ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV
SVAZEK 79 * PRAHA, 30. XII. 1954 * ČÍSLO 4

ČLÁNKY

GEOMETRIE SIMPLEXU V E_n
(první část)

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Došlo dne 25. listopadu 1953.)

DT 513.821.2

V této první části práce, která užívá barycentrických souřadnic ke studiu simplexů v E_n, jsou jednak studovány geometrické vlastnosti simplexů (jejich existence a unicita až na shodnost při daných velikostech hran nebo vnitřních úhlů), jednak jsou uvedeny vzorce v barycentrických souřadnicích, kterých bude třeba v dalších částech. Mimo to jsou uvedeny věty o minimálním počtu ostrých vnitřních úhlů, jejich rozložení v simplexu, a definuje se pojem pravoúhlého simplexu.

1. Úvod. Eukleidovským n-rozměrným prostorem E_n, kde n je přirozené číslo, rozumíme metrický prostor, isometrický s prostorem E_n^* všech uspořádaných n-tic reálných čísel (prvkům prostoru říkáme body a značíme je velkými latinskými písmeny) tvaru $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, se vzdáleností definovanou vztahem

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}\,. \qquad (1,1)$$

Budeme dále užívat pojmů přímka, nadrovina, m-rozměrný lineární podprostor, úhel, koule a j., zaváděných v učebnicích geometrie (na př. E. Čech, Základy analytické geometrie, zkráceně AG).

Simplexem v E_n rozumíme útvar složený z $n + 1$ lineárně nezávislých bodů v E_n (t. j. bodů, které neleží v nadrovině), kterým říkáme vrcholy simplexu, a pro $n > 1$ ze všech m-rozměrných lineárních prostorů, $0 < m \leqq n - 1$, spojujících vždy $m + 1$ z těchto bodů; těmto lineárním prostorům říkáme pro $m = 1$ hrany simplexu, pro $m = n - 1$ (a $n > 2$) stěny simplexu.

2. Barycentrické souřadnice; vyjádření vzdálenosti v těchto souřadnicích. Shodnost simplexů. Nechť v E_n je dáno $n + 1$ lineárně nezávislých bodů

$O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$, jejichž vzájemné vzdálenosti označme $\sqrt{e_{ij}}$, t. j. pro $i, j = 1, \ldots, n+1$ platí

$$e_{ij} = [\varrho(O_i, O_j)]^2 . \tag{2,1}$$

Nechť v pevně zvoleném E_n^*, isometrickém s E_n, mají body O_i^*, odpovídající bodům O_i, tvar $O_i^* = (\overset{i}{a}_1, \overset{i}{a}_2, \ldots, \overset{i}{a}_n)$ pro $i = 1, 2, \ldots n+1$, takže

$$e_{ij} = (\overset{j}{a}_1 - \overset{i}{a}_1)^2 + (\overset{j}{a}_2 - \overset{i}{a}_2)^2 + \ldots + (\overset{j}{a}_n - \overset{i}{a}_n)^2 . \tag{2,2}$$

Vzhledem k lineární nezávislosti bodů O_i platí, že matice

$$A = \left\| \begin{matrix} \overset{1}{a}_1, & \overset{1}{a}_2, & \ldots, & \overset{1}{a}_n, & 1 \\ \overset{2}{a}_1, & \overset{2}{a}_2, & \ldots, & \overset{2}{a}_n, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n+1}{a}_1, & \overset{n+1}{a}_2, & \ldots, & \overset{n+1}{a}_n, & 1 \end{matrix} \right\|$$

je regulární. Definujme $\overset{i}{a}_{n+1} = 1$ pro $i = 1, 2 \ldots, n+1$, takže lze psát $A = \|\overset{i}{a}_k\|$, $i, k = 1, \ldots, n+1$. Označme ještě $\overset{i}{\alpha}_j$ doplněk prvku $\overset{i}{a}_j$ v matici A. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{n+1} \overset{j}{\alpha}_i \overset{j}{a}_k = \sum_{j=1}^{n+1} \overset{i}{a}_j \overset{k}{\alpha}_j = |A| \,.\, \delta_{ik} , \tag{2,3}$$

kde $|A|$ je determinant matice A, takže

$$|A| \neq 0 , \tag{2,4}$$

a $\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ pro } i \neq k \\ 1 \text{ pro } i = k \end{cases}$ je Kroneckerovo delta, kterého budeme často užívat.

Nyní budiž X bod v E_n, $X^* = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ odpovídající mu bod v E_n^*. Bodu X přiřadíme bod $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ projektivního prostoru P_n vztahem $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$

$$x_i = \overset{i}{\alpha}_1 X_1 + \overset{i}{\alpha}_2 X_2 + \ldots + \overset{i}{\alpha}_n X_n + \overset{i}{\alpha}_{n+1} . \tag{2,5}$$

Soustava $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ skutečně není pro žádný bod X z E_n nulová (t. j. není $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = 0$), neboť podle (2,3) je (položíme-li $X_{n+1} = 1$)

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_i \overset{i}{a}_{n+1} x_i = \sum_{i,k=1}^{n+1} \overset{i}{a}_{n+1} \overset{i}{\alpha}_k X_k = |A| \sum_k \delta_{k,n+1} X_k = X_{n+1}|A| = |A| \neq 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \neq 0 . \tag{2,6}$$

Obdobně se snadno zjistí, že pro $k = 1, \ldots, n$ je

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overset{i}{a}_k x_i = |A| \,.\, X_k . \tag{2,7}$$

Poněvadž $\sum_i x_i = |A|$, plyne z (2,6) a (2,7), že naopak každému bodu $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ z P_n, pro který platí (2,6), lze přiřadit bod $X^* = (X_1, \ldots, X_n)$ prostoru E_n^*, a tedy i bod X prostoru E_n, vztahem ($k = 1, \ldots, n$)

$$X_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \overset{i}{a}_k x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_1} . \tag{2,8}$$

Je tedy (2,5) a (2,8) jednojednoznačné přiřazení E_n^* (a tedy i E_n) a $P_n - N$, označíme-li N množinu těch bodů $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ z P_n, pro něž je $\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = 0$. V tomto přiřazení odpovídají bodům O_i z E_n body $(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{i,n+1})$ z $P_n - N$, lineárním prostorům v E_n lineární prostory v $P_n - N$.

