Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

GEOMETRIE SIMPLEXU V E_n

(druhá část)

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Došlo dne 20. listopadu 1954.) DT 513.821.2

V této druhé části práce se zavádí pojem význačné množiny simplexu, popisuje se množina vlastních i nevlastních význačných bodů a vlastních význačných přímek. Jsou zde uvedeny některé význačné množiny obecného simplexu a dokazují se věty o isogonální příbuznosti.

6. Význačné množiny simplexu. Budiž opět E_n eukleidovský prostor dimense n (n přirozené). Nazveme přípustným zobrazením m-tého řádu ($m \geqq 0$ celé) takové zobrazení φ, které každé uspořádané skupině $m + 1$ bodů A_1, $A_2, \ldots, A_{m+1}$ z E_n přiřazuje nějakou množinu $M \subset \bar{E}_n$,*)

$$M = \varphi(A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}) ,$$

a to tak, že platí: je-li T isometrické zobrazení $\bar{E}_n$, pak

$$\varphi(TA_1, TA_2, \ldots, TA_{m+1}) = T\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}) .$$

Budiž nyní $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ ($m \geqq 0$ celé) pevná skupina (ne uspořádaná) bodů z E_n. Nazveme *význačnou množinou* této skupiny každou takovou množinu $M \subset \bar{E}_n$, k níž existuje přípustné zobrazení m-tého řádu φ tak, že

$$M = \varphi(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{m+1}})$$

pro každou permutaci $(i_1, i_2, \ldots, i_{m+1})$ indexů $1, 2, \ldots, m + 1$. Význačnými množinami simplexu v E_n rozumíme význačné množiny skupiny vrcholů simplexu. Zřejmě průnik i sjednocení význačných množin simplexu jsou opět význačné množiny simplexu.

V dalších větách se budeme zabývat množinou všech význačných bodů pevného simplexu v E_n o vrcholech $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$, t. j. množinou všech význačných jednobodových množin tohoto simplexu.

Věta 16. *Množina všech vlastních význačných bodů simplexu tvoří (neprázdný) lineární prostor.*

*) $\bar{E}_n$ je eukleidovský prostor E_n, doplněný nevlastními body.

Důkaz. Označme Λ množinu všech vlastních význačných bodů daného simplexu. Jsou-li P, Q dva různé body Λ, pak každý vlastní bod přímky PQ je význačný bod simplexu: pro body P a Q to platí, každému jinému bodu S přímky PQ je přiřazen dělicí poměr λ $(0 \neq \lambda \neq 1)$ vzhledem k bodům P a Q. Odpovídají-li význačným bodům P a Q přípustná zobrazení φ a ψ, takže $P = \varphi(O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_{n+1}})$, $Q = \psi(O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_{n+1}})$ pro každou permutaci $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$, označme χ takové zobrazení, které každé uspořádané skupině $n + 1$ bodů $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ z E_n přiřazuje množinu všech bodů X, k nimž existují vlastní body $P' \in \varphi(A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$, $Q' \in \psi(A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$, $P' \neq Q'$, tak, že X má dělicí poměr λ vzhledem k bodům P', Q'. Zřejmě je χ přípustné zobrazení a platí

$$S = \chi(O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_{n+1}})$$

pro každou permutaci $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$, t. j. bod S je rovněž význačným bodem simplexu.

Odtud však ihned plyne, že Λ je lineární prostor. Že Λ je neprázdné, ukážeme (nezávisle) ve větě 18.

Věta 17. *Nechť $\sigma_i(\xi_{kl})$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, jsou reálné funkce $\binom{n+1}{2}$ reálných proměnných ξ_{kl}, $k < l$, $k, l = 1, 2, \dots, n + 1$, definované pro všechna kladná ξ_{kl}; definujme ještě pro $k > l$ $\xi_{kl} = \xi_{lk}$. Nechť dále platí: při výměně každých dvou indexů i, j, $i \neq j$, u ξ_{kl} se pro $i \neq p \neq j$ σ_p nezmění, σ_i přejde v σ_j a σ_j v σ_i.*[1] *Označme v simplexu Σ o vrcholech $O_1, O_2, \dots, O_{n+1}$ čtverce vzdáleností bodů O_i, O_j symboly e_{ij}. Potom bod o barycentrických souřadnicích $\sigma_i(e_{kl})$, pokud existuje (t. j. pokud nejsou $\sigma_i(e_{kl}) = 0$ pro $i = 1, \dots, n + 1$), je význačný bod simplexu Σ.*

Důkaz. Nechť σ_i jsou funkce splňující předpoklady věty. Označme $\sigma(A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$ zobrazení, které každé skupině bodů $A_1, \dots, A_{n+1}$ z E_n přiřazuje buď bod o barycentrických souřadnicích $\sigma_i(a_{kl})$, kde $a_{kl} = \varrho^2(A_k, A_l)$, $i, k, l = 1, \dots, n + 1$, vzhledem k simplexu $A_1, \dots, A_{n+1}$, pokud body $A_1, \dots, A_{n+1}$ jsou lineárně nezávislé a pokud nejsou $\sigma_i(a_{kl}) = 0$ pro $i = 1, \dots, n + 1$, anebo prázdnou množinu v opačném případě. Zobrazení σ je přípustné, jak plyne z invariance barycentrických souřadnic při isometrických transformacích. Dále je

$$\sigma(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) = \sigma(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{n+1}}) \tag{6,1}$$

pro každou permutaci $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$ indexů $1, 2, \dots, n + 1$. Podle předpokladů o funkcích σ_i to totiž platí pro každou transposici (podrobněji: je-li na jedné straně rovnosti (6,1) prázdná množina, je i na druhé straně prázdná množina; je-li na jedné straně (6,1) bod, je na druhé straně týž bod, neboť jeho bary-

