Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

O PLOCHÁCH KLÍNOVÝCH, I

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 11. června 1954.)

DT: 513.62

V článku definuje autor plochy, které obsahují systém křivek, z nichž každé dvě lze na sebe zobrazit vhodným posunutím a vhodnou afinitou. Tyto plochy mají užití ve stavebně-inženýrské praxi.

§ 1. Explicitní klínové plochy

Funkcemi budeme rozumět bez výjimky reálné funkce reálných argumentů. Množinu uspořádaných dvojic z dané oblasti, splňujících rovnici $f(x, y) = 0$, označíme stručněji $(f(x, y) = 0)$; v analogickém smyslu budeme užívat označení $(f(x, y, z) = 0)$.

Zobrazení bodových množin M, M' z téže eukleidovské roviny nazveme afinitou, když lze volit souřadnicové osy a nenulové reálné číslo k tak, že pro každý vzor $(x, y) \in M$ a jeho obraz $(x', y') \in M'$ platí $x = x'$, $y \cdot k = y'$; přímku $(y = 0)$ nazveme osou afinity, přímku $(x = 0)$ směrem afinity a číslo k charakteristikou afinity.

Všimněme si, že tato afinita je symetrická a v případě téže osy také transitivní. Elace není v této afinitě zahrnuta.

Úmluva 1. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je definována nad jistou množinou I_x a funkce $g(y)$, $h(y)$ nad jistou množinou I_y. Zaveďme označení

$$(z = f(x) \cdot g(y) + h(y)) = \varkappa .$$

V dalším označme symbolem I_y danou množinu reálných čísel. Pro každé $y_0 \in I_y$ definujme jistým způsobem množinu $N(y_0) \subset (y = y_0)$. Uvažujme nyní o této podmínce:

(1) Jsou-li čísla y_1, y_2 jakkoliv vybrána z I_y a neleží-li žádná z množin $N(y_1)$, $N(y_2)$ na rovnoběžce s rovinou $(z = 0)$, pak množinu $N(y_1)$ lze posunout rovnoběžně s rovinou $(x = 0)$ na množinu $N(y_1)' \subset (y = y_2)$ tak, že $N(y_1)'$ je afinní s $N(y_2)$ pro osu $(y = y_2) \cap (z = 0)$ a směr $(y = y_2) \cap (x = 0)$.

Zaměníme-li v předchozím symboly x, y a zavedeme-li místo N symbol M, dostaneme analogickou podmínku (2).

Poučka 1. *a) Nechť platí úmluva 1. Budiž dále* $N(y_0) = \varkappa \cap (y = y_0)$. *Pak platí podmínka* (1).

b) Předpokládejme, že $F(x, y)$ *je funkce, definovaná nad* $I_x \times I_y$ *(pro jisté množiny reálných čísel* I_x, I_y*). Položme dále*

$$N(y_0) = (z = F(x, y) = 0) \cap (y = y_0)\,.$$

Platí-li podmínka (1), *pak rovnici* $z = F(x, y)$ *lze přepsat do tvaru z úmluvy 1.*

Důkaz. a) Nechť platí $g(y_1) \neq 0 \neq g(y_2)$. Posunutím o vektor $(0, y_2 - y_1, h(y_2)\, g(y_1)\, g^{-1}(y_2) - h(y_1))$ přejde $N(y_1)$ v $N(y_1)'$. Sestrojíme-li afinitu o ose $(y = y_2) \cap (z = 0)$, směru $(y = y_2) \cap (x = 0)$ a charakteristice $g(y_2)\, g^{-1}(y_1)$, pak $N(y_1)'$ se zobrazí touto afinitou v $N(y_2)$.

b) Tvrzení je zřejmé v případě, že pro každé $y_0 \in I_y$ je $F(x, y_0)$ konstanta. Předpokládejme tedy, že existuje neprázdná množina $I'_y \subset I_y$ tak, že pro žádné $y_0 \in I'_y$ není $F(x, y_0)$ konstantní. Vyberme číslo $y_1 \in I'_y$.

Položíme-li $F(x, y_1) = f(x)$, pak podle podmínky (1) a podle definice afinity pro každé $y_0 \in I'_y$ a pro jisté jednoznačně určené funkce $g(y)$, $h(y)$ je splněna rovnice

$$N(y_0) = (z = f(x)\, g(y) + h(y)) \cap (y = y_0)\,.$$

Takováto rovnice platí zřejmě i pro $y_0 \in I'_y$. Z rovnice $f(x)\, g(y) + h(y) = f(x)\,.\,G(y) + H(y)$ plyne pro $g(y) \neq G(y)$ rovnice $f(x) = (H(y) - h(y))(g(y) - G(y))^{-1}$, a tedy $f(x)$ je konstantní proti předpokladu. Tedy jest $g(y) = G(y)$ a následkem toho také $h(y) = H(y)$. Jednoznačnost je dokázána.