Než odvodíme další vlastnosti tohoto přiřazení, dokážeme tuto větu:

Věta 1. *Nechť X resp. Y jsou body v E_n a nechť jim uvedeným přiřazením odpovídají body $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ resp. $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ v $P_n - N$. Potom platí, že čtverec vzdálenosti bodů X a Y je roven*

$$[\varrho(X, Y)]^2 = -\frac{(exx)}{2(\Sigma x_i)^2} + \frac{(exy)}{\Sigma x_i\, \Sigma y_i} - \frac{(eyy)}{2(\Sigma y_i)^2}, \tag{2,9}$$

čili

$$[\varrho(X, Y)]^2 = \frac{1}{2(\Sigma x_i)^2(\Sigma y_i)^2} \begin{vmatrix} 0, & \Sigma x_i, & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i, & (exx), & (exy) \\ \Sigma y_i, & (eyx), & (eyy) \end{vmatrix}, \tag{2,9'}$$

kde $(exy) = \sum\limits_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i y_j$ *atp. a* $e_{ij} = e_{ji}$ *jsou dány vztahy* (2,1).

Důkaz. Jsou-li $X^* = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ resp. $Y^* = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ body v E_n odpovídající bodům X resp. Y, platí podle (2,8) a (2,2) postupně

$$[\varrho(X, Y)]^2 = [\varrho(X^*, Y^*)]^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\sum\limits_i \overset{i}{a}_k x_i}{\sum\limits_i x_i} - \frac{\sum\limits_i \overset{i}{a}_k y_i}{\sum\limits_i y_i} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(\sum\limits_i x_i)^2 (\sum\limits_i y_i)^2} \sum_k (\sum_i \overset{i}{a}_k x_i \,.\, \sum_m y_m - \sum_m \overset{m}{a}_k y_m \,.\, \sum_i x_i)^2 =$$

$$= \frac{1}{(\sum\limits_i x_i)^2 (\sum\limits_i y_i)^2} \sum_k [\sum_{i,m} (\overset{i}{a}_k - \overset{m}{a}_k)\, x_i y_m] \,.\, [\sum_{j,l} (\overset{j}{a}_k - \overset{l}{a}_k)\, x_j y_l] =$$

$$= \frac{1}{2(\sum\limits_i x_i)^2 (\sum\limits_i y_i)^2} \,.\, \sum_{i,j,k,l,m} 2(\overset{i}{a}_k - \overset{m}{a}_k)(\overset{j}{a}_k - \overset{l}{a}_k)\, x_i x_j y_l y_m =$$

$$= \frac{1}{2(\sum\limits_i x_i)^2(\sum\limits_i y_i)^2}\Big[-\sum_{i,j,k,l,m}(\overset{l}{a}_k - \overset{m}{a}_k)^2 x_i x_j y_l y_m + \sum_{i,j,k,l,m}(\overset{i}{a}_k - \overset{l}{a}_k)^2 x_i x_j y_l y_m +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l,m}(\overset{j}{a}_k - \overset{m}{a}_k)^2 x_i x_j y_l y_m - \sum_{i,j,k,l,m}(\overset{i}{a}_k - \overset{j}{a}_k)^2 x_i x_j y_l y_m\Big] =$$

$$= \frac{1}{2(\Sigma x_i)^2(\Sigma y_i)^2}\left[-(eyy)(\Sigma x_i)^2 + 2(exy)\Sigma x_i\,\Sigma y_i - (exx)(\Sigma y_i)^2\right].$$

Tím je dokázán vztah (2,9) i (2,9′).

Již jsme ukázali, že bodu O_1 v E_n odpovídá bod $(1, 0, \ldots, 0)$ v $P_n - N$, bodu O_2 bod $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ atd., a to nezávisle na tom, pomocí kterého E_n^* provádíme přiřazení (2,5) a (2,8). Tento výsledek zobecníme v této větě:

Věta 2. *Popsané přiřazení bodů v E_n a v $P_n - N$ nezávisí na volbě E_n^*.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že platí tato pomocná věta:

Bod v E_n je jednoznačně určen vzdálenostmi od bodů O_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Nechť totiž jsou P a Q dva body v E_n takové, že pro $k = 1, 2, \ldots, n + 1$ platí $\varrho(P, O_k) = \varrho(Q, O_k)$. Bodu P resp. Q nechť odpovídají v $P_n - N$ (prostřednictvím E_n^*) body $(p_1, \ldots, p_{n+1})$ resp. $(q_1, \ldots, q_{n+1})$, takže podle (2,9) platí $[\varrho(P, O_k)]^2 = \dfrac{\sum\limits_i e_{ik}p_i}{\sum\limits_i p_i} - \dfrac{(epp)}{2(\sum\limits_i p_i)^2}$, a obdobně pro Q. Z $\varrho(P, O_k) = \varrho(Q, O_k)$ plyne pro $k = 1, 2, \ldots, n + 1$

$$\frac{\sum\limits_i e_{ik}p_i}{\sum\limits_i p_i} - \frac{(epp)}{2(\sum\limits_i p_i)^2} - \frac{\sum\limits_i e_{ik}q_i}{\sum\limits_i q_i} + \frac{(eqq)}{2(\sum\limits_i q_i)^2} = 0\,.$$

Násobíme-li k-tou rovnici $\dfrac{q_k}{\sum\limits_i q_i}$ a sečteme-li, dostaneme

$$-\frac{(epp)}{2(\sum\limits_i p_i)^2} + \frac{(epq)}{\sum\limits_i p_i \sum\limits_i q_i} - \frac{(eqq)}{2(\sum\limits_i q_i)^2} = 0\,,$$

t. j. podle (2,9) $\varrho(P, Q) = 0$, takže oba body P a Q splývají.

Nyní snadno dokážeme větu 2. Nechť E_n^* a $\bar{E}_n^*$ jsou prostory uspořádaných n-tic a nechť bodu X z E_n je pomocí E_n^* přiřazen bod $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ z $P_n - N$, pomocí $\bar{E}_n^*$ bod $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1})$ v prostoru $\bar{P}_n - \bar{N}$. Bodu v $P_n - N$ o souřadnicích $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1})$ (je totiž $\Sigma\bar{x}_i \neq 0$) odpovídá v E_n (pomocí E_n^*) bod $\bar{X}$. Z (2,9) však ihned plyne, že $\varrho(X, O_k) = \varrho(\bar{X}, O_k)$ pro $k = 1, 2, \ldots, n + 1$, jestliže $\varrho(X, O_k)$ počítáme pomocí souřadnic v $\bar{P}_n - \bar{N}$, $\varrho(\bar{X}, O_k)$ pomocí souřadnic v $P_n - N$. Odtud vyplývá, že body X a $\bar{X}$ jsou totožné, t. j. také body $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ a $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1})$ v $P_n - N$ resp. v $\bar{P}_n - \bar{N}$ mají (až příp. na faktor) tytéž souřadnice, které tedy nezávisí na volbě E_n^*.

