ÚLOHY A PROBLÉMY

6. Dá se ukázat (viz na př. HORN, Gewöhnliche Diff.-Gleichungen beliebiger Ordnung, 1905, § 72), že řešení dif. rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\lambda y + \sin x}{y} \quad (\lambda > 0)\,,$$

lze v okolí počátku rozvinout v mocninnou řadu.

Určete poloměr konvergence těchto řad.

O. Vejvoda, Praha.

7. Buď $c(x)$ po částech spojitá funkce v $\langle 0, 1\rangle$. Nazveme řešení problému K vzhledem k funkci $c(x)$ a číslu P funkci $y(x)$ a koeficienty a, b, které splňují rovnici

$$y''(x) + P\,y(x) = ax + b + c(x)$$

a okrajové podmínky

$$y(0) = y(1) = 0\,;\quad y''(0) = 0\,,\quad y'(1) = 0\,.$$

Charakteristickým číslem problému K nazveme číslo P^0 takové, že existuje netriviální řešení problému K vzhledem k funkci $c(x) = 0$ a $P = P^0$. Toto řešení nazveme charakteristickou funkcí problému. Prvou charakteristickou funkcí nazveme charakteristickou funkci příslušnou k nejmenšímu charakteristickému číslu P_1^0. Buď M množina všech funkcí $c(x)$ po částech konstantní (s konečným počtem nespojitostí) v $\langle 0, 1\rangle$ splňující tam vztah $|c(x)| = \varepsilon$. Lze ukázat, že problém K vzhledem ke každému $c(x) \in M$ a $P \neq P^0$ má jediné řešení a při tom $y''(x)$ jest po částech spojitá funkce. Definujme na M funkcionálu F tímto předpisem:

$$F(c(x)) = \sup_{0\leq x\leq 1} y''(x)\,,$$

kde $y(x)$ jest řešením problému K vzhledem k $c(x)$ $[c(x) \in M]$ a $0 < P < P_1^0$.

Domnívám se, že funkcionála F má tyto vlastnosti:

1. Existuje funkce $c^*(x) \in M$ pro kterou funkcionála F nabývá svého maxima.

2. Funkce $c^*(x)$ má právě tolik bodů nespojitosti, jako má prvá charakteristická funkce bodů, v nichž platí $y''(x) = 0$.

3. Funkce $c^*(x)$ má skoky právě v těch bodech, ve kterých řešení $y(x)$ problému K vzhledem k $c(x)$ a P splňuje vztah

$$y''(x + 0) + y''(x - 0) = 0 .$$

Ivo Babuška, Praha.

8. Lze dokázat tuto **větu**:

Buď $f(x)$ spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$. Označme

$$G_n(f) = \sum_{k=1}^{n} E_k\, f(x_k)$$

Gaussovu kvadraturu funkce $f(x)$. Jestliže $f(x)$ má p spojitých derivací a $f^{(p)}(x)$ splňuje Lipschitzovu podmínku s koeficientem α $(0 < \alpha \leqq 1)$, potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - G_n(f) \leqq O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right) \quad \text{pro } n \to \infty.$$

Důkaz. Podle Jaksonovy věty (srv. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, str. 164) existují polynomy $P_n(x)$ stupně n a konstanta C tak, že

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq \frac{C}{n^{p+\alpha}} .$$

Proto platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - G_n(f)\right| \leqq \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - G_n(P_n)\right| + |G_n(f - P_n)| .$$

Protože všechny koeficienty Δ_kGaussovy kvadratury jsou kladné a $\sum_{k=1}^{k=n} A_k = b - a$, platí

$$G_n(f - P_n) \leqq \frac{C}{n^{p+\alpha}} (b - a) .$$

Dále podle známých vlastností Gaussovy kvadratury jest

$$G_n(P_n) = \int_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x$$

a proto

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - G_n(f)\right| \leqq \frac{\text{konst}}{n^{p+\alpha}} ,$$

což bylo dokázati.

Rozhodněte, zda tuto větu lze obrátit, t. j. zda platí tato **věta**:

Buď $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - G_n(f)\right| \leqq O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right) \quad \text{pro } n \to \infty .$$

Potom $f(x)$ má p spojitých derivací a $f^{(p)}(x)$ vyhovuje Lipschitzově podmínce.

(Srv. Bernštejnovu větu, str. 167, výše cit. knihy.)

Ivo Babuška, Praha.

Poznámka k úloze 1, uveřejněné ve 2. čísle tohoto ročníku na str. 163.

K této úloze došlo redakci několik upozornění, že jde o známou *Pellovu rovnici*; ta má vždy dokonce nekonečně mnoho řešení. Důkaz není snadný a lze ho nalézt téměř v každé knize o theorii čísel (na př. DICKSON-BODEWIG Einführung in die Zahlentheorie, 1931, str. 109, cvič. 5, a str. 144; E. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie, 1927, 1. sv., str. 57 až 64; W. SIERPIŃSKI, Teoria liczb, 1950, str. 251—261).

První sdělení zaslal redakci dr MIL. HLAVÁČEK, profesor jedenáctileté stř. školy v Náchodě.

Jan Mařík, Praha.