-s-d+2}{7} \right| \frac{1}{4k_0^2} + \left| \binom{-s-d+2}{9} \right| \frac{1}{4^2 k_0^4} + \ldots \right] + \ldots$$

$$\ldots + |A_\nu| \frac{1}{2^{d-\nu+2}} \left[\left| \binom{-s-\nu}{d+3-\nu} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \binom{-s-\nu}{d+5-\nu} \right| \frac{1}{4k_0^2} + \left| \binom{-s-\nu}{d+7-\nu} \right| \frac{1}{4^2 k_0^4} + \ldots \right] + \ldots$$

$$\ldots + \left\langle \begin{array}{l} |A_{-1}| \dfrac{1}{2^{d+3}} \left[\left| \dbinom{-s+1}{d+4} \right| + \left| \dbinom{-s+1}{d+6} \right| \dfrac{1}{4k_0^2} + \left| \dbinom{-s+1}{d+8} \right| \dfrac{1}{4^2 k_0^4} + \ldots \right] \Big\} \text{(pro lichá } d). \\ |A_0| \dfrac{1}{2^{d+2}} \left[\left| \dbinom{-s}{d+3} \right| + \left| \dbinom{-s}{d+5} \right| \dfrac{1}{4k_0^2} + \left| \dbinom{-s}{d+7} \right| \dfrac{1}{4^2 k_0^4} + \ldots \right] \Big\} \end{array} \right.$$

$$\text{(pro sudá } d)\,.$$

Je-li n_0 nejmenší přirozené číslo takové, že $n_0 \geqq \varrho$, plyne z konvergence řady (2)

$$\left| \frac{b_{d+\nu+2}}{b_{d+2} n_0^\nu} \right| \leqq 1\,.^{*)}$$

Je-li tudíž $k_0 > n_0$ přirozené číslo, platí

$$\left| \frac{b_{d+\nu+2}}{b_{d+2} k_0^\nu} \right| \leqq \sigma^\nu\,, \quad \text{kde} \quad \sigma = \frac{n_0}{k_0} < 1\,. \tag{7}$$

Provádějme tedy odhad zbytku pro $k_0 > n_0$. Potom

$$1 + \frac{|b_{d+3}|}{|b_{d+2}| k_0} + \frac{|b_{d+4}|}{|b_{d+2}| k_0^2} + \ldots < \frac{1}{1-\sigma}\,.$$

---

*) Upozorňujeme čtenáře, že pro jednoduchost předpokládáme, že platí $\left| \frac{b_{n+1}}{b_n k_0} \right| \leqq 1$ pro všechna přirozená n. Obecně platí $\left| \frac{b_{n+1}}{b_n k_0} \right| \leqq 1$ jen od jistého n počínaje, a tedy je nutno v dalším vzorec (9) příslušným způsobem pozměnit, což si čtenář lehce provede sám.

Zbývající řady, vyskytující se při odhadu zbytku R, jsou tvaru:

$$S = \left|\binom{-(s+r)}{m}\right| + \left|\binom{-(s+r)}{m+2}\right|\frac{1}{4k_0^2} + \left|\binom{-(s+r)}{m+4}\right|\frac{1}{4^2k_0^4} + \ldots \leqq S_1,$$

kde

$$S_1 = \left|\binom{-|\alpha+r| - |\beta|}{m}\right| + \left|\binom{-|\alpha+r| - |\beta|}{m+2}\right|\frac{1}{4k_0^2} +$$

$$+ \left|\binom{-|\alpha+r| - |\beta|}{m+4}\right|\frac{1}{4^2k_0^4} + \ldots;$$

přitom $s = \alpha + i\beta$, $m = 1; 3; 5; \ldots$; $r = -1; 0; 1; 2; \ldots$.

Označme

$$\frac{\left|\binom{-|\alpha+r| - |\beta|}{m+2}\right|}{\left|\binom{-|\alpha+r| - |\beta|}{m}\right| 4k_0^2} = \omega_{m,r}. \tag{8}$$

Pokud

$$|\alpha + r| + |\beta| > 1,$$

klesá $\omega_{r,m}$ s rostoucím m a $S_1 < \left|\binom{-|\alpha+r| - |\beta|}{m}\right| \frac{1}{1 - \omega_{r,m}}$, je-li k_0 tak zvoleno, že $\omega_{r,m} < 1$.

Je-li $|\alpha + r| + |\beta| = 1$, je $S_1 = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{4k_0^2}}$, je-li $|\alpha + r| + |\beta| < 1$, je $S_1 < \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{4k_0^2}}$.

Při odhadu zbytku R vyskytnou se čísla $\omega_{d-1,3}$; $\omega_{d-3,5}$; ...; $\omega_{0,d+2}$; $\omega_{-1,d+3}$; $\omega_{d,3}$; $\omega_{d-2,5}$; ...; $\omega_{0,d+3}$; $\omega_{-1,d+4}$. Ze všech těchto čísel je největší $\omega_{d,3}$ (jak lze snadno ukázat).

Pro R obdržíme tedy odhad:

$$|R| < \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{|k^{s+d+2}|} \left(|b_{d+2}| \frac{1}{1-\sigma} + \frac{1}{1-\omega_{d,3}} \left\{ \frac{1}{2^2} \left[\frac{|A_d|}{k_0} \left|\binom{-|\alpha+d| - |\beta|}{3}\right| + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \left|\binom{-|\alpha+d-1| - |\beta|}{3}\right| \cdot |A_{d-1}| \right] +$$

$$+ \frac{1}{2^4}\left[\frac{|A_{d-2}|}{k_0} \left|\binom{-|\alpha+d-2| - |\beta|}{5}\right| + |A_{d-3}| \cdot \left|\binom{-|\alpha+d-3| - |\beta|}{5}\right|\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2^{2r}}\left[\frac{|A_{d-2r+2}|}{k_0} \cdot \left|\binom{-|\alpha+d-2r+2| - |\beta|}{2r+1}\right| + \right.$$

$$\left. + |A_{d-2r+1}| \cdot \left|\binom{-|\alpha+d-2r+1| - |\beta|}{2r+1}\right|\right] + \ldots$$

$$\dots + \begin{cases} \dfrac{1}{2^{d+1}}\left[\dfrac{|A_1|}{k_0}\left|\left(\dfrac{-|\alpha+1|-|\beta|}{d+2}\right)\right| + |A_0| \cdot \left|\left(\dfrac{-|\alpha|-|\beta|}{d+2}\right)\right|\right] + \\ \qquad + \dfrac{1}{2^{d+3}}\dfrac{|A_{-1}|}{k_0} \cdot \left|\left(\dfrac{-|\alpha-1|-|\beta|}{d+4}\right)\right|\Bigg\}\Bigg) \text{ (pro lichá } d\text{)}, \\ \dfrac{1}{2^{d+2}}\left[\dfrac{|A_0|}{k_0}\left|\left(\dfrac{-|\alpha|-|\beta|}{d+3}\right)\right| + |A_{-1}| \cdot \left|\left(\dfrac{-|\alpha-1|-|\beta|}{d+3}\right)\right|\right]\Bigg\}\Bigg) \text{(pro sudá } d\text{)}, \end{cases} \tag{9}$$

který platí pro k_0 taková, že $\omega_{d,3} < 1$.

2.

Budiž $s = \alpha + i\beta$ ($\alpha > 0$, $\beta = 0$); $0 < x < 1$; $\varrho \geqq 0$. $\dfrac{1}{f(k)}$ je dáno řadou (2), konvergentní pro $k_0 > \varrho$. Máme stanovit $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \dfrac{e^{2k\pi xi}}{f(k)}$. Uvažujme následující rozvoj $\dfrac{1}{f(k)}$:

$$\frac{1}{f(k)} = A_0\left[\frac{e^{-\pi xi}}{(k-\frac{1}{2})^s} - \frac{e^{\pi xi}}{(k+\frac{1}{2})^s}\right] + A_1\left[\frac{e^{-\pi xi}}{(k-\frac{1}{2})^{s+1}} - \frac{e^{\pi xi}}{(k+\frac{1}{2})^{s+1}}\right] + \dots$$
$$\dots + A_\nu\left[\frac{e^{-\pi xi}}{(k-\frac{1}{2})^{s+\nu}} - \frac{e^{\pi xi}}{(k+\frac{1}{2})^{s+\nu}}\right] + \dots$$
$$\dots + A_d\left[\frac{e^{-\pi xi}}{(k-\frac{1}{2})^{s+d}} - \frac{e^{\pi xi}}{(k+\frac{1}{2})^{s+d}}\right] + \varphi(k). \tag{10}$$

Rozvineme-li $(k-\frac{1}{2})^{-(s+r)}$ a $(k+\frac{1}{2})^{-(s+r)}$ jako v § 1, obdržíme:

$$b_0k^{-s} + b_1k^{-s-1} + b_2k^{-s-2} + \dots =$$
$$= -2A_0 i \sin \pi x\left[k^{-s} + \binom{-s}{2}k^{-s-2}\frac{1}{2^2} + \binom{-s}{4}\frac{1}{2^4}k^{-s-4} + \dots\right] -$$
$$- A_0 \cos \pi x\left[-sk^{-s-1} + \binom{-s}{3}\frac{1}{2^2}k^{-s-3} + \binom{-s}{5}\frac{1}{2^4}k^{-s-5} + \dots\right] - \dots$$
$$\dots - 2A_\nu i \sin \pi x\left[k^{-s-\nu} + \binom{-s-\nu}{2}\frac{1}{2^2}k^{-s-\nu-2} + \binom{-s-\nu}{4}\frac{1}{2^4}k^{-s-\nu-4} + \dots\right] -$$
$$- A_\nu \cos \pi x\left[-(s+\nu)k^{-s-\nu-1} + \binom{-s-\nu}{3}\frac{1}{2^2}k^{-s-\nu-3} + \binom{-s-\nu}{5}\frac{1}{2^4}k^{-s-\nu-5} + \dots\right] - \dots$$
$$\dots - 2A_d i \sin \pi x\left[k^{-s-d} + \binom{-s-d}{2}\frac{1}{2^2}k^{-s-d-2} + \binom{-s-d}{4}\frac{1}{2^4}k^{-s-d-4} + \dots\right] -$$
$$- A_d \cos \pi x\left[-(s+d)k^{-s-d-1} + \binom{-s-d}{3}\frac{1}{2^2}k^{-s-d-3} + \dots + \binom{-s-d}{5}\frac{1}{2^4}k^{-s-d-5} + \dots\right] + \varphi(k).$$

Koeficienty $A_0, A_1, \ldots, A_d$ vypočteme zcela obdobně jako v § 1 při výpočtu $\Sigma \frac{1}{f(k)}$. Pro $\varphi(k)$ obdržíme konvergentní rozvoj tvaru

$$\varphi(k) = \alpha_{d+1}k^{-s-d-1} + \alpha_{d+2}k^{-s-d-2} + \ldots$$

Obdržíme:

$$A_0 = \frac{b_0 \mathrm{i}}{2 \sin \pi x}, \quad A_1 = \frac{b_0 s \cos \pi x + 2\mathrm{i} b_1 \sin \pi x}{4 \sin^2 \pi x},$$

$$A_2 = \frac{b_1(s+1) \sin 2\pi x - \mathrm{i}\left[b_0 \binom{s+1}{2}(1 + \cos^2 \pi x) - 4b_2 \sin^2 \pi x\right]}{8 \sin^3 \pi x}, \text{ atd.}$$

Pro $r = 0, 1, 2, \ldots$ je

$$\alpha_{d+2r+1} = b_{d+2r+1} - A_d \cos \pi x \cdot \frac{1}{2^{2r}} \binom{-s-d}{2r+1} -$$
$$- 2A_{d-1}\mathrm{i} \sin \pi x \cdot \frac{1}{2^{2r+2}} \binom{-s-d+1}{2r+2} - A_{d-2} \cos \pi x \cdot \frac{1}{2^{2r+2}} \binom{-s-d+2}{2r+3} -$$
$$- 2A_{d-3}\,\mathrm{i} \sin \pi x \cdot \frac{1}{2^{2r+4}} \binom{-s-d+3}{2r+4} - \ldots$$
$$\ldots - \begin{cases} 2A_0\mathrm{i} \sin \pi x \cdot \dfrac{1}{2^{d+2r+1}} \dbinom{-s}{d+2r+1} \text{ (pro lichá } d\text{)}; \\ A_0 \cos \pi x \cdot \dfrac{1}{2^{d+2r}} \dbinom{-s}{d+2r+1} \text{ (pro sudá } d\text{)}; \end{cases} \tag{11}$$

$$\alpha_{d+2r+2} = b_{d+2r+2} - 2A_d\mathrm{i} \sin \pi x \cdot \frac{1}{2^{2r+2}} \binom{-s-d}{2r+2} -$$
$$- A_{d-1} \cos \pi x \cdot \frac{1}{2^{2r+2}} \binom{-s-d+1}{2r+3} - 2A_{d-2}\mathrm{i} \sin \pi x \cdot \frac{1}{2^{2r+4}} \binom{-s-d+2}{2r+4} -$$
$$- A_{d-3} \cos \pi x \cdot \frac{1}{2^{2r+4}} \binom{-s-d+3}{2r+5} - \ldots$$
$$\ldots - \begin{cases} A_0 \cos \pi x \cdot \dfrac{1}{2^{d+2r+1}} \dbinom{-s}{d+2r+2} \text{ (pro lichá } d\text{)}. \\ 2A_0\mathrm{i} \sin \pi x \cdot \dfrac{1}{2^{d+2r+2}} \dbinom{-s}{d+2r+2} \text{ (pro sudá } d\text{)}. \end{cases} \tag{11a}$$

Z rovnice (10) plyne

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2k\pi x\mathrm{i}}}{f(k)} = \mathrm{e}^{(2k_0-1)\pi x\mathrm{i}} \left[\frac{A_0}{(k_0 - \frac{1}{2})^s} + \frac{A_1}{(k_0 - \frac{1}{2})^{s+1}} + \ldots + \frac{A_d}{(k_0 - \frac{1}{2})^{s+d}}\right] + R;$$

$$R = \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{d+1}}{k^{s+d+1}} + \frac{\alpha_{d+2}}{k^{s+d+2}} + \ldots\right). \tag{12}$$

Pro $\alpha + d > 1$ obdržíme obdobně jako v § 1 následující odhad zbytku R:

$$|R| < \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{|k^{s+d+1}|} \left(\frac{|b_{d+1}|}{1-\sigma} + \frac{1}{1-\omega_{d,1}} \left\{ |A_d| \left[|s+d| + \frac{1}{2k_0} \left| \binom{-s-d}{2} \right| \right] + \right.\right.$$
$$+ \frac{1}{2} |A_{d-1}| \left[\left| \binom{-s-d+1}{2} \right| + \frac{1}{2k_0} \left| \binom{-s-d+1}{3} \right| \right] + \dots$$
$$+ \frac{1}{2^{d-\nu}} |A_\nu| \left[\left| \binom{-s-\nu}{d-\nu+1} \right| + \frac{1}{2k_0} \left| \binom{-s-\nu}{d-\nu+2} \right| \right] + \dots$$
$$\left.\left. \dots + \frac{1}{2^d} |A_0| \left[\left| \binom{-s}{d+1} \right| + \frac{1}{2k_0} \left| \binom{-s}{d+2} \right| \right] \right\} \right). \tag{13}$$

Oddělíme-li ve (12) část reálnou a imaginární, obdržíme vzorce pro součty řad

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{f(k)} \quad \text{a} \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{f(k)} .$$

3. Příklady.

1. *Výpočet funkce* $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, *kde* $s = \alpha + i\beta$ ($\alpha > 1$, β reálné).

Podle (3) obdržíme

$$k^{-s} = A_{-1} [(k - \tfrac{1}{2})^{-s+1} - (k + \tfrac{1}{2})^{-s+1}] + A_0[(k - \tfrac{1}{2})^{-s} - (k + \tfrac{1}{2})^{-s}] + \dots$$
$$\dots + A_\nu[(k - \tfrac{1}{2})^{-s-\nu} - (k + \tfrac{1}{2})^{-s-\nu}] + \dots$$
$$\dots + A_d[(k - \tfrac{1}{2})^{-s-d} - (k + \tfrac{1}{2})^{-s-d}] + \varphi(k) ;$$
$$\varphi(k) = \alpha_{d+2} k^{-s-d-2} + \alpha_{d+3} k^{-s-d-3} + \alpha_{d+4} k^{-s-d-4} + \dots .$$

Srovnáním koeficientů dostaneme pro lichá d:

$$A_{2r} = 0 \left(r = 0, 1, \dots, \frac{d-1}{2} \right); \quad \alpha_{d+2r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots) ;$$

$$A_{-1} = \frac{1}{s-1} ; \quad A_1 = -\frac{s}{24} ; \quad A_3 = \frac{7}{3 \,.\, 5 \,.\, 2^6} \binom{s+2}{3} = \binom{s+2}{3} 7{,}29 \,.\, 10^{-3} ;$$

$$A_5 = -\frac{31}{2^7 \,.\, 3^2 \,.\, 7} \binom{s+4}{5} = -\binom{s+4}{5} 3{,}85 \,.\, 10^{-3} ;$$

$$A_7 = \binom{s+6}{7} \frac{127}{3 \,.\, 5 \,.\, 2^{11}} = \binom{s+6}{7} 4{,}14 \,.\, 10^{-3} ;$$

$$A_9 = -\binom{s+8}{9} \frac{7 \,.\, 73}{3 \,.\, 11 \,.\, 2^{11}} = -\binom{s+8}{9} 7{,}55 \,.\, 10^{-3} ;$$

$$A_{11} = \frac{1\,414\,477}{5 \,.\, 7 \,.\, 13 \,.\, 3^3 \,.\, 2^{14}} \binom{s+10}{11} = \binom{s+10}{11} 2{,}10 \,.\, 10^{-2} ;$$

$$A_{13} = -\binom{s+12}{13} \frac{8191}{3 \,.\, 2^{15}} = -\binom{s+12}{13} 8{,}33 \,.\, 10^{-2} ;$$

$$A_{15} = \binom{s+14}{15} \frac{118\ 518\ 239}{3\,.\,5\,.\,17\,.\,2^{20}} = \binom{s+14}{15} 4{,}43\,.\,10^{-1}\,;$$

$$A_{17} = -\binom{s+16}{17} \frac{5\ 749\ 691\ 557}{7\,.\,19\,.\,3^3\,.\,2^{19}} = -\binom{s+16}{17} 3{,}054\,; \text{ atd.}$$

Z (5) plyne pro výpočet $\zeta(2)$:

$$\sum_{k=20}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{19{,}5} - \frac{1}{12\,.\,19{,}5^3} + \frac{7}{3\,.\,5\,.\,2^4\,.\,19{,}5^5} - \frac{31}{3\,.\,7\,.\,2^6\,.\,19{,}5^7} +$$
$$+ \frac{127}{3\,.\,5\,.\,2^8\,.\,19{,}5^9} - \frac{5\,.\,7\,.\,73}{3\,.\,11\,.\,2^{10}\,.\,19{,}5^{11}} + \frac{1\ 414\ 477}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,13\,.\,2^{12}\,.\,19{,}5^{13}} -$$
$$- \frac{7\,.\,8191}{3\,.\,2^{14}\,.\,19{,}5^{15}} + \frac{118\ 518\ 239}{3\,.\,5\,.\,17\,.\,2^{16}\,.\,19{,}5^{17}} - \frac{5\ 749\ 691\ 557}{3\,.\,7\,.\,19\,.\,2^{18}\,.\,19{,}5^{19}} + R\,.$$

Podle (9) je

$$R| < \sum_{k=20}^{\infty} \frac{1}{k^{22}} \Bigg[|A_{17}|\,.\,\left|\binom{-19}{3}\right| \frac{1}{2^2} + |A_{15}|\,.\,\left|\binom{-17}{5}\right| \frac{1}{2^4} + |A_{13}|\,.\,\left|\binom{-15}{7}\right| \frac{1}{2^6} +$$
$$+ |A_{11}|\,.\,\left|\binom{-13}{9}\right| \frac{1}{2^8} + |A_9|\,.\,\left|\binom{-11}{11}\right| \frac{1}{2^{10}} + |A_7| \left|\binom{-9}{13}\right| \frac{1}{2^{12}} + |A_5|\,.\,\left|\binom{-7}{15}\right| \frac{1}{2^{14}} +$$
$$+ |A_3| \left|\binom{-5}{17}\right| \frac{1}{2^{16}} + |A_1| \left|\binom{-3}{19}\right| \frac{1}{2^{18}} + |A_{-1}| \left|\binom{-1}{21}\right| \frac{1}{2^{20}} \Bigg] 1{,}02 <$$
$$< 2{,}6\,.\,10^4 \sum_{k=20}^{\infty} \frac{1}{k^{22}} < 2{,}6\,.\,10^4\,.\,3{,}8\,.\,10^{-29} < 1\,.\,10^{-24}\,.$$

$$\sum_{k=1}^{19} \frac{1}{k^2} = 1{,}593\ 663\ 243\ 913\ 023\ 316\ 640\ 878\ 87\ldots\,;$$

$$\frac{1}{19{,}5} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{19{,}5^3} + \frac{7}{3\,.\,5\,.\,2^4\,.\,19{,}5^5} - \frac{31}{3\,.\,7\,.\,2^6\,.\,19{,}5^7} + \frac{127}{3\,.\,5\,.\,2^8\,.\,19{,}5^9} -$$
$$- \frac{5\,.\,7\,.\,73}{3\,.\,11\,.\,2^{10}\,.\,19{,}5^{11}} + \frac{1\ 414\ 477}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,13\,.\,2^{12}\,.\,19{,}5^{13}} =$$
$$= 0{,}051\ 270\ 822\ 935\ 203\ 119\ 882\ 765\ 21\,;$$

$$- \frac{7\,.\,8191}{3\,.\,2^{14}\,.\,19{,}5^{15}} + \frac{118\ 518\ 239}{3\,.\,5\,.\,17\,.\,2^{16}\,.\,19{,}5^{17}} - \frac{5\ 749\ 691\ 557}{3\,.\,7\,.\,19\,.\,2^{18}\,.\,19{,}5^{19}} =$$
$$= -\,5{,}122\ 934\,.\,10^{-20}\,.$$

Tedy $\zeta\ (2) = 1{,}644\ 934\ 066\ 848\ 226\ 436\ 472\ 414\ 74\ldots + R$; $|R| < 1\,.\,10^{-24}$. Správná hodnota $\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2 = 1{,}644\ 934\ 066\ 848\ 226\ 436\ 472\ 415\ 17\ldots$; tedy $R \doteq 4{,}3\,.\,10^{-25}$.

2. *Výpočet* $\sum\limits_{k=10}^{n} \sqrt{4k^4 - k^2 + 1}$.

Protože platí $\alpha + d + 2 > 1$, lze použít rovnice (4) a také odhadu z § **1**. Z rov. (3) dostaneme

$$\sqrt{4k^4 - k^2 + 1} = 2k^2 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{15}{64}k^{-2} + \tfrac{15}{512}k^{-4} - 1{,}0071 \,.\, 10^{-2}k^{-6} -$$
$$- 4{,}69 \,.\, 10^{-3}k^{-8} + 3{,}79 \,.\, 10^{-4}k^{-10} + 7{,}45 \,.\, 10^{-4}k^{-12} + 9{,}2 \,.\, 10^{-5}k^{-14} + \ldots =$$
$$= A_{-1}[(k - \tfrac{1}{2})^3 - (k + \tfrac{1}{2})^3] + A_1[(k - \tfrac{1}{2}) - (k + \tfrac{1}{2})] +$$
$$+ A_3\left[\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}\right] + A_5\left[\frac{1}{(k - \frac{1}{2})^3} - \frac{1}{(k + \frac{1}{2})^3}\right] + \varphi(k)\,.$$

V tomto případě pišme $\varphi(k)$ ve tvaru

$$\varphi(k) = \frac{M_8 + M_{10}k^{-2} + M_{12}k^{-4} + \ldots}{(k^2 - \frac{1}{4})^3}.$$

$$A_0 = A_2 = \ldots = A_{2r} = 0 \;\; (r = 0, 1, 2, \ldots);\; M_7 = M_9 = \ldots$$
$$\ldots = M_{2r+1} = 0\,;\; (r = 3, 4, \ldots)\,.$$

Vynásobíme-li hořejší rovnici $(k^2 - \frac{1}{4})^3$, dostaneme

$$2k^8 - \tfrac{7}{4}k^6 + \tfrac{51}{64}k^4 - \tfrac{115}{512}k^2 + 1{,}5808 \,.\, 10^{-2} + 4{,}69 \,.\, 10^{-3}k^{-2} + 1{,}55 \,.\, 10^{-3}k^{-4} -$$
$$- 2{,}61 \,.\, 10^{-4}k^{-6} - 3{,}23 \,.\, 10^{-4}k^{-8} + \ldots = - [A_{-1}(3k^2 + \tfrac{1}{4}) + A_1](k^2 - \tfrac{1}{4})^3 +$$
$$+ A_3(k^2 - \tfrac{1}{4})^2 + A_5(3k^2 + \tfrac{1}{4}) + M_8 + M_{10}k^{-2} + M_{12}k^{-4} + \ldots\,.$$

Srovnáním koeficientů vypočteme:

$$A_{-1} = - \tfrac{2}{3},\; A_1 = \tfrac{5}{12},\; A_3 = \tfrac{15}{64},\; A_5 = - \tfrac{5}{512},\; M_8 = - 3{,}05 \,.\, 10^{-4}\,,$$
$$M_{10} = 4{,}69 \,.\, 10^{-3},\; M_{12} = 1{,}55 \,.\, 10^{-3},\; M_{14} = -2{,}61 \,.\, 10^{-4},\; M_{16} = -3{,}23 \,.\, 10^{-4}, \ldots$$

Tedy podle (4)

$$\sum_{k=10}^{n} \sqrt{4k^4 - k^2 + 1} = - \tfrac{2}{3}[9{,}5^3 - (n + \tfrac{1}{2})^3] + \tfrac{5}{12}[9{,}5 - (n + \tfrac{1}{2})] +$$
$$+ \frac{15}{64}\left[\frac{1}{9{,}5} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right] - \frac{5}{512}\left[\frac{1}{9{,}5^3} - \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^3}\right] + R$$

$$|R| < \sum_{k=10}^{n} \frac{|- 3{,}05 \,.\, 10^{-4} + 4{,}69 \,.\, 10^{-3}k^{-2} + \ldots|}{(k^2 - \frac{1}{4})^3} < 4 \,.\, 10^{-4} \sum_{k=10}^{n} \frac{1}{(k^2 - \frac{1}{4})^3} <$$
$$< 4 \,.\, 10^{-4} \,.\, 1{,}01 \sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k^6} < 4 \,.\, 10^{-4} \,.\, 1{,}01 \,.\, 2{,}6 \,.\, 10^{-6} < 1{,}1 \,.\, 10^{-9}\,.\text{*)}$$

3. *Výpočet* $\displaystyle\sum_{k=20}^{\infty} \frac{\cos\frac{k\pi}{3}}{\sqrt{4k^4 - k^2 + 1}}$ a $\displaystyle\sum_{k=20}^{\infty} \frac{\sin\frac{k\pi}{3}}{\sqrt{4k^4 - k^2 + 1}}$.