Tím jsme přiřadili každé soustavě $n + 1$ lineárně nezávislých bodů v E_n určitou význačnou soustavu souřadnic. Tyto souřadnice se nazývají barycentrické souřadnice vzhledem k simplexu, určenému těmito body.

Definujme nyní, že simplex s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ (v tomto pořadí) v prostoru E_n je shodný se simplexem $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{n+1}$ (v tomto pořadí) v prostoru E'_n, existuje-li isometrické jednojednoznačné přiřazení bodů v E_n a E'_n tak, že bodům O_i odpovídají body O'_i pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Prostory E_n a E'_n mohou ovšem splývat; protože jsou isometrické, lze to dokonce předpokládat. Potom je zřejmé, že shodnost dvou simplexů v E_n je relace ekvivalence, takže množina všech simplexů v E_n se rozpadá ve třídy navzájem shodných simplexů.

Platí věta:

Věta 3. *Simplexy s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ resp. $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{n+1}$ v E_n jsou shodné právě tehdy, platí-li $\varrho(O_i, O_j) = \varrho(O'_i, O'_j)$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$, t. j., jsou-li velikosti odpovídajících si hran*) stejné.*

Důkaz. Zaveďme jako v (2,1) čísla e_{ij} resp. e'_{ij}.

Jsou-li simplexy shodné, platí zřejmě $\varrho(O_i, O_j) = \varrho(O'_i, O'_j)$, t. j. $e_{ij} = e'_{ij}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Nechť obráceně platí, že $e_{ij} = e'_{ij}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$. Přiřaďme každému bodu X z E_n bod X' v E_n tímto předpisem: odpovídá-li bodu X bod z P_n — — N o barycentrických souřadnicích $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ vzhledem k prvnímu simplexu, pak bod X' nechť je ten bod z E_n, jehož barycentrické souřadnice vzhledem k druhému simplexu jsou opět $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Snadno se zjistí, že toto přiřazení je vzájemně jednoznačné, a že bodům O_i odpovídají body O'_i. Z (2,9) pak plyne, že přiřazení zachovává vzdálenost, t. j., že je isometrické. Oba simplexy jsou tedy shodné.

Tím jsme dokázali, že čísly e_{ij} ($e_{ii} = 0$, $e_{ij} = e_{ji}$) je určen (až na simplexy shodné) nejvýše jeden simplex. V další větě uvedeme nutnou a postačující podmínku pro existenci takového simplexu, která nám bude velmi užitečná.

Věta 4. *Budiž dána soustava reálných čísel e_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$, tak, že*

$$e_{ii} = 0\,, \quad e_{ij} = e_{ji}\,. \tag{2,10}$$

Nutná a postačující podmínka, aby existoval alespoň jeden simplex v E_n s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ tak, že pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$

$$e_{ij} = [\varrho(O_i, O_j)]^2\,, \tag{2,11}$$

je, aby kvadratická forma $(exx) = \sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij}x_ix_j$ měla tuto vlastnost:

je-li $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ pro nenulovou soustavu reálných čísel x_i, potom je $(exx) < 0$.

*) Velikostí hrany simplexu, spojující jeho vrcholy O_i a O_j pro $i \neq j$, rozumíme vzdálenost bodů O_i a O_j.

Důkaz. Nechť předně v E_n existuje simplex s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ tak, že platí (2,11) a nechť pro nenulovou soustavu reálných čísel $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ je $\sum_{i=1}^{n+1} r_i = 0$. Zvolme v E_n libovolný pevný bod P, jehož barycentrické souřadnice vzhledem k danému simplexu nechť jsou $(p_1, \ldots, p_{n+1})$, takže $\Sigma p_i \neq 0$. Bod Q, jehož barycentrické souřadnice jsou $q_i = p_i + r_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, existuje (je $\Sigma q_i = \Sigma p_i \neq 0$) a je různý od P (kdyby $q_i = \varrho p_i$, pak $r_i = (\varrho - 1) p_i$, z $\Sigma r_i = 0$ by plynulo $\varrho = 1$, $r_i = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, což je spor). Vzdálenost $\varrho(P, Q)$ je tedy kladná a podle (2,9) platí

$$0 < [\varrho(P, Q)]^2 = \frac{1}{2(\sum_i p_i)^2} [- (epp) + 2(epp) + 2(epr) -$$

$$- (epp) - 2(epr) - (err)] = - \frac{(err)}{2(\Sigma p_i)^2},$$

takže vskutku $(err) < 0$. Uvedená podmínka je tedy nutná.

Nechť obráceně pro kvadratickou formu (exx) platí (2,10) a podmínka věty. Snadno se přesvědčíme, že tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou: je-li $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nenulová soustava, pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} e_{i,n+1} x_i - \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} x_i x_j > 0 .$$

Podle známé věty z algebry*) existuje k matici $M = \|\tfrac{1}{2}(e_{i,n+1} + e_{j,n+1} - e_{ij})\|$ této positivně definitní kvadratické formy regulární čtvercová matice s reálnými prvky $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, tak, že $M = A \cdot A'$, kde A' je matice transponovaná k matici A, t. j. platí

$$\tfrac{1}{2}(e_{i,n+1} + e_{j,n+1} - e_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} . \tag{2,12}$$

Budiž nyní E_n^* prostor n-tic z odst. 1, isometrický s daným E_n. Označme pro $i = 1, 2, \ldots, n$ O_i^* body $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, O_{n+1}^* bod $(0, 0, \ldots, 0)$. Je pak $[\varrho(O_i^*, O_{n+1}^*)]^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = e_{i,n+1}$ podle (2,12) pro $i < n + 1$; pro $i, j < n + 1$ je dále

$$[\varrho(O_i^*, O_j^*)]^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_{jk} - a_{ik})^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 =$$

$$= e_{j,n+1} - 2 \cdot \tfrac{1}{2}(e_{i,n+1} + e_{j,n+1} - e_{ij}) + e_{i,n+1} = e_{ij} .$$

Tudíž pro body O_i v E_n, odpovídající bodům O_i^* v E_n^*, platí (2,11), a přitom body O_i^*, a tedy i O_i, jsou lineárně nezávislé, jak plyne odtud, že determinant $|a_{ij}| \neq 0$. Je proto podmínka věty 4 také postačující.

*) Na příklad *Gelfand*: Lineární algebra, Praha 1953, str. 201.