[1]) Podrobněji: položíme-li $\xi'_{ik} = \xi_{jk}$, $\xi'_{jk} = \xi_{ik}$ pro $i \neq j \neq k$, $\xi'_{kl} = \xi_{kl}$ pro $i \neq k \neq j$, $i \neq l \neq j$, je pro $i \neq p \neq j$ $\sigma_p(\xi_{kl}) = \sigma_p(\xi'_{kl})$, $\sigma_i(\xi_{kl}) = \sigma_j(\xi'_{kl})$, $\sigma_j(\xi_{kl}) = \sigma_i(\xi'_{kl})$.

centrické souřadnice se nezmění až na výměnu příslušných dvou souřadnic, pro které se však zároveň mění oba vrcholy simplexu $A_1, \ldots, A_{n+1}$). Poněvadž každou permutaci lze složit z transposic, je tím věta dokázána.

Bezprostředním důsledkem je tato věta:

Věta 18. *V každém simplexu je bod o barycentrických souřadnicích* $(1, 1, \ldots, 1)$ *význačný bod. Nazývá se těžištěm simplexu.*

Důkaz. Stačí ve větě 17 položit $\sigma_i(\xi_{kl}) = 1$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$.

Poznámka. Nechť M_1 je neprázdná podmnožina množiny indexů $M = \{1, 2, \ldots, n + 1\}$. Potom těžiště té stěny simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$, která má vrcholy O_i, $i \in M_1$, má barycentrické souřadnice (vzhledem k celému simplexu) $T_{M_1} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1})$, kde $\xi_i = 1$ pro $i \in M_1$, $\xi_j = 0$ pro j non $\in M_1$. To plyne ihned z toho, že barycentrické souřadnice bodu v té stěně jsou $\xi_i = \xi_i^{(M_1)}$ pro $i \in M_1$, $\xi_j = 0$ pro j non $\in M_1$, kde $\xi_i^{(M_1)}$ jsou barycentrické souřadnice tohoto bodu (až příp. na faktor) vzhledem k simplexu (o příp. menším počtu dimensí) o vrcholech O_i, $i \in M_1$, jak vyplývá na př. z rovnice (2,8) odst. 2 prvé části tohoto článku.

Abychom mohli studovat lineární prostor Λ význačných bodů simplexu, zavedeme si nejprve pojem *grupy automorfismů simplexu.* Automorfismem simplexu v E_n nazýváme každé isometrické zobrazení E_n, které převádí množinu vrcholů simplexu v sebe. Automorfismy simplexu tvoří zřejmě grupu, kterou nazýváme grupou automorfismů simplexu. Každý automorfismus simplexu je jednoznačně určen permutací vrcholů simplexu (totiž permutací $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ čísel $1, 2, \ldots, n + 1$ takovou, že při tom automorfismu přejde vrchol O_k ve vrchol O_{i_k}), t. j. grupa automorfismů simplexu v E_n je isomorfní některé podgrupě grupy permutací $(n + 1)$-ho stupně. Množinu vrcholů simplexu lze rozložit na podmnožiny té vlastnosti, že každý vrchol O_i jedné podmnožiny přejde při libovolném automorfismu simplexu opět ve vrchol této podmnožiny, a při tom pro každý vrchol O_j této podmnožiny existuje alespoň jeden automorfismus simplexu, který převádí vrchol O_i ve vrchol O_j. Tyto podmnožiny odpovídají systémům transitivity uvedené podgrupy permutační grupy a budeme je proto nazývat systémy transitivity vrcholů. Tak simplex v E_n, jehož grupa automorfismů obsahuje jediný (identický) automorfismus, má $n + 1$ systémů transitivity vrcholů (v každém systému je vždy jeden vrchol).

Věta 19. *Význačné množiny simplexu* Σ *jsou právě ty množiny, které jsou invariantní při všech automorfismech simplexu* Σ.

Důkaz. Že význačná množina simplexu je invariantní při všech jeho automorfismech, je zřejmé. Nechť obráceně je M množina, invariantní při všech automorfismech simplexu Σ o vrcholech $O_1, \ldots, O_{n+1}$. Sestrojme nejprve ke každé permutaci $k_1, \ldots, k_{n+1}$ indexů $1, \ldots, n + 1$ zobrazení n-tého řádu $\psi_{k_1, \ldots, k_{n+1}}$ takto:

Nechť $A_1, \ldots, A_{n+1}$ je nějaká skupina $n + 1$ bodů z E_n; platí-li $\varrho(A_{k_i}, A_{k_j}) = \varrho(O_i, O_j)$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, n + 1$, t. j. tvoří-li (podle věty 3) body

$A_{k_1}, \ldots, A_{k_{n+1}}$ v tomto pořadí vrcholy simplexu Σ' shodného se simplexem Σ, pak $\psi_{k_1,\ldots,k_{n+1}}(A_1, \ldots, A_{n+1})$ je množina, která vznikne z M isometrií, převádějící Σ v Σ'. Neplatí-li $\varrho(A_{k_i}, A_{k_j}) = \varrho(O_i, O_j)$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, n + 1$, pak nechť $\psi_{k_1,\ldots,k_{n+1}}(A_1, \ldots, A_{n+1}) = \bar{E}_n$.

