Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

NĚKTERÁ POŘADOVÁ ROZDĚLENÍ A JEJICH POUŽITÍ

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Došlo dne 24. března 1954.) DT:519.5

S použitím výsledků kombinatorických úvah o množině čísel 1, 2, ..., N jsou zde odvozeny dva pořadové testy, schopné nahradit t — test s asymptotickou vydatností 0,955.

1. Úvod a shrnutí. Tato práce, až na malé změny, je jednou ze tří částí disertace, kterou jsem podal v roce 1949. Jsou z ní odvozeny tři zákony rozdělení, vyplývající z jednoduchých úvah o souboru čísel 1, 2, ..., N, a dále je v ní naznačeno použití těchto rozdělení na testování nulových hypothes. Čísla 1, 2, ..., N v těchto testech hrají roli pořadí, takže běží o tak zvané pořadové testy. Rozdělení a test, označené písmenem α, se zde patrně vyskytují po prvé. Avšak za původce myšlenky, na které je tento test založen, je nutno pokládat R. A. FISHERA, který v III. kapitole svého „The Design of Experiments" uvádí test, založený na stejném principu jen s tím rozdílem, že nebere za základ pořadí hodnot, ale hodnoty samy. Tím se ovšem test stává po počtářské stránce velmi pracným, neboť pro každý konkretní případ si musíme vypočíst zvláštní zákon rozdělení. Při α-testu naopak, jakmile je jednou rozdělení α vypočteno a tabelováno, je provedení testu dílem několika minut. Rozsáhlá tabulka kritických hodnot α pro 5 stupňů významnosti a pro 10 až 50 párů pozorování je uvedena v této práci.

K rozdělení a testu, označenému písmenem β, dospěl již v roce 1945 WILCOXON v článku [1], u nás nepřístupném. Proto se jím budu zabývat jen potud, pokud se má metoda jeho zpracování jeví jako originální. Třetí rozdělení a test, označené písmenem γ, tvořící s předešlými ucelený systém, je dobře ve statistice znám z úloh o pořadovém koeficientu korelace τ.

Pro osud testů, uvedených v této práci, rozhodující jsou jejich přednosti a nedostatky vzhledem k běžnému Studentovu t-testu, kterého se používá k zjištění významnosti

(i) rozdílu mezi průměry dvou spárovaných výběrů,
(ii) rozdílu mezi průměry dvou nespárovaných výběrů,
(iii) regresního koeficientu.

V případě (i) může být t-test nahrazen α-testem, v případě (ii) β-testem (t. j. Wilcoxonovým testem resp. testem pomocí Mann-Whitneyovy U-statistiky), a v případě (iii) γ-testem.[1]) Hlavní výhodou uvedených pořadových testů je jejich jednoduchost a rychlost, a to, že vycházejí z obecnějších, a tím reálnějších předpokladů. Také jejich vydatnost není špatná, neboť jak ukázal VAN DER VAERDEN v práci [3] asymptotická vydatnost β-testu činí $\frac{3}{\pi} = 0{,}955$. Stejný výsledek platí i pro α-test, což bych chtěl ukázat ve zvláštním článku. Nesmíme však při všech kladech pořadových testů zapomínat na tu důležitou okolnost, že případy, kdy je nutno provést jen test významnosti, jsou poměrně řídké. Vždy, jakmile je významnost prokázána, je nutno zároveň stanovit interval spolehlivosti, a tu, zatím co t-test jej poskytuje bezprostředně, pořadové testy jej mohou poskytnout jen s neúměrně velkými počtářskými obtížemi.

2. α-rozdělení. Vyjděme od množiny čísel $1, 2, \ldots, N$ a uvažujme všechny její podmnožiny, dávajíce každé z nich jakožto elementárnímu jevu stejnou pravděpodobnost 2^{-N}. Součet čísel v jednotlivých podmnožinách — označme jej α — bude potom náhodnou veličinou, nabývající celočíselných hodnot v mezích

$$0 \leq \alpha \leq \tfrac{1}{2}N(N+1).$$

Vytvořující polynom pro rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny α snadno nalezneme, uvědomíme-li si, že α je součtem n nezávislých náhodných veličin