Vrátíme se teď ke studiu pevného simplexu v E_n s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$. Opět definujme pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$ čísla e_{ij} vztahy (2,1), dále definujme

$$e_{00} = 0\,, \quad e_{0i} = e_{i0} = 1 \tag{2,13}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ a umluvme se, že indexy i, j, k, l označují sčítání resp. jiné operace mezi indexy $1, 2, \ldots, n + 1$, indexy r, s, t mezi indexy $0, 1, 2, \ldots, n + 1$. Tak na př. matici (kde ovšem $e_{ii} = 0$ a $e_{ij} = e_{ji}$)

$$\mu = \begin{Vmatrix} 0, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & e_{11}, & e_{12}, & \ldots, & e_{1,n+1} \\ 1, & e_{21}, & e_{22}, & \ldots, & e_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & e_{n+1,1}, & e_{n+1,2}, & \ldots, & e_{n+1,n+1} \end{Vmatrix}$$

budeme psát stručně $\mu = \begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ 1, & e_{ij} \end{Vmatrix}$ nebo $\mu = \|e_{rs}\|$.

Věta 5. *Matice $\mu = \|e_{rs}\|$ i matice $\bar{\mu} = \|e_{ij}\|$ jsou regulární.*

Důkaz. Kdyby totiž $|e_{rs}| = 0$, pak by existovalo $n + 2$ čísel $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$ ne vesměs rovných nule tak, že $\sum_i p_i = 0$ (z prvého řádku) a že $p_0 + \sum_k e_{ik}p_k = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Násobením posledních rovnic vždy p_i a sečtením plyne $\sum_{i,k} e_{ik}p_ip_k = 0$, takže podle věty 4 je $p_1 = p_2 = \ldots = p_{n+1} = 0$, a tedy i $p_0 = 0$, což je spor.

Kdyby pak $|e_{ij}| = 0$, existovalo by $n + 1$ čísel $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ ne vesměs nulových tak, že $\sum_j e_{ij}p_j = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Je $\sum_i p_i \neq 0$ (neboť $(epp) = 0$) podle věty 4, takže existuje bod P v E_n tak, že jeho barycentrické souřadnice jsou (p_i). Avšak z (2,9) se snadno zjistí, že pak P splyne se všemi O_i (že totiž $\varrho(P, O_i) = 0$) pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, což je spor, neboť $n \geqq 1$ a body O_i jsou navzájem různé.

Označme nyní doplňky prvků e_{rs} v matici $\mu = \|e_{rs}\|$ (t. j. determinanty $(n + 1)$-ho stupně) znaky g_{rs}, takže na př. $g_{00} = |e_{ij}|$, dále determinant matice μ znakem Δ, takže podle věty 5 je

$$\Delta = |e_{rs}| \neq 0\,, \quad g_{00} \neq 0\,. \tag{2,14}$$

Platí tedy

$$\sum_s e_{rs}g_{st} = \Delta\delta_{rt}\,; \tag{2,15}$$

podrobněji

$$g_{00} + \sum_i e_{ik}g_{0i} = 0\,, \tag{2,15a}$$

$$g_{0k} + \sum_i e_{ij}g_{ik} = \Delta\delta_{jk}\,, \tag{2,15b}$$

$$\sum_i g_{0i} = \Delta \,, \tag{2,15c}$$

$$\sum_i g_{ik} = 0 \,. \tag{2,15d}$$

Význam čísel g_{rs} objasníme později. Závěrem tohoto odstavce dokážeme ještě tuto pomocnou větu:

Pro libovolnou $(n + 1)$*-tici reálných čísel* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ *platí*

$$(exx) \leqq -\frac{g_{00}}{\Delta} (\sum_i x_i)^2 \,, \tag{2,16}$$

a přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $x_i = \varrho g_{0i}$ *pro* $i = 1, \ldots, n + 1$.

Důkaz. Že pro $x_i = \varrho g_{0i}$ platí (2,16) se znamením rovnosti, plyne z (2,15a) a (2,15c).

Nechť tedy $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ je taková soustava, že $x_i = \varrho g_{0i}$ neplatí současně pro žádné ϱ; potom čísla $y_k = g_{0k} \sum_i x_i - \Delta x_k$ nejsou vesměs rovna nule, dále $\sum_i y_i = 0$, takže podle věty 4 je $(eyy) < 0$:

$$(\sum_i x_i)^2 \sum_{i,j} e_{ij} g_{0i} g_{0j} - 2\Delta \sum_i x_i \sum_{i,j} e_{ij} g_{0i} x_j + \Delta^2 (exx) = \Delta^2 (exx) + g_{00} \Delta (\sum_i x_i)^2 < 0 \,,$$

a odtud

$$(exx) < -\frac{g_{00}}{\Delta} (\sum_i x_i)^2 \,.$$

Tím je pomocná věta dokázána.

3. Vyjádření úhlu. Eukleidovský prostor E_n se doplňuje v geometrii v prostor $\overline{E}_n$, složený jednak ze všech bodů E_n, které se pak nazývají vlastní body a mezi nimiž existuje pojem vzdálenosti ve shodě se vzdáleností v E_n, jednak ze všech směrů E_n, přiřazených třídám nenulových a navzájem rovnoběžných vektorů (nebo, což je totéž, třídám rovnoběžných přímek). Těmto směrům se pak říká nevlastní body $\overline{E}_n$. Mezi dvěma nevlastními body (čili směry) nebo mezi bodem vlastním a nevlastním není pojem vzdálenosti definován, avšak mezi dvěma nevlastními body čili směry je definován pojem úhlu. Dále se zavádí pojem orientovaného směru, který odpovídá třídám nenulových a souhlasně rovnoběžných vektorů v E_n (nebo třídám souhlasně rovnoběžných polopřímek).

Lze bez obtíží ukázat, že konstrukce doplnění E_n v $\overline{E}_n$ odpovídá pro barycentrické souřadnice doplnění $P_n - N$ v P_n, t. j., že směrům v E_n odpovídají jednojednoznačně takové homogenní nenulové $(n + 1)$-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, pro něž je $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$, tedy body N. V P_n jsou tedy jednak body vlastní, které neleží v N, jednak body nevlastní, které leží v N. N je nadrovina prostoru P_n

a nazývá se nevlastní nadrovina, zatím co každá jiná nadrovina se nazývá vlastní. Dále orientovaným směrům odpovídají kladně homogenní nenulové $(n+1)$-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, pro něž je $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$, považujeme-li totiž za totožné nenulové $(n+1)$-tice $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ a $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ $(\Sigma x_i = \Sigma y_i = 0)$, jestliže existuje $\varrho > 0$ tak, že pro $i = 1, \ldots, n+1$ je $x_i = \varrho y_i$. Body $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ a $(-x_1, \ldots, -x_{n+1})$ pak odpovídají opačným směrům.