Zobrazení $\psi_{k_1,\ldots,k_{n+1}}$ jsou zřejmě vesměs přípustná. Položíme-li nyní $\varphi(A_1, \ldots, A_{n+1}) = \bigcap_{(k_1,\ldots,k_{n+1})} \psi_{k_1,\ldots,k_{n+1}}(A_1, \ldots, A_{n+1})$, je φ opět přípustné zobrazení a platí

$$M = \varphi(O_{i_1}, \ldots, O_{i_{n+1}})$$

pro každou permutaci $i_1, \ldots, i_{n+1}$ indexů $1, \ldots, n + 1$. Je tedy M skutečně význačná množina simplexu Σ.

Věta 20. *Nechť v simplexu Σ je r systémů transitivity vrcholů. Potom lineární prostor Λ význačných bodů simplexu má dimensi rovnu $r - 1$. Je určen r těžišti vždy té stěny simplexu Σ, která má vrcholy z jednoho systému transitivity vrcholů.*

Důkaz. Nechť simplex Σ má vrcholy $O_1, \ldots, O_{n+1}$ a nechť e_{ij} jsou opět čtverce vzdáleností vrcholů O_i, O_j. Označme na okamžik

$$x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n+1} \end{matrix} \right\|, \quad y = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n+1} \end{matrix} \right\|, \quad L = \|1, 1, \ldots, 1\|$$

(o $n + 1$ prvcích), $E = \|e_{ij}\|$.

Platí tato pomocná věta: *Nechť A je lineární zobrazení prostoru E_n, při kterém bodu o barycentrických souřadnicích $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ vzhledem k simplexu Σ odpovídá bod $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ tak, že pro $i = 1, \ldots, n + 1$ je*

$$y_i = \sum_{k=1}^{n+1} a_{ik} x_k ,$$

t. j. pro $A = \|a_{ik}\|$ platí

$$y = Ax .$$

Zobrazení A je isometrické tehdy a jen tehdy, existuje-li nenulové číslo α tak, že

$$A'EA = \alpha^2 E , \tag{6,2}$$

$$LA \; = \alpha L . \tag{6,3}$$

Důkaz. Podle rovnice (2,9) z věty 1 prvé části je čtverec vzdálenosti dvou vlastních bodů $\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}$ možno psát ve tvaru

$$\varrho^2(\overset{1}{X}, \overset{2}{X}) = \left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}} \right)' E \left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}} \right),$$

kde $\overset{1}{x}$ resp. $\overset{2}{x}$ jsou obdobné sloupcové matice barycentrických souřadnic bodů $\overset{1}{X}, \overset{2}{X}$ jako je matice x. Přitom je $L\overset{1}{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \overset{1}{x}_i \neq 0$, $L\overset{2}{x} \neq 0$. Odtud snadno plyne, že platí-li (6,2) a (6,3), je zobrazení A isometrické. Je-li obráceně A isometrické zobrazení, pak, jak známo, převádí vlastní body opět ve vlastní body a nevlastní opět v nevlastní; odtud plyne (6,3). Z toho, že platí $\varrho^2(A\overset{1}{X}, A\overset{2}{X}) = \varrho^2(\overset{1}{X}, \overset{2}{X})$ pro každou dvojici vlastních bodů $\overset{1}{X}, \overset{2}{X}$, pak plyne (s užitím (6,3))

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}}\right) A'EA \left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}}\right) = \left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}}\right)' E \left(\frac{\overset{1}{x}}{L\overset{1}{x}} - \frac{\overset{2}{x}}{L\overset{2}{x}}\right),$$

t. j. po snadné úvaze rovnice (6,2).

Z této pomocné věty vyplývá, že automorfismům simplexu Σ odpovídají (až na nenulové faktory) takové matice $A = \|a_{ij}\|$, které mají tvar $a_{ij} = 1$ pro $j = k_i$, $a_{ij} = 0$ pro $j \neq k_i$, kde $(k_1, k_2, \ldots, k_{n+1})$ je permutace čísel $1, \ldots, n+1$, a pro které je dále

$$A'EA = E\,. \tag{6,4}$$

Dokážeme teď druhou pomocnou větu:

Nechť $Y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ je vyjádření vlastního význačného bodu simplexu Σ v barycentrických souřadnicích a nechť vrcholy O_j, O_k simplexu Σ leží ve stejném systému transitivity. Potom je $y_j = y_k$.

Důkaz. Podle předpokladu existuje isometrické zobrazení A prostoru E_n tak, že převádí množinu vrcholů simplexu v sebe, a při tom vrchol O_j ve vrchol O_k. Pro příslušnou matici A tedy je

$$a_{kj} = 1\,, \quad a_{kl} = 0 \quad \text{pro} \quad l \neq j\,. \tag{6,5}$$

Protože Y je význačný bod, existuje přípustné zobrazení φ tak, že

$$Y = \varphi(O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}) = \varphi(AO_1, AO_2, \ldots, AO_{n+1})\,.$$

Odtud plyne, že pro některé $\varrho \neq 0$ je

$$Ay = \varrho y\,, \tag{6,6}$$

kde y je příslušná sloupcová matice. Protože Y je vlastní bod a platí (6,5), je v (6,3) $\alpha = 1$ a v (6,6) $\varrho = 1$. Ze vztahů (6,5) a (6,6) s $\varrho = 1$ pak ihned plyne $y_j = y_k$, jak jsme chtěli dokázat.