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N,$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= k \quad \text{(když číslo } k \text{ je v dané podmnožině)}, \\ &= 0 \quad \text{(v opačném případě)}. \end{aligned}$$

Při tom obě možnosti jsou stejně pravděpodobné, neboť počet podmnožin, které číslo k obsahují, je právě takový jako těch, které je neobsahují. Rozklad α na součet $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N$ má reálný protějšek v tom, že vytvoření obecné podmnožiny můžeme rozdělit na N nezávislých kroků: V prvém zahrneme či nezahrneme do podmnožiny číslo 1, v druhém číslo 2 atd. pro všech N čísel. Vytvořující polynomy náhodných veličin α_k jsou rovny

$$\tfrac{1}{2}(1 + t^k)$$

a tedy vytvořující polynom α je dán vztahem

$$P_N(t)\, 2^N = (1+t)(1+t^2)\ldots(1+t^N).$$

[1]) Pro stručnost označuji jedním písmenem jednak formu zákona rozdělení, jednak náhodnou veličinu, ovládanou tímto zákonem rozdělení, a také i příslušný test.

Koeficienty polynomů $P^N(t)\,2^N$, které po vydělení 2^N dávají pravděpodobnosti příslušných hodnot α, lze počítat pomocí očividného rekurentního vztahu

$$P_N(t)\,2^N = P_{N-1}(t)\,2^{N-1}(1 + t^N)\,.$$

To jest, napíši-li pod posloupnost koeficientů $P_{N-1}(t)\,2^{N-1}$ tutéž posloupnost, posunutou o N míst, a sečtu, dostanu koeficienty $2^N P_N(t)$. Jelikož rozdělení náhodných veličin α_k jsou symetrická, platí to i o rozdělení α. Střední hodnotu, rozptyl a plochost rozdělení α vypočteme snadno pomocí odpovídajících charakteristik veličin α_k:

$$\begin{aligned} E(\alpha_k) &= \tfrac{1}{2}k \\ D^2(\alpha_k) &= \tfrac{1}{4}k^2 \\ \mu_4(\alpha_k) &= \tfrac{1}{16}k^4 \\ \varkappa_4(\alpha_k) = \mu_4(\alpha_k) - 3D^4(\alpha_k) &= -\tfrac{1}{8}k^4 \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \tfrac{1}{4}N(N+1) \\ D^2(\alpha) &= \tfrac{1}{24}N(N+1)(2N+1) \\ \varkappa_4(\alpha) &= -\tfrac{1}{240}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1) \\ \gamma_2(\alpha) &= \frac{\varkappa_4(\alpha)}{D^4(\alpha)} \sim -\frac{18}{5N}\,. \end{aligned}$$

Konvergence α-rozdělení k normálnímu rozdělení bezprostředně vyplývá z Liapunovovy věty: Třetí absolutní momenty veličin α_k jsou rovny $k^3 2^{-3}$ a jejich součet

$$\sum_{k=1}^{N} k^3 2^{-3} = \tfrac{1}{32}N^2(N+1)^2\,.$$

Podíl třetí odmocniny tohoto součtu a standardní odchylky $D(\alpha)$ pro $N \to \infty$ konverguje k nule.

3. γ-rozdělení. Vyjděme opět od množiny čísel $1, 2, \ldots, N$ a uvažujme všechny permutace, dávajíce každé z nich jakožto elementárnímu jevu stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{N!}$. Potom počet inversí — označme si jej γ — bude náhodnou veličinou. Náhodná veličina γ nabývá celočíselných hodnot v mezích

$$0 \leq \gamma \leq \tfrac{1}{2}N(N-1)$$

a opět ji lze rozložit na součet $(N-1)$ nezávislých složek

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{N-1}\,,$$

kde γ_k je počet inversí, způsobených tím, že číslo $(k+1)$ předchází některé z čísel menších, t. j. některé z čísel $1, 2, \ldots, k$. Tento rozklad náhodné veličiny γ má reálný protějšek v tom, že vytvoření obecné permutace lze rozložit na $N-1$ nezávislých kroků: V prvním dáme číslo 2 buď za nebo před 1; v druhém dáme 3 buď za obě předcházející čísla nebo mezi ně anebo před ně obě, atd. až v $(N - 1)$-ním kroku dáme číslo N buď za $(N - 1)$ předcházejících čísel nebo do některé z $(N - 2)$ mezer mezi nimi anebo před ně všechny.