Poučka 2. *Předpokládejme, že funkce* f, g, h *v úmluvě 1 nejsou konstantní. Budiž dále* $M(x_0) = \varkappa \cap (x = x_0)$. *Pak platí* (2), *právě když existují konstantní čísla* A, B *tak, že*

$$g(y) = A\,.\,h(y) + B\,. \tag{3}$$

Důkaz. Nechť platí (3). Po dosazení dostaneme rovnici

$$z = h(y)(A\,.\,f(x) + 1) + B\,.\,f(x)\,,$$

a tedy platí podle poučky 1a podmínka (2).

Nechť platí podmínka (2). Je-li funkce $f(x_0)\, g(y) + h(y)$ konstantní pro každé $x_0 \in I_x$, pak jsou také g, h konstantní, což odporuje předpokladu. Tedy existuje $x_1 \in I_x$ tak, že $f(x_1)\, g(y) + h(y)$ není konstantní. Podle poučky 1b platí nyní pro každé $x \in I_x$ a pro jisté funkce $m(x)$, $n(x)$ rovnice

$$f(x)\, g(y) + h(y) = (f(x_1)\, g(y) + h(y))\, m(x) + n(x)\,. \tag{4}$$

1. Platí-li $m(x) = 1$ pro jisté $x \in I_x$, pak z rovnice (4) plyne $(f(x) - f(x_1))\,.\,g(y) = n(x)$. Z nerovnosti $f(x) \neq f(x_1)$ vyplývá že g je konstantní, což odporuje předpokladu. Tedy jest $f(x) = f(x_1)$. *V tomto případě platí tedy* (4) *pro každé reálné* $g(y)$. Všimněme si, že rovnice $m(x) = 1$ nemůže platit pro každé $x \in I_x$, neboť to by znamenalo, že f je konstantní.

2. Platí-li $m(x) \neq 1$ pro jisté $x \in I_x$, pak jest $f(x) \neq f(x_1)\, m(x)$. Z nerovnosti $m(x) \neq 1$ a z rovnice

$$f(x) = f(x_1)\, m(x)$$

plyne totiž

$$h(y)(m(x) - 1) + n(x) = 0\,,$$

a tedy h je konstantní, což je ve sporu s předpokladem.

Z rovnice (4) nyní odvodíme rovnici

$$g(y) = h(y)(m(x) - 1)(f(x) - f(x_1)\, m(x))^{-1} + n(x)(f(x) - f(x_1)\, m(x))^{-1}\,.$$

Položíme-li

$$(m(x) - 1)(f(x) - f(x_1)\, m(x))^{-1} = A(x),\ n(x)(f(x) - f(x_1)\, m(x))^{-1} = B(x)\,,$$

pak předchozí rovnice má tvar $g(y) = A(x)\, h(y) + B(x)$.

Předpokládejme, že x_2, x_3 jsou jakékoliv prvky z I_x, pro něž platí $m(x_2) \neq 1 \neq m(x_3)$. Potom platí rovnice

$$h(y)\, A(x_2) + B(x_2) = h(y)\, A(x_3) + B(x_3)\,.$$

Kdyby nebyla splněna rovnice $A(x_2) = A(x_3)$, pak h by byla konstanta proti předpokladu. Tedy jest $A(x_2) = A(x_3)$ a následkem toho také $B(x_2) = B(x_3)$. *Tedy pro každé $x \in I_x$, pro které platí $m(x) \neq 1$, jsou $A(x)$, $B(x)$ konstantní.* Tedy pro každé takové x platí rovnice (3).

Aby byly splněny oba případy, musí platit pro $g(y)$ rovnice (3). Poučka je dokázána.

Dodatek. Ve vyloučených případech, kdy některá funkce f, g, h je konstantní, platí (2) bez další podmínky.