Nejprve vypočteme $\displaystyle\sum_{k=20}^{\infty} \frac{e^{\frac{k\pi i}{3}}}{\sqrt{4k^4 - k^2 + 1}}$. Z rovnice (10) plyne:

$$\frac{1}{2}k^{-2} + \frac{1}{16}k^{-4} - \frac{13}{256}k^{-6} - 2{,}10 \,.\, 10^{-2}k^{-8} + 4{,}93 \,.\, 10^{-3}k^{-10} + 5{,}31 \,.\, 10^{-3}k^{-12} +$$
$$+ 7{,}1 \,.\, 10^{-4}k^{-14} - 1{,}03 \,.\, 10^{-3}k^{-16} - 3{,}5 \,.\, 10^{-4}k^{-18} + \ldots =$$

---

*) Z vlastností koeficientů rozvoje $(k^2 - \frac{1}{4})^3\sqrt{4k^4 - k^2 + 1}$ plyne totiž pro $k \geqq 10$, že $|- 3{,}05 \,.\, 10^{-4} + 4{,}69 \,.\, 10^{-3}k^{-2} + 1{,}55 \,.\, 10^{-3}k^{-4} \ldots| < 3{,}05 \,.\, 10^{-4} - 4{,}69 \,.\, 10^{-3}k^{-2} + (10^{-4} + 10^{-6} + 10^{-8} + \ldots) < 4 \,.\, 10^{-4}$.

$$= -A_0\mathrm{i}\left[k^{-2} + \binom{-2}{2}\frac{1}{2^2}k^{-4} + \binom{-2}{4}\frac{1}{2^4}k^{-6} + \dots\right] -$$
$$- A_0\frac{\sqrt{3}}{2}\left[-2k^{-3} + \binom{-2}{3}\frac{1}{2^2}k^{-5} + \binom{-2}{5}\frac{1}{2^4}k^{-7} + \dots\right] \dots$$
$$\dots - A_\nu\mathrm{i}\left[k^{-2-\nu} + \binom{-2-\nu}{2}\frac{1}{2^2}k^{-4-\nu} + \binom{-2-\nu}{4}\frac{1}{2^4}k^{-6-\nu} + \dots\right] -$$
$$- A_\nu\frac{\sqrt{3}}{2}\left[-(2+\nu)\,k^{-3-\nu} + \binom{-2-\nu}{3}\frac{1}{2^2}k^{-5-\nu} + \right.$$
$$\left. + \binom{-2-\nu}{5}\frac{1}{2^4}k^{-7-\nu} + \dots\right] - \dots + \varphi(k)\,.$$
$$A_0 = \frac{\mathrm{i}}{2},\quad A_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad A_2 = -\frac{41\mathrm{i}}{16},\quad A_3 = -\frac{45}{8}\sqrt{3}\,.$$

Z rovnice (12) vypočteme:

$$\sum_{k=20}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{k\pi\mathrm{i}}{3}}}{\sqrt{4k^4 - k^2 + 1}} =$$
$$= \mathrm{e}^{\frac{13}{2}\pi\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{2}{39}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{39}\right)^3 - \frac{41\mathrm{i}}{16}\left(\frac{2}{39}\right)^4 - \frac{45\sqrt{3}}{8}\left(\frac{2}{39}\right)^5\right] + R\,. \qquad \text{(a)}$$

Ze vzorce (13) odhadneme zbytek R:

$$|R| < \sum_{k=20}^{\infty}\frac{1}{k^6}\,1{,}01\left[\frac{13}{256} + \frac{45\,.\,\sqrt{3}\,.\,5\,.\,1{,}08}{8} + \frac{1}{2}\,\frac{41}{16}\,.\,10\,.\,1{,}05 + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{5}{2}\,1{,}04 + \frac{5}{2}\,.\,\frac{1{,}03}{2^3}\right] < 69{,}4\sum_{k=20}^{\infty}\frac{1}{k^6} < 69{,}4\,.\,7{,}46\,.\,10^{-8} < 5{,}2\,.\,10^{-6}\,.$$

Oddělíme-li v (a) část reálnou a imaginární, obdržíme:

$$\sum_{k=20}^{\infty}\frac{\cos\frac{k\pi}{3}}{\sqrt{4k^4 - k^2 + 1}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{39}\right)^2 + \frac{41}{16}\left(\frac{2}{39}\right)^4 + R_1 =$$
$$= -0{,}001\,30 + R_1\,,\ |R_1| < |R| < 5{,}2\,.\,10^{-6};$$
$$\sum_{k=20}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{3}}{\sqrt{4k^4 - k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{39}\right)^3 - \frac{45\sqrt{3}}{8}\left(\frac{2}{39}\right)^5 + R_2 =$$
$$= 0{,}000\,11 + R_2\,,\ |R_2| < |R| < 5{,}2\,.\,10^{-6}\,.$$

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O PROJEKTIVNÍM ZOBECNĚNÍ CHORDÁLY

JAN SCHUSTER, Praha.

(Došlo dne 26. října 1953.)

DT : 513.611

V článku je ukázáno projektivní zobecnění metrického pojmu chordály a některé jeho důsledky.

1. Systém reálných kuželoseček, které mají dva různé (reálné nebo imaginární) body společné anebo které se v jednom společném bodě navzájem dotýkají, označme Σ. Zvolme dále souřadnicovou soustavu pro homogenní souřadnice x, y, z tak, aby společné body resp. společný bod kuželoseček systému Σ byly na přímce $z = 0$ dány anulovanou kvadratickou formou (s nenulovým diskriminantem)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0\,, \tag{1}$$

resp. aby společná tečna a společný bod kuželoseček systému Σ byla přímka $z = 0$ s tím svým bodem, který je na ní dán rovnicí (1), v níž forma na levé straně má nulový diskriminant. A, B, C jsou konstanty nikoli všecky nulové.

Libovolná kuželosečka systému Σ, která se nerozpadá tak, aby jako součást obsahovala přímku $z = 0$, pak je:

$$2Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2ayz + 2bxz + pz^2 = 0\,;$$

a, b, p jsou parametry této kuželosečky v systému Σ.

Budeme vyšetřovat, jak je třeba volit bod $S(x_0, y_0, z_0)$, aby jeho poláry q_k $(k = 1, 2)$ vzhledem ke dvěma různým pravým kuželosečkám l_k o rovnicích

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2a_kyz + 2b_kxz + p_kz^2 = 0\,, \quad k = 1, 2\,, \tag{2}$$

protínaly tyto kuželosečky v bodech, jež leží opět na kuželosečce ze systému Σ. Kuželosečka $l_k (k = 1, 2)$ a degenerovaná kuželosečka složená z přímky $z = 0$ a poláry q_k určují svazek, který označme σ_k. Výše zmíněný požadavek je pak splněn tehdy a jen tehdy, když svazky σ_1 a σ_2 mají společnou kuželosečku. Svazek σ_k $(k = 1, 2)$ má rovnici

$$\begin{gathered}\varphi_k(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2a_kyz + 2b_kxz + p_kz^2) + \\ + \psi_k\{(Ax_0 + By_0 + l_kz_0)\,x + (Bx_0 + Cy_0 + a_kz_0)\,y + \\ + (b_kx_0 + a_ky_0 + p_kz_0)\,z\}\,z = 0\,, \quad k = 1, 2\,.\end{gathered}$$

Svazky σ_1 a σ_2 mají tedy společnou kuželosečku tehdy a jen tehdy, když $\varphi_1 = \varphi_2$ (v dalším klademe $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$) a ještě

$$\left.\begin{aligned} 2(a_1 - a_2)\,\varphi + (Bx_0 + Cy_0 + a_1z_0)\,\psi_1 - (Bx_0 + Cy_0 + a_2z_0)\,\psi_2 = 0\,, \\ 2(b_1 - b_2)\,\varphi + (Ax_0 + By_0 + l_1z_0)\,\psi_1 - (Ax_0 + By_0 + l_2z_0)\,\psi_2 = 0\,, \\ (p_1 - p_2)\varphi + (l_1x_0 + a_1y_0 + p_1z_0)\,\psi_1 - (l_2x_0 + a_2y_0 + p_2z_0)\,\psi_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Eliminací φ, ψ_1 a ψ_2 z těchto rovnic dostaneme po jednoduchých úpravách

$$\begin{aligned} &\{2(b_2 - b_1)\,x_0 + 2(a_2 - a_1)\,y_0 + (p_2 - p_1)\,z_0\}\,. \\ &.\,\{(\overline{a_2 - a_1}A - \overline{b_2 - b_1}B)\,x_0 + (\overline{a_2 - a_1}B - \overline{b_2 - b_1}C)\,y_0 + \\ &+ (a_2b_1 - a_1b_2)\,z_0\} = 0\,. \end{aligned}$$

Geometrické místo bodu S je tedy dáno takto (indexy 0 vynecháme):

$$2(b_2 - b_1)\,x + 2(a_2 - a_1)\,y + (p_2 - p_1)\,z = 0 \qquad (5)$$

a

$$(\overline{a_2 - a_1}A - \overline{b_2 - b_1}B)\,x + (\overline{a_2 - a_1}B - \overline{b_2 - b_1}C)\,y + (a_2b_1 - a_1b_2)\,z = 0\,.$$

Přímka (5) spolu s přímkou $z = 0$ dává zřejmě degenerovanou kuželosečku ve svazku kuželoseček, určenou kuželosečkami l_1 a l_2. Přímka (5) splývá s přímkou $z = 0$ tehdy a jen tehdy, když

$$a_1 = a_2\,, \quad b_1 = b_2\,.$$

Geometrický význam těchto relací je zřejmý z rovnic (2).

Přímku (5), která je částí geometrického místa bodu S, nazveme *projektivní chordálou kuželoseček* l_1 a l_2.

Budiž $S(x_0, y_0, z_0)$ libovolný její bod. Rovnice (4) mají pak právě jen tato řešení ve φ, ψ_1, ψ_2:

$$\varphi : \psi_1 : \psi_2 = -z_0 : 2 : 2\,. \qquad (6)$$

Dosazením do (3) za φ_1 a ψ_1 anebo za φ_2 a ψ_2, při čemž $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, dostaneme pak rovnici kuželosečky ze systému Σ, která jde průsečíky kuželoseček l_1 a l_2 s polárami q_1 a q_2 bodu S vzhledem k těmto kuželosečkám. Tedy na př.:

$$\left.\begin{aligned} z_0(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) - 2x_0(Ax + By)\,z - 2y_0(Bx + Cy)\,z - \\ - (2b_1x_0 + 2a_1y_0 + p_1z_0)\,z^2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

2. Připojme ke kuželosečkám (2) ještě pravou kuželosečku l_3 ze systému Σ o rovnici

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2a_3yz + 2b_3xz + p_3z^2 = 0\,.$$

Nechť kuželosečka l_3 nesplývá s žádnou z kuželoseček l_1, l_2. Kuželosečky l_1 a l_2 resp. l_2 a l_3 resp. l_3 a l_1 mají pak projektivní chordály o rovnicích

$$\left.\begin{aligned} 2(b_2 - b_1)\,x + 2(a_2 - a_1)\,y + (p_2 - p_1)\,z = 0\,, \\ 2(b_3 - b_2)\,x + 2(a_3 - a_2)\,y + (p_3 - p_2)\,z = 0\,, \\ 2(b_1 - b_3)\,x + 2(a_1 - a_3)\,y + (p_1 - p_3)\,z = 0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

a tedy nesplývají-li, procházejí jedním bodem, jehož souřadnice jsou:

$$x_0 : y_0 : z_0 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & p_1 \\ 1 & a_2 & p_2 \\ 1 & a_3 & p_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & p_1 & b_1 \\ 1 & p_2 & b_2 \\ 1 & p_3 & b_3 \end{vmatrix} : 2 \begin{vmatrix} 1 & b_1 & a_1 \\ 1 & b_2 & a_2 \\ 1 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} .$$

Poláry tohoto bodu vzhledem ke kuželosečkám l_1, l_2, l_3 je protínají v bodech, které leží na této kuželosečce systému Σ:

$$\begin{vmatrix} Ax^2 + 2Bxy + Cy , & -(Ax + By)\,z , & -(Bx + Cy)\,z , & z^2 \\ p_1 & b_1 & a_1 & 1 \\ p_2 & b_2 & a_2 & 1 \\ p_3 & b_3 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

K této její rovnici dospějeme nejsnáze tak, že z rovnice (7), (8_1), (8_3) a z identity

$$p_1 z_0 + 2b_1 x_0 + 2a_1 y_0 - (2b_1 x_0 + 2a_1 y_0 + p_1 z_0) = 0$$

eliminujeme x_0, y_0, z_0.

3. Vyšetřujme teď projektivní chordály takových pravých kuželoseček našeho systému Σ, které se dotýkají daných dvou různých přímek r a t. Zvolme za tyto přímky přímky

$$x = 0 \quad \text{a} \quad y = 0 .$$

Kuželosečka svazku Σ se dotýká těchto přímek tehdy a jen tehdy, když je současně

$$a^2 - Cp = 0 , \quad b^2 - Ap = 0 ,$$

čili

$$a = \varepsilon_1 \sqrt{Cp} , \quad b = \varepsilon_2 \sqrt{Ap} ,$$

kde $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Konstanty A, C musí tedy nutně být téhož znaménka. Geometrický význam toho je jasný.

Libovolné dvě různé pravé kuželosečky l_1 a l_2 systému Σ, které se dotýkají zvolených přímek r a t, mají tedy rovnice:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2\varepsilon_1 \sqrt{Cp_1} yz + 2\varepsilon_2 \sqrt{Ap_1} xz + p_1 z^2 = 0 ,$$
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2\varepsilon_1 \sqrt{Cp_2} yz + 2\varepsilon_2 \sqrt{Ap_2} xz + p_2 z^2 = 0 ;$$

pro parametry p_1 a p_2 platí:

$$\left. \begin{array}{c} \operatorname{sgn} p_1 = \operatorname{sgn} p_2 = \operatorname{sgn} A = \operatorname{sgn} B , \\ p_1 \neq p_2 . \end{array} \right\} \qquad (9)$$

Projektivní chordála těchto kuželoseček je tedy

$$2\varepsilon_2 \sqrt{|A|}\, x + 2\varepsilon_1 \sqrt{|C|}\, y + \sigma(\sqrt{|p_1|} + \sqrt{|p_2|})\, z = 0 ,$$

kde $\sigma = \operatorname{sgn} p_1$. Pro libovolné hodnoty parametrů p_1, p_2 omezené podmínkami (9), jde tato chordála vždy bodem

$$(\varepsilon_1\sqrt{|C|},\ -\varepsilon_2\sqrt{|A|},\ 0)\,,$$

který leží na přímce $z = 0$.

Tato vlastnost je projektivním zobecněním známé věty, že chordály kružnic, dotýkajících se dvou přímek, tvoří osnovy přímek.

Analogické úvahy by bylo možno provést i v prostorech o vyšším počtu dimensí. Tak na př. v trojrozměrném prostoru bychom za jejich základ vzali systém kvadrik, které procházejí pevnou kuželosečkou, a pod. Příslušné definice a výpočty by pak byly zcela analogické těm, které jsme udělali v tomto článku.

RELÁCIE KONGRUENTNOSTI A SLABÁ PROJEKTÍVNOSŤ VO SVÄZOCH

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Došlo dne 31. května 1954.)

DT : 519.4

V práci je definovaný pojem slabej projektívnosti intervalov vo sväze. Vyšetruje sa, ako navzájom súvisia relácie kongruentnosti na diskrétnom sväze a relácie slabej projektívnosti intervalov tohoto sväzu.

Medzi najdôležitejšie pojmy, používané v teorii sväzov, patrí pojem projektívnych intervalov. Umožňuje prehľadne formulovať dôležité výsledky, platné pre niektoré druhy sväzov (napr. pre modulárne sväzy).

Pojem projektívnosti intervalov môžeme zovšeobecniť takto: nech $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sú intervaly sväzu S, nech interval i_k je obsažený ako (vlastná alebo nevlastná) podmnožina v istom intervale i'_k, transponovanom k intervalu i_{k-1} ($k = 2, \ldots, n$). V takomto prípade budeme hovoriť, že interval i_1 je slabo projektívny s intervalom i_n. Cieľom nasledujúcich poznámok je vyšetriť, ako súvisia relácie kongruentnosti na sväze S s reláciami slabej projektívnosti intervalov sväzu S.

L'ahko sa zistí správnosť tvrdenia: ak interval $\langle x, y\rangle$ je slabo projektívny s intervalom $\langle u, v\rangle$, potom pre každú reláciu kongruentnosti R na S platí

$$x \equiv y(R) \Rightarrow u \equiv v(R) .$$

Otázka je, do akej miery platí obrátené tvrdenie. Podrobnejšie: či dostaneme reláciu kongruentnosti na S, ak anulujeme všetky intervaly, ktoré sú slabo projektívne ku zvolenému intervalu $\langle x, y\rangle$.

V odseku 1 budeme vyšetrovať obecné sväzy. Dokážeme, že odpoveď na položenú otázku (pri istom spresnení formulácie) je kladná. V odsekoch 2 a 3 sa vyšetrujú diskrétne sväzy. V odseku 2 je pre ne dokázané zovšeobecnenie vety, ktorú odvodil M. FUNAYAMA v práci [2] pre sväzy konečnej dlžky (viď 1, problém 67).

Označme znakom $\bar{S}$ sväz všetkých vytvorujúcich rozkladov na S. V odseku 3 sú vyjadrené niektoré vlastnosti sväzu $\bar{S}$ pomocou relácie slabej projektívnosti intervalov sväzu S. Jeden z výsledkov znie takto:

Nech S je diskrétny sväz. Sväz $\bar{S}$ je Booleovou algebrou vtedy a len vtedy, keď relácia slabej projektívnosti prvointervalov sväzu S je symetrická (viď [1], problém 72).

Pre úplnosť pripomeňme nasledujúce známe definície (znak S označuje uvažovaný sväz, $a, b, x, y, u, v, \ldots$ sú prvky sväzu S):

Definícia 1. *a) Nech $a \leq b$. Množinu všetkých prvkov $x \in S$, vyhovujúcich nerovnosti $a \leq x \leq b$, budeme nazývať intervalom a označovať $\langle a, b \rangle$. Ak interval $\langle a, b \rangle$ obsahuje len prvky a, b, $a \neq b$ nazývame ho prvointervalom.*

b) Intervaly $\langle x, y \rangle$, $\langle u, v \rangle$ sú transponované, ak platí alebo $y \cap u = x, y \cup u = v$, alebo $x \cap v = u$, $x \cup v = y$.

c) Intervaly i, i' sú projektívne, ak existujú intervaly $i_0 = i, i_1, i_2, \ldots, i_n = i'$ také, že intervaly i_{k-1}, i_k sú transponované $(k = 1, \ldots, n)$.

d) Binárna reflexívna, symetrická a tranzitívna relácia R na S je reláciou kongruentnosti na S, ak

$$c \in S,\ x \equiv y(R) \Rightarrow x \cap c \equiv y \cap c(R),\ x \cup c \equiv y \cup c(R)\,.$$

Každá relácia kongruentnosti na S určuje istý rozklad množiny S; tento rozklad budeme nazývať vytvorujúcim rozkladom a označovať rovnakým písmenom ako príslušnú reláciu kongruentnosti. Budeme hovoriť, že interval $\langle a, b \rangle$ sa anuluje vo vytvorujúcom rozklade R, ak platí $a \equiv b(R)$.

e) Podmnožinu sväzu S uvažujeme vždy s rovnakým čiastočným usporiadaním ako v S. Ak $r \subset S$ a ak r je usporiadaná množina, nazývame r reťazcom. Ak reťazec r je konečný, nazývame dĺžkou reťazca r počet jeho prvkov zmenšený o 1. Dĺžku reťazca r budeme označovať $d(r)$. Hovoríme, že sväz S je konečnej dĺžky, ak existuje také číslo n $(n = 0,1,2,\ldots)$, že platí: vo sväze S existuje aspoň jeden reťazec dĺžky n a neexistuje žiaden reťazec dĺžky $n + 1$.

f) Hovoríme, že sväz S je diskrétny, ak každý reťazec, majúci najmenší a najväčší prvok, je konečný.

Poznámka. Zrejme každý konečný sväz je konečnej dĺžky; sväz konečnej dĺžky nemusí byť konečný. Sväz konečnej dĺžky má najmenší a najväčší prvok a je diskrétny. Každý interval diskrétneho sväzu je konečnej dĺžky.

1.

Definícia 2. *Budeme hovoriť že interval i je slabo projektívny s intervalom i', ak existujú intervaly $i_0, i_1, \ldots i_n$, $i_0 = i$, $i_n = i'$ také, že interval i_k je obsažený v istom intervale i'_k, transponovanom k intervalu i_{k-1} $(k = 1, \ldots, n)$. Uvedený vzťah budeme označovať $i \succeq i'$.*

Zrejme platí

Lemma 1. $i \succeq i'$, $i' \succeq i'' \Rightarrow i \succeq i''$.

Lemma 2. *Nech* $i \succeq \langle x, y\rangle$, $c \in S$. *Potom platí tiež* $i \succeq \langle x \cup c, y \cup c\rangle$, $i \succeq$ $\succeq \langle x \cap c, y \cap c\rangle$.

Dôkaz. Označme $\langle x \cup c, y \cup c\rangle = i''$, $y \cap (x \cup c) = z$. Zrejme platí $x \leq$ $\leq z \leq y$, teda $i \succeq \langle z, y\rangle$. Keďže interval i'' je transponovaný s intervalom $\langle z, y\rangle$, platí $\langle z, y\rangle \succeq i''$, tedy $i \succeq i''$. Tvrdenie pre $\langle x \cap c, y \cap c\rangle$ sa dokáže duálne.

Definícia 3. *Nech* $\mathfrak{A}$ *je nejaká neprázdna množina intervalov sväzu* S. *Nech* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in S$, $x_0 = x$, $x_n = y$, *nech sú prvky* x_{k-1}, x_k *zrovnateľné; príslušný interval označme* i_k $(k = 1, \ldots, n)$. *Predpokladajme, že ku každému* i_k *existuje interval* $i'_k \in \mathfrak{A}$ *taký, že platí* $i'_k \succeq i_k$. *Usporiadanú množinu intervalov* $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ *budeme volať čiarou typu* $\mathfrak{A}$, *spojujúcou prvky* x, y. *Budeme písať* $x \equiv y(R(\mathfrak{A}))$, *ak existuje čiara typu* $\mathfrak{A}$, *spojujúca prvky* x, y.

Lemma 3. *Nech existuje čiara typu* $\mathfrak{A}$, *spojujúca* x, y. *Potom existuje tiež čiara typu* $\mathfrak{A}$, *spojujúca prvky* $x \cap c$, $y \cap c$, *resp.* $x \cup c$, $y \cup c$.

Dôkaz. Nech $C = \{i_1, \ldots, i_n\}$ je čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca prvky x, y, nech interval i_k je ohraničený prvkami x_{k-1}, x_k $(x_0 = x, x_n = y)$, nech $i'_k \in \mathfrak{A}$ je príslušný interval, pre ktorý platí $i'_k \succeq i_k$. Zostrojme intervaly i''_k, ohraničené prvkami $y_{k-1} = x_{k-1} \cup c$, $y_k = x_k \cup c$. Podľa lemmy 2 a 1 platí $i'_k \succeq i''_k$. Zrejme je $y_0 = x \cup c$, $y_n = y \cup c$, teda $\{i''_1, \ldots, i''_n\}$ je čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca prvky $x \cup c$, $y \cup c$. Tvrdenie pre prenik sa dokáže duálne.

Poznámka. Nech C je čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca prvky x, y. Čiaru typu $\mathfrak{A}$, spojujúcu prvky $x \cup c$, $y \cup c$, zostrojenú z čiary C ako v predošlom dôkaze, budeme označovať $C \cup c$, analogický význam bude mať $C \cap c$.

Veta 1. *Relácia* $R(\mathfrak{A})$ *je reláciou kongruentnosti na* S.

Dôkaz. Nech $\langle z_1, z_2\rangle \in \mathfrak{A}$. L'ahko sa zistí, že interval $\langle x, x\rangle$ je projektívny s intervalom $\langle z_1, z_1\rangle$, teda $x \equiv x(R(\mathfrak{A}))$. Ďalej, ak $\{i_1, \ldots, i_n\}$ je čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca prvky x, y je zrejme $\{i_n, \ldots, i_1\}$ čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca prvky y, x. Z toho plynie symetričnosť relácie $R(\mathfrak{A})$. Jej tranzitívnosť je zrejmá. Ďalšia časť dôkazu plynie z lemmy 3.

Poznámky. 1. Nech C je čiara typu $\mathfrak{A}$, spojujúca x, y. Bez ujmy všeobecnosti môžeme predpokladať, že všetky intervaly čiary C ležia v intervale $\langle x \cap y, x \cup y\rangle$. (Ak by neležali, zostrojili by sme čiary $C' = C \cup (x \cap y), C'' =$ $= C' \cap (x \cup y)$. Čiara C'' zrejme vyhovuje vysloveným podmienkam).

2. Ľahko sa zistí, že vytvorujúci rozklad $R(\mathfrak{A})$ je najmenší zo všetkých vytvorujúcich rozkladov, v ktorých sa anulujú všetky intervaly množiny $\mathfrak{A}$.

3. Nech $\langle a, b\rangle$ je prvointerval vo sväze S. Zrejme platí $a \equiv b(R(\mathfrak{A}))$ vtedy a len vtedy, keď existuje interval $i \in \mathfrak{A}$, ktorý je slabo projektívny s prvointervalom $\langle a, b\rangle$.

4. Nech R je vytvorujúci rozklad na S, nech $\mathfrak{A}$ je množina všetkých intervalov sväzu S, ktoré sa anulujú v rozklade R. Zrejme platí $R(\mathfrak{A}) = R$.

2.

V tomto odseku budeme predpokladať, že uvažovaný sväz S je diskrétny.

Definícia 4. *Nech $\bar{S}$ je množina všetkých vytvorujúcich rozkladov sväzu S. Ak $R_1, R_2 \in \bar{S}$, položme $R_1 \leq R_2$ vtedy a len vtedy, keď*

$$x \equiv y(R_1) \Rightarrow x \equiv y(R_2) .$$

Definícia 5. *Nech $\mathfrak{S}$ je množina všetkých prvointervalov sväzu S, kvaziusporiadaná pomocou relácie $\succeq$ (viď def. 2). Ak $p \in \mathfrak{S}$, označme znakom $\bar{p}$ množinu všetkých prvkov $p' \in \mathfrak{S}$, pre ktoré platí súčasne $p \succeq p'$, $p' \succeq p$. Množina $\mathfrak{S}$ sa tým rozpadne na dizjunktné triedy; množinu týchto tried označme X. Pre $\bar{p}, \bar{q} \in X$ položme $\bar{p} \geq \bar{q}$ vtedy a len vtedy, keď $p \succeq q$. (Zrejme je potom pre každé $p' \in \bar{p}$, $q' \in \bar{q}$, $p' \succeq q'$. Viď* [1], *hlava I, § 4.)*

Definícia 6. *Nech Y je množina všetkých funkcií, definovaných na množine X, nadobudajúcich len hodnoty 1 alebo 2, pre ktoré platí*

$$\bar{p} \leq \bar{q} \Rightarrow f(\bar{p}) \leq f(\bar{q}) .$$

Ak $f_1, f_2 \in Y$, položíme $f_1 \leq f_2$, ak pre každé $\bar{p} \in X$ platí $f_1(\bar{p}) \leq f_2(\bar{p})$.

Poznámky. 1. V terminológii, používanej v [1], je $Y = 2^X$.

2. Ak $R \in \bar{S}$, $p \in \mathfrak{S}$ a ak sa prvointerval p anuluje v rozklade R, potom sa zrejme každý prvointerval $p' \in \bar{p}$ anuluje v rozklade R. Budeme hovoriť, že prvok $\bar{p} \in X$ sa anuluje v rozklade R.

Veta 2. *Čiastočne usporiadané systémy $\bar{S}$, Y sú duálne izomorfné.*

Dôkaz. Nech $R \in \bar{S}$, nech $\mathfrak{A}$ je množina tých prvkov z množiny X, ktoré sa anulujú v rozklade R. Definujme na X funkciu f takto: ak $\bar{p} \in \mathfrak{A}$, nech $f(\bar{p}) = 1$; ak $\bar{p} \bar{\in} \mathfrak{A}$, nech $f(\bar{p}) = 2$. Ak $\bar{p} \geq \bar{q}$, zrejme platí $f(\bar{p}) = 1 \Rightarrow f(\bar{q}) = 1$, teda $\bar{p} \geq \bar{q} \Rightarrow f(\bar{p}) \geq f(\bar{q})$, t. j. $f \in Y$. Prvku $R \in \bar{S}$ priraďme prvok $f \in Y$ (symbolicky $R \rightarrow f$). Dostávame zobrazenie množiny $\bar{S}$ do množiny Y.

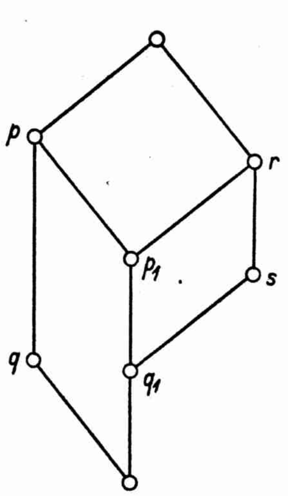
Uvažované zobrazenie je prosté. Nech je totiž $R_1, R_2 \in \bar{S}$, $R_1 \neq R_2$, $R_1 \rightarrow f_1$, $R_2 \rightarrow f_2$. Potom existuje prvointerval p, ktorý sa anuluje v jednom z rozkladov R_1, R_2, a neanuluje sa v druhom z týchto rozkladov. Platí teda $f_1(\bar{p}) \neq f_2(\bar{p})$.