Jsou-li v barycentrických souřadnicích $A = (a_1, \ldots, a_{n+1})$, $B = (b_1, \ldots, b_{n+1})$ dva různé vlastní body, pak body (uzavřené) úsečky AB mají (až na nenulový faktor) tvar $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$

$$x_k = \frac{a_k}{\sum_i a_i} + \lambda \left(\frac{b_k}{\sum_i b_i} - \frac{a_k}{\sum_i a_i} \right), \tag{3,1}$$

kde $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Body polopřímky AB (s počátkem A) mají tvar (3,1), kde $\lambda \geqq 0$, t. j. tvar (až na nenulový faktor) $x_k = \dfrac{a_k}{\Sigma a_i} + \lambda p_k$, kde $\lambda \geqq 0$ a $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 0$ (a ne všechna p_i jsou rovna nule). Bod $(p_1, \ldots, p_{n+1})$ tedy je nevlastní, je to (orientovaný) směr polopřímky AB.

Úhlem dvou orientovaných směrů $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$, $Q = (q_1, \ldots, q_{n+1})$, $\sum_i p_i = \sum_i q_i = 0$ je pak úhel φ, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, pro který je

$$\cos \varphi = \frac{-(epq)}{\sqrt{-(epp)}\sqrt{-(eqq)}} \tag{3,2}$$

(pravá strana (3,2) je skutečně v absolutní hodnotě nejvýše rovna jedné: kdyby totiž $(epq)^2 > (epp)(eqq)$, pak body P, Q jsou různé, takže pro bod $R = (r_1, \ldots, r_{n+1})$, $r_k = (epq)\, p_k - (epp)\, q_k$, je $\sum_i r_i = 0$, t. j. $(err) < 0$ podle věty 4; avšak je $(err) = (epp)[(epp)(eqq) - (epq)^2] > 0$, neboť $(epp) < 0$ a $(epp) \cdot (eqq) - (epq)^2 < 0$ podle předpokladu, což je spor).

Úhel φ neorientovaných směrů P, Q je pak dán vztahy

$$\cos^2 \varphi = \frac{(epq)^2}{(epp)(eqq)}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi . \tag{3,3}$$

Odtud plyne, že směry $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$ a $Q = (q_1, \ldots, q_{n+1})$, $\sum_i p_i = \sum_i q_i = 0$, jsou kolmé právě tehdy, je-li $(epq) = 0$. Lze dále ukázat, že směr P, kolmý k dané vlastní nadrovině α o rovnici $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$ (který existuje a je jediný) má barycentrické souřadnice

$$p_i = \sum_{j=1}^{n+1} g_{ij} \alpha_j \tag{3,4}$$

(podle (2,15d) je skutečně $\sum_i p_i = 0$)*). Je-li obráceně $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$, $\sum_i p_i = 0$ daný směr, pak nadrovina α je kolmá ke směru P právě tehdy, existuje-li reálné číslo λ tak, že α je (až na nenulový faktor) tvaru

$$(epx) + \lambda \sum_i x_i = 0 \tag{3,5}$$

(přitom všechny nadroviny tvaru (3,5) existují a jsou vlastní, neboť pro bod P je $(epp) + \lambda \sum p_i = (epp) \neq 0$).

Poněvadž úhel φ dvou vlastních nadrovin $\alpha \equiv \sum_i \alpha_i x_i = 0$ a $\beta \equiv \sum_i \beta_i x_i = 0$ lze definovat jako úhel k nim kolmých směrů, je po snadném výpočtu

$$\cos^2 \varphi = \frac{(g\alpha\beta)^2}{(g\alpha\alpha)(g\beta\beta)}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi, \tag{3,6}$$

kde je psáno stručně $(g\alpha\beta) = \sum_{i,j} g_{ij}\alpha_i\beta_j$ atp.

To plyne ihned ze (3,3) a ze vztahu

$$(epq) = \Delta(g\alpha\beta), \tag{3,7}$$

kde

$$p_k = \sum_{i=1}^{n+1} g_{ik}\alpha_i, \quad q_k = \sum_{i=1}^{n+1} g_{ik}\beta_i$$

(je $(epq) = \sum_{k,l,i,j=1}^{n+1} e_{kl} g_{ik} g_{jl} \alpha_i \beta_j = -\sum_{i,j,l=1}^{n+1} e_{0l} g_{jl} g_{0i} \alpha_i \beta_j + \Delta \sum_{i,j,l=1}^{n+1} \delta_{il} g_{jl} \alpha_i \beta_j = \Delta(g\alpha\beta)$); přitom nejsou všechna p_k rovna nule, neboť podle vět o minorech adjungovaného determinantu má matice $\|g_{ij}\|$ hodnost právě n, t. j. soustava $\sum_{k=1}^{n+1} g_{ik} x_k = 0$, $i = 1, \ldots, n + 1$ má (až na faktor) jediné řešení $x_k = 1$, $k = 1, \ldots, n + 1$.

Z (3,7) dále plyne: definujeme-li

$$\gamma = -\operatorname{sign} \Delta, \tag{3,8}$$

potom pro každou vlastní nadrovinu $\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$ je

$$\gamma(g\alpha\alpha) > 0. \tag{3,9}$$

Je-li totiž směr $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$ dán vztahem (3,4), potom je podle věty 4 $(epp) < 0$, takže vzhledem k (2,14), (3,7) a (3,8) platí (3,9).

---

*) Můžeme teď najít význam čísel g_{ij}. Protože bod P je podle (3,4) polárně sdružen s nadrovinou α (lépe se všemi směry v α, neboť P je sdružen i s nadrovinou $\Sigma\alpha_i x_i + \lambda\, \Sigma x_i = 0$, která obsahuje tytéž směry jako α) vzhledem ke kvadrice v nadrovinných souřadnicích $\Gamma \equiv \Sigma g_{ij}\xi_i\xi_j = 0$, je kolmost konjugovaností dle Γ, t. j. Γ je absolutní kvadrikou prostoru E_n (AG II, str. 160).

Zavedeme-li ještě pojem úhlu φ dvou vlastních nadrovin $\alpha \equiv \sum_i \alpha_i x_i = 0$, $\beta \equiv \sum_i \beta_i x_i = 0$ vzhledem k vlastnímu bodu $C = (c_1, c_2, \ldots, c_{n+1})$, který neleží na žádné z nich, jako úhel výplňkový (úhly φ a ψ jsou výplňkové, je-li $\varphi + \psi = \pi$) k úhlu orientovaných kolmic z bodu C k nadrovinám α a β; orientovaná kolmice z bodu k nadrovině je polopřímka s počátkem v tomto bodě, kolmá k dané nadrovině a protínající tuto nadrovinu. Snadno se zjistí, že směr orientované kolmice z C k α je (až na kladný faktor)

$$p_k = \varepsilon \sum_i g_{ik} \alpha_i\,,$$

kde $\varepsilon = -\operatorname{sign}(\gamma \sum_i \alpha_i c_i \cdot \sum_i c_i)$.