Poučka 4. *Předpokládejme, že v úmluvě 1 je I_y interval, f není konstantní a funkce z má v každém bodě z $I_x \times I_y$ spojitou parciální derivaci podle y. Pak také g, h mají v každém bodě spojitou derivaci.*

Důkaz. Protože f není konstantní, existují čísla $x_1, x_2 \in I_x$ tak, že $f_1 = f(x_1) \neq f_2 = f(x_2)$. Vyšetřujme soustavu rovnic pro $g(y)$, $h(y)$

$$m(y) = f_1 g(y) + h(y)\,,$$

$$n(y) = f_2 g(y) + h(y)\,.$$

Determinant soustavy je roven nenulovému výrazu $f_1 - f_2$. Platí tedy

$$g(y) = (m(y) - n(y))(f_1 - f_2)^{-1}\,,\quad h(y) = (f_1 n(y) - f_2 m(y))(f_1 - f_2)^{-1}\,.$$

Z tohoto výpočtu ihned plyne tvrzení poučky.

Lze tedy nyní vyslovit tuto definici:

Definice 1. *Jsou-li množiny I_x, I_y v úmluvě 1 jednorozměrné oblasti a mají-li funkce f, g, h všude spojitou derivaci, pak plochu $\varkappa$ nazveme explicitní klínovou plochou.*

Příklad 1. V úmluvě 1 položme

$$f(x) = x^2, \; g(y) = ay^2 + d, \; a \neq 0 \neq c\,.$$

Platí rovnice

$$ay^2 + b = ac^{-1}(cy^2 + d) + b - ac^{-1}d\,;$$

tedy podle poučky 3 jsou na příslušné ploše $\varkappa$ v rovinách $(x = x_0)$ paraboly anebo přímky, pro něž platí podmínka (2).

§ 2. Implicitní klínové plochy

Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ je definována nad dvojrozměrnou oblastí O. Má-li tato funkce na oblasti O spojité, nikde současně nulové první parciální derivace a má-li rovnice $f(x, y) = 0$ v O alespoň jedno řešení, pak množinu $(f(x, y) = 0)$ nazveme rovinnou křivkou. Obdobně definujme v trojrozměrném případě plochu $(f(x, y, z) = 0)$.

Úmluva 2. Buďte $G(y), H(y)$ funkce, mající v jednorozměrné oblasti J spojité první derivace, při čemž neplatí $G(y) = 0$ pro žádné $y \in J$; buď $F(x, \bar{z})$ funkce, definovaná nad dvojrozměrnou oblastí O_1 tak, že $(F(x, \bar{z}) = 0)$ je křivka v rovině uspořádaných dvojic $(x, \bar{z})$.

Pak funkce $F(x, z\,G(y) + H(y))$ je definována nad oblastí $O = \underset{(x,y,z)}{E}((x, \bar{z}) \in O_1,\; y \in J,\; z \in (-\infty, \infty),\; \bar{z} = z\,G(y) + H(y))$. Zaveďme ještě označení $(F(x, z\,G(y) + H(y)) = 0) = \varkappa$.

Poučka 5. *Bodová množina $\varkappa$ z úmluvy 2 je plocha v prostoru uspořádaných trojic (x, y, z).*

Důkaz. Z rovnice

$$z = (\bar{z} - H(y_0))\,G^{-1}(y_0)$$

vyplývá, že pro žádné $y_0 \in J$ není množina $\varkappa \cap (y = y_0)$ prázdná. Dále se lehko ověří, že existují spojité parciální derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \; \frac{\partial F}{\partial z} = G(y)\,\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}, \; \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\,.$$

Tyto derivace se nemohou současně rovnat nule pro žádný bod z oblasti O. V opačném případě by totiž množina $(F(x, \bar{z}) = 0)$ nemohla být křivkou.

Jsme tedy nyní oprávněni vyslovit tuto definici:

Definice 2. *Plochu $\varkappa$ z úmluvy 2 nazveme implicitní klínovou plochou.*

Zavedeme si symbol $N(y_0) = \mu \cap (y = y_0)$; přitom μ je daná plocha a y_0 je libovolné reálné číslo. Vyšetřujme podmínku:

(5) Jsou-li množiny $N(y_1)$, $N(y_2)$ neprázdné, pak lze $N(y_1)$ posunout rovnoběžně s rovinou $(x = 0)$ na křivku $N(y_1)' \subset (y = y_2)$, která je s $N(y_2)$ afinní pro osu $(y = y_2) \cap (z = 0)$ a směr $(y = y_2) \cap (x = 0)$.