Jelikož náhodné veličiny γ_k nabývají hodnot $0, 1, 2, \ldots, k$, a to se stejnými pravděpodobnostmi, neboť každé eventualitě odpovídá stejný počet permutací — elementárních jevů, jsou jejich vytvořující polynomy rovny

$$\frac{1}{k+1}(1 + t + t^2 + \ldots + t^k) = \frac{1}{k+1}(1 - t^{k+1})(1 - t)^{-1}$$

a vytvořující polynom γ je dán vztahem

$$R_N(t)\, N!(1 - t)^N = (1 - t)(1 - t^2)\ldots(1 - t^N)\,. \tag{1}$$

Konvergenci rozdělení γ k normálnímu rozdělení, jeho symetrii, jakož i hlavní momenty, bychom odvodili do písmene stejným způsobem jako tomu bylo u rozdělení α. Uveďme si pouze

$$E(\gamma) = \tfrac{1}{4}N(N - 1)\,,$$
$$D^2(\gamma) = \tfrac{1}{72}N(N - 1)(2N + 5)\,.$$

4. β-rozdělení. I nyní vyjděme od čísel $1, 2, \ldots, N$ a uvažujme všechny možnosti jak je rozdělit na dvě skupiny, jednu o n a druhou komplementární o $(N - n)$ prvcích, dávajíce každé skupině o n prvcích jakožto elementárnímu jevu stejnou pravděpodobnost $\dfrac{1}{\binom{N}{n}}$. Potom počet inversí mezi skupinami a jejich komplementy — označme jej β — bude náhodnou veličinou. Inversí mezi skupinami budeme rozumět zjev, že ve skupině o n prvcích se vyskytuje číslo větší než některé číslo z komplementární skupiny a celkový počet inversí zjistíme, když prozkoumáme všech $n(N - n)$ dvojic čísel, z nichž první je ze skupiny o n prvcích a druhé z komplementární skupiny. Náhodná veličina β tedy nabývá celočíselných hodnot v mezích

$$0 \leq \beta \leq n(N - n)\,.$$

Vraťme se nyní k náhodné veličině γ, sledované v předešlém paragrafu. Rozdělíme-li každou permutaci na dvě části — na prvních n a na posledních $(N - n)$ prvků — pak vidíme, že náhodnou veličinu γ lze rozložit na součet tří nezávislých veličin

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \beta\,,$$

kde γ_1 je počet inversí uvnitř prvé části, γ_2 je počet inversí uvnitř druhé části a β je počet inversí mezi oběma částmi. Tento rozklad náhodné veličiny γ má reálný protějšek v tom, že vytvoření obecné permutace lze rozdělit na tři nezávislé kroky: v prvém určíme čísla, která budou na prvních n místech, a tím i čísla pro posledních $(N - n)$ míst; v druhém kroku zpermutujeme mezi sebou čísla určená pro prvních n míst a ve třetím kroku provedeme totéž se zbývajícími $(N - n)$ čísly.

Vytvořující polynomy γ, γ_1 a γ_2 jsou dány vztahem (1). Označíme-li si vytvořující polynom β písmenem $Q_{N,n}(t)$, pak ze vztahu

$$R_N(t) = R_n(t)\, R_{N-n}(t)\, Q_{N,n}(t)$$

ihned plyne

$$Q_{N,n}(t) \binom{N}{n} = \frac{(1 - t^N)(1 - t^{N-1}) \dots (1 - t^{N-n+1})}{(1 - t)(1 - t^2) \dots (1 - t^n)} . \qquad (2)$$

Píšeme-li formální obdobu faktoriálů

$$(1 - t)(1 - t^2) \dots (1 - t^k) = (1 - t^k)!\,,$$

máme

$$Q_{N,n}(t) \binom{N}{n} = \frac{(1 - t^N)!}{(1 - t^n)!\,(1 - t^{N-n})!}\,,$$

takže vytvořující polynom β je jakousi obdobou kombinačních čísel mezi polynomy. Vidíme, že se nemění, dosadíme-li $(N - n)$ místo n

$$Q_{N,n}(t) = Q_{N,N-n}(t)\,.$$

Avšak $Q_{N,N-n}(t)$ je vytvořující polynom pro rozdělení náhodné veličiny $n(N - n) - \beta$, z čehož je ihned vidět, že rozdělení β je symetrické.

