Резюме

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ ОТ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ВОЙТЕХ ЯРНИК (Vojtěch Jarník), Прага.

(Поступило в редакцию 3/V 1954 г.)

Пусть $f_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu - 1; \nu > 0)$ — комплексная функция одной вещественной переменной, имеющая в точке α производную порядка $n - 1$ $(n > \nu)$. Предположим, что матрица (14) имеет ранг ν, такчто существуют целые числа $I_1, \ldots, I_\nu$ $(0 \leqq I_1 < I_2 < \ldots < I_\nu \leqq n - 1)$, для которых определитель Δ [см. (16), где $a_{kl} = f_l^{(k)}(\alpha)$] отличен от нуля. Выберем $I_1, \ldots, I_\nu$ так, чтобы значение $I_1 + \ldots + I_\nu$ было минимумом*) (при соблюдении условия $\Delta \neq 0$). Тогда имеет место (17), где $\Delta_\nu(x)$ определен формулой (15). Существует, следовательно, такое $\delta > 0$, что $\Delta_\nu(x) \neq 0$ для $0 < |x - \alpha| < \delta$. Отсюда легко вывести следующий результат: Если функции $f_0, \ldots, f_{n-1}$ такие, что матрица (29) имеет во всех точках промежутка (a, b) тот же самый ранг ν, то в (a, b) имеет место в точности $n - \nu$ независимых соотношений вида $c_0 f_0 + c_1 f_1 + \ldots + c_{n-1} f_{n-1} = 0$. (Нет надобности требовать, чтобы ранг матрицы, состоящей из ν первых строк матрицы (29), был равен ν во всех точках промежутка (a, b).)

Résumé.

SUR LES FONCTIONS LINÉAIREMENT DÉPENDANTES

VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

(Reçu le 3 mai 1954.)

Pour $k = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ $(\nu > 0)$ soit $f_k(x)$ une fonction complexe d'une variable réelle qui possède, au point α, une dérivée finie d'ordre $n - 1$ $(n > \nu)$. Supposons que la matrice (14) possède le rang ν; il existe donc des nombres entiers $I_1, I_2, \ldots, I_\nu$ $(0 \leqq I_1 < I_2 < \ldots < I_\nu \leqq n - 1)$ tels que la déterminante Δ (voir (16), où $a_{kl} = f_l^{(k)}(\alpha)$) soit différente de zéro. Nous supposons $I_1, \ldots, I_\nu$ choisis de manière de rendre la somme $I_1 + \ldots + I_\nu$ minimum*) (sous la condition $\Delta \neq 0$). Alors on a (17), où $\Delta_\nu(x)$ est le Wronskien (15). Il existe donc un $\delta > 0$ tel que l'on ait $\Delta_\nu(x) \neq 0$ pour $0 < |x - \alpha| < \delta$. On en déduit comme un corollaire facile le résultat suivant:

*) Это условие определяет числа $I_1, \ldots, I_\nu$ однозначно.

*) Cette condition détermine les nombres $I_1, \ldots, I_\nu$ d'une manière univoque.

Si les fonctions $f_0, \ldots, f_{n-1}$ sont telles que la matrice (29) ait, dans tous les points de l'intervalle (a, b), le même rang ν, alors il existe précisément $n - \nu$ relations linéaires indépendantes (de la forme $c_0 f_0 + c_1 f_1 + \ldots + c_{n-1} f_{n-1} = 0$) valables dans toute l'étendue de l'intervalle (a, b). (Il n'est pas nécessaire d'exiger que la matrice, formée de ν premières lignes de la matrice (29), possède le rang ν dans chaque point de (a, b).)