Nechť nyní je pro $M = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_r$ rozklad množiny M, který odpovídá rozkladu množiny vrcholů simplexu Σ v systémy transitivity. Z druhé pomocné věty ihned plyne, že každý vlastní význačný bod Y má barycentrické souřadnice y_i tvaru

$$y_i = c_\lambda$$

pro $i \in M_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, r$. To však znamená, že bod Y leží v lineárním prostoru Λ_Σ, o němž mluví věta 20, vytvořeném těžišti systémů transitivity vrcholů. Tato těžiště mají totiž podle poznámky za větou 18 tvar (v barycentrických souřadnicích) $\overset{\lambda}{T} = (\overset{\lambda}{t}_i)$, kde $\overset{\lambda}{t}_i = 1$ pro $i \in M_\lambda$, $\overset{\lambda}{t}_i = 0$ pro i non $\in M_\lambda$. Tedy $\Lambda \subset \Lambda_\Sigma$.

Obráceně, skupina vrcholů, které patří jednomu systému transitivity, je invariantní při všech automorfismech simplexu. Je tedy také těžiště vrcholů každého systému transitivity invariantní množina při všech automorfismech simplexu Σ, t. j. toto těžiště je význačný bod Σ. Odtud plyne, že $\Lambda_\Sigma \subset \Lambda$ a věta je dokázána.[2])

Všimněme si teď nevlastních význačných bodů. Jsou-li P, Q dva různé vlastní význačné body simplexu, je nevlastní bod přímky PQ (jakožto průnik význačné přímky PQ a význačné nevlastní nadroviny rovněž význačným bodem simplexu). Jsou tedy všechny nevlastní body lineárního prostoru Λ (přesněji $\bar{\Lambda}$) význačné body. Není však pravda, že vlastní i nevlastní body dohromady tvoří (uzavřený) lineární prostor. Tak pro $n = 1$ má každý simplex (dvojice různých bodů) jen jeden vlastní význačný bod (střed čili těžiště) a jeden nevlastní. Obdobně to může nastat i pro $n > 1$.[3])

Platí však tato věta:

Věta 21. *Nevlastní význačné body simplexu tvoří sjednocení $N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_k$ po dvou ortogonálních nevlastních lineárních prostorů N_i. Má-li Λ kladnou dimensi, je nevlastní lineární prostor prostoru Λ jedním z uvedených prostorů N_i.*

Důkaz. Dokážeme nejprve dvě pomocné věty:

I. Jsou-li P, Q dva různé význačné nevlastní body simplexu, pak buď P a Q jsou ortogonální, nebo každý bod přímky PQ je význačný.

Nejsou-li totiž P a Q ortogonální, pak bod P' přímky PQ, který je ortogonální k P, je rovněž význačný bod, který je různý od P i Q. Ke každému reálnému číslu λ, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$, lze přiřadit právě jeden bod X přímky PQ, pro který je dvojpoměr $(P, Q, P', X) = \lambda$, a takto dostaneme všechny body přímky PQ, různé od P, Q, P'. Jsou tedy všechny body přímky PQ význačné.

---

[2]) Na platnost věty 19 a odtud vyplývající vztah $\Lambda_\Sigma \subset \Lambda$ mne laskavě upozornil prof. Vl. Knichal.

[3]) Plyne to na př. z této konstrukce:

Nechť $n > 1$. V E_n zvolme libovolný podprostor E_1 dimense 1 a další, s E_1 disjunktní podprostor E_{n-2}, pro $n > 2$ kolmý k E_1. V E_{n-2} sestrojme simplex $O_1, \ldots, O_{n-1}$ tak, aby všechny jeho (nenulové) hrany měly délky navzájem různé (takový simplex skutečně existuje, neboť tím požadujeme pouze platnost nerovností $\neq$, lineárních v e_{ij}). Označme P průsečík nadroviny ν, vedené prostorem E_{n-2} kolmo k E_1, s přímkou E_1. V E_1 teď zvolme body O_n a O_{n+1} tak, aby byly souměrně sdružené vzhledem k P a aby vzdálenost O_n a O_{n+1} byla různá od všech vzdáleností O_iO_j, $i, j = 1, \ldots, n - 1$, i od všech vzdáleností O_iO_n, O_iO_{n+1}. To lze, volíme-li O_nO_{n+1} dost malé. Tím dostáváme simplex $O_1, \ldots, O_{n+1}$, jehož grupa automorfismů má jen dva prvky, z nichž jeden odpovídá identitě a druhý symetrii podle ν. Každý vlastní význačný bod leží tedy v ν, avšak nevlastní bod přímky E_1 je rovněž význačným bodem, který neleží v ν.

II. Zavedeme-li relaci mezi význačnými nevlastními body $P \sim Q$, jestliže je buď $P = Q$, anebo $P \neq Q$ a celá přímka PQ je přímka význačných bodů, pak tato relace je ekvivalence.