Nech $f \in Y$. Nech $\mathfrak{A}$ je množina tých prvkov $\bar{p} \in X$, pre ktoré platí $f(\bar{p}) = 1$. Nech $\mathfrak{A} = \bigcup_{\bar{p} \in \mathfrak{A}} \bar{p}$. Utvorme vytvorujúci rozklad $R = R(\mathfrak{A})$. (Viď def. 3 a vetu 1.) L'ahko sa zistí, že platí $R \rightarrow f$. Teda uvažované zobrazenie je zobrazením množiny $\bar{S}$ na množinu Y.

Nech $R_1 \leq R_2$, $R_1 \rightarrow f_1$, $R_2 \rightarrow f_2$, $\bar{p} \in X$, $f_1(\bar{p}) = 1$. Teda sa $\bar{p}$ anuluje v rozklade R_1. Zo vzťahu $R_1 \leq R_2$ dostávame, že sa $\bar{p}$ anuluje tiež v rozklade R_2, takže $f_2(\bar{p}) = 1$. Z toho vyplýva, že pre každé $\bar{p} \in X$ platí $f_1(\bar{p}) \geq f_2(\bar{p})$. Tým je tvrdenie vety dokázané.

Poznámky. 1. Predošlá veta zovšeobecňuje výsledok, ktorý dokázal M. Funayama pre sväzy konečnej dĺžky v práci [2]. (Táto práca, vyšlá počas vojny, je pre mňa nedostupná a poznám ju len z referátu v *Mathematical Reviews* a z poznámky v práci [1], str. 205). To, že sa v spomínanej práci vyslovuje (pre sväzy konečnej dĺžky) izomorfismus a nie duálny izomorfizmus sväzov $\bar{S}$, Y, je odôvodnené tým, že autor práce [2] uvažuje pre vytvorujúce rozklady na S čiastočné usporiadanie duálne k tomu, ktoré je zavedené v definícii 4.

2. Ak by sme na množine všetkých prvointervalov sväzu S konečnej dĺžky definovali reláciu $\geq$ položiac (pre prvointervaly $\langle q, p\rangle$, $\langle s, r\rangle$) $\langle q, p\rangle \geq \geq \langle s, r\rangle$ vtedy a len vtedy, keď platí $u \geq r > s \geq v$ pre niektorý interval $\langle v, u\rangle$, projektívny k intervalu $\langle q, p\rangle$, potom by relácia $\geq$ vo všeobecnosti nebola kvaziusporiadaním.



Obr. 1.

Príklad: pri takejto definícii vzťahu $\geq$ platí vo sväze S na obr. 1 $\langle q, p\rangle \geq \langle q_1, p_1\rangle$, $\langle q_1, p_1\rangle \geq \langle s, r\rangle$, neplatí však $\langle q, p\rangle \geq \langle s, r\rangle$. Vzťah $\geq$ je teda nie tranzitívny, takže je nie kvaziusporiadaním. Z toho vyplýva, že úlohu 3, str. 205, [1] by bolo vhodné formulovať presnejšie.

3. Veta 2 všeobecne neplatí pre sväzy, splňujúce podmienku klesajúcich reťazcov. Príklad. Nech $S = \{1, 2, 3, \ldots, \omega\}$, s obvyklým usporiadaním. Podmienka klesajúcich reťazcov je zrejme splnená. Nech $\mathfrak{S}$ je množina prvointer valov sväzu S, nech znaky $\succeq$, X majú rovnaký význam ako v definícii 5. Zrejme v našom prípade platí $p \succeq q$ vtedy a len vtedy, keď $p = q$. Každá trieda $\bar{p} \in X$ obsahuje teda jediný prvok. Z toho plynie, že každá funkcia, definovaná na X, nadobúdajúca len hodnoty 1 alebo 2, patrí do množiny Y. Ľahko sa zistí, že Y je v tomto prípade komplementárny sväz.

Uvažujme rozklad $R = \{\{1, 2, 3, \ldots\}, \{\omega\}\}$ množiny S. Rozklad R je zrejme vytvorujúci na S. Ľahko sa zistí, že tento rozklad nemá komplement v $\bar{S}$.[1]) Teda sväzy $\bar{S}$, Y sú nie duálne izomorfné.

Duálnou úvahou sa zistí, že veta 2 neplatí všeobecne pre sväzy, splňujúce podmienku rastúcich reťazcov.

3.

G. Birkhoff položil problém ([1], problém 72):

Nájsť nutné a postačujúce podmienky pre sväz S, aby jeho vytvorujúce rozklady tvorili Booleovu algebru.

[1]) Ak by totiž R' bol komplement rozkladu R v $\bar{S}$, nemohol by v rozklade R' prvok ω tvoriť osobitnú triedu. Existoval by teda prvok $n \neq \omega$, $n \equiv \omega(R')$. Potom by platilo $n \equiv n + 1(R')$, $n \equiv n + 1(R)$, čo je spor s predpokladom.

V špeciálnom prípade, keď sväz S je diskrétny, môžeme hľadané podmienky vyjadriť jednoduchým spôsobom pomocou pojmu slabej projektívnosti prvointervalov.

Veta 3. *Vytvorujúce rozklady diskrétneho sväzu S tvoria Booleovu algebru vtedy a len vtedy, keď vzťah slabej projektívnosti prvointervalov sväzu S je symetrický.*

Dôkaz. Nech S je diskrétny sväz, nech $\bar{S}$ je sväz vytvorujúcich rozkladov na S (viď def. 4). Sväz $\bar{S}$ je zrejme distributívny a má najmenší a najväčší prvok. Z toho plynie, že nutná a postačujúca podmienka, aby $\bar{S}$ bol Booleovou algebrou je, aby sväz $\bar{S}$ bol komplementárny.

1. Nech sväz $\bar{S}$ je komplementárny. Potom vzťah slabej projektívnosti prvointervalov sväzu S je symetrický.

Dôkaz: Nech p, q sú prvointervaly v S, nech p je slabo projektívny s intervalom q. Označme $\mathfrak{A} = \{q\}$ a utvorme vytvorujúci rozklad $R = R(\mathfrak{A})$ (viď def. 3). Nech R' je komplement rozkladu R v $\bar{S}$. Prvointerval p sa anuluje v rozklade $R \cup R'$, teda sa anuluje aspoň v jednom z rozkladov R, R'. Ak by sa anuloval v rozklade R', anuloval by sa v tomto rozklade tiež interval q, čo je spor s predpokladom. Teda sa p anuluje v rozklade R, z čoho plynie podľa poznámky 3 za vetou 1, že prvointerval q je slabo projektívny s prvointervalom p.

2. Nech vzťah slabej projektívnosti prvointervalov sväzu S je symetrický. Potom $\bar{S}$ je Booleova algebra.

Dôkaz: Nech $R_1 \in \bar{S}$. Nech $\mathfrak{A}_1$ ($\mathfrak{A}_2$) je množina tých prvointervalov sväzu S, ktoré sú (nie sú) anulované v rozklade R_1. Zrejme platí $R_1 = R(\mathfrak{A}_1)$. Utvorme rozklad $R_2 = R(\mathfrak{A}_2)$. Keďže každý prvointerval sväzu S patrí do jednej z množín $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, rozklad $R_1 \cup R_2$ je najväčším rozkladom na S.

Predpokladajme, že by sa prvointerval p anuloval v rozklade $R_1 \cap R_2$. Z toho by vyplývalo 1. $p \in \mathfrak{A}_1$, 2. existuje $q \in \mathfrak{A}_2$ taký, že q je slabo projektívny s prvointervalom p. Podľa predpokladu o symetričnosti vzťahu slabej projektívnosti je potom tiež p slabo projektívny s prvointervalom q. Z toho plynie, že sa q anuluje v rozklade R_1, teda $q \in \mathfrak{A}_1$. To však nie je možné, keďže $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = 0$. Teda $R_1 \cap R_2$ je najmenší rozklad na S. Z toho vyplýva, že rozklad R_2 je komplementárny k rozkladu R_1. Tým je tvrdenie vety dokázané.

Poznámky: 1. Pri dôkaze nasledujúcej vety použijeme toto tvrdenie: Nech S je sväz, nech R, R' sú komplementárne vytvorujúce rozklady na S, nech S_0 je podsväz v S. Pre prvky $x, y \in S_0$ položme $x \equiv y(R[S_0])$ vtedy a len vtedy, keď $x \equiv y(R)$, a analogicky pre $R'[S_0]$. Potom $R[S_0]$, $R'[S_0]$ sú komplementárne vytvorujúce rozklady na S_0. Dôkaz tohoto tvrdenia je zrejmý.

2. L'ahko sa zistí, že symetričnosť vzťahu slabej projektívnosti prvointervalov je vždy splnená v modulárnych sväzoch. Pre distributívne sväzy je podmienka, aby $\bar{S}$ bola Booleova algebra, obzvlášť jednoduchá:

Veta 4. *Vytvorujúce rozklady distributívneho sväzu S tvoria Booleovu algebru vtedy a len vtedy, keď sväz S je diskrétny.*

Dôkaz. a) Nech S je diskrétny distributívny sväz. Podľa predošlej poznámky vzťah slabej projektívnosti prvointervalov sväzu S je symetrický, teda podľa vety 1 $\bar{S}$ je Booleova algebra.

b) Predpokladajme, že distributívny sväz S je nie diskrétny. Teda v ňom existuje nekonečný reťazec r, ktorý má najmenší a najväčší prvok. Označme tieto prvky a resp. b. Zrejme sa potom z reťazca r dá vybrať postupnosť prvkov $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tak, že platí alebo $a_i < a_{i-1}$ pre $i = 1, 2, \ldots$, alebo $a_i > a_{i-1}$ pre $i = 1, 2, \ldots$ Vyšetrujme prvú možnosť (v druhom prípade je postup dôkazu duálny). Označme

$$\langle a_i, a_{i+1} \rangle = p_i,\ \{p_i\} = \mathfrak{A}_i,\ R(\mathfrak{A}_i) = R_i,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i = R\,.$$

Nech $x > a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Podľa [3] (poznámka 2 za lemmou 1) v každom z rozkladov R_i (a teda tiež v rozklade R) prvok x tvorí osobitnú triedu.

Označme $S_0 = \{a_1, a_2, \ldots, b\}$. Podľa predošlého je $a_i \equiv a_{i+1}(R)$, $a_i \not\equiv b(R)$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Ak by existoval komplement R' k rozkladu R, potom by $R'[S_0]$ bol komplementárny vytvorujúci rozklad k rozkladu $R[S_0]$. Rozklad $R[S_0]$ však nemá komplement (viď príklad v poznámke 3 za vetou 2), teda ani rozklad R nemá komplement. Tým je tvrdenie vety dokázané.

Definícia 7. *Ideál I sväzu S nazveme neutrálnym, ak existuje taký vytvorujúci rozklad R na S, že množina I je jednou z tried tohoto rozkladu.* (Viď [1], str. 122, 174, 180.)

Poznámky. 1. Predpokladajme, že sväz S má najmenší prvok O. Ak R je vytvorujúci rozklad na S, potom množina prvkov, kongruentných s prvkom O v rozklade R, je zrejme neutrálny ideál; označme ho $N(R)$. Môže sa ovšem stať, že pre $R_1 \neq R_2$ je $N(R_1) = N(R_2)$. Otázka je: aká je nutná a postačujúca podmienka pre sväz S, aby rôznym vytvorujúcim rozkladom R_1, R_2 patrili rôzne neutrálne ideály $N(R_1)$, $N(R_2)$? (Viď [1], problém 73.)

2. Predošlú otázku môžeme v inej formulácii vysloviť takto: aká je nutná a postačujúca podmienka pre sväz S s najmenším prvkom O, aby bolo splnené nasledujúce tvrdenie:

(A_0) Každý vytvorujúci rozklad R na S je jednoznačne určený, ak je udaná trieda tohoto rozkladu, obsahujúca prvok O.

3. Obecnejšie, pre sväzy bez O môžeme analogickú otázku vyjadriť takto: aká je nutná a postačujúca podmienka pre sväz S, aby platilo:

(A) Každý netriviálny vytvorujúci rozklad R na S obsahuje ako triedu istý ideál $I(R)$; ideálom $I(R)$ je rozklad R jednoznačne určený.[2])

[2]) Podrobnejšie: žiadame, aby každý vytvorujúci rozklad na S, ktorý obsahuje $I(R)$ ako triedu, bol rovný rozkladu R.

Pre diskrétne sväzy je snadné vyjadriť hľadanú podmienku pomocou vzťahu slabej projektívnosti prvointervalov.

Veta 5. *Pre distributívny sväz S platí tvrdenie A vtedy a len vtedy, keď ku každému prvointervalu p sväzu S existuje ideál $I(p)$ taký, že 1. prvointerval p je slabo projektívny s každým prvointervalom ideálu $I(p)$, 2. v ideále $I(p)$ existuje prvointerval p_1, slabo projektívny s prvointervalom p.*

Dôkaz. a) Predpokladajme, že pre sväz S platí tvrdenie A. Nech p je prvointerval v S. Označme $\{p\} = \mathfrak{A}$, $R(\mathfrak{A}) = R$. Nech $\mathfrak{A}_1$ je množina všetkých prvointervalov ideálu $I(R)$. Zrejme je p slabo projektívny s každým prvointervalom množiny $\mathfrak{A}_1$ (viď poznámku 3 za vetou 1). Z podmienky A plynie $R = R(\mathfrak{A}_1)$. Prvointerval p sa anuluje v rozklade R, tedy existuje prvointerval $p_0 \in \mathfrak{A}_1$, slabo projektívny s intervalom p.

b) Predpokladajme, že pre sväz S je splnená podmienka, vyslovená v dokazovanej vete. Nech R je vytvorujúci rozklad na S, nech (pevne zvolený) prvointerval p sa anuluje v rozklade R, nech z je prvok množiny $I(p)$, nech $I(R)$ je množina všetkých prvkov $x \in S$, pre ktoré platí $x \equiv z(R)$. L'ahko sa zistí, že množina $I(R)$ je ideál.[3]) (Zrejme je $I(R)$ triedou rozkladu R, teda $I(R)$ je neutrálny ideál.) Nech $\mathfrak{A}$ je množina všetkých prvointervalov ideálu $I(R)$. Dokážeme, že platí $R(\mathfrak{A}) = R$ (teda množina $I(R)$ jednoznačne určuje rozklad R).

Keďže $I(R)$ je trieda rozkladu R a keďže $R(\mathfrak{A})$ je najmenší z vytvorujúcich rozkladov na S, ktoré anulujú všetky prvky množiny $\mathfrak{A}$, platí $R(\mathfrak{A}) \leq R$. Nech q je ľubovoľný prvointerval, ktorý sa anuluje v rozklade R. Sostrojme ideál $I(q)$. Zrejme sa všetky prvky ideálu $I(q)$ anulujú v rozklade R. Keďže prenik ideálov $I(p)$, $I(q)$ je neprázdny, platí $I(q) \subseteq I(R)$. Podľa predpokladu v ideále $I(q)$ existuje prvointerval q_0 slabo projektívny s intervalom q. Podľa predošlého je $q_0 \in \mathfrak{A}$, teda interval q sa anuluje v rozklade $R(\mathfrak{A})$. Z toho plynie $R \leq R(\mathfrak{A})$, a úhrnne $R = R(\mathfrak{A})$. Tým je tvrdenie vety dokázané.

Skombinujme nakoniec požiadavky, vyslovené v spomínaných problémoch 72 a 73 z práce [1] takto:

(B) Budeme hovoriť, že sväz S má vlastnosť B, ak 1. sväz $\overline{S}$ je Booleovou algebrou, a súčasne 2. pre sväz S platí tvrdenie A.

Pre stručnejšie vyjadrovanie zaveďme ešte nasledujúcu definíciu:

Definícia 8. *a) Prvointervaly p, p' diskrétneho sväzu S nazývame ekvivalentnými, ak platí $p \succeq p'$, $p' \succeq p$.*

b) Nech diskrétny sväz S má najmenší prvok 0. Prvointervaly $\langle 0, x \rangle$ budeme nazývať minimálnymi prvointervalmi a označovať $p_0, q_0, \ldots$

Poznámka. Vzťah ekvivalentnosti prvointervalov je zrejme reflexívny, symetrický a tranzitívny.

---

[3]) Na základe vlastností 1. 2, vyslovených v dokazovanej vete, všetky prvointervaly ideálu $I(p)$ sa anulujú v rozklade R. Nech $x_1, x_2 \in I(R)$, $y \in S$. Platí $x_1 \equiv z(R)$, $x_1 \cap y \equiv z \cap y(R)$. Keďže $z \cap y \in I(p)$, je $z \cap y \equiv z(R)$, teda $x_1 \cap y \equiv z(R)$. Zo vzťahov $x_i \equiv z(R)$ $(i = 1, 2)$ plynie $x_1 \cup x_2 \equiv z(R)$. Tým dokázané, že $I(R)$ je ideál.

Veta 6. *Diskrétny sväz S s najmenším prvkom 0 má vlastnosť B vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľný prvointerval p sväzu S platí 1. p je slabo projektívny aspoň s jedným minimálnym prvointervalom, 2. ak p je slabo projektívny s niektorým minimálnym intervalom p_0, potom p, p_0 sú ekvivalentné.*

Dôkaz. a) Predpokladajme, že diskrétny sväz S s najmenším prvkom O má vlastnosť B. Nech p je prvointerval v S. Uvažujme príslušný ideál $I(p)$ podľa vety 5. Podľa tejto vety $I(p)$ obsahuje viac ako jeden prvok, teda existuje minimálny prvointerval p_0, pre ktorý platí $p \succeq p_0$. Podľa vety 4 sú prvointervaly p, p_0 ekvivalentné.

b) Nech sú splnené podmienky 1., 2. dokazovanej vety.

1. Nech p, q sú prvointervaly v S, $p \succeq q$. Podľa predpokladu existuje minimálny prvointerval q_0, ekvivalentný s q. Potom je $p \succeq q_0$, teda podľa podmienky 2. dokazovanej vety je zároveň p ekvivalentný s q_0. Z toho plynie, že intervaly p, q sú ekvivalentné. Podľa vety 4 sväz $\bar{S}$ je Booleova algebra.

2. Nech p je prvointerval v S. Označme $\{p\} = \mathfrak{A}, R(\mathfrak{A}) = R$. Podľa predošlého odseku množina prvkov, kongruentných s O v rozklade R, obsahuje viac ako jeden prvok. Označme túto množinu $I(p)$. $I(p)$ je zrejme ideál. Podľa definície množiny $I(p)$ prvointerval p je slabo projektívny s každým prvointervalom tejto množiny. Nech p_0 je minimálny prvointerval ideálu $I(p)$. Podľa podmienky 2 dokazovanej vety intervaly p, p_0 sú ekvivalentné. Podľa vety 5 je potom pre sväz S splnená podmienka A. Tým je tvrdenie vety dokázané.

Definícia 9. *Sväz S budeme nazývať jednoduchým, ak nemá žiadny netriviálny vytvorujúci rozklad.*

Veta 7. *Diskrétny sväz S bez najmenšieho prvku splňuje podmienku B vtedy a len vtedy, keď je jednoduchý.*

Dôkaz. a) Nech sväz S je jednoduchý. Potom podmienka B je zrejme splnená.

b) Predpokladajme, že diskrétny sväz S nemá najmenší prvok a že splňuje podmienku B. Nech p, q sú ľubovoľné prvointervaly v S. Utvorme podľa vety 5 ideály $I(p)$, $I(q)$. Keďže sväz S nemá najmenší prvok, množina $I = I(p) \cap I(q)$ obsahuje viac ako jeden prvok. I je zrejme ideál v S. Nech s je prvointerval ideálu I. Podľa vety 5 platí $p \succeq s$, $q \succeq s$. Podľa vety 4 p, s resp. q, s sú ekvivalentné, takže tiež prvointervaly p, q sú ekvivalentné. Z toho vyplýva, že sväz S je jednoduchý.

Poznámka. Nazvime sväz S polojednoduchým, ak pre každý interval $\langle a, b\rangle$, $a < b$ sväzu S existujú prvky $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $a_0 = a$, $a_n = b$, také, že intervaly $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sú jednoduchými sväzmi („jednoduché intervaly“). Výsledky, vyslovené v predošlom pre diskrétne sväzy, by sa bez ťažkostí dali zovšeobecniť pre polojednoduché sväzy (úlohu prvointervalov by zastávali jednoduché intervaly).

LITERATÚRA

[1] *Г. Биркгоф:* Теориа структур, Москва 1953.

[2] *M. Funayama:* On the congruence relations on lattices, Proc. Imp. Acad. Tokyo *18* (1942), 530—531.

[3] *J. Jakubík:* Системы отношений конгруэнтности в структурах, Чехослов. мат. журнал, *4*(*79*), 1954, 248—273.

Резюме

ОТНОШЕНИЯ КОНГРУЭНТНОСТИ И СЛАБАЯ ПРОЕКТИВНОСТЬ В СТРУКТУРАХ

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице.

(Поступило в редакцию 31/V 1954 г.)

Пусть $i_0, \dots, i_n$ — интервалы в структуре S, и пусть i_k содержится в интервале i'_k, транспонированном к интервалу i_{k-1}, $(k = 1, \dots, n)$. Будем говорить, что интервал i_0 слабо проективен к интервалу i_n. В части 1 доказывается, что с помощью термина слабой проективности мы можем определить отношения конгруэнтности на S. В части 2 и 3 рассматриваются структуры, в которых все цепи, имеющие наименьший и наибольший элемент, конечны („дискретные структуры“). В части 2 для таких структур доказано обобщение теоремы, которую доказал М. Фунаяма в статье [2] для структур конченой длины (см. [1], проблема 67).

Пусть $\overline{S}$ — структура всех отношений конгруэнтности дискретной структуры S.

Доказана **теорема:** *Структура $\overline{S}$ есть Булева алгебра тогда и только тогда, если отношение слабой проективности простых интервалов структуры S симметрично* (см. [1], проблема 72).

Дальше в терминологии слабой проективности простых интервалов сказано необходимое и достаточное условие для того, чтобы каждое отношение конгруэнтности на S было однозначно определено соответствующим нейтральным идеалом (см. [1], проблема 73).

Summary

CONGRUENCE RELATIONS AND WEAK PROJECTIVITY IN LATTICES

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Received May 31, 1954.)

Let $i_0, \ldots, i_n$ be intervals in a lattice S; let interval i_k be contained in interval i'_k, which is transposed with the interval i_{k-1} ($k = 1, \ldots, n$). We say then that the interval i_0 is weakly projective with the interval i_n. In the part 1 we prove that, by means of the relations of the weak projectivity, it is possible to define congruence relations on S. In the part 2 and 3 lattices are considered in which all chains with the least and the greatest element are finite ("discrete lattices"). In the part 2 we prove for such lattices the generalisation of a theorem which was proved by M. Funayama in [2] for lattices of finite length (see [1], problem 67).

Let $\bar{S}$ be the lattice of all congruence relations on a discrete lattice S. We prove the following theorem: $\bar{S}$ is Boolean algebra if and only if the relation of the weak projectivity of prime intervals in S is symmetric (see [1], problem 72). Further — in the terms of the weak projectivity of prime intervals — there is given a necessary and sufficient condition in order that the correspondence between the congruence relations and neutral ideals of S be one to one (see [1], problem 73).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O JEDNÉ ZÁKLADNÍ VĚTĚ MATEMATICKÉ LOGIKY

LADISLAV RIEGER, Praha.

(Došlo dne 26. července 1954.)

DT : 517.11

V práci je především novým, poměrně jednoduchým způsobem dokázána hlavní věta o t. zv. zobecněných Booleových σ-algebrách. Tato věta je algebraickým jádrem známé Lindenbaumovy věty z oblasti matematické logiky. Dále je ukázáno, že věty Gödelova (o úplnosti nižšího predikátového počtu) a Löwenheim-Skolemova jsou důsledkem hlavní věty. Autor se též zmiňuje o možné souvislosti mezi Lindenbaumovou algebrou, Cantorovým diskontinuem a jistým problémem theorie pravděpodobnosti. V závěru jsou srovnány různé dosud známé methody důkazu Gödelovy věty a ostatních zmíněných vět.

1. Úvodní poznámka

Za jednu ze základních vět (klasické) matematické logiky je třeba považovat tuto t. zv. LINDENBAUMOVU větu:[1])

Každá bezesporná teorie,[2]) *vyjadřitelná v symbolech nižšího predikátového počtu, dá se rozšířit v t. zv. úplnou bezespornou teorii, t. j. takovou, že každá její věta mající smysl je buďto dokazatelnou poučkou teorie, nebo je dokazatelnou poučkou teorie její opak.*

Z této věty totiž snadno plyne na př. GÖDELOVA věta o úplnosti nižšího predikátového počtu a SKOLEMOVA-LOWENHEIMOVA věta o existenci spočetného modelu každé elementární (t. j. v symbolech nižšího predikátového počtu vyjadřitelné) bezesporné teorie — a to v nejobecnějším znění.

Za matematické jádro Lindenbaumovy věty je třeba považovat jistou jednoduše znějící poučku z teorie Booleových algeber, kterou v dalším sformulujeme a dokážeme. Obecně matematická důležitost takto formulované Lindenbaumovy poučky je zdůrazněna m. j. i tím, že z ní lze poměrně snadno odvodit obě základní věty z teorie spočetně aditivních Booleových algeber (σ-algeber), totiž:

---

[1]) Viz na př. práce A. TARSKI [1] a [2]. — ALFRED LINDENBAUM byl mladý nadaný polský matematik a logik, zavražděný nacisty za okupace Polska.

[2]) Pojem „teorie" bude definován níže.

1. t. zv. LOOMISOVU větu o tom, že každá σ-algebra je homomorfním obrazem množinového σ-tělesa, a

2. větu o volnosti σ-tělesa borelovských množin CANTOROVA diskontinua.[3]) [Booleova σ-algebra se nazývá volnou, lze-li ji vytvořit z takové množiny jejích prvků, že platí: Každé zobrazení množiny těchto prvků (t. zv. volných generátorů) do libovolné σ-algebry se dá rozšířit v homomorfní zobrazení (celé této t. zv. volné σ-algebry do dané σ-algebry.)]

Tím spíše, že v monografiích a učebnicích matematické logiky bývá Lindenbaumova věta jakož i Gödelova věta o úplnosti nižšího predikátového počtu dokazována s nepodstatnými (nealgebraickými) komplikacemi, danými symbolikou predikátového počtu[4]) a zbytečnou komplikovaností několikanásobné indukce, nebude snad na škodu podat v této práci poměrně stručný algebraický důkaz. Je třeba ovšem říci, že základní myšlenka induktivní konstrukce v důkazu užité není zcela nová. Její kořeny sahají do metody důkazů t. zv. ε-teoremů HILBERTOVY teorie důkazů;[5]) mnohem později se tato myšlenka objevuje v důkazu Gödelovy věty od L. HENKINA [6].

Budu v dalším užívat označení a pojmů, běžných v teorii svazů, resp. Booleových algeber. K tomu viz na př. kap. X monografie G. BIRKHOFF, *Lattice Theory* (2. vyd.), po př. v ruském překladu (*Těorija struktur*, zkr. [St]).

Definice 1. Říkáme, že Booleova algebra A je *Φ-algebra* (to jest zobecněná σ-algebra vzhledem k rodině Φ posloupností prvků, pro něž jsou definována suprema a infima), jestliže je dána rodina Φ posloupností prvků z A o těchto čtyřech vlastnostech:

(i) *(Pravidlo doplňků):*

Když $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak i $\{a'_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$.

(ii) *(Pravidlo sjednocení):*

Když $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak i $\{a \cup a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ pro každý prvek $a \in A$.

(iii) *(Pravidlo triviálních posloupností):*

Každá posloupnost, jejíž členové od jistého počínajíc jsou stále stejní, patří do Φ.

(iv) *(Pravidlo suprema):* Je-li $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak existuje prvek $\bar{a} = \sup\limits_{k=1,2,\ldots} a_k \in A$ ve smyslu polouspořádání algebry A. Píšeme $\bar{a} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Důsledky definice 1: Je-li $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak existuje ve Φ-algebře A prvek $\underline{a} = \inf\limits_{k=1,2,\ldots} a_k$. — Píšeme $\underline{a} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

---

[3]) Tuto větu dokázal autor v práci [3]. Jiný důkaz podal nedávno LOOMIS.