Koeficienty $Q_{N,n}(t) \binom{N}{n}$ a pomocí nich i pravděpodobnosti příslušných hodnot β nalezneme snadno z rekurentního vztahu

$$R_{N,n}(t) \binom{N}{n} = R_{N-1,n}(t) \binom{N-1}{n} + t^{N-n} R_{N-1,n-1}(t) \binom{N-1}{n-1}\,,$$

který si čtenář, užívaje (2), snadno ověří. Reálný smysl tohoto vztahu je v tom, že při rozdělení čísel $1, 2, \dots, N$ do dvou skupin lze *rozložit* dva případy, podle toho, zda číslo N přijde do komplementární skupiny či do skupiny o n prvcích. V prvém případě bude inversí právě tolik, jako kdybychom příslušným způsobem rozdělili jen čísla $1, 2, \dots, N - 1$, kdežto v druhém případě jich bude o $(N - n)$ více.

Označíme-li si součet čísel ve skupině o n prvcích S, snadno si lze ověřit, že

$$\beta = S - \tfrac{1}{2}n(n + 1)\,.$$

S je součtem n čísel vybraných bez vracení a se stejnými pravděpodobnostmi ze základního souboru $1, 2, \dots, N$, v němž základní rozptyl je $\sigma^2 = \frac{1}{12}(N^2 - 1)$. Tudíž

$$D^2(S) = n\sigma^2 \frac{N - n}{N - 1} = \frac{1}{12}\, n(N - n)(N + 1)$$

a tedy i

$$D^2(\beta) = \tfrac{1}{12} n(N - n)(N + 1)\,.$$

Střední hodnotu β nalezneme vzhledem ke symetrii jako průměr krajních hodnot 0 a $n(N-n)$:

$$E(\beta) = \tfrac{1}{2}n(N-n)\,.$$

Závěrem se ptejme, k jakému rozdělení konverguje rozdělení β při $N \to \infty$. Zde je nutno rozlišit dva případy:

a) n zůstává pevné. V tomto případě budeme sledovat rozdělení veličiny $\frac{\beta}{N}$. Charakteristickou funkci $\varphi(t)$ rozdělení veličiny $\frac{\beta}{N}$ nalezneme, když ve vyhovujícím polynomu (2) nahradíme t výrazem $e^{it/N}$:

$$\varphi(t) = \frac{(1-e^{it\frac{N}{N}})(1-e^{it\frac{N-1}{N}})\dots(1-e^{it\frac{N-n+1}{N}})\,1\,.\,2\dots n}{(1-e^{it\frac{1}{N}})(1-e^{it\frac{2}{N}})\dots(1-e^{it\frac{n}{N}})\,N(N-1)\dots(N-n+1)}\,.$$

Jelikož

$$\lim_{N\to\infty}(1-e^{it\frac{N-k+1}{N}}) = 1-e^{it} \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\lim_{N\to\infty}(1-e^{it\frac{k}{N}})\,\frac{N-k+1}{k} = -\,it\,,$$

dostáváme

$$\lim_{N\to\infty}\varphi(t) = \left\{\frac{e^{it}-1}{it}\right\}^n.$$

To je charakteristická funkce součtu n nezávislých náhodných veličin, majících spojité rovnoměrné rozdělení nad intervalem (0, 1).

b) $n \to \infty$ a $(N-n) \to \infty$. Jelikož rozdělení součtu n nezávislých hodnot vybraných z rovnoměrného rozdělení konverguje při $n \to \infty$ k normálnímu rozdělení, můžeme z toho ihned vyvodit, že při *některém* způsobu společné konvergence n a $(N-n)$ k nekonečnu bude rozdělení β konvergovat k normálnímu rozdělení. Avšak bylo dokázáno, viz na př. [2], že konvergence k normálnímu rozdělení nastává při *jakékoliv* konvergenci $n \to \infty$ a $(N-n) \to \infty$.