Reflexivnost a symetrie uvedené relace je evidentní. Nechť nyní $P \sim Q$, $Q \sim R$, a při tom $P \neq Q$, $Q \neq R$ (jinak je zřejmě $P \sim R$). Jsou tedy všechny body přímek PQ a QR význačné. Leží-li body P, Q, R v přímce, je skutečně $P \sim R$. Nechť tedy neleží v přímce. Zvolme nějaký bod P_1 přímky PQ, různý od P i Q, a bod R_1 přímky QR, různý od Q i R (P_1 i R_1 jsou tedy význačné body). Můžeme teď v rovině určit jednoznačně soustavu projektivních souřadnic tím, že zvolíme body P, Q, R za vrcholy soustavy souřadnic a průsečík přímek P_1R a PR_1 za jednotkový bod soustavy. Každé třídě homogenních nenulových trojčíslí pak odpovídá nějaký bod roviny PQR, a dostaneme tím všechny body této roviny. Je proto každý bod roviny PQR význačný, a tedy i každý bod přímky PR, $P \sim R$.

Z II. pomocné věty plyne, že třídy nevlastních bodů podle uvedené ekvivalence tvoří lineární prostory. Z I. pomocné věty plyne, že dva takové různé lineární prostory jsou navzájem ortogonální. K důkazu věty 21 zbývá dokázat, že existuje-li neprázdný nevlastní útvar $\overline{N}$ lineárního prostoru Λ vlastních význačných bodů, pak $\overline{N}$ je jedním z uvedených lineárních prostorů. Kdyby totiž pro dvojici různých význačných nevlastních bodů P, Q platilo, že $P \in \overline{N}$, Q non$\in \overline{N}$, $P \sim Q$, pak by na přímce PQ existoval bod $R \neq P$, který by byl význačný, ale nebyl by kolmý k P. Je-li T těžiště simplexu, S bod přímky TP, různý od T i P, pak $S \in \Lambda$ je význačný bod a pata kolmice spuštěné z bodu S k přímce TR je vlastní bod S', který neleží v Λ, avšak je význačný. Tím jsme dostali spor.

Poznámka. Podobnou metodou jako v důkazu druhé pomocné věty při důkazu věty 20 lze ukázat: *Jsou-li vrcholy O_j a O_k ve stejném systému transitivity a je-li $y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ význačný nevlastní bod, pak platí $y_j = \pm y_k$.*

Pomocí nevlastních význačných bodů můžeme snadno popsat množinu význačných vlastních přímek.

Věta 22. *Množina význačných vlastních přímek simplexu je tvořena jednak množinou všech vlastních přímek prostoru Λ význačných bodů, jednak přímkami PQ, kde bod P probíhá Λ a bod Q probíhá ty nevlastní lineární prostory význačných bodů z věty 21, které jsou různé od nevlastního prostoru $\overline{N}$ prostoru Λ.*

Důkaz. Že každá přímka uvedených vlastností je význačná vlastní přímka, je zřejmé.

Nechť tedy obráceně je p význačná vlastní přímka. Je-li $p \in \Lambda$, věta platí. Předpokládejme tedy, že p non$\in \Lambda$. Pata kolmice z těžiště T simplexu na p je zřejmě vlastní význačný bod simplexu; označíme-li jej P, je $P \in \Lambda$. Nevlastní bod Q přímky p je význačný nevlastní bod, který neleží v $\overline{\Lambda}$. Tím je důkaz proveden.

Poznámka. Obdobně lze popsat množinu všech vlastních význačných lineárních prostorů dimense k, $0 < k < n$ pomocí bodů z Δ a nevlastních význačných lineárních prostorů dimense $k - 1$.

7. Speciální význačné množiny simplexu. Ve větě 19 jsme si ukázali, že těžiště simplexu je význačný bod. V tomto odstavci najdeme jiné význačné množiny simplexu a uvedeme jejich vlastnosti.

Věta 23. *Ke každému simplexu v E_n existuje právě jedna $(n - 1)$-koule,*[4] *která prochází všemi jeho vrcholy (opsaná $(n - 1)$-koule). Její rovnice v barycentrických souřadnicích je*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j = 0 \,, \tag{7,1}$$

její střed je bod $S = (g_{01}, g_{02}, \ldots, g_{0,n+1})$[5] *a poloměr $r = \sqrt{-\frac{g_{00}}{2\Delta}}$. Neobsahuje žádný vnitřní bod simplexu.*

Důkaz. Věta plyne ihned z věty 14 a z faktu, že číslo $\sqrt{-\frac{g_{00}}{2\Delta}}$ je kladné jakožto čtverec vzdálenosti bodů S a O_j. Závěr vyplývá ze (7,1) a z $e_{ii} = 0$, $e_{ij} > 0$ pro $i \neq j$.

Poznámka I. Z nezávislosti bodu S na permutacích vrcholů a na isometrických transformacích plyne, že S je význačný bod (snadno to také plyne z věty 18).

Poznámka II. Můžeme teď pomocí množiny všech význačných bodů simplexu a opsané $(n - 1)$-koule popsat množinu všech význačných nadrovin simplexu. Nadrovina π je totiž význačná tehdy a jen tehdy, je-li její pól vzhledem k opsané $(n - 1)$-kouli význačný (vlastní nebo nevlastní) bod. Podobně to lze učinit pro každou význačnou regulární kvadriku simplexu.