[4]) Tak na př. v nedávné monografii [4] zaujímá důkaz Lindenbaumovy věty a Gödelovy věty o úplnosti plných 15 stránek.

[5]) Srov. HILBERT-BERNAYS [5], II. díl.

Důkaz plyne z (i) a (iv) a z t. zv. *Morganových identit*

$$(\sup_{k=1,2,\dots} a_k)' = \inf_{k=1,2,\dots} a'_k\,, \quad (\inf_{k=1,2,\dots} a_k)' = \sup_{k=1,2,\dots} a'_k\,,$$

které platí vždy, jakmile jedna strana má smysl (viz [St]).

Je-li $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$, pak $\{a \cap a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ pro každé pevné $a \in A$. — Důkaz plyne z předchozího a z (i) a (ii).

Obecné distributivní identity: Platí vždy

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (a \cup a_k) = a \cup (\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k) \text{ —}$$

a duálně, jakmile jen aspoň jedna strana má smysl. — Důkaz viz [St], X, § 10. Právě uvedených vět budeme v dalším užívat bez citace.

Zřejmě každá σ-algebra je i Φ-algebrou vzhledem k rodině Φ všech posloupností prvků algebry vůbec. Méně triviálním příkladem Φ-algebry je těleso všech borelovských množin, patřících do tříd konečných indexů libovolného topologického prostoru; zde Φ je rodina všech posloupností množin s ohraničenými indexy tříd (v jedné posloupnosti). V matematické logice je základní důležitosti t. zv. *Lindenbaumova Φ-algebra* nižšího predikátového počtu, která bude definována níže:

Definice 2. *Říkáme, že neprázdná množina I prvků Φ-algebry A je Φ-ideálem, jestliže platí:*

(0) $I \neq A$.

(1) *Jakmile* $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi$ *a* $a_i \in I$ *pro každé* $i = 1, 2, \dots$, *potom* $\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i \in I$.

(2) *Jakmile* $a \subseteq b$, $a \in I$, *pak* $b \in I$.

Říkáme, že Φ-ideál P je Φ-prvoideálem, jestliže ještě platí:

(3) *Jakmile* $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi$ *a* $\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \in I$, *potom je* $a_j \in I$ *pro vhodné* $i = j$.

Jasné je, že každý Φ-ideál je (obyčejný) ideál a že Φ-prvoideál je (obyčejný) prvoideál. (Srov. [St], X, § 6.) To zaručuje pravidlo (iii) v definici 1.

Snadno dokážeme tuto *větu: Φ-ideál P je Φ-prvoideálem tehdy a jen tehdy, když z každých dvou prvků a a a' algebry jeden* (a ovšem vzhledem k (0), (1), (2) v definici 2 a k (iii) v definici 1 jen jeden) *prvek leží v P.*

Nutnost podmínky je vzhledem k $a \cup a' = 1 \in P$ a k (iii) v definici 1 podle (3) v definici 2 zřejmá.

Postačitelnost:

Nechť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Phi$ a $\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \in P$. Nechť naše podmínka nepostačuje, t. j. jest a_i non $\in P$ pro $i = 1, 2, \dots$ přesto, že je splněna. Protože z každé dvojice prvků a_i a a'_i jeden patří do P vzhledem k $a_i \cup a_i' = 1 \in P$, je $a'_i \in P$ pro $i = 1, 2, \dots$;

což dává spor s (0), poněvadž $\bigcap_{i=1}^{\infty} a'_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i)' \in P$ (podle (1) v definici 2 a (iii) v definici 1).

I této věty v dalším použijeme bez citace.

2. Lindenbaumova věta

Pomocná věta. *Je-li I nějaký Φ-ideál Φ-algebry A, $b \in A$ pevný prvek takový, že není $a \cap b = 0$ ani pro jedno $a \in I$, pak množina $\tilde{I}$ všech $y \in A$, splňujících $a \cap b \subseteq y$ při vhodném $a \in I$ je Φ-ideál v A, obsahující jak daný ideál I tak i prvek b.*

Důkaz. Protože (0) a (2) z definice 2 jsou zřejmě splněny, dokažme (1).

Nechť tedy $\{y_s\}_{s=1}^{\infty} \in \Phi$, $y_s \in \tilde{I}$ pro $s = 1, 2, \ldots$ Pak ke každému členu y_s existuje $a_s \in I$ tak, že je $a_s \cap b \subseteq y_s$. Spojením s prvkem $b' \in A$ na obou stranách dostáváme podle distributivního zákona $a_s \cup b' \subseteq y_s \cup b'$. Protože $a_s \cup b' \in I$, je i $y_s \cup b' \in I$. Tedy je i $\bigcap_{s=1}^{\infty} (y_s \cup b') = b' \cup \bigcap_{s=1}^{\infty} y_s \in I$ — opět podle distributivní identity. Podle definice $\tilde{I}$ bude však

$$b \cap (b' \cup \bigcap_{s=1}^{\infty} y_s) = b \cap \bigcap_{s=1}^{\infty} y_s \in \tilde{I}\,.$$

Tím spíše tedy $\bigcap_{s=1}^{\infty} y_s \in \tilde{I}$, c. b. d.

Hlavní věta. *Budiž A Φ-algebra se spočetnou rodinou Φ. Budiž I daný Φ-ideál v A. — Pak existuje Φ-prvoideál P v A obsahující I.*

Poznámka. Podle (iii) v definici 1 je sama algebra A spočetná.

Předpoklad spočetnosti Φ-algebry může být (za vhodné modifikace definice 1) snadno odstraněn (my to však nepotřebujeme). Naproti tomu předpoklad spočetnosti rodiny Φ odstraněn být nemůže, neboť není těžké udat příklady dokonce spočetných σ-algeber, v nichž věta neplatí.

Důkaz. Označme jako $\{a_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost, sestavenou ze všech posloupností rodiny Φ ($i = 1, 2, \ldots$ je tedy index posloupnosti, $k = 1, 2, \ldots$ index jejího členu). Pro formální zjednodušení můžeme (vzhledem k (iii) v definici 1) předpokládat, že posloupnost samých nul je první.

Sestrojme induktivně stoupající řetězec Φ-ideálů

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$$

vesměs obsahujících daný Φ-ideál I tak, že Φ-ideál I_n splňuje tuto podmínku (p, n):

Je-li $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^i \in I_n$ a $i \leqq n$, potom je již i $a_j^i \in I_n$ pro vhodné přirozené číslo j.

Položme $I_1 = I$; pak podmínka $(p, 1)$ pro I_1 je splněna triviálně, protože $a_k^1 = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$

Nechť je již udán r-tý člen řetězce $\{I_n\}$, splňující (p, r).

Pak existenci I_{r+1} zaručíme takto:

V případě **A**), že ku I_r neexistuje Φ-nadideál, který by obsahoval prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1} \in A$, položme $I_r = I_{r+1}$; pak ovšem I_{r+1} splňuje $(p, r + 1)$. V opačném případě **A'**), že totiž existuje Φ-ideál obsahující jak prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1}$, tak i ideál I_r, dokažme, že pak již existuje i Φ-ideál I_{r+1}, který obsahuje I_r a vhodný prvek a_j^{r+1} (člen posloupnosti $\{a_k^{r+1}\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$).

Dejme tomu, že by naopak takový Φ-ideál I_{r+1} neexistoval. To dle naší shora uvedené pomocné věty znamená, že ke každému prvku a_k^{r+1} $(k = 1, 2, \ldots)$ musí existovat prvek $b_k \in I_r$ takový, že je $a_k^{r+1} \cap b_k = 0$. Ale pak je $b_k \subseteq (a_k^{r+1})'$ pro každé $k = 1, 2, \ldots$, t. j. $(a_k^{r+1})' \in I_r$ pro každé $k = 1, 2, \ldots$ Tedy — protože I_r je Φ-ideál —je $\bigcap_{k=1}^{\infty} (a_k^{r+1})' = (\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1})' \in I_r$. To však je ve sporu s předpokládanou rozšiřitelností Φ-ideálu I_r ve Φ-nadideál, obsahující prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^{r+1}$ (případ **A'**)). Tím je pokračování našeho řetězce Φ-ideálů zaručeno. Není totiž těžké si ověřit splnění vlastnosti $(p, r + 1)$ pro kterýkoli Φ-ideál I_{r+1} právě vyznačený případem **A'**).

Neboť je-li $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^i \in I_{r+1}$ pro nějaké $i \leqq r$, potom to znamená, že v i-tém kroku konstrukce našeho řetězce nastal případ **A'**), takže je $a_j^i \in I_i \subseteq I_{r+1}$ při vhodném j; pro $i = r + 1$ jsme však potřebné právě zařídili.

Utvořme nyní množinové sjednocení $P = \sum_{r=1}^{\infty} I_r$.

Dokážeme, že P je hledaným Φ-prvoideálem nad I.

Snadno nejprve nahlížíme, že P je (obyčejný) ideál, zvláště pak že neobsahuje nulu (požadavek (0) definice 2, a požadavek (2) definice 2).

Z konstrukce však bezprostředně plyne, že je splněn i požadavek (3) definice 2, neboť je-li $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^j \in P$, pak je $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k^j \in I_n$ při vhodném n. Poněvadž tedy v j-tém kroku konstrukce nastal případ **A'**),[5]) bude $a_s^i \in I_j$ při vhodném s, tedy $a_s^j \in P$.

Dokažme konečně, že P má i vlastnost (1) z definice 2.

Kdyby tomu tak nebylo, měli bychom posloupnost $\{a_k^i\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ při vhodném i takovou, že by sice bylo $a_k^i \in P$ pro každé $k = 1, 2, \ldots$, ale prvek $\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i$ by neležel v P.

---

[5]) I_n je Φ-ideál!

Protože však je — jak vlastně již víme — P obyčejným prvoideálem, patřil by následkem $(\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i) \cup (\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i)' = 1 \in P$ prvek $(\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k^i)' = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^i)'$ do P.

Tedy prvek $\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^i)'$ patří i do jistého I_r. Avšak poněvadž I_r je Φ-ideál a protože (dle vlastnosti (i) v definici 1) je $\{a_k^j\}_{k=1}^{\infty} = \{(a_k^i)'\}_{k=1}^{\infty} \in \Phi$ při vhodném j, je již také následkem naší konstrukce $(a_k^i)' \in I_j$ pro toto j a pro vhodné k. Tedy je i $(a_k^i)' \in P$. To však je ve sporu s předpokládaným $a_k^i \in P$.

Tím je naše hlavní věta úplně dokázána.

P o z n á m k y k d ů k a z u. Existence nadprvoideálu k danému ideálu se v abstraktní algebře — pokud jde o obyčejné konečné operace — dokazuje zpravidla takto: Postupně se rozšiřuje daný ideál přidáváním prvků a sjednocováním přes stoupající řetězec nadideálů se obdrží maximální ideál, který je hledaným nadprvoideálem. (Odvoláme-li se na t. zv. ZORNOVO lemma, nemusíme ani tuto běžnou konstrukci provádět.) Takovým způsobem se postupuje na př. v teorii okruhů, v teorii svazů a v teorii pologrup.

Tato prostá metoda zde selhává, neboť sjednocení přes nekonečný řetězec stoupajících Φ-ideálů již nemusí být Φ-ideál a při případném doplňování ve Φ-ideál narazíme na nulu.

Dá se však ukázat, že obyčejné prvoideály ve Φ-algebře, které by nebyly Φ-prvoideály, jsou „poměrně vzácné" v tomto smyslu: Považujeme-li prvoideály dané Φ-algebry za body STONEOVA[6]) representujícího prostoru, pak naše algebra je (ve smyslu konečných operací) isomorfní s množinovým tělesem obojetných (t. j. současně otevřených i uzavřených) množin tohoto prostoru. Ukazuje se, že množina všech prvoideálů, obsahujících daný ideál, představuje ve Stoneově representujícím prostoru otevřenou bodovou množinu. Naproti tomu množina všech prvoideálů, které nejsou Φ-prvoideály, tvoří v tomto prostoru množinu první kategorie. Protože ve Stoneově prostoru jakožto v bikompaktním nuladimensionálním prostoru platí BAIREOVA věta o kategorii, nemohou všechny nadprvoideály k danému Φ-ideálu nebýt Φ-prvoideály.

Na tom lze založit jak „topologický" důkaz Lindenbaumovy věty (a Gödelovy věty o úplnosti jakož i věty Skolemovy-Löwenheimovy) tak i důkaz Loomisovy věty; to učinili Sikorski v práci [7] a RASIOWA a SIKORSKI v práci [8].

3. Lindenbaumova algebra.

Přistupme nyní k aplikacím naší hlavní věty na matematickou logiku; mějme přitom pro určitost na mysli systém predikátového počtu HILBERTA-ACKERMANNA (viz [9]). — Popišme povšechně tento systém.

[6]) Viz [St] XI, § 3.

T. zv. *základními výrazy* predikátového počtu jsou výrazy $P(x)$, $Q(y)$, ..., $R(x, y)$, ..., $S(x, y, z)$, ... (ve spočetném počtu). Zde písmena $x, y, z, \dots$ po případě s indexy jsou t. zv. *individuové proměnné* a mohou nabýt významu libovolných prvků libovolně předepsané množiny (t. zv. oboru individuí). $P(.)$, $Q(.)$, ..., $R(r)$ ... jsou t. zv. *predikátové proměnné*, které pak již nabývají významu libovolných (případně ovšem i pevných) vlastností individuí a dvojčlenných a obecně n-členných relací mezi nimi.[7])

Pojem (větného) *výrazu* vůbec je pak definován induktivně za pomoci *logických částic* $\vee$ (nebo, vel), $\sim$ (nikoli), $\exists$ (existuje, malý kvantor), ( ) (každý, velký kvantor) takto:

a) základní výrazy jsou výrazy;

b) jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ výrazy, pak výrazy tvaru $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\sim \mathfrak{A}$, $\exists\, x\, \mathfrak{A}$, $\exists\, y\, \mathfrak{B}, \dots$; $(x)\, \mathfrak{A}$, $(y)\, \mathfrak{B}, \dots$ (t. j. přesněji naznačené trojice, dvojice a trojice výrazů) jsou také výrazy. — Ve výrazech posledního druhu je — jak se říká — individuová proměnná $x, y, \dots$ vázána; jinak je volná.[8])

Je jasné, že jestliže každý ze základních výrazů tvaru $T_k(x_l, x_m, \dots, x_t)$ obdržel význam jednoduché věty, pravící, že mezi individui $x_l, x_m, \dots, x_t$ je příslušný, k-tou n-člennou predikátovou proměnnou označený n-členný vztah, potom i složené výrazy obdrží jednoznačně význam odpovídajících složených vět. (Symbolika predikátového počtu byla totiž právě tak zvolena, aby přesný a „normovaným“ způsobem vystihovala logické kombinování jednodušších vět a výstavbu složených vět.[9]))

Vlastním smyslem predikátového počtu je — jak známo — rekurentně sestrojit zvláštní třídu výrazů, totiž t. zv. *formulí* predikátového počtu; to musí být toliko výrazy, které v každém myslitelném významu budou pravdivými větami, to jest větami pravdivými z „ryze logických důvodů“[10]) (má-li totiž

---

[7]) Striktně vzato lze výrazy $P(x), \dots, S(x, y, z), \dots$ samotné (bez ohledu na jejich užití čili interpretaci) prostě považovat za $n + 1$-tice přirozených čísel, kde na prvních n místech jsou čísla předem jednou pro vždy očíslovaných individuových proměnných tak, jak v základním výrazu jdou za sebou, na posledním $n + 1$-tém místě je číslo n-členné ve výrazu figurující predikátové proměnné — opět vzhledem k pevnému předem danému očíslování všech n-členných predikátových proměnných. Můžeme však zavést: (spočetně mnoho) t. zv. *individuových konstant* (na př. číslovek) za příslušné modifikace odvozovacích pravidel. — Pak můžeme (ale nemusíme) v předpokladech i tvrzení *Lindenbaumovy věty* nahradit *bezespornost* silnější t. zv. ω — *bezespornosti* (viz [5]) — beze změny matematického substrátu.

[8]) Nevyskytuje-li se individuová proměnná, na př. x, v $\mathfrak{A}$ vůbec nebo je-li tam již vázána, jde ve výraze $\exists\, x\, \mathfrak{A}$ či $(x)\, \mathfrak{A}$ o t. zv. fiktivní vazbu.

[9]) Že tomu tak skutečně je, to se ovšem nedá dokázat, nýbrž jen ověřit.

[10]) Je třeba zdůraznit, že úkolem matematické logiky není samo zkoumání pojmu pravdivosti matematických pouček, což patří do filosofie matematiky. (Filosofie matematiky musí ovšem respektovat výsledky matematické logiky.) V matematické logice může jít toliko o známá pravidla, dle nichž je určena pravdivost, resp. nepravdivost složené věty, jestliže je známa pravdivost a nepravdivost vět jednodušších. Pouze v tomto smyslu se hovoří o „ryze logicky pravdivých“ výrazech jako o složených výrazech, které se stávají „identicky pravdivými“ bez ohledu na pravdivost jejich součástí.

predikátový počet dát to co chceme). Jestliže pak třída formulí je totožná s třídou vždy pravdivých výrazů, říkáme, že predikátový počet je *úplný*.

Sestrojení třídy formulí se děje v zásadě takto:[11])

Jisté konkretní výrazy, po případě celá třída výrazů přesně popsaného tvaru se prohlásí za t. zv. *axiomy*, čili *výchozí formule*. (Na př. $\sim \mathfrak{A} \vee \exists\, x\, \mathfrak{A}$.)

Dále se udají (pouhým popisem tvaru zúčastněných výrazů) jistá pravidla, dle nichž z toho, že jisté výrazy byly již zařazeny mezi formule, již plyne, že jiné třeba rovněž zařadit mezi formule. (Typickým a skoro ve všech systémech vystupujícím pravidlem tohoto druhu t. zv. *modus ponens*, t. j. pravidlo pravící, že když $\mathfrak{A}$ i $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ jsou formule, potom i $\mathfrak{B}$ musí být formule.)

Majíce takto induktivně definovanou třídu formulí zaveďme nyní takovýto vztah mezi všechny výrazy:

$$\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \quad (\mathfrak{A} \text{ je } \textit{ekvivalentní} \text{ s } \mathfrak{B}),$$

jestliže výrazy $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ jakož i $\sim \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$ jsou formule.

Není těžké dokázat (viz Hilbert-Ackermann [9], nebo Hilbert-Bernays [5]) především, že relace $\Leftrightarrow$ mezi výrazy je rovnost.

Dále ze známých základních pouček teorie predikátového počtu snadno plyne, že třídy $[\mathfrak{A}]$, $[\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{C}]$, ... vzájemně rovných výrazů tvoří Booleovu algebru ve smyslu těchto definic:

$$[\mathfrak{A}] \cup [\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}],$$
$$[\mathfrak{A}] \cap [\mathfrak{B}] = \sim [(\sim \mathfrak{A} \vee \sim \mathfrak{B})],$$
$$[\mathfrak{A}]' = [\sim \mathfrak{A}],$$
$$1 = [\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}], \quad 0 = [\sim (\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A})].$$

Platí pak, že výraz $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ je formulí tehdy a jen tehdy, když je $[\mathfrak{A}] \subseteq [\mathfrak{B}]$ v této algebře — a že $[\mathfrak{F}] = 1$ tehdy a jen tehdy, když výraz $\mathfrak{F}$ je formule

Tato t. zv. *Lindenbaumova algebra* nižšího predikátového počtu je však i Φ-algebrou v následujícím smyslu:

Rodina posloupností Φ je — vedle triviálních posloupností (viz (iii) v definici 1) — tvořena posloupnostmi tvaru

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{[\mathfrak{A}^*(x_k)]\}_{k=1}^{\infty},$$

kde výraz $\mathfrak{A}(x_k)$ vzniká z výrazu $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(x_1)$ (v němž vystupuje volná individuová proměnná, označená jako x_1) náhradou volné x_1 libovolnou volnou individuovou proměnnou, označenou jako x_k pro $k = 1, 2, \ldots$ (V $\mathfrak{A}$ mohou ovšem vystupovat i další volné, nebo vázané individuové proměnné.)

Hvězdička pak naznačuje, že je po případě potřebí před popsanou náhradou (bez újmy rovnosti) provést vhodné „přejmenování" vázaných proměnných v $\mathfrak{A}$ tak, aby se takto x_k nestala vázanou proměnnou.

[11]) Nebudeme zde vypisovat podrobnosti, k tomu viz Hilbert-Ackermann [9]. Popíšeme raději obecné zásady, společné pro všechny systémy predikátového počtu, jichž je celá řada.

Potom je (jak se snadno dokáže, srov. [9])

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k = [\exists\, x_1\, \mathfrak{A}]$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k = [(x_1)\, \mathfrak{A}]$$

(Není-li individuová proměnná x_1 ve výrazu $\mathfrak{A}$ přítomna, anebo je tam jen vázána, pak klademe formálně $a_k = [\mathfrak{A}]$ pro každé $k = 1, 2, \ldots$ a $[\exists\, x_1\, \mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}]$, $[(x_1)\, \mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}]$ (fiktivní kvantifikace).)

Z induktivní definice pojmu výraz a z axiomů e), f) a z odvozovacích pravidel γ_1) a γ_2) systému Hilberta-Ackermanna snadno plyne, že jsou splněny všechny požadavky definice 1.

Je tedy *Lindenbaumova algebra* nižšího predikátového počtu[12]) *Φ-algebra se zřejmě spočetnou rodinou posloupností Φ*. Nyní můžeme teprve podat přesnou definici pojmu (symbolisované) elementární matematické teorie.

Definice 3. *Elementární* (t. j. v symbolech nižšího predikátového počtu vyjadřitelná) *bezesporná teorie je Φ-ideál Lindenbaumovy algebry; při tom výrazy, jejichž třídy tvoří takový Φ-ideál, jsou* (v symbolech predikátového počtu vyjádřené) *poučky teorie.*

Úplná bezesporná elementární teorie je pak *Φ-prvoideál Lindenbaumovy algebry.*

Touto definicí (která v podstatě pochází od Tarského, viz pozn. [1])) je vyjádřeno předně, že teorii jakožto deduktivně uzavřený systém je třeba považovat za takový systém matematických vět, který splňuje toto:

a) Je-li $\mathfrak{A}(y)$ (kde y je libovolné individuum) poučkou teorie, pak je poučkou teorie i věta tvaru $(x)\, \mathfrak{A}(x)$ (pro všechna x platí $\mathfrak{A}(x)$). — To odpovídá požadavku (1) v definici 2.

b) Je-li $\mathfrak{A}$ poučkou teorie a $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ (což je zkratka za $\sim \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$) je logicky zaručeno (vzniklo interpretací formule), potom $\mathfrak{B}$ je poučkou teorie. — To odpovídá požadavku (2) definice 2.

c) Pokud je teorie bezesporná (a jiné ovšem neuvažujeme), nejsou všechny výrazy jejími poučkami. — To odpovídá požadavku (0) definice 2.

Za druhé — pokud jde o úplné teorie — definice 3 vyjadřuje vzhledem k tvrzení, dokázanému za definicí 2 právě toto:

Protože $[\mathfrak{A} \vee \sim \mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}] \cup [\mathfrak{A}]' = 1$ patří do každého ideálu, musí být jeden (a jen jeden) z obou výrazů $\mathfrak{A}$, $\sim \mathfrak{A}$ poučkou úplné teorie — a obráceně.

---

[12]) Můžeme hovořit o *Lindenbaumově algebře* nižšího predikátového počtu vůbec, protože všechny analogicky sestrojené Φ-algebry pro různé úplné systémy nižšího predikátového počtu jsou si isomorfní. Právě jejich typ isomorfismu, který lze charakterisovat jako jistou volnou Φ-algebru, je vlastní matematickou strukturou nižší predikátové logiky. (To provedl autor v práci [10].)

Nyní je matematické jádro na počátku uvedené Lindenbaumovy věty jasné.

Než přejdeme ke Gödelově větě o úplnosti nižšího predikátového počtu jako snadnému důsledky věty Lindenbaumovy, upozorněme ještě na jednu zajímavou *souvislost s teorií pravděpodobnosti.*

Je známo (viz práci autora [3]), že Lindenbaumova algebra může být isomorfně (ve smyslu všech v ní definovaných suprem a infim) representována borelovskými množinami Cantorova diskontinua. S druhé strany je z teorie míry[13]) známo, že libovolná nezáporná množinová funkce, nepřekračující co do hodnot jedničku, definovaná na množinách reálných čísel, které v trojkovém rozvinutí mají na pevném místě nulu (v Cantorově diskontinuu), dá se jednoznačně rozšířit v σ-aditivní funkci na borelovských množinách Cantorova diskontinua. Takovéto základní obojetné množiny Cantorova diskontinua však ve zmíněné representaci můžeme nechat odpovídat prvkům Lindenbaumovy algebry tvaru $[T_k(x_l, x_m, \ldots, x_t)]$. To znamená, že řečená množinová funkce může být považována za jakési ,,pravděpodobnostní" ohodnocení predikátových (ovšem i kvantifikovaných) výrazů, určené udanými pravděpodobnostmi, že individua $x_l, x_m, \ldots, x_t$ jsou ve vztahu $T_k(x_l, x_m, \ldots, x_t)$.

To by pro teorii pravděpodobnosti — alespoň v případě spočetných pravděpodobnostních polí (t. j. oborů individuí) — mohlo m. j. znamenat bezesporný způsob, jakým lze bez obav ,,logicky volně" (t. j. bez dalších pravděpodobnostních předpokladů) kombinovat výroky, týkající se různých pravděpodobnostních, spolu nesouvisících polí. (Jak známo, při neopatrném takovém kombinování snadno obdržíme logické spory.)

4. Důsledky Lindenbaumovy věty.

Obraťme se konečně k důkazu Gödelovy věty o úplnosti jakožto důsledku věty Lindenbaumovy.

Vyslovíme tuto *Gödelovu větu* v silnějším znění, než je obvyklé, takto: *Není-li výraz $\mathfrak{A}$ nižšího predikátového počtu formulí, pak lze každé predikátové proměnné dát význam určité* (obecně n-členné) *relace mezi přirozenými čísly a libovolně*[14]) *označit všechna přirozená čísla pomocí individuových proměnných tak, že výraz $\mathfrak{A}$ po případném dosazení vhodných čísel za jeho volné individuové proměnné* (pokud v $\mathfrak{A}$ nějaké jsou) *obdrží význam chybného tvrzení o přirozených číslech.*

Důkaz. Mějme v Lindenbaumově algebře systém všech jejích prvků $[\mathfrak{B}]$, které splňují vztah $[\mathfrak{A}]' \subseteq [\mathfrak{B}]$.

Protože $\mathfrak{A}$ není formule, t. j. je $[\mathfrak{A}] \neq 1$, je též $[\mathfrak{A}]' = [\sim \mathfrak{A}] \neq 0$.

[13]) Srov. n. př. HALMOS, *Measure Theory*, po př. v ruském překladu (*Těorija mery*, kap. II a III).

[14]) V tom je právě zesílení oproti obvyklému znění.

To znamená, že řečené třídy $[\mathfrak{B}]$ tvoří t. zv. hlavní Φ-ideál I vytvořený prvkem $[\sim \mathfrak{A}]$. (Hlavní ideál Lindenbaumovy algebry je právě tím, čemu se říká konečně axiomatisovatelná teorie.) Budiž nyní Π podle Lindenbaumovy věty existující Φ-nadprvoideál k I. Definujme (ke každému k a n přirozenému) n-člennou relaci ϱ_n^k mezi přirozenými čísly takto:

Čísla $l, m, \ldots, t$ (v udaném pořadí a v počtu n) jsou v relaci ϱ_n^k tehdy a jen tehdy, když je

$$[T_k(x_l, x_m, \ldots, x_t)] \in \Pi ,$$

kde $T_k(\ , \ , \ldots)$ označuje k-tou n-člennou predikátovou proměnnou. (Některé, po případě i všechny tyto relace mohou být prázdné; to neškodí — prázdné relace nevylučujeme.)