Poučka 6.

a) *Klínová plocha $\varkappa$ z definice 2 splňuje podmínku* (5).

b) *Daná plocha μ nechť neobsahuje rovnoběžky s přímkou* $(x = 0) \cap (y = 0)$. *Platí-li pro tuto plochu podmínka* (5), *pak μ splňuje definici 2.*

Důkaz. a) Zaveďme označení

$$k = (F(x, z) = 0) \cap (y = 0)\,.$$

Posunutím o vektor $(0, y_0, H(y_0))$ přejde křivka k v křivku

$$k' = (F(x, z + H(y_0) = 0) \cap (y = y_0)\,.$$

Afinitou o ose $(y = y_0) \cap (z = 0)$, směru $(y = y_0) \cap (x = 0)$ a charakteristice $G^{-1}(y_0)$ zobrazí se křivka k' na křivku $N(y_0)$. Vzhledem k transitivitě afinity při pevné ose platí tedy podmínka (5).

b) Vyšetřujme taková y_0, pro něž platí $N(y_0) \neq 0$. Pro každé takové y_0 existuje podle podmínky (5) křivka

$$k = (F(x, z) = 0) \cap (y = 0)$$

(daná jistou funkcí F), která posunutím rovnoběžným s rovinou $(x = 0)$ přejde v křivku $k' \subset (y = y_0)$, jež je s $N(y_0)$ afinní vzhledem k ose $(y = y_0) \cap (z = 0)$ a směru $(y = y_0) \cap (x = 0)$. To ale znamená (podle poučky 1b), že platí rovnice

$$z = ZG(y_0) + H(y_0), \text{ kde } G(y_0) \neq 0,\ H(y_0)$$

jsou jistá reálná čísla a z, Z jsou třetí souřadnice odpovídajících si bodů křivek k', $N(y_0)$.

Tedy platí

$$\mu = (F(x, zG(y) + H(y)) = 0)\,.$$

Poučka je tím dokázána.

Poučka 7. *Buď $G(y)$ polynom stupně s_G, $H(y)$ polynom stupně s_H a* $F(x, z) = \sum_{i=1}^{k} a_i x^{v_i} z^{w_i}$ *polynom, pro nějž uspořádané dvojice exponentů (v_i, w_i) jsou navzájem různé a koeficienty a_i jsou nenulové. Pak polynom $F(x, zG(y) + H(y))$ má stupeň*

$$\max_i\,(v_i + w_i \max\,(s_G + 1, s_H))\,.$$

Důkaz je snadný.

Příklad 2. V úmluvě 2 nechť platí

$$(x^2 + y^2z^2 = 1) = \varkappa\,;$$

oblast J je v tomto případě interval $(0, \infty)$. Křivka $N(y_0)$ jsou elipsy, které se dají na sebe zobrazit posunutím a afinitou (podle poučky 6a).

Poznámka 1. V definici 1 odstraníme z I_y všecka ta y, která anulují funkci $g(y)$; takto zmenšenou oblast I_y označíme I_y^+. Z příslušné explicitní plochy klínové dostaneme plochu $\varkappa^+$ o rovnici

$$f(x) - zg^{-1}(y) - g^{-1}(y)\, h(y) = 0$$

vzhledem k oblasti $I_x^* \times I_y^+$. Tato plocha $\varkappa^+$ je speciálním případem implicitní klínové plochy. Z toho je patrná vzájemná souvislost obou definicí 1, 2.

Poznámka 2. Připustíme-li v úmluvě 2 ta y, pro něž platí $G(y) = 0$, pak pro takováto y může na (rozšířené) ploše $\varkappa$ ležet soustava rovnoběžek o rovnici $F(x, H(y)) = 0$. Na těchto přímkách mohou se vyskytovat singulární body (právě když platí $\dfrac{\partial F}{\partial x} = G(y) = H'(y) = 0$). To je také hlavní důvod, proč jsme případ $G(y) = 0$ vyloučili (při definici plochy jsme se přece výslovně omezovali na regulární body).

§ 3. Speciální klínové plochy.

V tomto paragrafu budeme vyšetřovat klínové plochy se systémem parabol. Takové plochy mají totiž význam v praxi. Budeme výhradně užívat pravoúhlého souřadnicového systému.