Věta 24. *Nechť m je přirozené číslo, $m \leq n - 1$. Existuje jediná kvadrika, která se dotýká každé m-dimensionální stěny simplexu v E_n v těžišti této stěny.*[6] *V barycentrických souřadnicích je její rovnice*

$$(m + 1) \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^2 = 0 \,, \tag{7,2}$$

její střed je v těžišti simplexu.

Důkaz. Předpokládejme, že taková kvadrika existuje; nechť má v barycentrických souřadnicích rovnici $\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0$. Snadno se zjistí, že vlastnost této kvadriky, že se dotýká každé m-dimensionální stěny simplexu v jejím

---

[4]) Viz odst. 5.

[5]) Čísla g_{00}, g_{0i}, Δ jsou zavedena v odst. 2 první části.

[6]) Těžištěm stěny $O_{k_1}, O_{k_2}, \ldots, O_{k_{m+1}}$ rozumíme těžiště těchto vrcholů.

těžišti, je ekvivalentní s tím, že pro každou takovou podmnožinu M_{m+1} množiny $M = \{1, 2, \ldots, n + 1\}$, která má $m + 1$ prvků, a pro každé $i \in M_{m+1}$ platí

$$\sum_{k \in M_{m+1}} a_{ik} = 0 .$$

Protože je $1 \leqq m \leqq n - 1$, plyne odtud snadno, že pro $i \neq j$ je $a_{ij} = a$, $a_{ii} = - ma$, $a \neq 0$. To však ihned dává (7,2). Že těžiště simplexu je středem kvadriky (7,2), plyne z faktu, že polární nadrovinou těžiště vzhledem ke kvadrice (7,2) je nevlastní nadrovina.

Poznámka. Kvadriky (7,2) pro $m = 1, 2, \ldots, n - 1$ jsou navzájem homotetické a homotetické i s kvadrikou téhož tvaru pro $m = 0$. Tato kvadrika prochází všemi vrcholy simplexu a nazývá se *Steinerova opsaná kvadrika* (nebo Steinerův opsaný elipsoid, neboť všechny kvadriky (7,2) pro $m = 0, \ldots, n - 1$ jsou eliptického typu), kvadriky (7,2) pro $m > 0$ Steinerovy vepsané kvadriky (elipsoidy). Množině kvadrik tvaru (7,2) pro $m > - 1$ budeme říkat *Steinerův systém kvadrik.*

Věta 25. *V simplexu existuje jediný bod L té vlastnosti, že součet čtverců jeho vzdáleností od $(n - 1)$-rozměrných stěn je minimální. V barycentrických souřadnicích je $L = (g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{n+1,n+1})$; nazývá se Lemoinův bod simplexu. Je vždy vnitřním bodem simplexu.*

Důkaz. Nechť $P = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+1})$ je vlastní bod. Pak součet čtverců jeho vzdáleností od stěn $\omega_i \equiv x_i = 0$ je podle (3,12)

$$\sum_{i=1}^{n+1} \varrho^2(P, \omega_i) = - \frac{\Delta}{2(\sum_i p_i)^2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{p_i^2}{g_{ii}} = - \frac{\Delta}{2\sum_i g_{ii}} + \left(- \frac{\Delta}{2\sum_i g_{ii}}\right) \frac{\sum_i g_{ii} \sum_i \frac{p_i^2}{g_{ii}} - (\sum_i p_i)^2}{(\sum_i p_i)^2} ,$$

První sčítanec je však součet čtverců vzdáleností pro Lemoinův bod. Druhý je [podle nerovnosti $(\sum_i a_i b_i)^2 \leqq \sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2$ pro $a_i = \sqrt{|g_{ii}|}$, $b_i = \frac{p_i}{\sqrt{|g_{ii}|}}$, neboť g_{ii} jsou nenulová čísla téhož znamení $(- 1)^n$ podle (4,3) a (4,5)] stále nezáporný, dokonce kladný pro $P \neq L$. Odtud plyne věta. Že L je vnitřní bod, plyne ze (4,3) a (4,1).

Poznámka. Obdobně lze dokázat známou větu, že těžiště simplexu je bod, pro který je součet čtverců jeho vzdáleností od vrcholů minimální.

Věta 26. *Pro každý simplex v E_n existuje právě jeden vnitřní bod V, který má od všech $(n - 1)$-rozměrných stěn simplexu stejnou vzdálenost; je to střed vepsané $(n - 1)$-koule, t. j. $(n - 1)$-koule, která se dotýká $(n - 1)$-rozměrných stěn simplexu a obsahuje (kromě dotykových bodů) jen vnitřní body simplexu. V barycentrických souřadnicích je $V = (v_1, \ldots, v_{n+1})$, $v_i = \sqrt{|g_{ii}|}$, rovnice vepsané $(n - 1)$-koule je*

$$(\sum_i v_i)^2 (exx) - 2\sum_i v_i (evx) \sum_i x_i + [(evv) + |\Delta|] (\sum_i x_i)^2 = 0 , \qquad (7,3)$$

její poloměr

$$\varrho = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}|\Delta|}}{\sum_i v_i}. \tag{7,4}$$

Důkaz plyne snadno z (3,11).