5. α-test. Nyní si ukážeme jak lze použít výsledků odvozených v minulých paragrafech k testování nulových hypothes. Mějme N párů pozorování (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ vesměs nezávislých a takových, že pozorování x_i byla získána za podmínek A, kdežto pozorování y_i za podmínek B. Kromě toho nechť tu působily vedlejší podmínky, které sice byly pro každý pár pozorování stejné, ale od páru k páru se měnily (viz dále uvedený příklad). Nyní testujme nulovou hypothesu, že změna podmínek A v podmínky B neměla vliv na velikost pozorovaných hodnot, a že všechny rozdíly uvnitř párů lze považovat za náhodné. Jinými slovy, testujme nulovou hypotesu, že každý pár pozorování představuje dvě hodnoty nezávisle vybrané z téhož spojitého rozdělení, které se ovšem může od páru k páru měniti.

Vytvořme rozdíly
$$d_i = x_i - y_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$
a seřaďme je podle *absolutní* velikosti. Spojitost rozdělení vylučuje případy $|d_i| = |d_j|$ pro $i \neq j$ a také případy $d_i = 0$. Rozdíly uspořádané podle *absolutní* velikosti si označme $d^{(1)}, d^{(2)}, \ldots, d^{(n)}$, takže
$$|d^{(1)}| < |d^{(2)}| < \ldots < |d^{(N)}|\,.$$
Potom lze každé řadě párů pozorování (x_i, y_i) přiřadit podmnožinu čísel $1, 2, \ldots, N$ tak, že číslo k bude do ní pojato tehdy a jen tehdy, je-li rozdíl $d^{(k)}$

Tabulka 1.

i, k	x_i	y_i	d_i	$d^{(k)}$
1	188	139	49	6
2	96	163	—67	8
3	168	160	8	14
4	176	160	16	16
5	153	147	6	23
6	172	149	23	24
7	177	149	28	28
8	163	122	41	29
9	146	132	14	41
10	173	144	29	—48
11	186	130	56	49
12	168	144	24	56
13	177	102	75	60
14	184	124	60	—67
15	96	144	—48	75

kladný. Z nulové hypothesy bezprostředně vyplývá, že každá taková podmnožina bude mít stejnou pravděpodobnost a součet pořadí kladných rozdílů v jejich uspořádání podle absolutní velikosti bude mít rozdělení α.

Test provedeme tedy takto: vypočteme rozdíly mezi páry pozorování, seřadíme je podle absolutních hodnot, sečteme pořadové indexy kladných rozdílů a potom srovnáme zjištěné α s tabulovanou kritickou hodnotou pro příslušný stupeň významnosti. Samozřejmě, očekáváme-li porušení nulové hypothesy jen jedním směrem, redukuje se stupeň významnosti na jednu polovinu. Abychom nemuseli tabelovat horní kritické hodnoty pro α, můžeme využít toho, že je na naší vůli, zda budeme sčítat pořadové indexy kladných či záporných rozdílů. Označíme-li si α založené na kladných rozdílech α_+ a α založené na záporných rozdílech α_-, pak platí
$$\alpha_+ + \alpha_- = \tfrac{1}{2}N(N+1)\,,$$
takže horní kritickou hodnotu překročí α_+ právě tehdy, překročí-li α_- kritickou hodnotu dolní. To nám umožňuje tabelovat jen kritické hodnoty dolní, se kte-

rými srovnáváme α založené na rozdílech toho znaménka, které se vyskytuje méně často.

Příklad. Použijme α-test k rozboru klasického Darwinova experimentu, uvedeného v „The Design of Experiments“ R. A. Fishera. Zde je zkoumáno, zda potomstvo rostliny, vzniklé křížením, se liší významně co do své výšky od potomstva vzniklého samooplodněním. Bylo vypěstováno 15 párů exemplářů určité rostliny, v nichž každý jedinec byl vystaven pokud možno stejné péči a stejným původním podmínkám, takže příslušníci každého páru se až na náhodné vlivy lišili pouze tím, že jeden vznikl křížením a druhý samooplodněním. V tabulce 1 jsou v druhém sloupci udány výsledky dosažené u exemplářů vzniklých křížením a v třetím sloupci souběžné výsledky u jedinců vzniklých samooplodněním, při čemž jednotkou je $\frac{1}{8}$ palce. Ve čtvrtém sloupci jsou dány rozdíly a v pátém jsou tyto rozdíly seřazeny podle absolutní velikosti. Čísla v prvém sloupci určují pořadí, a to jak d_i, tak i $d^{(k)}$. Jelikož záporné rozdíly jsou jen dva, založíme α-test na nich. Jelikož -48 má pořadí 10 a -67 má pořadí 14, dostáváme