Nechme nyní k-tou n-člennou predikátovou proměnnou, označenou jako $T_k(\ , \ , \ldots)$, právě znamenat tuto relaci ϱ_n^k. (To tedy znamená na př. toto: mezi čísly, označenými třebas znaky x_3, x_1, x_2, x_5 máme relaci $T_2(\ , \ , \ ) = \varrho_4^2$ — čili je pravda, že $T_2(x_3, x_1, x_2, x_5)$ — tehdy a jen tehdy, je-li $[T_2(x_{x_3}, x_{x_1}, x_{x_2}, x_{x_5})] \in \Pi$; je-li tedy na př. $x_3 = 8, x_1 = 2, x_2 = 8, x_5 = 3$, pak čísla 8, 2, 8, 3 jsou v relaci ϱ_4^2 jestliže je $[T_2(x_8, x_2, x_8, x_3)] \in \Pi$. Zde je třeba si uvědomit, že definice relace ϱ_n^k a tedy i stanovení významu k-té n-členné predikátové proměnné nezávisí na libovolném současném konkretním významu jednotlivých individuových proměnných jako znaků pro čísla, nýbrž závisí jen na předem jednou provždy provedeném očíslování jednotlivých individuových proměnných. Při tom máme ovšem stále na mysli, že v daném současném významu individuových proměnných bylo každé číslo alespoň jednou označeno.)

Tím jsme však ve smyslu induktivního vybudování výrazů predikátového počtu postupně dali každému výrazu význam věty o ~~přirozených číslech~~, jakmile jsme jen fixovali číselný význam individuových proměnných.

Dokažme konečně, že libovolný výraz $\mathfrak{C}$ obdrží takto význam pravdivé věty tehdy a jen tehdy, když platí $[{}^*\mathfrak{C}] \in \Pi$, kde výraz ${}^*\mathfrak{C}$ vzniknul z výrazu $\mathfrak{C}$ tímto (právě shora na zvláštním případě naznačeným) způsobem:

Každá v $\mathfrak{C}$ volná individuová proměnná se nahradí tou individuovou proměnnou, jejíž číslo (t. j. hodnotu indexu) ona sama právě označuje; před tím se po případě — aby se z volné takto nestala vázaná proměnná — vhodně přejmenují vázané individuové proměnné v $\mathfrak{C}$, což jistě vzhledem k jejich konečnému počtu lze.

Důkaz tohoto tvrzení veďme indukcí podle složitosti výrazu.

a) Pro základní výrazy jsme potřebné právě zařídili.

b) Protože následkem prvoideálové vlastnosti ideálu Π je $[{}^* \sim \mathfrak{C}] \in \Pi$ tehdy a jen tehdy, když není $[{}^*\mathfrak{C}] \in \Pi$, přenáší se naše tvrzení zřejmě z výrazů tvaru $\mathfrak{C}$ na výrazy tvaru $\sim \mathfrak{C}$, neboť je očividně ${}^* \sim \mathfrak{C} = \sim {}^*\mathfrak{C}$.

Protože Π je Φ-ideál, platí $[{}^*\mathfrak{C}\,(x_r)] \in \Pi$ pro každé $r = 1, 2, \ldots$ tehdy a jen tehdy, je-li $[{}^*(x_i)\,\mathfrak{C}] \in \Pi$ pro jisté vhodné i (na př. pro první i větší, než jsou indexy individuových proměnných v $\mathfrak{C}$ a v $*\mathfrak{C}$). (K tomu si stačí jen uvědomit, že každé přirozené číslo bylo označeno a připomenout si definici infima v Lindenbaumově algebře.)

To však vzhledem k zřejmému vztahu $*(x_i)\,\mathfrak{C} = (x_i)\,*\mathfrak{C}$ znamená, že se naše tvrzení přenáší z výrazů tvaru $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(x_r)$ na výrazy tvaru $(x_i)\,\mathfrak{C}$. Konečně protože Π je Φ-prvoideál, je $[*\exists\, x_i\, \mathfrak{C}] \in \Pi$ tehdy a jen tehdy, když alespoň pro jedno $r = 1, 2, \ldots$ je $[*\mathfrak{C}(x_r)] \in \Pi$.

To však vzhledem k tomu, že každé přirozené číslo bylo označeno, vzhledem k definici suprema v Lindenbaumově algebře a vzhledem k zřejmé rovnosti $*\exists\, x_i\, \mathfrak{C} = \exists\, x_i\, *\mathfrak{C}$ znamená, že se naše tvrzení přenáší z výrazů tvaru $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(x_r)$ na výrazy tvaru $\exists\, x_i\, \mathfrak{C}$. — Tím je naše tvrzení — a tedy i Gödelova věta dokázána; neboť jsou-li $x_r, x_s, \ldots, x_u$ po řadě v $\mathfrak{A}$ případně vystupující volné individuové proměnné, což pišme jako $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(x_r, x_s, \ldots, x_u)$, pak následkem $[\sim \mathfrak{A}(x_r, x_s, \ldots, x_u)] \in \Pi$ přechází $\sim \mathfrak{A}$ v pravdivou větu, jestliže $x_r, x_s, \ldots, x_u$ byla po řadě nahrazena individuovými proměnnými, na př. $x_a, x_b, \ldots, x_h$, značícími po řadě čísla $r, s, \ldots, u$. To jest, $\mathfrak{A}$ přechází takto v nepravdivou vědu, c. b. d.

Uveďme ještě větu *Skolemovu-Löwenheimovu* v tomto nejsilnějším znění: *Každá bezesporná teorie, symbolisovatelná výrazy nižšího predikátového počtu, může být považována za teorii jistých relací mezi přirozenými čísly.*

D ů k a z se ve smyslu definice 3 provede doslova stejně, jako odvození Gödelovy věty o úplnosti, právě podané; jen na místo hlavního Φ-ideálu I, daného prvkem $[\sim \mathfrak{A}]$, nastoupí libovolný Φ-ideál — t. j. daná teorie.

K větě Skolemově-Löwenheimově (kterou lze jednodušeji odvodit i přímo) neškodí poznamenat toto: Tato věta byla svého času považována za jedno ze „sensačních" tvrzení matematické logiky. Ukazuje se totiž, že axiomaticky pojatá teorie množin může být formulována v symbolech nižšího predikátového počtu; to však dle Skolemovy-Löwenheimovy věty znamená, že ačkoli se v axiomatické teorii množin hovoří o nespočetných mohutnostech „libovolně velikých" a o „libovolných ordinálních číslech," přece možno tuto teorii považovat i za teorii jisté (ovšem velmi složité) dvojčlenné relace mezi přirozenými čísly, representující relaci náležení „ϵ" (mezi množinami).

Z této okolnosti netřeba ovšem nijak činit ten závěr, který činí pod vlivem idealistických filosofických názorů někteří orthodoxní zastánci t. zv. matematického intuicionismu, že totiž nespočetné mohutnosti a nespočetná ordinální čísla jsou „matematické iluse". Spíše je třeba právě naopak soudit, že výrazové a důkazové prostředky nižšího predikátového počtu jsou příliš chudé, než aby mohly plně vyjádřit tak složitý pojem, jako je vztah náležení.

Nehledě k této okolnosti je však třeba zdůraznit i to, že spočetný číselný model celé axiomatické teorie množin, který dle věty Skolemovy-Löwenheimovy existuje, nebyl explicitně ještě udán. Jsou dokonce přesvědčivé důvody pro to, že to ani není možné provést „efektivními," „konstruktivními" prostředky — alespoň pokud pod nimi rozumíme rekursivní prostředky aritmetiky, neboť by to v podstatě znamenalo podat důkaz bezespornosti nejen celé teorie množin, ale (tím spíše) v ní obsažené aritmetiky přirozených čísel; a to je dle známých Gödelových vět o nerozhodnutelnosti formalisované aritmetiky nemožné.

Na závěr několik poznámek k Lindenbaumově větě, a k ní — jak se dá ukázat — ekvivalentní Gödelově větě o úplnosti:

V poslední době bylo publikováno několik nových důkazů těchto vět. Bylo by zajímavé hlouběji porovnat různé důkazové metody a formulovat jejich společné jádro. Udáme některé z těchto metod.

a) Původní důkaz Gödelův. — Tento původní důkaz se opírá o dvě věci: předně o t. zv. Skolemovu normální formu výrazu. Podle Skolema (viz Hilbert-Ackermann [9]), ke každému výrazu predikátového počtu možno efektivně udat jiný výraz, který je formulí tehdy a jen tehdy, je-li formulí daný výraz, a který má při tom ten jednoduchý tvar, že všechny malé kvantifikace jsou provedeny před všemi velkými kvantifikacemi, obojí na počátku výrazu. Není-li formulí příslušná Skolemova forma, sestrojuje se pak systém číselných relací, splňujících opak této Skolemovy normální formy. Tento postup má však, tak jak je podán v učebnici Hilberta-Ackermanna [9], mezeru. Protože totiž Skolemova normální forma není nijak ekvivalentní (ve smyslu námi shora uvedené rovnosti $\Leftrightarrow$ mezi výrazy) s původně daným výrazem, je třeba ještě dokázat, že ze splnění negace Skolemovy normální formy se dá odvodit i číselné splnění negace původního výrazu. To je sice možné, avšak značně to prodlouží původní důkaz.

Jinak po matematické stránce splnění opaku Skolemovy normální formy výrazu, který není formulí, je v podstatě založeno na kompaktnosti Cantorova diskontinua, t. j. na okolnosti, že průnik přes klesající řetězce uzavřených neprázdných množin je neprázdný. Podobným způsobem, ale bez okliky přes Skolemovu normální formu je proveden důkaz Gödelovy věty v učebnici A. Mostowského [11].

b) Na podobné, poněkud rozšířené myšlence je založena metoda důkazu Gödelovy (a Lindenbaumovy) věty, implicite obsažená již v práci sovětského algebraika Malceva [12], který jí užil k dokazování t. zv. globálních teoremů abstraktní algebry (především teorie grup) z lokálních předpokladů; tato metoda byla propracována později jednak s hlediska matematické logiky abstraktní algebry v monografii [4], jednak v samotné teorii grup (bez užití termínů matematické logiky) v učebnici Kurošově [13]. (Je pozoruhodné, že autor [4] se o Malcevovi vůbec nezmiňuje.)

Tato stránka Lindenbaumovy a Gödelovy věty patří k matematicky nejplodnějším obratům, které se zrodily na půdě matematické logiky. Jejich abstraktní jádro bylo znovu objasněno v práci [14], ukazující, že podstatou úsudků tohoto druhu je TICHONOVOVA věta o bikompaktnosti kartézského součinu libovolného počtu bikompaktních činitelů.

c) Zcela jiného druhu je již zmíněný důkaz Sikorského [8], založený na BAIREOVĚ větě o kategorii. Bylo by právě neobyčejně zajímavé zjistit, nemají-li obě metody přece jen něco společného.

d) Gödelovu a Lindenbaumovu větu možno však i dokazovat každou metodou, jaké se v podstatě užívá v důkazu Loomisovy věty o tom, že každá Booleova σ-algebra je homomorfním obrazem množinového σ-tělesa. Na tom je založen autorův důkaz (15) a — jiným způsobem — i důkaz právě podaný (který má ovšem své předchůdce, zmíněné shora). Při tom originální Loomisův „diagonální obrat" v jeho původním důkazu možno vložit ve vhodné formulaci přímo do důkazu Lindenbaumovy a Gödelovy věty.

Je tedy vidět, že se zde na půdě matematické logiky setkává v Lindenbaumově a v Gödelově větě o úplnosti několik základních matematických poznatků, jejichž vzájemný vztah by bylo třeba přesněji objasnit.

LITERATURA

[1] *A. Tarski*, Grundzüge des Systemenkalküls, Fund. Math. *25* (1935), 503—526.

[2] *A. Tarski*, Grundzüge des Systemenkalküls, Fund. Math. *26* (1936), 283—301.

[3] *L. Rieger*, On Free $\aleph_\xi$-complete Boolean Algebras, Fund. Math. *38* (1951), 35—52.

[4] *A. Robinson*, On the Metamathematics of Algebra, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam 1951.

[5] *D. Hilbert-P. Bernays*, Grundlagen der Mathematik, II, Berlin 1939.

[6] *L. Henkin*, The completeness of the first order functional calculus, Journ. Symb. L., *14* (1949), 42—48.

[7] *R. Sikorski*, On the representation of Boolean algebras as fields of sets. Fund. Math. *35* (1948), 247—258.

[8] *H. Rasiowa, R. Sikorski*, A Proof of the Completeness Theorem of Gödel, Fund. Math. *37* (1950), 193—200.

[9] *D. Hilbert, W. Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik, 2. vyd. Berlin 1938.

[10] *L. Rieger*, O algebře predikátového počtu, Litograf. tisk Ústř. mat. ústavu 1951.

[11] *A. Mostowski*, Logika matematyczna, Monografie matematyczne XVIII, Warszawa 1948.

[12] *A. I. Malcev*, Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik, Matem. Sb. 1, *43* (1936), 323—336.

[13] *A. G. Kuroš*, Těorija grupp, 2. vyd. Moskva 1953.

[14] *J. Łoś, C. Ryll-Nardzewski*, On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs, Fund. Math. *38* (1951), 233—237.

[15] *L. Rieger*, O sčetnych obobščennych σ-algebrach i novom dokazatěľstve těoremy Gedeľa o polnotě. Čechosl. mat. ž. 1, *76* (1951), 33—49.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Л. РИГЕР (Lad. Rieger), Прага.

(Поступило в редакцию 26. VII. 1954 г.)

В статье дано сравнительно простое алгебраическое доказательство теоремы Линденбаума о дополнимости каждой элементарной непротиворечивой теории. Теоремы Геделя (о полноте) и Левенхайма-Сколема истолкованы как следствия. Дано сравнение различных последних методов доказательства теорем Линденбаума и Геделя. В работе содержится также заметка о связи с логикой теории вероятностей.

Summary

ON A FUNDAMENTAL THEOREM OF MATHEMATICAL LOGIC

LADISLAV RIEGER, Praha.

(Received July 26, 1954.)

A relatively simple algebraic proof of the LINDENBAUM theorem on completibility of any consistent elementary theory is given. The completeness-theorem of GÖDEL and the LÖWENHEIM-SKOLEM theorem are discussed as corollaries. Various recent methods of proof of the Lindenbaum and the Gödel completeness theorems are compared. A mention is made concerning a relationship to the logic of probability.

RŮZNÉ

O HYPEROSKULAČNÍCH KUŽELOSEČKÁCH

VLADIMÍR ŠKORPÍK, Praha.

(Došlo dne 26. srpna 1954.) DT : 513.516.3

V projektivní geometrii se řeší úloha žádající sestrojení kuželosečky k_x, která hyperoskuluje danou kuželosečku k v daném bodě A, t. j. má s ní v tomto bodě čtyrbodový styk, a prochází daným bodem O. Obměňme úlohu tak, že bod A, ve kterém se kuželosečky k a k_x hyperoskulují, nebude dán, za to však místo dosavadní jedné dodatkové podmínky pro určení kuželosečky k_x budou dány dvě, a to buď její dva body nebo bod a tečna nebo posléze dvě tečny. Těmito obměnami dospějeme ke čtyřem úlohám. Ty v tomto článku prostudujeme. Znějí takto:

1.

K dané jednoduché kuželosečce k jest sestrojiti hyperoskulační kuželosečku k_x tak,

(I) ... *aby procházela dvěma danými body O_1, O_2.*
(II) ... *aby se v daném bodě T dotýkala dané přímky t.*
(III) ... *aby procházela daným bodem O a dotýkala se dané přímky o, neprocházející bodem O.*
(IV) ... *aby se dotýkala dvou daných přímek o_1, o_2.*

O daných bodech, jimiž má k_x procházet, budeme předpokládat, že neleží na k. Rovněž dané přímky, jichž se má k_x dotýkat, nejsou tečnami dané křivky k. Úloha (IV) je duální k (I), takže její řešení vyplyne dualisací z řešení úlohy (I). Všechny dané prvky v úlohách předpokládejme reálné.

2.

Hyperoskulační kuželosečka je zvláštní případ kuželosečky *dvojstyčné*,[1]) kdy dva body dotyku splynuly v jediný — bod hyperoskulace. V ten zde přešel

[1]) *Dvojstyčnou* zde rozumějme kuželosečku, která se kuželosečky k dotýká ve dvou bodech.

též pól Y spojnice obou dotykových bodů. Řešiti úlohy (I) až (III) v podstatě znamená stanovit geometrické místo pólů Y všech dvojstyčných i hyperoskulačních kuželoseček křivky k, jež splňují obě dodatkové podmínky příslušné úlohy, a zjistit průsečíky tohoto geometrického místa s danou křivkou k. Ty pak jsou body hyperoskulace těch kuželoseček, které jsou řešením úlohy.

Je-li rovnice dané jednoduché reálné kuželosečky k v projektivních bodových souřadnicích

$$f(x) = \sum_1^3 a_{rs} x_r x_s = 0 \quad (a_{rs} = a_{sr}) \,, \tag{1}$$

resp.

$$f(x) \equiv \sum_1^3 x_r f_r(x) = 0 \,, \tag{2}$$

a jsou-li y_1, y_2, y_3 souřadnice zmíněného pólu Y, zní rovnice dvojstyčné (resp. hyperoskulační) kuželosečky takto:

$$c_1 f(x) - c_2 [\sum_1^3 x_r f_r(y)]^2 = 0 \,. \tag{3}$$

Prochází-li kuželosečka vyjádřená rovnicí (3) daným bodem [v úloze (I) bodem O_1, v úloze (II) bodem T a v úloze (III) bodem O] a byl-li tento bod zvolen za souřadnicový vrchol $O_1(1, 0, 0)$, nabude rovnice tvaru:

$$f_1^2(y)\, f(x) - a_{11} [\sum_1^3 x_r f_r(y)]^2 = 0, \text{ kde } a_{11} \neq 0 \,. \tag{4}$$

Tato rovnice je východiskem pro další studium všech tří úloh, neboť lze z ní odvodit předepsáním další dodatkové podmínky rovnici geometrického místa pólů Y.

3.

V úloze (I) zvolme další daný bod O_2 za souřadnicový vrchol $O_2(0, 1, 0)$, takže $a_{22} \neq 0$, a dosaďme jeho souřadnice do rovnice (4). Vznikne tím rovnice:

$$a_{22} f_1^2(y) - a_{11} f_2^2(y) = 0 \,,$$

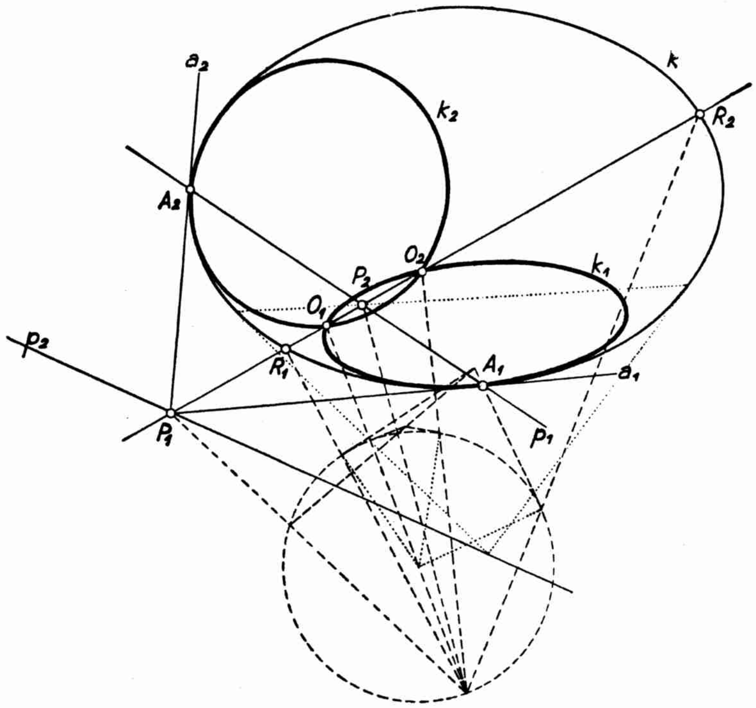
která ukazuje, že geometrickým místem pólů Y je zde kuželosečka g složená ze dvou (různých) přímek p_1, p_2, vyjádřených rovnicemi:

$$p_1 \ldots \sqrt{a_{22}}\, f_1(x) - \sqrt{a_{11}}\, f_2(x) = 0 \,, \quad p_2 \ldots \sqrt{a_{22}}\, f_1(x) + \sqrt{a_{11}}\, f_2(x) = 0 \,.$$

Jde o sdružené poláry kuželosečky k. Jejich póly $P_1(\sqrt{a_{22}}, -\sqrt{a_{11}}, 0)$, $P_2(\sqrt{a_{22}}, \sqrt{a_{11}}, 0)$ leží zřejmě na spojnici daných bodů $O_1(1, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0)$, oddělují tyto body harmonicky a představují dvojici sdružených pólů kuželosečky k.

Jádrem konstruktivního řešení úlohy (I) je tedy stanovení bodů P_1, P_2 na přímce O_1O_2 jako společné družiny involuce harmonických pólů kuželosečky k a další involuce, v níž jsou body O_1, O_2 samodružnými (viz obr. 1).

Úloha má obecně 4 řešení, neboť tolik mají průsečíků kuželosečky k a g. Je-li přímka O_1O_2 tečnou kuželosečky k v určitém bodě R, splyne jeden z bodů P_1, P_2 s R a geometrické místo g je pak složeno z přímky O_1O_2 a z poláry kuželosečky k pro pól P, harmonicky sdružený s R vzhledem k bodům O_1, O_2. Tři průsečíky kuželoseček k a g zde splývají v jediný bod R, takže úloha (I) má v tomto případě pouze dvě řešení, z nichž jedno je triviální (kuželosečka složená z dvojnásob počítané přímky O_1O_2). V ostatních případech jsou 4 řešení, některá (po příp. všechna) mohou však být imaginární.

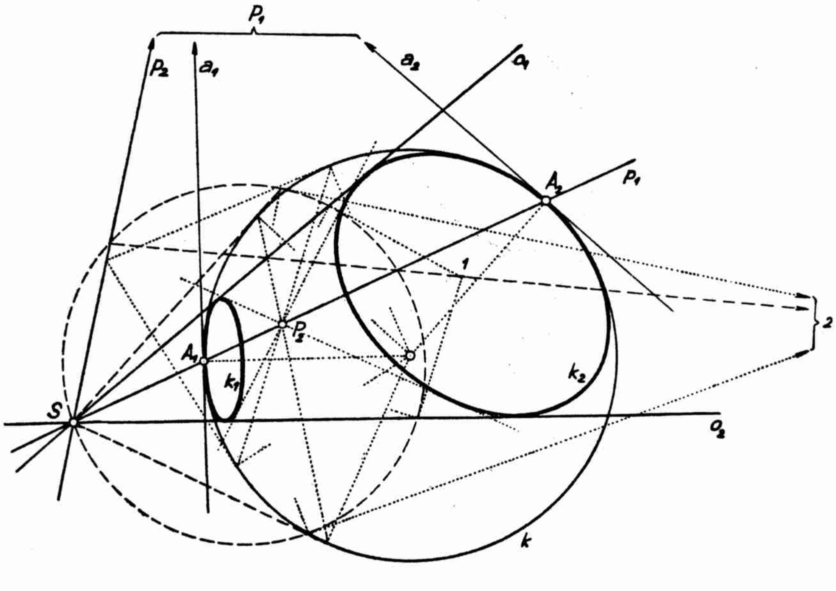


Obr. 1.

Z hyperoskulačních kuželoseček, které představují řešení úlohy (I), jsou pouze ty reálné, jejichž bod dotyku s k je reálný. Otázka reálnosti řešení úlohy (I) je totožná s otázkou reálnosti tečen vedených z bodů P_1, P_2 ke k. Záleží na bodech P_1, P_2, jsou-li reálné či imaginární, a u reálných na tom, jsou-li vzhledem ke k vnější či vnitřní. To pak dále závisí na poloze bodů O_1, O_2 vzhledem ke k. Jsou tyto možnosti:

Přímka O_1O_2 se buď dotýká kuželosečky k (případ již shora uvážený), nebo ji protíná ve dvou různých bodech R_1, R_2. Ty mohou být buď 1. imaginární sdružené nebo 2. reálné. V případě 2. se bodové dvojice R_1R_2 a O_1O_2 navzájem buď a) oddělují nebo b) neoddělují.

V případě 1. je involuce harmonických pólů kuželosečky k na přímce O_1O_2 eliptická, takže společná bodová družina P_1P_2 dvou výše zmíněných involucí je reálná. Oba body P_1, P_2 jsou pro k vnější, neboť leží na přímce, která k reálně neprotíná. Všechna 4 řešení jsou v tomto případě reálná. V případě 2a) jsou P_1, P_2 samodružné body eliptické involuce, určené (reálnými) družinami O_1O_2, R_1R_2, a tudíž imaginární. Všechna 4 řešení úlohy jsou pak imaginární. V případě 2b) jsou P_1, P_2 samodružné body hyperbolické involuce, určené družinami O_1O_2 a R_1R_2, a tudíž reálné. Jeden je pro k vnější, druhý vnitřní, neboť jsou harmonickými póly kuželosečky k na přímce, která protíná k reálně. V tomto případě má úloha (1) dvě řešení reálná a dvě imaginární.



Obr. 2.

Dualisací úvah o úloze (I) dospějeme k řešení a vymezení úlohy (IV). Jádrem konstruktivního řešení této úlohy je stanovení společné přímkové družiny p_1p_2 dvou involucí ve svazku $S(o_1, o_2)$, a to involuce harmonických polár kuželosečky k a involuce, v níž jsou přímky o_1, o_2 samodružnými[2]) (viz obr. 2).

4.

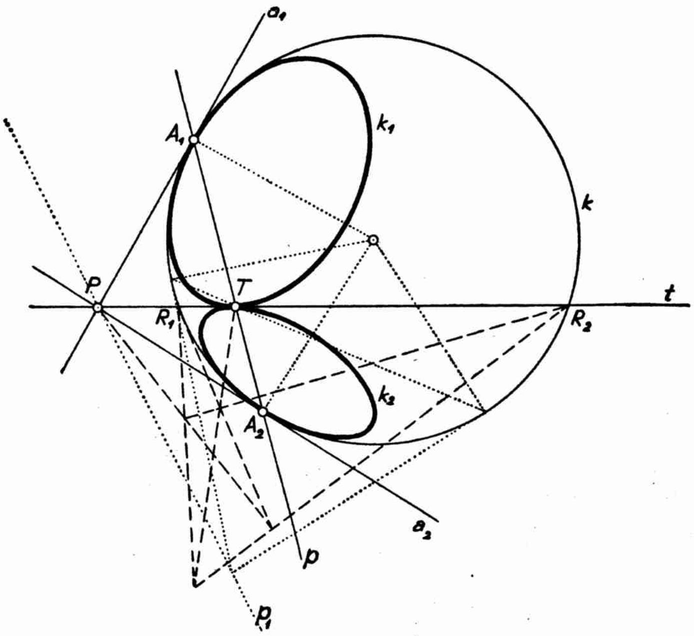
V úloze (II) zvolme danou přímku t za souřadnicovou osu $x_3 = 0$. Má-li se kuželosečka k_x dotýkat v bodě $T \equiv O_1(1, 0, 0)$ přímky $t \ldots x_3 = 0$, musí mít rovnice

[2]) Svazkem neboli hvězdicí S rozumějme soubor všech přímek v rovině, které procházejí bodem $S(o_1, o_2)$. Tento geometrický útvar je vyjádřen lineární rovnicí v přímkových souřadnicích. Jde tedy o duální pojem k pojmu přímky jakožto souboru bodů.

$$[a_{22}f_1^2(y) - a_{11}f_2^2(y)]\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + 2f_1(y)[a_{12}f_1(y) - a_{11}f_2(y)]\,\frac{x_2}{x_1} = 0\,,$$

jež vznikne z rovnice (4) dosazením nuly za x_3 a vydělením x_1^2, pro poměr $x_2 : x_1$ oba kořeny nulové. To vyžaduje, aby koeficient lineárního členu byl roven nule. Z této podmínky plyne pak rovnice geometrického místa pólů Y. Je jím zřejmě kuželosečka složená ze dvou sdružených polár p_1, p dané kuželosečky k, jejichž rovnice znějí:

$$p_1 \ldots f_1(x) = 0\,, \quad p \ldots a_{12}\,f_1(x) - a_{11}\,f_2(x) = 0\,.$$



Obr. 3.