Poznámka. Obdobně se zjistí, že celkem existuje pro simplex v E_n nejvýše 2^n bodů, které mají od všech $(n-1)$-rozměrných stěn stejnou vzdálenost. Jsou to (při vyjádření v barycentrických souřadnicích a při $v_i = \sqrt{|g_{ii}|}$) ty body

$$V_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1})} = (\varepsilon_1 v_1, \varepsilon_2 v_2, \ldots, \varepsilon_{n+1} v_{n+1}), \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

které jsou vlastní (t. j. pro něž $\sum_i \varepsilon_i v_i \neq 0$). Pro $V_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1})} \neq V$ to jsou středy t. zv. připsaných (vně vepsaných) $(n-1)$-koulí.

V následující větě zobecníme pro simplex definici isogonálně sdružených bodů a ve větách 28 a 29 dokážeme zobecnění jejich vlastností, známých z geometrie trojúhelníka.

Věta 27.[7]) *Nechť bod P neleží na žádné $(n-1)$-rozměrné stěně simplexu. Pak existuje právě jeden bod Q, který má tuto vlastnost:*

Jsou-li ω, ω' libovolné různé $(n-1)$-rozměrné stěny simplexu, pak nadroviny ν_P resp. ν_Q ze svazku nadrovin určeného ω, ω', procházející body P resp. Q, jsou sdružené v involuci ve svazku (ω, ω'), která má jako samodružné nadroviny půlící úhel nadrovin ω, ω'.

Jsou tedy úhly nadrovin ν_P, ω a ν_Q, ω' stejné. Je-li v barycentrických souřadnicích $P = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+1})$, $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$, platí pro $\varrho \neq 0$

$$\varrho p_i q_i = g_{ii}. \tag{7,5}$$

Body P, Q se nazývají isogonálně sdružené.

Důkaz. Budiž dán bod $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$, $p_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, n+1$, a předpokládejme, že existuje takový bod $Q = (q_1, \ldots, q_{n+1})$, že vyhovuje první části věty. Existuje index i tak, že $q_i \neq 0$; nechť $j \neq i$. Pro stěny $\omega \equiv x_i = 0$, $\omega' \equiv x_j = 0$ je $\nu_P \equiv p_j x_i - p_i x_j = 0$, $\nu_Q \equiv q_j x_i - q_i x_j = 0$. Snadno se zjistí, že obě nadroviny, půlící úhel nadrovin ω, ω', jsou tvaru $x_i \sqrt{|g_{jj}|} \pm x_j \sqrt{|g_{ii}|} = 0$. Poněvadž ν_P a ν_Q patří do involuce uvedené ve větě, je

$$(p_j x_i - p_i x_j)(q_j x_i - q_i x_j) \equiv \alpha (x_i \sqrt{|g_{jj}|} + x_j \sqrt{|g_{ii}|})^2 + \beta (x_i \sqrt{|g_{jj}|} - x_j \sqrt{|g_{ii}|})^2 .$$

Odtud $p_i q_i = (\alpha + \beta) |g_{ii}|$, $p_j q_j = (\alpha + \beta) |g_{jj}|$; protože $p_i q_i \neq 0$, je $\alpha + \beta \neq 0$ a pro $\varrho = \dfrac{(-1)^n}{\alpha + \beta}$ (vzhledem k (4,3) a (4,5)) platí (7,5) pro indexy i a j. Avšak j byl libovolný index různý od i, platí tedy (7,5) pro $i = 1, \ldots, n+1$. Obráceně lze snadno zjistit, že bod Q definovaný (7,5) skutečně vyhovuje podmínce věty.

---

[7]) Ve větách 27—30 předpokládáme, že $n > 1$.

Poznámka. Z (7,5) vyplývá, že bod je sám k sobě isogonálně sdružen tehdy a jen tehdy, je-li některým z bodů $V_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n+1})}$ z předchozí poznámky, t. j., je-li středem vepsané nebo připsané $(n - 1)$-koule (případně směrem; ve větách 27 a 28 nerozlišujeme vlastní a nevlastní body). Je také zřejmé z (4,1) a (7,5), že isogonálně sdružené body leží ve stejných poloprostorech vyťatých vždy jednou $(n - 1)$-rozměrnou stěnou. Speciálně jsou oba nebo žádný vnitřním bodem simplexu.

Věta 28. *Isogonálně sdružené body (pokud alespoň jeden z nich je vlastní) jsou vždy dvojicí (příp. splývající) ohnisek rotačních kvadrik, dotýkajících se všech $(n - 1)$-rozměrných stěn simplexu.*[8])

Důkaz je založen na této větě, kterou zde nebudeme dokazovat:

Rotační kvadrika (v nadrovinových barycentrických souřadnicích, duálních k bodovým) s ohnisky $P = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+1})$, $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$ má tvar

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} g_{ij}\xi_i\xi_j - \varrho \sum_{i=1}^{n+1} p_i\xi_i \sum_{i=1}^{n+1} q_i\xi_i = 0$$

a obráceně, každá rovnice tohoto tvaru s $\varrho \neq 0$ a $\sum_{i=1}^{n+1} p_i \neq 0$ nebo $\sum_{i=1}^{n+1} q_i \neq 0$ je rovnicí rotační kvadriky s ohnisky P, Q.