$$\alpha = 10 + 14 = 24\,.$$

V tabulce 2 nacházíme, že pro $N = 15$ je 5%-ní kritická hodnota 25,3, takže spokojíme-li se s 5%-ním stupněm významnosti, je nalezená hodnota α významně malá a soudíme, že způsob vzniku rostliny na její výšku vliv má. Použijeme-li t-test, dostáváme $t = 2{,}148$, což je také hodnota nepatrně větší než 5%-ní hodnota, takže oba testy dávají v podstatě stejný výsledek.

V tabulce 2 jsou vypočteny dolní kritické hodnoty pro 10%-ní, 5%-ní, 2%-ní, 1%-ní a 0,1%-ní stupně významnosti. Pro malá N bylo použito skutečného α-rozdělení. Pro větší N bylo možno použít aproximace pomocí normálního rozdělení, opraveného v člen Edgeworthovy řady, beroucí zřetel na plochost.

Poznámka 1. Je-li v tabulce 2 na místě 5%-ní kritické hodnoty uvedeno číslo $a_{0,05}$, znamená to, že

$$P(\alpha_+ \leq a_{0,05}) + P(\alpha_- \leq a_{0,05}) = 0{,}05\,.$$

Je-li číslo $a_{0,05}$ necelé, na př. $a_{0,05} = 25{,}3$, znamená to, že s pravděpodobností 0,3 můžeme za významnou považovat i hodnotu 26, aniž by pravděpodobnost zamítnutí nulové hypothesy, je-li správná, stoupla nad 0,05.

Poznámka 2. Při skutečných experimentech se bude stávat, že některé rozdíly budou rovny nule, a jiné zase budou stejné co do své absolutní hodnoty. Tento případ lze převést na předešlý tím, že dodatečně jednak každý nulový rozdíl prohlásíme s pravděpodobností 0,5 za kladný a s pravděpodobností 0,5 za záporný, a jednak skupinky co do absolutní velikosti stejně velkých rozdílů náhodně seřadíme podle „velikosti“ tak, že každé seřazení bude mít stejnou pravděpodobnost. Po tomto umělém „doplnění“ experimentu, bude možno užít α-test přesně tak, jako by se jednalo o výběr ze spojitého rozdělení. Jeho

Tabulka 2.

Dolní kritické hodnoty pro α-test.

Počet párů N	Stupeň významnosti				
	10 %	5 %	2 %	1 %	0,1 %
10	10,8	8,0	4,9	3,0	
11	13,9	10,7	7,1	4,8	
12	17,5	13,8	9,6	7,0	0,8
13	21,4	17,2	12,6	9,6	2,4
14	25,7	21,0	15,8	12,4	4,2
15	30,5	25,3	19,5	15,7	6,3
16	35,6	29,9	23,5	19,3	8,8
17	41,2	34,9	27,9	23,3	11,6
18	47,1	40,3	32,6	27,6	14,7
19	53,6	46,1	37,8	32,3	18,1
20	60,4	52,3	43,3	37,3	21,9
21	67,6	58,9	49,1	42,7	25,9
22	75,2	66,0	55,4	48,6	30,3
23	83,3	73,4	62,2	54,7	35,1
24	91,8	81,2	69,3	61,4	40,3
25	100,8	89,5	76,7	68,3	45,8
26	110,1	98,2	84,6	75,7	51,6
27	119,9	107,3	92,9	83,4	57,7
28	130,2	116,8	101,6	91,6	64,2
29	140,8	126,8	110,7	100,0	71,2
30	151,9	137,1	120,2	108,9	78,6
31	163,4	147,9	130,2	118,2	86,3
32	175,5	159,1	140,5	128,0	94,3
33	187,9	170,7	151,2	138,2	102,7
34	200,7	182,8	162,3	148,8	111,5
35	214,0	195,3	173,9	159,8	120,7
36	227,7	208,2	185,9	171,0	130,2
37	241,9	221,5	198,3	182,7	140,1
38	256,5	235,3	211,1	195,0	150,4
39	271,5	249,6	224,4	207,6	161,1
40	287,0	264,2	238,1	220,6	172,1
41	303,0	279,2	252,1	233,8	183,6
42	319,3	294,7	266,5	247,5	195,4
43	336,2	310,6	281,5	261,8	207,7
44	353,4	327,0	296,9	276,5	220,4
45	371,2	343,8	312,7	291,6	233,5
46	389,3	361,1	328,9	307,1	247,0
47	408,0	378,7	345,5	322,8	260,8
48	427,0	396,8	362,5	339,0	275,0
49	446,5	415,4	380,0	355,8	289,7
50	466,5	434,4	397,9	373,0	304,7