Najdeme-li obdobně směr orientované kolmice z C k β, dostaneme ze (3,2), (3,7) a (3,8), že úhel β je dán vztahem

$$\cos \varphi = \frac{\eta(g\alpha\beta)}{\sqrt{(g\alpha\alpha)(g\beta\beta)}}\,, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi\,, \tag{3,10}$$

kde $\eta = -\operatorname{sign}(\gamma \sum_i \alpha_i c_i \cdot \sum_i \beta_i c_i)$.

Budeme ještě potřebovat, jak se vyjádří v barycentrických souřadnicích (pro $n > 2$) $(n - 1)$-dimensionální obsah stěny simplexu. To však vyplyne jako speciální případ tohoto vztahu, který lze bez obtíží dokázat ze známých vzorců z analytické geometrie v E_n*):

Jsou-li $\overset{1}{P}, \overset{2}{P}, \ldots, \overset{m+1}{P}$ vlastní body o barycentrických souřadnicích $\overset{\alpha}{P} = (\overset{\alpha}{p}_1, \overset{\alpha}{p}_2, \ldots, \overset{\alpha}{p}_{n+1})$, $\alpha = 1, \ldots, m + 1$, které jsou lineárně nezávislé, potom m-dimensionální obsah simplexu (v E_m, obsahujícím tyto body), který je má za vrcholy, je roven nezápornému $\varrho(\overset{1}{P}, \overset{2}{P}, \ldots, \overset{m+1}{P})$, jehož čtverec je

$$[\varrho(\overset{1}{P}, \overset{2}{P}, \ldots, \overset{m+1}{P})]^2 = \frac{1}{2^m(m!)^2} \frac{e[\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \ldots, \overset{m+1}{p}]}{e[\overset{1}{p}] \cdot e[\overset{2}{p}] \ldots e[\overset{m+1}{p}]}\,, \tag{3,11}$$

kde je označeno

$$e[p, q, \ldots, v] = \begin{vmatrix} 0, & \sum_i p_i, & \sum_i q_i, & \ldots, & \sum_i v_i \\ \sum_i p_i, & (epp), & (epq), & \ldots, & (epv) \\ \sum_i q_i, & (eqp), & (eqq), & \ldots, & (eqv) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_i v_i, & (evp), & (evq), & \ldots, & (evv) \end{vmatrix}\,,$$

*) *K. Borsuk*: Geometria analityczna, 1950, str. 105.

takže $e[\overset{\alpha}{p}] = -(\sum_i^{\alpha} p_i)^2$. Vzorec (2,9′) je skutečně speciálním případem (3,11) pro $m = 1$.

Snadno se také najde vyjádření vzdálenosti vlastního bodu $A = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ od vlastní nadroviny $\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$: čtverec této vzdálenosti je

$$[\varrho(A, \alpha)]^2 = -\frac{\Delta}{2} \cdot \frac{(\sum_i \alpha_i a_i)^2}{(g\alpha\alpha) \cdot (\sum_i a_i)^2} . \tag{3,12}$$

4. Vnitřní úhly simplexu. Další věty o shodnosti simplexů. V našem základním simplexu o vrcholech $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ a o stranách velikosti $\sqrt{e_{ij}}$ najdeme teď velikost t. zv. vnitřních úhlů. Nejprve nazveme jako obvykle vnitřním bodem simplexu každý vlastní bod A, který neleží v žádné ze stěn $\omega_i \equiv x_i = 0$ simplexu, který však leží ve všech poloprostorech*) $\omega_i O_i$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$. Snadno se zjistí, že v barycentrických souřadnicích je bod $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ vnitřní bod simplexu právě tehdy, existuje-li číslo $\varepsilon = \pm 1$ tak, že pro $i = 1, \ldots, n + 1$ je

$$\varepsilon a_i > 0 . \tag{4,1}$$

Vnitřními úhly φ_{ij}, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n + 1$, $n > 1$, našeho simplexu pak rozumíme úhly nadrovin ω_i, ω_j vzhledem k pevnému vnitřnímu bodu A. Z vyjádření (3,10) je zřejmé, že φ_{ij} nezávisí na volbě vnitřního bodu A a že platí

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{-\gamma g_{ij}}{\sqrt{\gamma g_{ii}} \sqrt{\gamma g_{jj}}} , \quad 0 < \varphi_{ij} < \pi , \tag{4,2}$$

kde γ je definováno v (3,8) a přitom podle (3,9) je

$$\gamma g_{ii} > 0 . \tag{4,3}$$

Nemůže být ovšem $\varphi_{ij} = 0$ nebo $\varphi_{ij} = \pi$, t. j. $\cos^2 \varphi_{ij} = 1$, neboť pak by $g_{ij}^2 = g_{ii} g_{jj}$ a existovala by nenulová reálná dvojice c_i, c_j tak, že $g_{ii} c_i^2 + 2 g_{ij} c_i c_j + g_{jj} c_j^2 = 0$, t. j. pro vlastní nadrovinu $c_i x_i + c_j x_j = 0$ (je $n > 1$) by platilo $\gamma(gcc) = 0$ (kde $c_k = 0$ pro $k \neq i, j$, $k = 1, \ldots, n + 1$) ve sporu s (3,9).

Podle (3,11) je čtverec n-dimensionálního obsahu daného simplexu roven

$$V^2 = \frac{(-1)^{n+1} \Delta}{2 (n!)^2} , \tag{4,4}$$

takže pro každý simplex v E_n je

$$\gamma = (-1)^n . \tag{4,5}$$

---

*) Poloprostor αA, kde $\alpha \equiv \Sigma \alpha_i x_i = 0$ je vlastní nadrovina a $A = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ vlastní bod, který neleží v α, je množina všech vlastních bodů X takových, že úsečka AX nemá s α společný žádný vnitřní bod. Je-li $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, leží X v αA právě tehdy, je-li $\sum_i x_i \neq 0$ a je-li $\varepsilon \sum_i \alpha_i x_i \sum_i x_i \geq 0$, kde $\varepsilon = \operatorname{sign} \sum_i \alpha_i a_i \sum_i a_i$.