Je tedy nutná a postačující podmínka, aby kvadrika $\sum_{i,j=1}^{n+1} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j = 0$ byla rotační s reálnými ohnisky $P = (p_i)$, $Q = (q_i)$ a aby se při tom dotýkala všech $(n - 1)$-rozměrných stěn, aby

$$\alpha_{ii} = g_{ii} - \varrho p_i q_i = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n + 1\,,$$
$$2\alpha_{ij} = 2g_{ij} - \varrho(p_i q_j + p_j q_i) \text{ pro } i \neq j\,.$$

Odtud a z (7,5) plyne věta 28.

Věta 29. *Nechť P je vlastní bod, který neleží na žádné $(n - 1)$-rozměrné stěně simplexu. Označme $\overset{i}{R}$, $i = 1, \ldots, n + 1$, body, souměrně sdružené s bodem P vzhledem ke stěnám simplexu $\omega_i \equiv x_i = 0$. Jestliže body $\overset{i}{R}$ leží v nadrovině, pak už neleží v lineárním prostoru menší dimense a směr kolmý k této nadrovině je isogonálně sdružený (nevlastní) bod s bodem P. Jestliže body $\overset{i}{R}$ neleží v nadrovině, pak střed $(n - 1)$-koule opsané simplexu $\overset{1}{R}, \ldots, \overset{n+1}{R}$ je isogonálně sdružený bod s bodem P (vzhledem k původnímu simplexu).*

Důkaz. Lehko se zjistí, že body $\overset{i}{R}$ mají v barycentrických souřadnicích tvar

$$\overset{i}{R} = (g_{ii}p_1 - 2g_{i1}p_i, g_{ii}p_2 - 2g_{i2}p_i, \ldots, g_{ii}p_{n+1} - 2g_{i,n+1}p_i)\,,$$

[8]) Rotační kvadrika je kvadrika, k níž existuje vlastní přímka tak, že každá nadrovina k této přímce kolmá protíná kvadriku v $(n - 2)$-sféře se středem na této přímce. Ohniska jsou body, z nichž tečný kužel obsahuje absolutní kvadriku.

kde

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}), \quad p_i \neq 0 \ (i = 1, \ldots, n + 1), \quad \sum_{i=1}^{n+1} p_i \neq 0 .$$

Předpokládejme nejprve, že body $\overset{i}{R}$ leží v nějaké nadrovině $\nu \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i x_i = 0$. Potom platí pro $k = 1, 2, \ldots, n + 1$:

$$g_{kk} \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i p_i - 2p_k \sum_{i=1}^{n+1} g_{ik}\gamma_i = 0 ,$$

čili

$$\sum_{i=1}^{n+1} g_{ik}\gamma_i = \frac{g_{kk}}{2p_k} \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i p_i . \tag{7,6}$$

Nadrovina ν je vlastní, t. j. levé strany rovnic (7,6) nejsou vesměs rovny nule. Tedy $\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i p_i \neq 0$ a podle (3,4) a (7,5) je isogonálně sdružený bod Q s bodem P nevlastní bod v kolmém směru k nadrovině ν. Odtud rovněž plyne, že taková nadrovina ν procházející všemi body $\overset{i}{R}$ je jediná.

Nechť nyní body $\overset{i}{R}$ neleží v žádné nadrovině; potom bod Q, isogonálně sdružený s P, je vlastní: kdyby byl nevlastní, pak by řádky matice $\|g_{ii}p_j - 2g_{ij}p_i\|$ souřadnic bodů $\overset{i}{R}$ byly lineárně závislé (po násobení i-tého řádku $\frac{1}{p_i}$ a sečtení, podle (2,15 d)), a tedy by byly lineárně závislé i sloupce ve sporu s tím, že body $\overset{i}{R}$ neleží v nadrovině. Přímým výpočtem podle vzorce (2,9) za použití (2,15) se zjistí, že vzdálenosti bodu Q od bodů $\overset{i}{R}$ jsou si navzájem rovny, t. j. bod Q je středem $(n - 1)$-koule opsané simplexu $\overset{1}{R}, \ldots, \overset{n+1}{R}$.

Z vět 19, 25 a 27 plyne ihned věta:

Věta 30. *Těžiště a Lemoinův bod simplexu jsou body isogonálně sdružené.*

Závěrem této části bych podotkl, že pomocí věty 18 můžeme tvořit libovolně mnoho význačných bodů simplexu, na př. bod

$$C_1 = (c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) , \quad \text{kde } c_i = \sum_j e_{ij} , \quad C_2 = (c_1^2, c_2^2, \ldots, c_{n+1}^2) \text{ atp.}$$

Některé takové body jsou (obecně) lineárně nezávislé, některé jsou vždy lineárně závislé, na př. bod C_2 a body $D = (d_1, \ldots, d_{n+1})$, $D' = (d_1', \ldots, d_{n+1}')$, kde $d_i = \sum_j e_{ij}^2$, $d_i' = \sum_{\substack{k,l \\ k \neq l}} e_{ik}e_{il}$, leží vždy v přímce (nebo dokonce splývají).

Lze dále definovat *algebraické význačné body simplexu* tak, že to jsou body o barycentrických souřadnicích $\sigma_i(e_{kl})$, kde $\sigma_i(\xi_{kl})$ jsou homogenní polynomy v ξ_{kl} s celými koeficienty, vyhovující podmínce ve větě 17. Tak na př. těžiště,