citlivost se tím ovšem zmenší. Pro aplikaci však bude stačit užít místo „doplňování" experimentu následujícího polovinového pravidla:

1° vyskytuje-li se mezi diferencemi k nul, připočteme na vrub α $\frac{1}{2}(1 + 2 + \ldots + k)$.

2° vyskytuje-li se na místech, $r + 1, \ldots, r - k + 1$ k co do absolutní hodnoty stejných diferencí, mezi nimiž je k_+ kladných a k_- záporných,

$k_+ + k_- = k$, pak připočteme na vrub α $\left(r + \frac{k-1}{2}\right) k_+$, resp. $\left(r + \frac{k-1}{2}\right) k_-$ podle toho, zda používáme α_+ či α_-.

V těch skupinkách, kde jsou všechny rozdíly stejného znaménka, nebude samozřejmě třeba dělat žádná opatření. Statistika α, získaná z polovinového pravidla nebude již sice mít přesně to rozdělení, které máme tabelováno, ale lze očekávat, že v případě, kdy nul a absolutně rovných rozdílů nebude mnoho, budou tabulky i nadále použitelné.

Tabulka 3.

Dolní 5 %-ní kritické hodnoty pro β-test

m \ n	3	4	5	6	7	8	9	10
4	—	0,7						
5	0,4	1,6	2,8					
6	1,0	2,4	3,9	5,4				
7	1,5	3,3	5,1	6,9	8,8			
8	2,0	4,1	6,2	8,4	10,7	13,0		
9	2,5	5,0	7,4	10,0	12,6	15,3	18,0	
10	3,0	5,7	8,5	11,5	14,5	17,6	20,6	23,7

Tabulka 4.

Dolní 10 %-ní kritické hodnoty pro β-test

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	—	0,0							
4	—	0,7	1,8						
5	0,1	1,4	2,8	4,1					
6	0,4	2,1	3,7	5,4	7,2				
7	0,8	2,7	4,7	6,8	8,9	11,1			
8	1,2	3,3	5,7	8,2	10,7	13,2	15,8		
9	1,6	4,0	6,8	9,6	12,5	15,4	18,3	21,3	
10	1,9	4,6	7,8	11,0	14,2	17,5	21,0	24,3	27,6

Poznámka 3. Je-li nulová hypothesa vyvrácena, vyvstává úloha najít interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ. Lze při tom postupovat následujícím způsobem: Vezmeme libovolné μ a na chvíli budeme předpokládat, že střední hodnota je skutečně rovna tomuto μ. Pak ovšem s příslušnou pravděpodobností, řekněme 0,95, nesmí α vypočtené z hodnot $(d_1 - \mu)$, $(d_2 - \mu), \ldots, (d_N - \mu)$ padnout do kritického oboru. Čili ta μ, pro které se to stane, budou tvořit interval spolehlivosti. Výpočet krajních bodů tohoto intervalu by se však muselo dělat patrně zkusmo, což by bylo velmi obtížné.

Poznámka 4. Použití α-testu se neomezuje jen na spárované výběry. Lze jím testovat i poněkud obecnější hypothesu, že střední hodnota n pozorování majících symetrické rozdělení, je rovna určité konstantě. (U spárovaných vý-