Jde tu o poláry bodů $T \equiv O_1$ a $P(a_{12}, -a_{11}, 0)$. Jakožto sdružené póly kuželosečky k oddělují tyto body dvojici průsečíků R_1, R_2 dané kuželosečky k a přímky t harmonicky. Konstrukce bodu P a další postup řešení jsou zde zřejmé (viz obr. 3). Úloha (II) má 4 řešení; dvě z nich jsou triviální (kuželosečky složené z dvojnásob počítaných tečen vedených z bodu T ke křivce k).

Otázka reálnosti řešení je závislá na poloze bodu T a přímky t vzhledem ke kuželosečce k. Přímka t protíná k ve dvou bodech různých, a to buď 1. imaginárních sdružených nebo 2. reálných. V případě 1. jsou oba body T a P pro k vnější, takže všechna řešení jsou reálná. V případě 2. záleží na poloze bodu T: Je-li T pro k vnější, je P vnitřní a obráceně. Dvě řešení jsou zde reálná a dvě imaginární. K *jednoduchým* reálným kuželosečkám hyperoskulačním dospějeme však v případě 2. pouze tehdy, je-li bod T pro k vnitřní.

5.

V úloze (III) zvolme průsečíky dané přímky o a dané kuželosečky k za souřadnicové vrcholy $O_2(0, 1, 0)$, $O_3(0, 0, 1)$, takže $a_{22} = a_{33} = 0$, a mysleme si rovnici (4) upravenu na obecný tvar rovnice kuželosečky:

$$\sum_1^3 b_{rs} x_r x_s = 0 \,, \quad (b_{rs} = b_{sr}) \,.$$

Potom podmínka, že se kuželosečka k_x má dotýkat dané přímky $o \equiv O_2O_3$ ($x_1 = 0$), je vyjádřena rovnicí:

$$b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0 \,,$$

kdež

$$b_{22} = -a_{11}f_2^2(y) \,, \quad b_{33} = -a_{11}f_3^2(y) \,, \quad b_{23} = a_{23}f_1^2(y) - a_{11}f_2(y)\, f_3(y) \,,$$

takže platí:

$$a_{11}^2 f_2^2(y)\, f_3^2(y) - [a_{23}f_1^2(y) - a_{11}f_2(y)\, f_3(y)]^2 = 0 \,,$$

t. j.

$$a_{23}f_1^2(y)[2a_{11}f_2(y)\, f_3(y) - a_{23}f_1^2(y)] = 0 \,.$$

Koeficient a_{23} není roven nule. Kdyby měl být roven nule, musela by být daná kuželosečka k složená; podle textu úlohy je však jednoduchá.

Geometrické místo pólů Y je zde tedy složeno z poláry $p[f_1(x) = 0]$ daného bodu $O \equiv O_1$ pro kuželosečku k[3]) a z kuželosečky m, vyjádřené rovnicí:

$$2a_{11}f_2(x)\, f_3(x) - a_{23}f_1^2(x) = 0 \,. \tag{5}$$

Tato kuželosečka patří, jak je patrno z rovnice (5), do svazku kuželoseček, které se dotýkají přímek $p_2[f_2(x) = 0]$, $p_3[f_3(x) = 0]$ v průsečících s přímkou $p[f_1(x) = 0]$. Přímka p je tedy pro tuto kuželosečku m polárou bodu $P(p_2, p_3)$, který je zároveň pólem přímky o pro kuželosečku k. Ve svazku jsou pouze dvě složené kuželosečky, a to $f_2(x)\, f_3(x) = 0$ a $f_1^2(x) = 0$. Jelikož $a_{11} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, není naše kuželosečka m totožná se žádnou z nich a je tudíž jednoduchá. Daná přímka $o[x_1 = 0]$ je pro kuželosečku m polárou daného bodu $O \equiv O_1$, jak zjistíme dosazením souřadnic 1, 0, 0 za z_1, z_2, z_3 do rovnice poláry křivky m, jež zní:

$$z_1a_{11}(2a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})\, x_1 - z_2a_{23}[a_{12}^2x_2 - 2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})\, x_3] +$$
$$+ z_3a_{23}[2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})\, x_2 - a_{13}^2x_3] = 0 \,.$$

Sestrojením kuželosečky m a vyhledáním jejích průsečíků s danou kuželosečkou k by byla úloha (III) v podstatě rozřešena. Průsečíky lze však stanoviti přímo — bez konstrukce křivky m — postupem, který odvodíme.

---

[3]) Tuto součást geometrického místa vyplňují póly Y odpovídající dvojstyčným a hyperoskulačním kuželosečkám *složeným* z dvojnásob počítaných přímek hvězdice O.

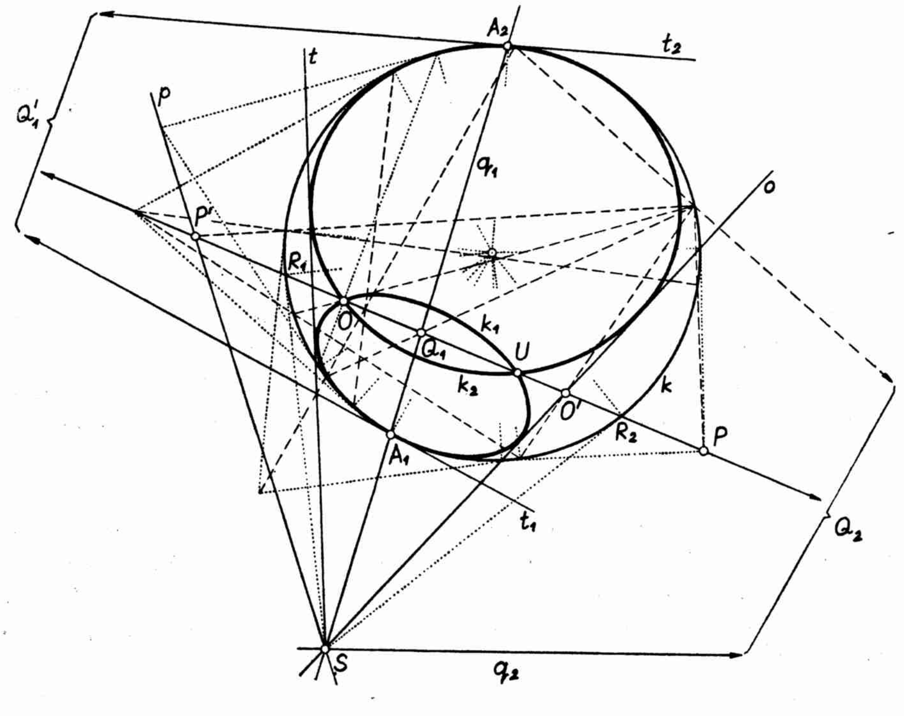
Protože $a_{22} = a_{33} = 0$, lze zde rovnici dané kuželosečky k — zvolíme-li P za jednotkový bod — psáti též takto:

$$2a_{23}f_2(x)\,f_3(x) - Ax_1^2 = 0\,, \tag{6}$$

kde A je diskriminant kuželosečky.

Průsečíky křivek k a m tvoří basi svazku kuželoseček vyjádřeného rovnicí, kterou lze sestaviti pomocí rovnic (5) a (6) a která zní:

$$2a_{11}\,f_2(x)\,f_3(x) - a_{23}\,f_1^2(x) - u[2a_{23}\,f_2(x)\,f_3(x) - Ax_1^2] = 0\,. \tag{7}$$



Obr. 4.

Pro hodnotu parametru $u = a_{11} : a_{23}$ vyjadřuje rovnice (7) kuželosečku složenou. Rovnici lze pak upraviti na tvar

$$a_{11}Ax_1^2 - a_{23}^2f_1^2(x) = 0\,,$$

který ukazuje, že kuželosečka je složena z přímek q_1, q_2 o rovnicích:

$$q_1 \ldots \sqrt{a_{11}A}\; x_1 - a_{23}f_1(x) = 0\,, \quad q_2 \ldots \sqrt{a_{11}A}\; x_1 + a_{23}f_1(x) = 0\,. \tag{8}$$

Z rovnic (8) je patrno, že přímky q_1, q_2 procházejí průsečíkem přímek $o[x_1 = 0]$, $p[f_1(x) = 0]$ a oddělují je harmonicky.

Harmonická čtveřina přímková opq_1q_2 protíná přímku OP v harmonické čtveřině bodové $O'P'Q_1Q_2$ (viz obr. 4). Body Q_1, Q_2 tvoří tedy na přímce OP družinu involuce určené samodružnými body $O'P'$.

Bodová dvojice Q_1Q_2 představuje zároveň družinu jiné involuce, kterou na přímce OP vytíná (podle Desarguesovy poučky) svazek kuželoseček, vyjádřený rovnicí (7). Jsouť body Q_1, Q_2 dvojicí průsečíků přímky OP s kuželosečkou tohoto svazku složenou z přímek q_1, q_2. Známou družinou této involuce jsou průsečíky R_1, R_2 přímky OP s danou kuželosečkou k; ty jsou zároveň samodružnými body involuce harmonických pólů kuželosečky k, t. j. involuce (OP', PO'). Další družinou involuce vyťaté svazkem kuželoseček na přímce OP jsou průsečíky M_1, M_2 přímky OP s kuželosečkou m, vyjádřenou rovnicí (5).

Body M_1, M_2 lze stanoviti jako samodružné prvky involuce harmonických pólů kuželosečky m na přímce OP. Jednou družinou této involuce jsou body P, P', jinou pak body O, O'.

Při konstruktivním řešení úlohy (III) lze tedy postupovati takto:

Pro danou kuželosečku k sestrojíme k danému bodu O poláru p a k dané přímce o pól P. Vyznačíme průsečíky $O'(o, OP)$, $P'(p, OP)$, $S(o, p)$. Na přímce OP sestrojíme společnou družinu Q_1Q_2 involucí (X_1, X_2) a (O', P'). [Body X_1, X_2 určíme při tom jako společnou družinu involucí (OP', PO'), (OO', PP').] Přímky SQ_1, SQ_2 protnou danou kuželosečku k v hledaných bodech hyperoskulace.

Úlohu (III) lze řešiti též duálním konstruktivním postupem. Ten vede k týmž hyperoskulačním kuželosečkám jako postup právě uvedený.

Je-li daná přímka o pro k polárou bodu O, mají kuželosečky k a m pro tento bod tutéž poláru. Dotýkají se pak ve dvou bodech, takže úloha (III) má v tomto případě pouze dvě (triviální) řešení, a to dvojnásob počítané tečny, vedené z bodu O ke kuželosečce k. (K triviálním řešením dále nepřihlížejme.)

Není-li přímka o pro k polárou bodu O, má úloha (III) čtyři řešení. Zabývejme se otázkou jejich reálnosti.

Mají-li dvě reálné kuželosečky v určitém bodě styk 3. řádu, jsou reálné body kterékoli z nich (s výjimkou bodu hyperoskulace) vzhledem k druhé křivce buď všechny vnitřní nebo všechny vnější. Má-li mít tedy úloha (III) aspoň jedno řešení reálné, musí být daný bod O i bod, v němž se daná přímka o dotýká hledané hyperoskulační kuželosečky, buď oba vnitřní nebo oba vnější vzhledem k dané kuželosečce k, t. j. — máme-li na mysli rozdělení roviny křivkou k na dvě části — musí bod O ležeti v jiné části roviny než pól P přímky o pro k. Dokážeme, že při splnění této podmínky má naše úloha dvě řešení reálná a dvě imaginární.

Za uvedeného předpokladu protíná přímka OP kuželosečku k reálně, takže involuce harmonických pólů této kuželosečky $(OP', PO') \equiv (R_1, R_2)$ je hyperbolická. Protože dvojice bodů OP', PO' představují družiny sdružených pólů, leží bod O v jiné části roviny než P', právě tak jako bod P v jiné části roviny než O'. Protože pak O a P leží v nestejných částech roviny, musí být body O, O' buď oba vnitřní a body P, P' zároveň oba vnější nebo obráceně. Z toho plyne, že involuce (OO', PP') je rovněž hyperbolická, neboť její družiny se neoddělují. Společná družina dvou hyperbolických involucí, jejichž určující družiny jsou sestaveny z *týchž* čtyř prvků, je vždy imaginární. Jelikož naše dvě involuce (OP', PO'), (OO', PP') jsou hyperbolické a jejich určující družiny jsou sestaveny z *týchž* čtyř bodů O, P, O', P', jest jejich společná družina X_1X_2 imaginární. Involuce (X_1, X_2) je tudíž eliptická. Společná družina Q_1Q_2 involucí (X_1, X_2) a (O', P') je potom reálná. Body X_1, X_2 jsou samodružnými prvky involuce, kterou na přímce OP vytíná svazek kuželoseček, vyjádřený rovnicí (7), a jejímiž družinami jsou bodové dvojice R_1R_2 a Q_1Q_2. Jelikož involuce je eliptická, musí se družiny R_1R_2 a Q_1Q_2 oddělovat, takže jeden z bodů Q_1, Q_2 je vzhledem ke k vnitřní a druhý vnější. Protože pak bod S je pro k pólem přímky OP, která k protíná reálně, je vzhledem ke kuželosečce k bodem vnějším. Jeho spojnice s vnitřním bodem, ležícím na poláře OP, protíná kuželosečku reálně, kdežto spojnice s vnějším bodem, ležícím na této přímce, protne k imaginárně. Jedna z přímek $q_1 \equiv SQ_1$, $q_2 \equiv SQ_2$ vede proto ke dvěma reálným řešením naší úlohy, zatím co druhá ke dvěma řešením imaginárním, jak jsme chtěli dokázat.[4])

6.

Při studiu úloh (I) až (III) jsme dospěli k závěrům, které lze shrnout v tuto poučku:

Každé kuželosečce k_x, která je k dané jednoduché kuželosečce k dvojstyčná nebo hyperoskulační a která splňuje některou z těchto tří dvojic dodatkových podmínek:

1. *prochází dvěma body O_1, O_2, které neleží na k,*
2. *dotýká se v bodě T, jenž neleží na k, přímky t, která není tečnou křivky k,*
3. *prochází bodem O, jenž neleží na k, a dotýká se přímky o, která neprochází bodem O a není tečnou křivky k,*

buď přiřaděn určitý bod roviny, a to u dvojstyčné kuželosečky průsečík společných tečen křivek k a k_x, u hyperoskulační kuželosečky bod hyperoskulace.

---

[4]) Reálné kuželosečky k_1, k_2, které představují řešení úlohy (III), se protínají mimo daný bod O ještě v dalším reálném bodě přímky OP.

Důkaz. Pól Q_1' přímky q_1 vzhledem ke k leží zřejmě na OP, protože q_1 prochází pólem S přímky OP. Body Q_1', Q_1 oddělují tedy průsečíky R_1, R_2 přímky OP s kuželosečkou k harmonicky. Vyhledáme-li na přímce OP takový bod U, který spolu s O odděluje harmonicky bodovou dvojici $Q_1'Q_1$, má tato dvojice $Q_1'Q_1$ stejný význam vzhledem k dané kuželosečce k a k bodům O, U jako dvojice P_1P_2 v úloze (I) vzhledem k bodům O_1, O_2. Podle závěrů o úloze (I) můžeme tvrdit, že body O, U lze proložit dvě reálné kuželosečky h_1, h_2, z nichž jedna hyperoskuluje k v jednom z průsečíků A_1, A_2 přímky q_1 s kuželosečkou k a druhá v druhém. Protože pak bodem A_1, právě tak jako bodem A_2, lze vést pouze jedinou kuželosečku, která má s k styk 3. řádu a prochází daným bodem O, je dvojice kuželoseček h_1, h_2 nutně totožná s dvojicí k_1, k_2, k níž jsme dospěli konstruktivním postupem úlohy (III).

Geometrické místo všech takto přiřaděných bodů je složeno v případě

sub 1. *ze dvou přímek, jejichž póly představují společnou družinu dvou involucí na přímce O_1O_2, a to involuce (O_1, O_2) a involuce harmonických pólů kuželosečky k,*[5])

sub 2. *z přímky t a z poláry bodu P, který na přímce t tvoří s bodem T dvojici harmonických pólů kuželosečky k,*

sub 3. *z přímky o a z jednoduché kuželosečky m, pro kterou bod O a přímka o představují pól a poláru a která se ve svých průsečících s polárou bodu O pro k dotýká tečen kuželosečky k, sestrojených v průsečících přímky o s k.*

POZNÁMKA O INVERSNÍCH PRVCÍCH V TOPOLOGICKÝCH OKRUZÍCH

JIŘÍ BAROT, Brno.

(Došlo dne 11. listopadu 1954.) DT:519.48

I. M. GELFAND[1]) dokázal řadu vět o inversních prvcích v normovaných okruzích. Účelem této poznámky je důkaz jedné věty pro okruhy topologické.

Buď R okruh, který je současně L^*-prostorem;[2]) předpokládejme, že jsou splněny tyto axiomy:

$$x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x + y,\ x_n - y_n \to x - y,\ x_n z \to xz,\\ zx_n \to zx\,.$$

Pak R nazveme topologickým okruhem.

Věta. *Buď R topologický okruh s jednotkou e; buď $0 \neq x \in R$ prvek, pro který existuje prvek $z \in R$ tak, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} x^\nu = z$.[3])

---

[5]) Z této části poučky lze odvoditi jednoduchou úvahou poučku, kterou uvádí kniha *Kadeřávek-Klíma-Kounovský*: „*Deskriptivní geometrie*" (II. díl) a která zní takto:

„*Kuželosečky, dvakrát se dotýkající dané kuželosečky (námi nazvané dvojstyčné) a procházející dvěma danými body, jsou rozloženy do dvou soustav, dotýkajících se dané kuželosečky vždy v bodech téže kvadratické involuce. Středy těchto involucí jsou samodružné body involuce, určené průsečíky spojnice daných bodů s danou kuželosečkou a oběma danými body.*"

Středy uvedených kvadratických involucí jsou zřejmě totožné s našimi body P_1, P_2, jejichž poláry pro k tvoří geometrické místo pólů spojnic dotykových bodů jednotlivých dvojstyčných kuželoseček.

Citovaná poučka je v uvedené knize dokázána synthetický za pomoci rotačních ploch 2. stupně, tedy jiným postupem, než jsme zvolili v tomto článku.

---

[1]) *I. M. Gelfand*, Normierte Ringe, Matematičeskij sbornik T 9.

[2]) Definice okruhu: *B. L. van der Waerden*, Moderne algebra; definice prostoru L^*: *Kuratowski*, Topologie I, (1948), str. 83.

[3]) Pro $x \neq 0$ klademe $x^0 = e$.

Tvrzení. K prvku $x^* = e - x$ existuje prvek inversní.

Důkaz. Označme $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu$. Platí pak $x^n = s_n - s_{n-1} \to z - z = 0$, takže $s_n x^* = (e + x + \ldots + x^n)(e - x) = e + x + \ldots + x^n - x - x^2 - \ldots - x^{n+1} = e - x^{n+1} \to e$. Protože zároveň $s_n x^* \to z x^*$, máme $e = z x^*$, takže z je zleva inversní prvek k x^*. Zcela analogicky dokážeme, že z je zprava inversní prvek k x^*. Odtud plyne, že z je (jediný) prvek inversní k x^*.

Důsledek 1. *Buď R normovaný okruh s jednotkou e, buď $0 \neq x \in R$ prvek, pro nějž $\|x\| < 1$. Pak k prvku $x^* = e - x$ existuje prvek inversní.*

Vskutku, R je topologický okruh ve smyslu definice. Dále je

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \left\| \sum_{\nu=n+1}^{n+p} x^\nu \right\| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \|x\|^\nu \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \|x\|^\nu = \frac{\|x\|^{n+1}}{1 - \|x\|},$$

takže posloupnost $\{s_n\}$ je cauchyovská a tedy konvergentní. Existuje proto $\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu$. Tvrzení nyní plyne z dokázané věty.

Prvek x v okruhu se nazývá nilponentní, existuje-li přirozené číslo p tak, že $x^p = 0$.

Důsledek 2. *Buď R okruh s jednotkou e, buď $0 \neq x \in R$ jeho nilpotentní prvek. Pak k prvku $x^* = e - x$ existuje prvek inversní.*

Vskutku, definujeme-li pro libovolnou dvojici prvků $x, y \in R$ vzdálenost $\varrho(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ když } x = y \\ 1, \text{ když } x \neq y \end{cases}$; pak R je topologický okruh. Platí $\lim_{n\to 0} \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{p-1} x^\nu$, značí-li p nejmenší přirozené číslo, pro které je $x^p = 0$. Tvrzení zase plyne z dokázané věty.

Aplikace 1. Buď $\boldsymbol{M}$ množina všech čtvercových matic řádu n v tělese komplexních čísel. Při obvyklé definici součtu a součinu dvou matic je $\boldsymbol{M}$ zřejmě okruh. Podle důsledku 2 dostáváme tento výsledek: Je-li $A \in \boldsymbol{M}$ nilpotentní matice, pak k matici $E - A$ existuje matice inversní.

Aplikace 2. Nechť značí P prostor typu F,[4]) který však není typu B.[5]) Množina všech jeho lineárních zobrazení do sebe tvoří okruh, definujeme-li $(U + V)(x) = U(x) + V(x)$, $(UV)(x) = U[V(x)]$, pro každé $x \in P$. Definujme pro posloupnost lineárních zobrazení $\{U_n\}$ a pro lineární zobrazení U: $U_n \to U$, když $U_n(x) \to U(x)$ pro každé $x \in P$. Systém všech lineárních zobrazení prostoru P do sebe tvoří pak topologický okruh, v němž je identické zobrazení E jednotkou.

---

[4]) *S. Banach*, Theorie des opérations linéaires, Warszawa 1932. Zde čtenář najde definici pojmů: prostor typu F, prostor typu B, lineární zobrazení.

[5]) Takové jsou na př. prostory (s), (S); *Banach*, l. c., str. 9, 10.

Z věty pak plyne:

Buď $0 \neq A$ *lineární zobrazení prostoru* P *do sebe, pro něž existuje lineární zobrazení* S *tak, že* $\sum_{\nu=0}^{n} A^{\nu} \to S$. *Pak zobrazení* $E - A$ *má lineární zobrazení inversní.*

GRAFICKÉ ŘEŠENÍ JEDNÉ GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Pan *Karel Mišoň*, Most, zaslal redakci tuto poznámku o grafickém řešení rovnice

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = c ,$$

kde a, b, c jsou předem daná čísla a φ je neznámá; předpokládá se ovšem, že nejsou obě čísla a, b zároveň rovna nule.

Zvolíme v rovině pravoúhlý souřadnicový systém s osami x, y a s počátkem O. Sestrojíme body $A = [0, b]$, $B = [a, 0]$, přímku $x = a - c$ (označme ji p) a kružnici k o středu B, procházející bodem A. Je-li $c^2 < a^2 + b^2$, protne přímka p kružnici k ve dvou (různých) bodech P, Q. Řešením naší rovnice jsou pak orientované úhly ABP a ABQ. Je-li $c^2 = a^2 + b^2$, kořeny splývají. Je-li $c^2 > a^2 + b^2$, rovnice nemá řešení; přímka kružnici neprotne.

Zdůvodnění konstrukce lze snadno provést otočením trojúhelníka OBA kolem bodu B tak, aby bod A splynul s některým z bodů P, Q.

RECENSE

Ing. dr *Anselm Kovář:* **Theorie kroucení.** Nakladatelství ČSAV, Praha 1954, 246 stran, 100 obr. Cena brož. 24 Kčs, 1650 výtisků.

Kovářova kniha je první svého druhu v naší odborné literatuře, která se zabývá speciálně problémy kroucení nosníků. Vcelku lze říci, že autor převzal koncepci své knihy od C. Webera (Die Lehre der Drehungsfestigkeit, Forschungsheft, 68 stran, 1921).

Rozdělení látky na problémy technické a obecné (matematické) theorie pružnosti není důsledně uplatňováno. Kapitola I (str. 15—50) probírá methodami technické theorie pružnosti základní průřezy (kruhový, mezikruhový stálé tloušťky, eliptický a mezieliptický, obdélníkový a čtvercový). Avšak také v kapitole II (Obecná — matematická — theorie pružnosti, str. 51—229) najdeme řadu problémů, jejichž řešení je podáno jen methodami technické pružnosti. Tím, že autor shrnul základní výsledky technické pružnosti do první kapitoly, chtěl zřejmě ukázat na rozdílnost method a výsledků technické a matematické theorie pružnosti. Pak bylo ovšem třeba oddělit látku § 30 až 35 od druhé kapitoly. Problémy kroucení proužkových průřezů nelze podle mého názoru zahrnout do matematické theorie pružnosti. V textu se také neodrazily výsledky Arutjunjana a Abramjana, ač tři jejich práce jsou uvedeny v seznamu literatury.

První dva paragrafy druhé kapitoly (§ 9 a 10) jsou věnovány odvození rovnic rovnováhy, základních vztahů mezi posunutím a deformací (přetvořením), zobecněného Hookova zákona isotropního homogenního tělesa a Laméových rovnic. Vzhledem k zaměření celé knihy uvádí Kovář jen statické rovnice rovnováhy. O rovnicích kompatibility deformací a Beltramiho rovnicích se autor nezmiňuje. V § 11 je podána matematická formulace problému prosté pružnosti v kroucení. Moderní učebnice nazývají Kovářem označenou funkci ξ/ϑ obvykle jako torsní funkci daného průřezu. Myslím, že bylo vhodné také ukázat řešení problému kroucení pomocí funkce konjugované s funkcí ξ/ϑ a její souvislost s funkcí $f(x, y)$, která splňuje rovnici smykových čar. Autorův pracný postup přidržující se Weberovy monografie není o nic názornější než postup, jak je volen ve všech novějších učebnicích matematické theorie pružnosti. Obecné řešení diferenciální rovnice smykových čar je diskutováno způsobem shodným s Weberovým. V § 15 je formulován problém kroucení v polárních souřadnicích. V dalších pěti paragrafech je podáno řešení problému kroucení pro průřez kruhový, mezikruhový, eliptický, mezieliptický a rovnostranného trojúhelníka methodou torsní funkce nebo řešením diferenciální rovnice smykových čar. Celých 22 stran je věnováno průřezu obdélníkovému. Pro pozdější srovnání s exaktním řešením uvádí Kovář nejdříve řešení přibližné, splňující jen krajovou podmínku diferenciální rovnice smykových čar. Takový postup se mi zdá vhodný. Autor potom podrobně probírá *St. Venantovo řešení* téhož problému (pomocí torsní funkce). Řešení pomocí smykových čar spočívá jen v ověření předpokladu pro tvar funkce smykových napětí. Využití souvislosti torsní funkce s řešením rovnice smykových čar by vedlo k větší stručnosti. Výsledkům označovaným jako 2. řešení nebylo třeba věnovat tolik pozornosti, neboť spočívá jen v záměně souřadnicových os. Specialisací plyne řešení pro čtvercový průřez (§ 22). V Kovářově knize bohužel nenajdeme řešení pro pravoúhlý trojúhelník. Weberovým postupem v jeho monografii je řešen problém kroucení kruhového průřezu s dutinou na kraji a mnohoúhelníků ($n = 8$). Tvrzení na str. 137, že „neznámé s vyššími indexy nemají na přesnost řešení podstatného vlivu" bylo třeba zdůvodnit vlastnostmi řešení nekonečných soustav rovnic (viz na př. KANTOROVIČ-KRYLOV). Problémy výseče kruhu a mezikruží jsou řešeny methodou St. Venantovou. Jako speciální případ je uveden kruh s radiální štěrbinou. Na tomto místě bylo možná vhodné uvést ve formě poznámky tuhost v torsi obdélníka se štěrbinou kolmou na stranu (SAPONDŽJAN — PMM *13*, 5, 1949, 510).

V § 27 o membránové a hydrodynamické analogii měl autor poukázat na rozdílnost Boussinesqovy, Greenhilovy a Thomsonovy-Taitovy analogie. V souvislosti s prstencovými průřezy (§ 28—29) bylo myslím vhodné probrat kroucení tyčí, jejichž průřez je vícenásobně souvislou oblastí, a obecné vyjádření *Stokesovy-Bredtovy věty*, které je věnováno poměrně málo pozornosti. Na str. 176 bylo také vhodné vysvětlit, proč se řešení pro mezikruží pomocí Thomsonovy-Bredtovy věty shoduje s exaktním řešením. K §§ 30 a 31 o proužkových průřezech je třeba ještě poznamenat, že pravděpodobně při tisku vypadla citace Weberovy shora uvedené knihy, podle které je látka zpracována. Výklad o theorii kroucení uzavírá paragraf „Nemožnost volného křivení průřezu", zpracovaný methodou technické pružnosti.