Definice 3. *V rovině $(y = 0)$ definujme p jakožto rovnoběžku s osou x anebo jakožto parabolu o ose v ose z. Dále definujme p_I jakožto rovnoběžku s osou x anebo jakožto parabolu v rovině rovnoběžné s osou x tak, že její osa leží v rovině $(x = 0)$. Nechť dále platí $p_I \cap (y = 0) = \emptyset$. Pro každé reálné x_0 označme symbolem p_{x_0}*

1. přímku, určenou body $p \cap (x = x_0)$, $p_I \cap (x = x_0)$ v případě, že třetí souřadnice těchto bodů jsou stejné;

2. parabolu, jejíž osa je přímka $(x = x_0) \cap (y = 0)$ a na níž leží body $p \cap (x = x_0)$, $p_I \cap (x = x_0)$ v případě, že třetí souřadnice těchto bodů jsou různé. Plochu $\bigcup_{x_0 \in (-\infty, \infty)} p_{x_0}$ nazveme Hacarovou plochou.

Profesor Kadeřávek vyslovil domněnku, že Hacarova plocha obsahuje v obecném případě kromě parabol v rovinách $(x = x_0)$ ještě další systém parabol. Bude ukázáno, že tato domněnka je správná.

Nejprve však odvodíme rovnici Hacarovy plochy. Nechť A, B, m, n, k, q jsou konstanty, křivka p nechť má v rovině $(y = 0)$ rovnici $z = Ax^2 + B$; předpokládejme dále, že platí inkluse $p_I \subset (z = ky + q)$ a že rovnice průmětu p_I do roviny $(z = 0)$ je $y = mx^2 + n$. Pro podmínku $p_I \cap (y = 0) = \emptyset$ je ekvivalentní podmínka:

(6) Konstanta n je nenulová a dále platí buďto $m = 0$ anebo $m \neq 0$, $\operatorname{sg} m = \operatorname{sg} n$. V rovině $(x = x_0)$ platí pro křivku p_{x_0} rovnice

$$z = \frac{k(mx_0^2 + n) + q - (Ax_0^2 + B)}{(mx_0^2 + n)^2} y^2 + Ax_0^2 + B,$$

takže po úpravě dostaneme rovnici plochy ve tvaru

$$z = \frac{(km - A)\, x^2 + kn + q - B}{(mx^2 + n)^2} y^2 + Ax + B. \qquad (7{,}1)$$

V případě, že p_I je parabola, jsme předpokládali, že rovina této paraboly není rovnoběžná s osou z. Tento vyloučený případ nyní projednáme. Křivku p určíme jako v předchozím. Nechť dále a, b, c jsou konstanty, z nichž poslední je nenulová. Křivka p_I nechť má v rovině $(y = c)$ rovnici $z = ax^2 + b$. Pro křivku p_{x_0} platí nyní v rovině $(x = x_0)$ rovnice

$$z = \frac{ax_0^2 + b - (Ax_0^2 + B)}{c^2} y^2 + Ax_0^2 + B.$$

Z ní dostaneme po úpravě rovnici plochy ve tvaru

$$z = \frac{(a - A)\, x^2 + b - B}{c^2} y^2 + Ax^2 + B. \qquad (7{,}2)$$

Z této rovnice je zřejmé, že v rovinách $(y = y_0)$ jsou na ploše paraboly anebo přímky. Tento případ je ostatně známý.

Poučka 8. *Hacarova plocha má některou z rovnic* (7), *kde* A, B, m, n, a, b, c *jsou konstanty, z nichž* c *je nenulová a pro* m, n *platí podmínka* (6).

Úmluva 3. Čísla A, B nechť jsou konstantní a nechť $f(x)$ je funkce, mající pro každé x spojitou derivaci. Plochu, určenou rovnicí $z = f(x)\, y^2 + Ax^2 + B$ označíme $\varkappa$. Dále nechť jsou m, n, k, q konstanty, při čemž první dvě jsou nenulové a platí pro ně $\operatorname{sg} m = \operatorname{sg} n$.

V rovinách $(x = x_0)$ je na ploše $\varkappa$ systém parabol nebo přímek. Vyšetříme průmět průniku $(z = ky + q) \cap \varkappa$ do roviny $(z = 0)$. Tento průmět má v rovině $(z = 0)$ rovnici $f(x)\, y^2 - ky + Ax^2 + B - q = 0$; obsahuje křivku $(y = mx^2 + n) \cap (z = 0)$, právě když platí $f(x)(mx^2 + n)^2 - k(mx^2 + n) + Ax^2 + B - q = 0$. S touto rovnicí je ekvivalentní rovnice

$$f(x) = \frac{kmx^2 + kn - Ax^2 - B + q}{(mx^2 + n)^2}. \qquad (8)$$

Nechť dále platí pro jisté konstanty k', q', m', n' (z nichž poslední dvě jsou nenulové a splňují rovnici $\operatorname{sg} m' = \operatorname{sg} n'$)

$$\frac{kmx^2 - Ax^2 + kn - B + q}{(mx^2 + n)^2} = \frac{k'm'x^2 - Ax^2 + k'n' - B + q'}{(m'x^2 + n')^2} \text{ identicky v } x.$$