Abychom mohli snáze formulovat větu 6, zavedeme si tuto úmluvu: definujeme pro $i = 1, \ldots, n + 1$ vnitřní úhel

$$\varphi_{ii} = \pi\,, \tag{4,6}$$

takže pak na př. platí (4,2) i pro $i = j$.

Věta 6. *Jsou-li φ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n + 1$ vnitřní úhly simplexu, potom pro libovolná reálná čísla $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ platí*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \xi_i \xi_j \cos \varphi_{ij} \leqq 0\,; \tag{4,7}$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li

$$\xi_i = \varrho\sigma_i\,, \tag{4,8}$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1}$ je pevná soustava kladných čísel,

$$\sigma_i > 0\,. \tag{4,9}$$

Nechť obráceně je dána soustava reálných čísel a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n + 1$, tak, že

1. $$a_{ii} = -1\,, \quad a_{ij} = a_{ji}\,, \tag{4,10}$$

2. *pro každou soustavu $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ je*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}\xi_i\xi_j \leqq 0\,, \tag{4,11}$$

3. *existuje soustava kladných čísel $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$, $\sigma_i > 0$, tak, že ve (4,11) nastane rovnost právě tehdy, je-li $\xi_i = \varrho\sigma_i$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$.*

Potom existuje simplex v E_n, jehož vnitřní úhly φ_{ij} vyhovují vztahům $(i, j = 1, \ldots, n + 1)$

$$\cos \varphi_{ij} = a_{ij}\,. \tag{4,12}$$

D ů k a z. Ze vztahů (3,9), (2,15d), (4,2) a (4,3) plyne ihned první část věty pro $\sigma_i = \sqrt{\gamma g_{ii}}$.

Nechť tedy pro soustavu čísel a_{ij} platí 1, 2, 3. Definujme čísla e'_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n + 1$, vztahy

$$e'_{ij} = 1 + a_{ij}\,. \tag{4,13}$$

Snadno se přesvědčíme, že tato čísla vyhovují předpokladům věty 4, takže existuje simplex v E_n s vrcholy $O'_1, \ldots, O'_{n+1}$ tak, že $[\varrho(O'_i, O'_j)]^2 = e'_{ij}$. Označme ω_i nadroviny, jejichž rovnice v barycentrických souřadnicích vzhledem k simplexu $O'_1, \ldots, O'_{n+1}$ jsou

$$\omega_i \equiv e'_{i1}x_1 + e'_{i2}x_2 + \ldots + e'_{i,n+1}x_n = 0\,.$$

Jestliže zavedeme opět čísla $g'_{ij}, g'_{0i}, g'_{00}, \Delta'$ jako v 2, platí podle věty 5, že

$|e'_{ij}| \neq 0$, t. j. nadroviny ω_i jsou lineárně nezávislé. Snadno se podle (2,15) dosazením přesvědčíme, že průsečík O_i nadrovin ω_j, $j \neq i$, má souřadnice

$$O_i \equiv (g'_{00}g'_{i1} - g'_{01}g'_{0i}, \ldots, g'_{00}g'_{i,n+1} - g'_{0,n+1}g'_{0i}) \, .$$

Body $O_1, \ldots, O_{n+1}$ tvoří vrcholy simplexu. Dokážeme, že tento simplex má vnitřní úhly φ_{ij}, pro něž platí (4,12).

Podle pomocné věty z 2 (vztah (2,16)) platí

$$(e'xx) \leqq -\frac{g'_{00}}{\Delta'}(\Sigma x'_i)^2 \, ,$$

a přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $x_i = \varrho g'_{0i}$. Dosazením z (4,13) je tedy pro $c = -1 - \frac{g'_{00}}{\Delta'}$

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j \leqq c(\Sigma x_i)^2 \, , \tag{4,14}$$

a přitom rovnost nastane právě pro $x_i = \varrho g'_{0i}$. Dokážeme, že $c = 0$: kdyby $c > 0$, pak by $\sum\limits_{i,j} a_{ij}g'_{0i}g'_{0j} = c(\Sigma g'_{0i})^2 = c\Delta'^2 > 0$, což je spor s (4,11); kdyby $c < 0$, potom by pro čísla σ_i z 3 $\sum\limits_{i,j} a_{ij}\sigma_i\sigma_j \leqq c(\sum\limits_i \sigma_i)^2 < 0$, což je spor s 3. Odtud $c = 0$, takže

$$g'_{00} + \Delta' = 0 \, ; \tag{4,15}$$

srovnáním obou případů, kdy nastane ve (4,11) a (4,14) rovnost, dostáváme, že

$$g'_{0i} = \varrho\sigma_i \, , \tag{4,16}$$

kde

$$\Delta'\varrho > 0 \, , \tag{4,17}$$

jak plyne sečtením rovnic (4,16).

Jednoduchým výpočtem se přesvědčíme, že vlastní bod $s = (g'_{01}, \ldots, g'_{0,n+1})$ je vnitřním bodem simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$. Vnitřní úhel φ_{ij}, $i \neq j$, nadrovin ω_i, ω_j tohoto simplexu je tedy podle (3,10) vyjádřen vztahem

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{\eta_{ij}(g'_{00} + \Delta' e'_{ij})}{\sqrt{g'^2_{00}}} = \frac{\eta_{ij}\Delta'(e'_{ij} - 1)}{|\Delta'|} = \eta_{ij}a_{ij} \operatorname{sign} \Delta' = a_{ij} \, ,$$

neboť $\eta_{ij} = \operatorname{sign} (\Delta' \, . \sum\limits_k e'_{ik}g'_{0k} \, . \sum\limits_k e'_{jk}g'_{0k}) = \operatorname{sign} (\Delta' g'^2_{00}) = \operatorname{sign} \Delta'$. Tím je věta dokázána, neboť jsme takový simplex zkonstruovali.