Pokud jde o zpracování druhé části Kovářovy knihy je třeba konstatovat, že se shoduje obsahově i methodicky až na poslední paragraf v zásadě s Weberovou monografií (strana 9—64). Výsledky technické theorie kroucení, sestavené v tabulku na konci Kovářovy knihy, obsahuje tytéž profily jako Weberovo shrnutí. Autorovi je třeba poděkovat za to, že pečlivě prohlédl Weberovu monografii a kriticky se postavil k jejím chybám, ať již faktickým nebo tiskovým. Je třeba také kladně hodnotit, že autor vede všechna řešení až do konečného výsledku, i když tím kniha trpí na některých místech rozvláčností. Především provádění týchž integrálů na několika místech zabírá jednak mnoho místa a také prodražuje sazbu knihy.

Po matematické stránce je bohužel třeba ukázat na některé základní nedostatky, které mohou uvést čtenáře v omyl. Tak jsou na př. na str. 84, ř. 1 a 9 shora, str. 108, ř. 5 a 10 shora a str. 212, ř. 4 shora vesměs meze integrálů špatně, což vzniklo substitucí za integrační proměnnou, na str. 117 (ř. 2 zdola) a str. 122 (ř. 4 zdola) vyznačil autor nezvyklým způsobem, že proměnná leží v uzavřeném intervalu a pod.

Jak názvosloví tak i některé stylistické obraty převzal autor ze starších pramenů, především od ŠOLÍNA (Základy technické nauky o pružnosti a pevnosti, 1904). Moderní jazyk by knize velmi prospěl, což autor zřejmě i sám pocítil. Tak ač na str. 16, ř. 6 shora (a na str. 52, ř. 10 shora) mluví o „působení sil v těleso", vyjadřuje Kovář hned na dalším řádku totéž slovy, že „působil pravý díl na levý". Píše většinou o tělesech „spravujících se", t. j. řídících se (což užívá i Šolín) Hookovým zákonem, i když se na str. 50, ř. 1 shora, od svého názvosloví sám uchyluje. Mnohoznačně je též použito slova „výminka" (= podmínka, vztah, rovnice), ač by rozlišení jednotlivých významů knize jen prospělo. Mluví se také o tom, že se úhel „vyrozumívá v míře obloukové" (na př. na str. 19 a 23), že se dvojný integrál „vyrozumívá v mezích průřezu" (na př. na str. 18, ř. 11 zdola) a pod. Při jazykové korektuře nebyly bohužel odstraněny některé dnes neobvyklé výrazy nebo formulace (na př.: nezvyklý slovosled, věta nemá sloveso, úměrný k něčemu = úměrný něčemu, čtverník = kvadrant, složka napětí vyvozuje moment = působí momentem, vložit za jistou veličinu do rovnice = dosadit — str. 153, ř. 10—11 shora), které v některých případech dávají i příčinu k nejasnosti a nepřesnosti (na př.: „namítati se" ve smyslu „že se něco stane v případě"; „veličina se podává z" = „plyne z" — str. 153, ř. 8—9 shora; mluví se o těžišťových osách = hlavních osách setrvačnosti — str. 31; o kladné polovině souřadné osy — str. 37; o rovině síly — str. 52; o složkách směrem — str. 55; o úplném přemístění = posunutí, posuvu — tamtéž; o „počátečním" místo libovolném průřezu — str. 64; o tom, že dvě smykové čáry „uzavírají mezi sebou" plochu — str. 65; o průměru místo ose elipsy —

str. 94; přetržitý = nespojitý — str. 185; na str. 62 „se rozkládá úsek do složek směrem os" ač jde o rozložení vektoru; atd.).

Kniha je vytištěna úhledně a pečlivě a má málo tiskových chyb (str. 58, 3. rovn. (106): chybí rovnítko; str. 65, ř. 13 shora: jediné = jedině; str. 162, rovn. (366): chybí jednička v čitateli exponentu u (—1); str. 205, ř. 1 shora: snížení písmena r). Také jasné a srozumitelné obrázky jsou kladem této publikace Nakladatelství ČSAV. Myslím, že text k obrázkům je často až příliš obsáhlý; opakuje obvykle tvrzení, formulovaná již v textu knihy. Na str. 183 jsou v 2. řádku shora a v některých dalších závorky u r zbytečné, nebo v případě druhého integrálu nevhodně umístěny.

Seznam literatury na konci knihy si jistě nečiní nárok na úplnost. Hledisko, podle kterého autor prameny z množství literatury, především novější, časopisecké vybíral, není jasné. Abramjan podal r. 1950 přesné řešení pro průřez tvaru dutého (= полый) obdélníka, zatím co autor mluví v úvodu (str. 13) o plném (= полный) obdélníku. Také dvě dřívější práce podobného charakteru nejsou v seznamu literatury uvedeny (PMM — *13*, 1, 1949, 107 a *13*, 5, 1949, 551).

Kovářova kniha o theorii kroucení je příliš rozsáhlá jako příručka pro technika konstruktéra a obsahem své látky prakticky nepřesahuje obvyklé učebnice a repetitoria o pružnosti. Jako učebnice theorie kroucení by měla obsahovat podle mého mínění užití funkcí komplexní proměnné, Vlasovovu theorii tenkostěnných profilů, theorii kroucení tyčí (prutů) proměnného průřezu a snad i základy pružně-plastického kroucení. Domnívám se, že moderní učebnice theorie kroucení se musí právě na to zaměřit a shrnout speciální otázky tohoto problému theorie pružnosti (koncentrace napětí a pod.). Případné druhé vydání knihy by mělo k těmto otázkám přihlédnout. *A. Hladík*, Praha.

J. S. Dubnov: **Chyby v geometrických důkazech.** Z ruštiny přeložil Ing. *Milan Ullrich.* Nákladem 2000 výtisků vydalo SNTL, Praha, 1954. 80 stran, 35 obrázků. Cena brož. 3,29 Kčs. Český překlad je uveden předmluvou akademika *E. Čecha.*

Ve svazcích sbírky *Populární přednášky o matematice* jsou zpracovávána nejzajímavější themata přednáškových besed pořádaných na moskevské universitě v rámci matematického kroužku pro žáky středních škol. V těchto přednáškách se pod vedením předních vědeckých pracovníků probírají vybraná themata z elementární matematiky, zpravidla poměrně abstraktní, a to s úspěchem, který boří předsudky o nemožnosti tyto věci žákům srozumitelně vyložit a dokonce získat jejich zájem o ně.

Dubnovova knížka patří k nejzdařilejším z celé sbírky. Na 15 příkladech geometrických důkazů autor ukazuje typické chyby, které se v nich vyskytují. Příklady jsou rozděleny do dvou skupin: v prvních deseti se neužívá pojmu limity, zbývající předpokládají jeho znalost. V každé skupině jsou napřed uvedeny chybné důkazy, které jsou pak podrobně rozebrány.

Látka vyložená v knížce není snadná. Je obdivuhodné, jak jasně, živě a poutavě ji autor dovedl podat, aniž tím poškodil věcnou správnost. Dubnovova knížka zasluhuje vřelého doporučení.

Necháme-li stranou několik tiskových chyb, které v knížce najdeme, zbývá upozornit na nepříjemnou chybu v poznámce pod čarou na str. 36, kde se pravidelný mnohoúhelník definuje jako mnohoúhelník, jehož všechny strany jsou si navzájem rovny.

Ve sbírce *Populární přednášky o matematice* vyšly už před Dubnovovou knížkou další svazky, které jsou u nás přeloženy:

I. S. Sominskij: Metoda matematické indukce; *N. N. Vorobjev:* Fibonacciova čísla *A. G. Kuroš:* Algebraické rovnice libovolných stupňů; *A. I. Markuševič:* Rekurentní posloupnosti; *P. P. Korovkin:* Nerovnosti; *A. O. Gel'fond:* Neurčité rovnice; *A. I. Markuševič:* Důležité křivky; *A. I. Markuševič:* Plochy a logaritmy; *A. S. Smogorževskij:* Metoda souřadnic. *L. Kosmák*, Praha.

ZPRÁVY

AKADEMIK BOHUMIL BYDŽOVSKÝ PĚTASEDMDESÁTNÍKEM

Pamatuji se živě na březen roku 1950, kdy jsme oslavovali sedmdesátku prof. dr Bohumila Bydžovského; jakoby to bylo včera. Proto se nemohu ubránit překvapení, že letos už zaznamenáváme jeho pětasedmdesáté narozeniny, připadající na 14. březen 1955. Příčina toho, že u prof. Bydžovského jsem uplynulých pět let jaksi zapomněl počítat, je asi dvojí. Předně prof. Bydžovský se za tu dobu prakticky nezměnil, je stejně svěží a bystrý jako tehdy, což zde rád konstatuji, a za druhé na jeho výkonnost už jsme si tak zvykli, že celý ten kus jeho práce za posledních pět let se nám zdá samozřejmostí, při které běh času ani nevnímáme; kdyby prof. Bydžovský byl v těchto letech odpočíval v soukromí tak, jako to činí mnozí jiní, byla by nás na běh času přivedla aspoň myšlenka, že už o něm dlouho nic neslyšíme. Ale činnost prof. Bydžovského byla i v uplynulých pěti letech bohatá. Všimneme si zde alespoň nejdůležitějších jeho prací z tohoto období; má tím být doplněn obraz jeho celoživotní činnosti, kterou vypsal prof. Karel Koutský pod názvem „Sedmdesátiny prof. Bohumila Bydžovského" v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, ročník *75*, Praha 1950, str. D 349—D 357. Tam najde čtenář podrobný životopis jubilantův a zhodnocení jeho odborné i veřejné činnosti až do roku 1950; nechybí tam ovšem ani seznam vědeckých publikací prof. Bydžovského. Znovu tedy zdůrazňuji, že dnešní moje řádky zahrnují činnost prof. Bydžovského z pouhých posledních pěti let.

A tu je především třeba vyzdvihnout skutečnost, že prof. Bydžovský dodnes vykonává svůj úřad vysokoškolského učitele na matematicko-fysikální fakultě Karlovy university, že vedle pravidelných přednášek a zkoušek je platným rádcem mladším pedagogickým silám fakulty a že stále činně přispívá i k ostatnímu životu na fakultě, ať už jde o věci odborné, methodické či organisační. Okolnost, že všechna tato jeho práce je úspěšná, že jeho přednášky vynikají stejně jasnou srozumitelností jako před několika desítkami let a že je oblíben mezi posluchači, jistě nepřekvapuje nikoho, kdo ho zná. Nezanedbával ani výchovu vědeckého dorostu, jak dokazují práce jeho žáků, z nichž některé jsou uveřejněny i v tomto čísle a organicky doplňují obraz o činnosti a významu prof. Bydžovského.

Činnost prof. Bydžovského se ovšem neomezuje jen na půdu university Karlovy. Navážeme-li nejdřív na výše citovaný článek prof. Koutského, vidíme, že dosud je prof. Bydžovský předsedou Jednoty československých matematiků a fysiků, která právě prodělává důležitý přerod, a že zůstal předsedou Královské české společnosti nauk i Československé národní rady badatelské až do té doby, kdy obě tyto korporace se začlenily do dnešní Československé akademie věd. To však neznamenalo pro něho úlevu v práci, neboť obě uvedené funkce byly vystřídány novými. Stručně budiž jen konstatováno, že prof. Bydžovský je dnes členem vědecké rady Výzkumného ústavu pedagogického J. A. Komenského, kde zastává funkci předsedy komise pro matematiku.

Daleko významnější je však jeho činnost v Československé akademii věd (ČSAV), která byla uvedena v život v listopadu 1952. Tehdy byl prof. Bydžovský mezi prvními jejími řádnými členy-akademiky, které jmenoval tehdejší president republiky Klement Gottwald. Zde je akademik Bydžovský dodnes předsedou redakčně vydavatelské rady I. sekce. Vědeckou práci dodnes neopouští, jak dokazují jeho odborné publikace z posledních let, jež jsou uvedeny na konci článku. Ale ani tím není ještě vyčerpána jeho činnost na půdě ČSAV. Zvláštní zmínku tu zasluhuje další zájem akademika Bydžovského, o kterém málokdo ví.

Nedávno proběhly naším denním tiskem zprávy o tom, že se všeobecně ve světě uvažuje o reformě kalendáře. O tuto otázku se akademik Bydžovský zajímal už dávno a když celá věc se stala předmětem jednání Organisace spojených národů (OSN), neotálel a přišel v I. sekci ČSAV s iniciativním návrhem. Na jeho popud byla zvolena zvláštní komise, jež vypracovala memorandum, doporučující zavedení t. zv. *světového kalendáře* náhradou za dnešní gregoriánský kalendář. Toto memorandum bylo ovšem z valné části opět dílem akademika Bydžovského a stalo se podkladem dalšího jednání v našich vládních kruzích. Zvláště usnadnilo práci československé delegace, která se v červenci 1954 zúčastnila zasedání hospodářsko-politické rady OSN v Ženevě, kde reforma kalendáře přišla znovu na pořad jednání.

Chceme-li závěrem shrnout charakteristiku osobnosti akademika Bydžovského, nelze než souhlasit s prof. K. Koutským, který ve zmíněném článku o něm praví, že „je s jeho jménem nerozlučně spjata představa pokrokového vědce a vychovatele". Vždyť nikdy neustrnul akademik Bydžovský na mrtvém bodě, nikdy nezůstal na své cestě stát, ale vždycky svou činnost zaměřil k tomu, co bude dál, vždycky své zraky upíral do budoucnosti. Jeho charakteristické vlastnosti jsou pak především pracovitost a lidskost, bez níž si ho nedovedu představit a bez níž by také nemohl být tak oblíben mezi mladými lidmi a především mezi studenty. Připomeneme-li si k tomu ještě jeho bojovnost, o níž svědčí už to, že ani zatčení gestapem a internování v táboře ve Svatobořicích, o němž píše K. Koutský, nedovedlo zlomit jeho ducha a že snad tím více zocelen se velmi agilně účastnil revoluce v roce 1945, máme před sebou obraz celého člověka. Akademik Bydžovský vždycky věděl, kde je jeho místo.

Je nesporné, že člověk tohoto druhu přímo i nepřímo ovlivňuje své okolí, ať už sám tomu chce nebo nechce. Proto bych byl nerad, aby čtenář moje dnešní řádky chápal jen jako oslavu akademika Bydžovského. Ale ať už je chápe jakkoli, jedno nemůže upřít, že totiž veřejnost se chápe jubilea jako příležitosti, aby vedle ocenění jubilantova si také připomněla příčiny jeho úspěšné životní práce, jež přinesla ovoce celému našemu národu. Měl jsem to štěstí, že jsem po několik let byl v pravidelném styku s akademikem Bydžovským. A i když to byl styk více méně služební, přece jsem poznal hlavní rysy jeho lidské povahy. Viděl jsem především vřelý poměr akademika Bydžovského k jeho rodině, cítil jsem jeho skromnost, nikdy se nevyvyšoval nad své okolí a nikdy nebyl bez programu, stále pracoval. Domnívám se, že to jsou hlavní prameny jeho činorodé síly; a to by právě mohlo zajímat zvláště naše mladší generace. Při tom mně tanou na mysli jeho slova příležitostně pronesená, že totiž pro mladé lidi je důležité, aby nikdy a za žádných okolností nepřestávali pracovat. Snad právě tomuto heslu děkuje akademik Bydžovský za to, že se svých pětasedmdesátých narozenin dožívá v plné svěžesti.

Končím přáním, aby v příštích letech byl akademik Bydžovský dlouho zdráv a aby se v nich dožil plné spokojenosti a radosti. Věřím, že je to přání celé naší kulturní veřejnosti.

SEZNAM PUBLIKACÍ AKADEMIKA BOHUMILA BYDŽOVSKÉHO V OBDOBÍ 1950—1955

1. *Poznámky k theorii konfigurace* $(12_4, 16_3)$. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, ročník *74*, Praha 1950 (Zprávy ze společného sjezdu matematiků polských a československých), str. 249—251.

2. *Sur certains points remarquables d'une cubique rationnelle plane*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, ročník *75*, Praha 1950, str. 219—229.

3a. *O dvou nových konfiguracích* $(12_4, 16_3)$. Časopis pro pěstování matematiky, ročník *79*, Praha 1954, str. 219—228.

3b. *Über zwei neue ebene Konfigurationen* $(12_4, 16_3)$. Чехословацкий математический журнал — Czechoslovak Mathematical Journal, ročník *4* (*79*), Praha 1954, str. 193—218.

4. *Úvod do analytické geometrie*. Úplně přepracované nové vydání vysokoškolské učebnice, která je v tisku v nakladatelství ČSAV.

Karel Havlíček, Praha.

K PADESÁTINÁM AKADEMIKA JOSEFA NOVÁKA

Dovršení 50. roku života (19. dubna t. r.) akademika JOSEFA NOVÁKA je podnětem k uvedení významnějších fakt z jubilantovy úspěšné dráhy životní a vědecké.

Je rodem z Třebětína (okres Boskovice); maturoval v r. 1925 na gymnasiu v Boskovicích, vysokoškolská studia matematiky a fysiky konal na přírodovědecké fakultě Masarykovy university v Brně (1925—1929), kde se svým nadáním a pílí zařazoval mezi nejlepší žáky topologického semináře akademika EDUARDA ČECHA. Po absolutoriu složil státní zkoušky z matematiky a fysiky k dosažení učitelské způsobilosti na středních školách a v červnu 1932 dosáhl hodnosti doktora věd přírodních. Po vykonání vojenské služby presenční pracoval vědecky na Masarykově universitě v Brně, kde se 1. ledna 1935 stal asistentem. Školní rok 1935—36 ztrávil ve Vídni na studiích u prof. K. MENGERA. V červnu 1939 předložil žádost o habilitaci z matematiky na Masarykově universitě v Brně; její vyřízení bylo v důsledku zavření vysokých škol dokončeno až v r. 1945. V době válečné působil mimo jiné jako asistent v zootechnickém ústavě Vysoké školy zemědělské v Brně a od června 1943 zastával místo vrchního komisaře zemských výzkumných ústavů zemědělských v Brně. Koncem války byl pak úřadem práce převeden k práci manuální.

Již od května 1945 se účastnil aktivně obnovovacích a budovatelských prací na přírodovědecké fakultě Masarykovy university v Brně a konal přednášky z matematiky na této škole na Vysoké škole technické v Brně. Od 1. října 1945 byl mimořádným profesorem matematiky na Masarykově universitě v Brně. Dnem 1. srpna 1948 se stal řádným profesorem na Vysoké škole speciálních nauk při ČVUT v Praze. Od zřízení Matematického ústavu při České akademii věd a umění v r. 1947 vedl sekci biologické matematiky a od 1. července 1950 byl vedoucím oddělení matematické statistiky v Ústředním ústavu matematickém. V listopadu 1952 byl jmenován řádným členem nově zřízené ČSAV a v jejím matematickém ústavu vede od počátku oddělení matematické statistiky. Počátkem r. 1954 se stal vědeckým tajemníkem matematicko-fysikální sekce ČSAV.

Akademik J. Novák náleží k vynikajícím znalcům abstraktní topologie; zejména vynikl ve studiu obecné theorie abstraktních prostorů a L prostorů. Uveřejnil z tohoto oboru velký počet pojednání u nás i v cizině. Činnost v zemědělských ústavech za války, spočívající v praktické pomoci při řešení statistických problémů živočišné výroby, jakož i jeho širší zájem o aplikace matematicko-statistických method v lékařství a v biologii ho přivedly k intensivnímu studiu matematické biologie a ke studiu počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. Hluboké znalosti z theorie množin a jiných moderních matematických disciplin mu umožnily, aby si osvojil theorii pravděpodobnosti vybudovanou na nových základech a pronikl k základním problémům matematické statistiky. Po přestupu do Prahy zahájil přednášky o theorii počtu pravděpodobnosti na přírodovědecké fakultě Karlovy university a stal se koncem r. 1952, když byla zřízena katedra matematické statistiky, vedoucím této katedry. Vzhledem k vysoké vědecké kvalifikaci byl vyslán v rámci kulturní spolupráce koncem r. 1952 do Polské lidové republiky a pověřen účastí na vědeckých konferencích v Německé demokratické republice, konaných v r. 1953 a 1954, kde přednášel o topologické struktuře pravděpodobnostních polí.

Činnost akademika J. Nováka se neomezuje na práce theoretické; jako vedoucí odboru matematické statistiky v matematickém ústavu Československé akademie věd je ve stálém styku s aktuálními problémy statistickými, zejména na poli veřejného zdravotnictví, v lékařství, v praxi technické a v zemědělství. Usiluje o kolektivní vědeckou práci, zejména mladších pracovníků, organisováním kroužků pro studium nové literatury z theorie pravděpodobnosti a z theorie stochastických procesů.

Dosavadní vědecká činnost Novákova je zárukou dalších jeho úspěchů ve vědecké práci.

Ladislav Truksa, Praha.

PADESÁTINY PROFESORA VYČICHLA

Dne 22. dubna 1955 se dožívá padesáti let dr FRANTIŠEK VYČICHLO, profesor matematiky a vedoucí katedry matematiky a deskriptivní geometrie fakulty inženýrského stavitelství na Českém vysokém učení technickém v Praze.

Svými vědeckými pracemi z deskriptivní geometrie, algebraické geometrie, metrické a projektivní diferenciální geometrie, afinní a projektivní diferenciální geometrie zakřivených prostorů, konformní geometrie a geometrie anholonomních variet řadí se mezi naše nejvýznamnější geometry. V poslední době pracuje zvláště na aplikacích diferenciální geometrie na theorii skořepin. Pedagogická činnost na technice a zejména jeho spoluúčast ve vedení technického oddělení Badatelského ústavu matematického v České akademii věd a později v Ústředním ústavu matematickém při ČSAV, kde zastával funkci náměstka ředitele, obrátily jeho pozornost k aplikacím analysy na technicky důležité problémy, ponejvíce v pružnosti. Z těchto podnětů vzniká znamenitá učebnice „Matematická theorie pružnosti", kterou napsal spolu s ing. dr IVO BABUŠKOU a doc. dr K. REKTORYSEM.

Není snad u nás matematika, který by jej neznal jako jednoho z předních vedoucích Jednoty československých matematiků a fysiků, pro kterou obětavě s neumdlévajícím elánem pracuje již přes třicet let převážně jako redaktor jejích matematických časopisů a knih, jako neúnavného organisátora a skromného školského pracovníka, ochotného rádce, přítele a nezištného pomocníka mladší vědecké generace.

K jeho životnímu jubileu přejí mu všichni jeho přátelé hodně pevného zdraví, aby ještě po dlouhá léta se mohl věnovat své oblíbené práci pro naši matematiku a pro Jednotu.

Alois Urban, Praha.

ŠEDESÁTINY DOCENTA JOSEFA HOLUBÁŘE

Dne 24. ledna 1955 se dožil šedesáti let soudruh doc. JOSEF HOLUBÁŘ, rodák ze Skutče na Českomoravské vysočině. Soudruh Holubář je státním docentem vysoké školy pedagogické a vědeckým pracovníkem Matematického ústavu ČSAV, kde pracuje v elementární matematice a zároveň zastává funkci výkonného redaktora „Časopisu pro pěstování matematiky" a časopisu „Чехословацкий математический журнал".

Po studiu matematiky a deskriptivní geometrie na pražské universitě a technice se stal s. Holubář středoškolským učitelem a působil jednak na odborných školách v Pardubicích a v Turnově a potom většinu svého učitelského působení na reálce v Turnově a od šk. roku 1936—7 na reálce v Praze XII, Na Smetance. Svými odbornými znalostmi a svými učitelskými schopnostmi nemálo přispěl k zvýšení úrovně obou zmíněných škol a odchoval tu řadu studentů, kteří měli ke studiu matematiky jednak dobré předpoklady, jednak velmi kladný poměr. Většina z nich odcházela na techniku, někteří pak studovali matematiku na universitě, jiní se stali úspěšnými učiteli matematiky na našich školách.

Za svého učitelského působení si s. Holubář zvláště uvědomil, jaký výchovný význam pro mladého člověka má deskriptivní geometrie, a proto se nemálo staral o zlepšení výkladů v tomto předmětu; na veřejnosti pak význam deskriptivní geometrie jak pro praxi tak i pro výchovu nejen oceňoval, ale za její výchovné uplatnění také bojoval.

Během svého učitelského působení se stále s. Holubář zamýšlel nad didaktickými a methodickými otázkami svých předmětů a výsledky této činnosti pak uveřejňoval v Rozhledech matematicko-přírodovědeckých a v methodické části Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky. Když pak po revoluci 1945 byl založen časopis „Matematika a fysika" a později pak nynější časopis „Matematika ve škole", píše s. Holubář do těchto časopisů a stává se též členem redakce časopisu „Matematika ve škole". Zabývá se tu zvláště otázkami geometrie.

Po svém příchodu do Prahy v r. 1937 se záhy uplatňuje v práci komisí, zřízených pro otázky školské matematiky při Jednotě čs. matematiků a fysiků. V těchto komisích pak pracuje zvláště v době okupace s našimi předními vědeckými pracovníky a připravuje tak náplň matematického učiva na našich školách pro dobu po revoluci v r. 1945. Po revoluci 1945 přechází na tehdejší zemskou školní radu, kde působí ve funkci zemského školního inspektora. I když toto působení vzhledem k reformě naší politické a správní soustavy netrvalo dlouho, získal s. Holubář ve své funkci řadu našich učitelů k nadšené práci. Jeho přátelský způsob jednání, jeho promyšlené směrnice a osobní pomoc, kterou ve věcech odborných obětavě poskytoval, mu v řadách našich učitelů získaly řadu oddaných přátel.

Po krátkém průkopnickém působení na státních kursech pro přípravu pracujících na vysoké školy v Houštce, k němuž se sám jako uvědomělý člen Komunistické strany Československa přihlásil, přechází na pedagogickou fakultu Karlovy university. Zde spolu s nynějším ministrem školství s. dr Františkem Kahudou budují ústav pro školní praxi. Již před tím přednáší s. Holubář methodiku matematiky pro posluchače přírodovědecké fakulty Karlovy university a tuto činnost pak ještě více rozvíjí svým vstupem na pedagogickou fakultu, jejímž se stává docentem.

Na podzim r. 1952 přechází s. Holubář do Matematického ústavu ČSAV, aby zde pracoval v elementární matematice a v redakcích obou matematických časopisů, vydávaných tímto ústavem; zde pak působí dodnes.

Po řadu let působí s. Holubář ve výboru Jednoty čs. matematiků a fysiků, jejímž je místopředsedou, a dále v Ústředním výboru Matematické olympiady.

Velmi činně se od r. 1945 účastnil prací na osnovách matematiky a deskriptivní geometrie v řadě komisí zřízených jednak ministerstvem školství a Výzkumným ústavem pedagogickým, jednak v komisích zřízených při Jednotě čs. matematiků a fysiků. V r. 1947 přepracoval pro střední školy učebnici „Geometrie pro V. třídu reálných gymnasií". Vzhledem k osnovám z r. 1948 zpracoval pak rozsáhlé partie v učebnicích „Matematika pro gymnasia".

V našich nových učebnicích pro všeobecně vzdělávací školy byl s. Holubář hlavním autorem jednak učebnice „Algebra pro 9. až 11. postupný ročník", jednak příslušného „Methodického průvodce".

Vedle toho se otázkami školské algebry zabývá v knize „Methodické poznámky k některým partiím algebry", vydané v r. 1952. Ukazuje tu především zásady, jimiž se řídí vyučování algebře na sovětské střední škole.

Jako horlivý propagátor sovětské didaktiky a methodiky provádí zevrubnou recensi překladu *Bradisovy* „Metodiky vyučování matematice na střední škole" (vyšla v r. 1953). Tato kniha pečlivě s. Holubářem přehlédnutá se stala cennou pomůckou pro naše učitele po vydání školského zákona v r. 1953.

Ve známé knihovně „Cesta k vědění", kterou vydávala Jednotka čs. matematiků a fysiků, vyšly dvě Holubářovy knížky „O methodách rovinných konstrukcí" a „O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů". Obě práce svědčí o těžišti Holubářova zájmu a staly se nepostradatelnými pomůckami našich učitelů i studentů.