Jsou-li čitatelé identicky rovni nule, dostáváme triviální případ válcové plochy anebo roviny. Není-li tomu tak, pak existuje nenulový faktor w tak, že platí

$$mw = m', \; nw = n', \; (km - A)\, w^2 = k'm' - A, \; (kn - B + q)\, w^2 = \\ = k'n' - B + q'.$$

Tedy jsou splněny rovnice

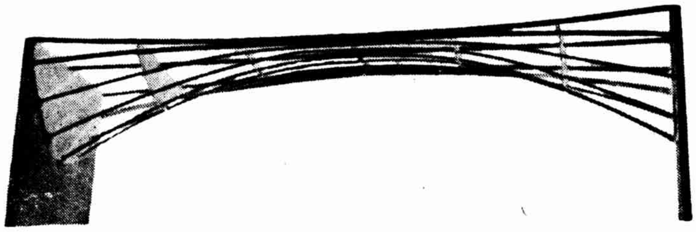
$$(km - A)\,w^2 - k'mw + A = 0, \quad (kn - B + q)\,w^2 - k'nw + B - q' = 0\,. \quad (9)$$

Tyto rovnice mají právě jedno řešení k', q'. Z toho již plyne tvrzení poučky, kterou nyní vyslovíme.

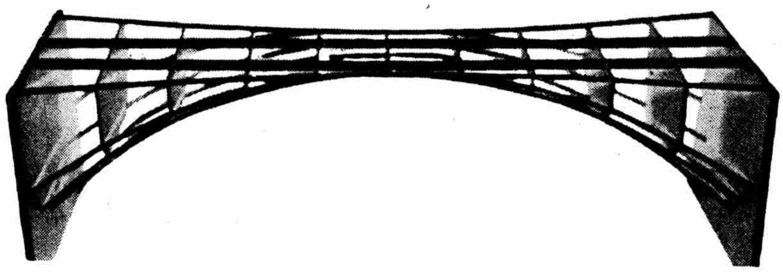
Poučka 9. *Plocha Hacarova, daná podle úmluvy 3 a podmínky* (8), *obsahuje pro každé nenulové w parabolu $(z = k'y + q') \cap (y = wmx^2 + wn)$, při čemž k', q' jsou určeny z rovnic* (9). *Průměty těchto parabol do roviny* $(z = 0)$ *jsou tedy kolmo afinní pro osu afinity v ose x.*

Tato poučka potvrzuje oprávněnost domněnky profesora Kadeřávka.

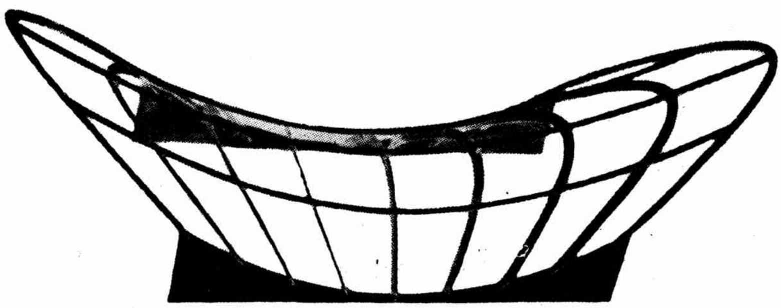
Poznámka 3. Plochy klínové mají upotřebení ve stavebním inženýrství (zejména při skořepinových konstrukcích). O jejich zavedení mají zásluhu profesor Fr. KADEŘÁVEK a profesor B. HACAR. První z nich dal také podnět k této práci.



Model části Hacarovy plochy, zhotovený *Rudolfem Čechem, Eduardem Drozdem* a *Miroslavem Šourkem.**) (Aplikace na mostní konstrukce.)



Model části Hacarovy plochy zhotovený *Ottou Pohlem.**) (Aplikace na mostní konstrukce.)



Model části jisté klínové plochy, zhotovený *Evou Rejthárkovou, Ludmilou Vaňhovou a Miloslavem Knoulichem.**) (Plocha má tvar sedla.)

---

*) Posluchači fakulty stavebního inženýrství (ČVUT).