Vedle řady článků, které vyšly zvláště v časopise „Matematika ve škole", přispěl s. Holubář nemálo k propagaci sovětské matematické literatury svými recensemi některých překladů z ruštiny; to platí zvláště o knize *A. J. Ostrovského* „Populární výklad deskriptivní geometrie", která vyjde ve St. nakladatelství technické literatury.

Šedesátka zastihla s. Holubáře v plné svěžesti, takže lze očekávat, že se i nadále bude věnovat své oblíbené elementární matematice. Do dalších let jeho života mu jistě všichni, kdož jej poznali, přejí hodně zdraví a hodně úspěchů v práci, především v práci konané pro vysokou úroveň naší školy.

Rud. Zelinka, Praha.

KONFERENCE O POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI A O MATEMATICKÉ STATISTICE V BERLÍNĚ

Konference se konala ve dnech 19. až 22. října 1954 v Matematickém ústavu Humboldtovy university v Berlíně (východní sektor). Zahraniční účast byla velmi široká. Byly zastoupeny tyto státy: Sovětský svaz (akademik KOLMOGOROV a PROCHOROV), Maďarsko (prof. RÉNYI), Bulharsko (akademik OBREŠKOV), Rumunsko (prof. MIHOC), Polsko (akademik STEINHAUS a prof. FISZ), Francie (prof. FRÉCHET a prof. FORTET), Finsko (prof. ELFVING); ze Západního Německa bylo pět účastníků a z Německé demokratické republiky bylo na konferenci přítomno mnoho matematiků i studentů. Z Československa přijeli na konferenci tři delegáti, z nichž dva byli vysláni Československou akademií věd (akademik NOVÁK a dr ŠPAČEK) a jeden ministerstvem školství (doc. dr TRUKSA). Československá delegace se těšila pozornosti matematiků hostitelské země, s nimiž se upevňují vzájemné vztahy ve vědecké spolupráci. Při příjezdu do Berlína byly členům naší delegace předány květinové dary.

Konferenci zahájil prof. K. SCHRÖDER z Berlína. Úvodní projev přednesl prof. B. V. GNĚDĚNKO, řádný člen Ukrajinské akademie věd, který v roce 1954 přednášel na Humboldtově universitě o počtu pravděpodobnosti a matematické statistice; jemu bylo svěřeno odborné vedení celé konference. Ve svém projevu poukázal Gněděnko na to, že konference s tak širokou zahraniční účastí přinese vedle odborných výsledků také zlepšení vzájemných mezinárodních vztahů mezi matematiky a upevnění přátelství mezi národy.

Odborné přednášky byly prvního dne zahájeny hodinovým referátem prof. *A. Rényiho* z Budapešti o axiomatické theorii počtu pravděpodobnosti. Prof. Rényi buduje theorii pravděpodobnosti na základě systému axiomů, do něhož zahrnuje také pojem podmíněné pravděpodobnosti; na příkladech pak ukázal užitečnost tohoto postupu. Jeho přednáška vyvolala živou diskusi. Prof. Fréchet poukázal na dvojí stránku počtu pravděpodobnosti: axiomatickou a interpretační. Vyzval prof. Gněděnka, aby vyslovil názory sovětských vědců o interpretaci počtu pravděpodobnosti na reálné jevy. Prof. Gněděnko vysvětlil pak svůj názor a uvedl, že subjektivní stanovisko v interpretaci nemůže být základem objektivní vědy.

Odpoledne přednesl hodinový referát akademik *J. Novák* z Prahy o topologické struktuře pravděpodobnostních polí. Pomocí konvergence náhodných jevů lze definovat uzávěr, což je vhodný prostředek ke zkoumání topologické struktury systémů množin; na příkladech byly popsány zajímavé topologické struktury podsystémů Borelových lineárních množin. Je možné také studovat spojitost množinových funkcí a konstruktivně provádět jejich spojité rozšiřování na širší obory. V další hodinové přednášce promluvil prof. *M. Fréchet* z Paříže o abstraktních náhodných elementech. Poukázal na to, že vedle náhodných elementů jako jsou čísla a konečné číselné posloupnosti je třeba zkoumat také obecnější prvky jako jsou funkce nebo křivky. Přednášející podal definici a charakteristiky těchto nových pojmů.

Theorii náhodných elementů vyložil zevrubně druhého dne dopoledne prof. *R. Fortet* z Paříže. Náhodný element je prvek Banachova prostoru; je to zobecnění pojmu náhodné veličiny. Je možné definovat matematické naděje jako integrály $\int_{\mathfrak{A}} x(u)\, d\mu$ ve smyslu Pettisově. Přednášející se zmínil o charakteristických funkcionálech, jež zavedl už v r. 1936 Kolmogorov, o nichž platí za určitých předpokladů obdobné věty jako o charakteristických funkcích. Dále zavedl pojem Laplaceova náhodného elementu a uvedl podmínky, za kterých platí centrální limitní theorém pro nezávislé náhodné elementy. Svou theorii doložil na několika příkladech. Dále následovala přednáška prof. *N. Obreškova* ze Sofie o asymptotických limitních hodnotách. Pak přednášel žák akademika Kolmogorova

J. V. Prochorov z Moskvy na thema: Limitní zákony pro součty nezávislých náhodných veličin. Zabýval se posloupností náhodných funkcí definovaných v konečném intervalu a vyšetřoval jejich skoro jistou konvergenci pro libovolný konečný počet jakkoli vybraných bodů daného intervalu. Uvedl podmínky pro konvergenci a na konci přednášky uvedl některé konkretní příklady. V diskusi položil prof. M. Fréchet řadu otázek, které se týkaly vztahů mezi výsledky sovětských matematiků a výsledky Fortetovými. Na tyto otázky odpověděl a přednášku doplnil A. N. Kolmogorov.

Odpolednímu zasedání předsedal vedoucí československé delegace J. Novák. Prof. *G. Mihoc* z Bukurešti přednášel o různých rozšířeních Poissonova zákona na konečné konstantní Markovovy řetězce. Vyšel ze stochastické matice $[p_{ij}]$ určující jednoduchý homogenní Markovův řetězec o 2 stavech a vyšetřoval rozložení absolutních pravděpodobností po n krocích za předpokladu, že p_{12} je velmi malé. Přešel pak k vícenásobným konečným řetězcům Markovovým a uvedl aplikaci na problém iterací. V diskusi upozornil A. N. Kolmogorov na práce L. Dobrušina. Dále následovala přednáška prof. *M. Fisze* z Varšavy o limitním rozložení multinomiálních rozložení. Použitím jednoduchých method obdobných pro binomická rozložení byla dokázána platnost centrálního limitního theorému pro multinomiální rozložení.

Poslední referát druhého dne konference přednesl prof. *H. Steinhaus* z Vroclavě. Pojednal o některých principielních otázkách počtu pravděpodobnosti. Problematiku vznikající při aplikacích počtu pravděpodobnosti na reálné děje vyložil na příkladech z kinetické theorie plynů, náhodných a nenáhodných posloupností, odlehlých napozorovaných hodnot, pravděpodobnosti a priori a konečně statistické hry a praktické hry. Thematicky se tato přednáška nelišila od referátu, který přednesl prof. H. Steinhaus na první pracovní konferenci československých matematických statistiků v Praze v červenci r. 1954.

Třetí den konference byl zahájen přednáškou prof. *F. Burkhardta* z Lipska o aplikacích počtu pravděpodobnosti v hospodářských otázkách, po níž následoval půlhodinový referát *P. Vogla* z Tübingen o obecné třídě her dvou osob. F. Burkhard podal přehled elementárních statistických method v kontrole jakosti, zmínil se o základech sekvenční analysy a o dekrementních řádech. P. Vogel přednesl stručný úvod do theorie her dvou osob s nulovým součtem.

Odpoledne následovala přednáška *E. Weberové* o problému obrácených úsudků v biologické statistice. Delší pozornost věnovala bodovému odhadu a intervalovému odhadu spolehlivosti. Přednáška vyvolala živou diskusi. Referát o optimální alokaci, který přednesl *G. Elfving* z Helsink, se týkal lineárního plánování; referent zavedl pojem dosažitelného bodu a dokázal, že množina všech dosažitelných bodů je konvexní. Své výsledky demonstroval na některých případech. Pak promluvil prof. *P. Lorenz* z Berlína o rozložení výběrových průměrů. Uvedl výsledky rozsáhlých měření numericky zpracovaných a graficky znázorněných.

Poslední, čtvrtý den konference byly předneseny tři referáty. Prof. *B. V. Gněděnko* přednášel o testování statistických hypothes variační řadou. Použil k tomu variačních řad výběrových hodnot $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ a $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, z nichž vycházeli také Kolmogorov a Smirnov při srovnání empirických a theoretických distribučních funkcí. Důležitou otázkou je rychlost konvergence v různých intervalech. Gněděnko uvedl řadu nových výsledků svých a svých žáků týkajících se asymptotických formulí. Obsahově byla tato přednáška podobná s přednáškou, kterou proslovil prof. B. V. Gněděnko v Praze na matematicko-statistické konferenci v červenci r. 1954. Poté následoval stručný referát dr *A. Špačka* o vlastnostech regularity náhodných transformací. Regularitu zavedl pomocí axiomů. Jeho výsledek obsahuje řadu speciálních případů jako Doobovy věty o spojitosti náhodných procesů s pravděpodobností 1.

Poslední odbornou přednášku na konferenci proslovil akademik *A. N. Kolmogorov* z Moskvy na théma: O rozloženích pravděpodobnosti ve funkcionálních prostorech. Vyšel z pravděpodobnostního pole a definoval dvojím způsobem náhodný proces: $\zeta(t) \in K$ a $\zeta(t) \in X$, kde K značí prostor reálných nebo komplexních čísel a X je funkcionální prostor. Uvedl důležitý pojem abstraktního funkcionálního prostoru s Tichonovovskou topologií a mírou definovanou na nejmenší σ-algebře nad systémem definujících okolí tohoto prostoru. Ukazuje se nutnost jisté modifikace tohoto prostoru, jejíž topologie je dosud úplně neznámá. Uvedl několik výsledků Prochorovových. Dále zavedl pojem charakteristických funkcionálů v lineárním Banachově prostoru ve smyslu své definice v Comptes Rendus, 1935 a uvedl některé výsledky, jež souvisí s thematikou disertační práce paní MOURIER z Francie. Jeho přednáška byla doložena řadou literárních údajů.

Po Kolmogorovově přednášce se přihlásil ke slovu prof. *M. Fréchet*. Jako nejstarší účastník*) konference poděkoval jménem zahraničních delegací vládě Německé demokratické republky a organisátorům konference, která měla vysokou úroveň přednášek s živými diskusemi. Ve svém projevu se zmínil také o prof. B. HOSTINSKÉM z Brna, na jehož podnět se začal prof. Fréchet soustavně zabývat studiem Markovových řetězců. Konferenci zakončil několika vřelými slovy prof. *H. Grell*. Vyslovil radost nad výsledky konference, o něž se velkou měrou zasloužily zahraniční hosté. Vyslovil naději, že sjezd přinese užitek pracovníkům v oboru počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky, v němž vyvinul úspěšnou činnost na Humboldtově universitě v Berlíně prof. B. V. Gněděnko.

Organisace konference byla znamenitá. To bylo jednomyslně konstatováno všemi zahraničními hosty. Jelikož bylo přihlášeno mnoho referátů, které vyvolaly živou diskusi, bylo třeba prodloužit konferenci o jeden den. Ve čtvrtek byli zahraniční delegáti na Mozartově opeře v Městském divadle v Berlíně. Po skončení konference byl uspořádán dvoudenní výlet do Jeny, kde si účastníci konference prohlédli Zeissovy závody a do Výmaru, kde navštívili Goethův dům a vyslechli v Národním divadle Schillerovu hru.

J. Novák, Praha.

TŘETÍ CELOSTÁTNÍ KONFERENCE O STROJÍCH NA ZPRACOVÁNÍ INFORMACÍ

Ve dnech 1. až 3. prosince 1954 se konala v zámku v Poděbradech třetí celostátní konference z oboru strojů na zpracování informací. Konferenci pořádala Laboratoř (nyní Ústav) matematických strojů ČSAV. Byla to prvá konference o strojích na zpracování informací, které se zúčastnili rovněž zahraniční hosté. Byli to: prof. J. LEHMANN z Drážďanské techniky z NDR a doc. Inž. R. MARCZYŃSKI a doc. Inž. L. ŁUKASIEWICZ z polského matematického ústavu PIM polské akademie věd. Tím byl program konference obohacen o tři významné referáty o jejichž obsahu se stručně dále zmíníme. Dalším kladem zahraniční účasti bylo sblížení vědeckých pracovníků tří lidovědemokratických států v tomto důležitém vědním oboru. Vedle toho se zúčastnilo konference na 180 vědeckých a výzkumných pracovníků z vysokých škol a výzkumných ústavů v ČSR.

Účelem konference bylo, jako každoročně, předložit odborné veřejnosti některé hlavní výsledky celoroční práce jednak pracovníků Ústavu matematických strojů ČSAV, jednak pracovníků vysokých škol a vědeckých a výzkumných ústavů, jejichž problematika souvisí rovněž se stroji na zpracování informací. Širší okruh zájemců se současně s výsledky seznámí a tak mohou být bezprostředně užity v praxi.

Zahajovací projev přednesl A. SVOBODA, ředitel Ústavu matematických strojů ČSAV

*) Prof. *M. Fréchet* je stár 75 let.

a Laureát státní ceny pro rok 1954. V průběhu konference byly předneseny tyto *přednášky a referáty*:

Prvý den:

1. *V. Pleskot:* Vzpomínka na zesnulého prof. Dr Václava Hrušku.
2. *A. Svoboda:* Užití Korobovovy posloupnosti v matematických strojích.
3. *V. Vurcfeld:* Analogový stroj na řešení rovnic vyšších stupňů.
4. *O. Klika:* Společná problematika spojovacích zařízení a matematických strojů.
5. *M. Šafránek:* Analogy na výpočet elektrických sítí. Modely sítí.
6. *A. Svoboda:* Stav prací na československém samočinném počitači SAPO.

Druhý den:

7. *R. Marczyński:* Generátor o konstantním výkonu pro analysátory elektrických sítí.
8. *L. Łukasiewicz:* Přesná elektronková násobička polského diferenciálního analysátoru.
9. *P. Linda:* Kalkulační děrovač.
10. *A. Línek:* Počítací stroje Laboratoře krystalových struktur Ústavu technické fysiky ČSAV.
11. *V. Černý:* Stroj na výpočet struktury molekul M 1.
12. *J. Oblonský:* Stroj na výpočet struktury molekul M 2.
13. *M. Valach:* Číslicový koordinátograf.
14. *K. Bačkovský:* Význam patentnictví pro obor strojů na zpracování informací.

Třetí den:

15. *J. Lehmann:* Magnetická paměť malého elektronkového počitače.
16. *A. Svoboda-M. Valach:* Operátorové obvody.
17. *J. Raichl:* Problém z meteorologie na strojích na zpracování děrných štítků.
18. *K. Korvasová:* Stanovení komplexních kořenů algebraických rovnic na kalkulačním děrovači.
19. *J. Marek:* Přehled o stavu oboru strojů na zpracování informací v ČSR.

Zmíníme se nyní stručně o *náplni odborných přednášek a referátů.*

V prvé přednášce hovořil *A. Svoboda* o konstrukci Korobovovy posloupnosti a jejím užití ve výběrovém obvodu československého samočinného počitače SAPO. Závěrem prvého dne nastínil rovněž stav prací na tomto počitači. Dále hovořili tři hosté:

V. Vurcfeld o analogovém stroji na řešení algebraických rovnic vyšších stupňů. K získání kořenů se používá soustavy ze řady ozubených kol. Kořeny se získávají vyvažováním této soustavy.

M. Šafránek referoval o československém analogovém stroji na výpočet elektrických sítí, hlavně elektrárenských. Význam stroje pro hospodárnou distribuci elektrické energie je značný.

O. Klika přednesl příspěvek k jednotnému nazírání na problematiku spojovacího zařízení a matematických strojů. Nejsou zde jen vnější znaky, pro které se telefonní ústředny podobají samočinným počitačům, je i celá řada znaků funkčních.

Druhý den přednášeli rovněž zahraniční hosté. Oba prvé referáty byly předneseny v jazyce polském.

R. Marczyński referoval o elektronkovém generátoru o konstantním výkonu pro analysátory elektrických sítí. Na rozdíl od generátorů popsaných v literatuře se tento generátor vyznačuje tím, že je konstruktivně jednodušší, má méně elektronek a jeho činnost se přimyká více chování skutečného synchronního generátoru.

L. Łukasiewicz pojednal o přesné elektronkové násobičce polského diferenciálního analysátoru. Obě práce přesvědčily účastníky konference o velké úrovni tohoto oboru rovněž v lidovědemokratickém Polsku. Úspěchy nutno spatřovat v postavení diferenciálního analysátoru a ve stavbě polského samočinného počitače EMAL (Elektronowa Maszyna Automatyczne Licząca).

Dále promluvil *P. Linda* o způsobu dělení na kalkulačním děrovači. Tři následující referáty se zabývaly společnou problematikou: mapováním molekul. Za *A. Línka* přednesl *C. Novák* referát o stavu strojového vybavení Laboratoře krystalových struktur Ústavu technické fysiky ČSAV. Tato laboratoř se zabývá výpočtem krystalových struktur — mapováním molekul, což má mimo jiné velký význam pro chemickou synthesu složitých látek.

Dále hovořili *V. Černý* a *J. Oblonský* o strojích M1 a M2 navržených v Ústavu matematických strojů ČSAV, které budou předány Laboratoři krystalových struktur. Pomocí stroje M1 se dají stanovit molekulární struktury. Výpočet se provádí ve třech dimensích metodou zkoušení a chyb. Stroj má vestavěnou instrukční posloupnost a obsahují asi 1000 relé. Pracuje paralelně ve dvojkové soustavě podle metody doporučené A. Línkem a upravené A. Svobodou pro strojové zpracování. Stroj M2 je určen na Fourrierovu synthesu. Pomocí stroje se dá vypočítat mapa elektronových hustot v molekule. Na základě těchto map se dá určit vnitřní molekulární struktura dané látky. Stroj je opět paralelní a pracuje ve dvojkové soustavě.

M. Valach hovořil závěrem o pravoúhlém číslicovém koordinátografu, který se hodí pro výstup číslicových matematických strojů. Je to zařízení, pomocí kterého se číselný údaj vynáší pomocí soustavy clonek optickou cestou s přesností na 3 desetinná místa do souřadnicového systému na fotografické emulsi.

Třetího dne pojednal prof. *J. Lehmann* zevrubně o magnetické bubnové paměti malého elektronkového počitače postaveného v NDR. Přednáška byla proslovena v jazyce německém a vzbudila velký zájem rovněž v odpolední diskusi.

Dále hovořili M. Valach a A. Svoboda o operátorových obvodech. V prvé části se *M. Valach* zabýval novou číselnou soustavou, kterou nazval soustavou zbytkových tříd. Soustava spočívá na této základní myšlence: mějme $b_1, b_2, \ldots, b_n$ celá kladná nesoudělná čísla. Číslo nezáporné $N \leqq b_1 . b_2 . , . b_n$ se dá jednojednoznačně zobrazit na posloupnost čísel nezáporných $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takovou, že: $a_1 \equiv N \pmod{b_1}$, $a_2 \equiv N \pmod{b_2}$, ..., $a_n \equiv N \pmod{b_n}$. Tato soustava nemá předně přenosy čísel do vyšších řádů. Vedle toho umožňuje velmi jednoduché sčítání a násobení, takže po vhodném zobrazení čísel soustavy v elektrických sítích lze jednotaktně vyhodnocovat v oboru N složené algebraické výrazy.

A. Svoboda zavedl v druhé části používání operátorů pro vyčíslování výrazů a zabýval se teorií odhadu velikosti čísel vyjádřených v této soustavě, jakož i zavedením metriky do soustavy. Je to po prvé od zavedení polyadických soustav vůbec, kdy se začíná uplatňovat soustava jiného druhu v číslicových matematických strojích. Obě práce budou mít velký vliv na dosavadní postoj k číslicovým strojům.

J. Raichl referoval o výpočtech pro zkoumání barotropního modelu atmosféry na kalkulačním děrovači, prováděných v Ústavu matematických strojů ČSAV.

Z. Korvas přednesl referát *K. Korvasové* o metodě A. Svobody na řešení algebraických rovnic vyšších stupňů na kalkulačním děrovači.

J. Marek podal závěrem přehled o stavu vývoje strojů na zpracování informací v ČSR a naznačil další úkoly, před kterými stojí Ústav matematických strojů. Je to zejména dokončení a provozní výzkum československého samočinného počitače SAPO a zřízení „Vědeckého výpočtového střediska", které má sloužit k provádění vědeckých a technických výpočtů v ČSR. J. Marek rovněž zevrubně pojednal o potížích, se kterými se setkává Ústav matematických strojů při svém rozvoji.

Ze závěrečné diskuse vyplynulo, že konference splnila svůj úkol. Byla navržena resoluce, která byla jednomyslně schválena. V ní se hodnotí velký přínos práce kolektivu pracovníků ÚMS v oboru strojů na zpracování informací. Účastníci sjezdu dále žádají presidium ČSAV, aby byly zjištěny podmínky pro další růst a rozvoj ÚMS, jak to vyžaduje vývoj našeho socialistického průmyslu a vědy.

Téměř všechny přednesené referáty a jiné další práce z oboru strojů na zpracování informací vyjdou, jako každoročně, v tištěném Sborníku III v nakladatelství ČSAV na podzim roku 1955. *František Svoboda*, Praha.

NÁVŠTĚVY HOSTŮ

V době od 5. listopadu do 3. prosince 1954 dlel v Československu na základě kulturní dohody československo-polské Mgr Józef Łukaszewicz, adjunkt Matematického ústavu Polské akademie věd a zast. profesor vratislavské techniky. Prof. Łukaszewicz pracuje ve skupině prof. Hugo Steinhause ve Vratislavi v oddělení aplikované matematiky. Zajímá se zvláště o matematickou statistiku a za svého pobytu v Praze se podrobně seznámil se všemi hlavními pracovišti v oboru matematické statistiky u nás, a to jak v oboru theoretické matematické statistiky, tak také jejích aplikací, zejména v biologii, v lékařství a v kontrole jakosti výroby.

Prof. Łukaszewicz byl hostem Československé akademie věd. Pracoval v oddělení matematické statistiky v Matematickém ústavu ČSAV; kromě toho navštívil postupně katedru matematické statistiky na matematicko-fysikální fakultě Karlovy university, statistické oddělení ve Výzkumném ústavu tepelné techniky, ve Výzkumném ústavu sdělovací techniky A. S. Popova a Výzkumný ústav organisace zdravotnictví ministerstva zdravotnictví, navázal kontakt s pracovníky těchto ústavů a seznámil se s jejich pracemi. Během jednoho týdne sledoval prof. Łukaszewicz rovněž přednášky z matematické statistiky na matematicko-fysikální fakultě KU a obeznámil se podrobně se studijním programem.

Prof. Łukaszewicz proslovil dne 24. listopadu na matematicko-fysikální fakultě obecnou přednášku, v níž informoval naše odborníky o stavu matematické statistiky v Polsku, o problémech, které řeší polští statistikové s o některých jejich výsledcích. Mimo to seznámil na zvláštním kroužku naše odborníky se svými speciálními výsledky v aplikacích matematické statistiky v oboru sporného otcovství.

Během svého pohybu v Praze zúčastnil se prof. Łukaszewicz pravidelně schůzek pražské obce matematické, kromě toho navštívil dne 1. prosince též konferenci pořádanou Laboratoří matematických strojů ČSAV v Poděbradech. Značnou pozornost věnoval také kulturně-historickým památkám Prahy a kulturnímu životu u nás vůbec.

Frant. Zítek, Praha.

Od 15. prosince 1954 do 15. ledna 1955 dlel v Československu profesor Humboldtovy university Lev Kalužnin. Valnou část svého pobytu strávil na léčení v Karlových Varech. Pražští matematici se sešli s prof. Kalužninem na několika schůzkách a prodiskutovali s ním otázky vzájemných vědeckých styků, otázky týkající se vyučování matematice na všeobecně vzdělávacích školách a mimo to otázky související se IV. sjezdem československých matematiků, který se bude konat v Praze od 1. do 8. září 1955. *J. N.*

IV. SJEZD ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ V PRAZE

Matematicko-fysikální sekce Československé akademie věd uspořádá v Praze ve dnech 1. až 8. září 1955 čtvrtý sjezd československých matematiků se zahraniční účastí. Cílem sjezdu je podat přehled o dnešním stavu, rozvoji a perspektivě matematické vědy v Československu a ostatních lidově demokratických státech, řešit problémy spolupráce v oboru matematiky a podat vzájemné informace o vědeckých výsledcích.

Kongresová jednání budou probíhat takto:

1. Dopoledne: Plenární zasedání, na nichž budou předneseny jednak referáty (30ti minutové) o stavu, rozvoji a perspektivě matematické vědy v lidově demokratických státech, jednak rozsáhlejší vědecké přednášky (60ti minutové) význačných matematiků našich i zahraničních. Byly přislíbeny přednášky v těchto oborech: algebra, theorie čísel, funkcionální analysa, diferenciální rovnice, algebraická geometrie, diferenciální geometrie, topologie, počet pravděpodobnosti, matematická logika.

2. Odpoledne zasedání v sekcích. Připravují se tyto *sekce:*

I. algebra a theorie čísel,
II. matematická analysa,
III. geometrie a topologie,
IV. počet pravděpodobnosti a matematická statistika,
V. elementární matematika.

Na programu těchto zasedání jsou krátká sdělení (15ti minutová) jednotlivých účastníků sjezdu o jejich vědeckých výsledcích.

Po sjezdových zasedáních budou pořádány ve dnech 9. až 12. září exkurse. Odjezd zahraničních delegací je stanoven na 13. září.

Na sjezd bylo oficiálně pozváno 39 zahraničních delegátů ze Sovětského svazu, z lidově demokratických států a z některých západních států.

J. Novák, Praha.

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

15. 12. 1954: Ing. dr *Vlad. Klega*, O theorii iterací.
20. 12. 1954: Doc. dr *František Nožička*, O některých problémech afinní geometrie ploch.
10. 1. 1955: Akad. *Eduard Čech*, Můj příspěvek k afinní theorii ploch.
17. 1. 1955: Dr *Jan Mařík*, O parciálních diferenciálních rovnicích.
14. 2. 1955: Člen korespondent Maďarské akademie věd prof. dr *László Rédei*, Nový důkaz Hajossovy věty a člen korespondent Maďarské akademie věd prof. dr *Otto Varga*, Základy Riemannovské geometrie.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SLOVENSKEJ AKADÉMIE VIED

V treťom čísle štvrtého ročníku Matematicko-fyzikálneho časopisu vydávaného Slovenskou akadémiou vied v Bratislave sú okrem zpráv nasledovné články: *Dubinský J.*, Stavba vysokohorského laboratória na Lomnickom štíte. — *Kolbenheyer T.*, O prúdovom poli v homogénnom polopriestore s guľovou vložkou odlišnej vodivosti. — *Jakubík J.*, O rovnomernej konvergencii spojitých funkcií. — *Jakubík J.*, O grafovom izomorfizme semimodulárnych sväzov.

V štvrtom čísle toho ročníka má ten časopis nasledovné články: *Ivan J.*, O rozklade jednoduchých pologrúp na direktný súčin. — *Šalát T.*, O súčtoch istých konvergentných radov. — *Krajňáková D.*, Poznámka k teórii potenčných zvyškov (mod p^α). — *Tvrdá T.*, O súčte vypuklých útvarov. — *Kolbenheyer T.*, Vplyv polguľovej povrchovej inhomogenity na umelé geoelektrické prúdové pole. — *Dubinský J.*, *Chaloupka P.*, *Pernegr J.*, Východozápadní asymetrie kosmického záření na 48° N geomagnetické šířky. Na konci tohto čísla je uverejnená zpráva o III. matematickej olympiáde na Slovensku.

Ladislav Mišík, Bratislava.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova 40, telefon 2462-41. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. Účet Státní banky československé č. 38-161-0087, číslo směrovací 0152-1. Novinové výplatné povoleno Okrskovým poštovním úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Vyšlo 15. VI. 1955. D - 00583