Z rovnice (2,15d) plyne, že je pro čísla g_{ij} v simplexu

$$|g_{ij}| = 0 \, . \tag{4,18}$$

Vzhledem ke (4,2) a úmluvě (4,6) proto platí

$$|\cos \varphi_{ij}| = 0 \, . \tag{4,19}$$

Vnitřní úhly $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, $i \neq j$, jsou tedy vázány rovnicí (4,19). Je-li N počet těchto úhlů, t. j.

$$N = \binom{n+1}{2}, \tag{4,20}$$

pak platí tato věta:

Věta 7. *Libovolnými $N - 1$ vnitřními úhly simplexu je zbylý vnitřní úhel jednoznačně určen.*

Důkaz. Předpokládejme totiž, že pro dva simplexy (čárkovaný a nečárkovaný) v E_n s vnitřními úhly φ_{ij}, φ'_{ij} platí (s úmluvou $\varphi_{ii} = \varphi'_{ii} = \pi$)

$$\varphi_{ij} = \varphi'_{ij} \text{ pro } i + j > 3,\ i, j = 1, \ldots, n + 1, \text{ avšak } \varphi_{12} \neq \varphi'_{12}\,.$$

Potom je podle věty 6 pro každou soustavu $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ $\sum_{i,j} \xi_i \xi_j \cos \varphi_{ij} \leqq 0$, a přitom $\sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j \cos \varphi_{ij} = 0$, $\sigma_i > 0$; rovněž $\sum_{i,j} \xi_i \xi_j \cos \varphi'_{ij} \leqq 0$, $\sum_{i,j} \sigma'_i \sigma'_j \cos \varphi'_{ij} = 0$, $\sigma'_i > 0$. Platí proto také $\sum_{i,j} \xi_i \xi_j (\cos \varphi_{ij} + \cos \varphi'_{ij}) \leqq 0$. Speciálně

$$\sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j (\cos \varphi_{ij} + \cos \varphi'_{ij}) = 2(\cos \varphi'_{12} - \cos \varphi_{12})\, \sigma_1 \sigma_2 \leqq 0,$$

t. j. $\cos \varphi_{12} \geqq \cos \varphi'_{12}$, a obdobně $\sum_{i,j} \sigma_i' \sigma_j' (\cos \varphi_{ij} + \cos \varphi'_{ij}) = 2(\cos \varphi_{12} - \cos \varphi'_{12})\, \sigma'_1 \sigma'_2 \leqq 0$, t. j. $\cos \varphi_{12} \leqq \cos \varphi'_{12}$, $\varphi_{12} = \varphi'_{12}$, což je spor. Plyne tedy z $\varphi_{ij} = \varphi'_{ij}$ pro $i + j > 3$, že také $\varphi_{12} = \varphi'_{12}$. Protože přečíslováním vždy můžeme dosáhnout toho, že zbylý úhel je φ_{12}, je tím věta dokázána.

Věta 8. *Dva simplexy v E_n, $n \geqq 2$, jsou shodné, shodují-li se ve velikosti jedné hrany*) a ve velikostech $N - 1$ vnitřních úhlů.*

Důkaz. Podle věty 7 jsou všechny odpovídající si vnitřní úhly obou simplexů rovny, t. j.

$$\varphi_{ij} = \varphi'_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n + 1\,;$$

nechť dále $e_{12} = e'_{12}$.

Vzhledem k (4,2) a (4,5) platí

$$\frac{g_{ij}}{\sqrt{\gamma g_{ii}}\sqrt{\gamma g_{jj}}} = \frac{g'_{ij}}{\sqrt{\gamma g'_{ii}}\sqrt{\gamma g'_{jj}}}\,.$$

Poněvadž podle (4,3) a (4,5) jsou g_{ii} a g'_{ii} téhož znamení, existují kladná čísla σ_i, $i = 1, \ldots, n + 1$, tak, že $g_{ii} = \sigma_i^2 g'_{ii}$. Vzhledem k předchozímu vztahu je pro $i, j = 1, \ldots, n + 1$

$$g_{ij} = \sigma_i \sigma_j g'_{ij}\,.$$

*) Ve formulacích vět 8, 9, 10 vynecháváme pro stručnost označení simplexů a rčení „které si odpovídají“.

Avšak podle (2,15d) je $\sum_j g_{ij} = 0$, tedy $\sum_j g'_{ij}\sigma_j = 0$ pro $i = 1, \ldots, n+1$; proto je $\sum_{i,j=1}^{n+1} g_{ij}\sigma_i\sigma_j = 0$. Vzhledem k (3,9) nemůže v barycentrických souřadnicích čárkovaného simplexu existovat vlastní nadrovina $\Sigma\sigma_i x_i = 0$, je tedy $\sigma_i = \sigma$ pro $i = 1, \ldots, n+1$, t. j.

$$g_{ij} = \sigma^2 g'_{ij} . \tag{4,21}$$

Užijeme teď této věty z theorie determinantů*):

Je-li $|a_{ij}|$ nenulový determinant n-tého řádu, $|A_{ij}|$ determinant vytvořený z doplňků jeho prvků, pak každý subdeterminant m-tého řádu, $1 \leqq m \leqq n$ determinantu $|A_{ij}|$ je až na nenulový faktor (na volbě tohoto subdeterminantu nezávislý) roven doplňku stejnolehlého subdeterminantu v determinantu $|a_{ij}|$.

V našem případě je $|g_{rs}|$ skutečně determinant doplňků nenulového determinantu $|e_{rs}|$, takže (pro $m = n - 1$) platí pro $i \neq j$ a $\lambda \neq 0$ (podle 2,13)

$$\lambda \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{0i}, & e_{0j} \\ e_{0i}, & e_{ii}, & e_{ij} \\ e_{0j}, & e_{ij}, & e_{jj} \end{vmatrix} = 2\lambda e_{ij} = |g_{rs}|_{\substack{r \neq 0,i,j \\ s \neq 0,i,j}} = |g_{kl}|_{\substack{k \neq i,j \\ l \neq i,j}} . \tag{4,22}$$

Obdobně pro $\lambda' \neq 0$

$$2\lambda' e'_{ij} = |g'_{kl}|_{\substack{k \neq i,j \\ l \neq i,j}} , \tag{4,22'}$$

takže vzhledem k (4,21) a (4,22)

$$2\lambda e_{ij} = \sigma^{2(n-1)} |g'_{kl}|_{\substack{k \neq i,j \\ l \neq i,j}} = 2\lambda' \sigma^{2(n-1)} e'_{ij} .$$

Poněvadž podle předpokladu je $e_{12} = e'_{12}$, je $2\lambda = 2\lambda' \sigma^{2(n-1)}$ a $e_{ij} = e'_{ij}$ pro $i, j = 1, \ldots, n+1$. Podle věty 3 jsou tedy oba simplexy shodné.

Věta 9. *Dva simplexy v E_n, $n \geqq 2$, jsou shodné, shodují-li se ve velikostech všech hran s jedním společným vrcholem a ve vzájemných vnitřních úhlech všech stěn, které procházejí tímto vrcholem.*

Důkaz. Nechť uvedený vrchol je O_{n+1}, takže platí $e_{i,n+1} = e'_{i,n+1}$, $\varphi_{ij} = \varphi'_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom podle (4,22) a (4,2) je pro $\lambda \neq 0$ a $i < n + 1$

$$2\lambda e_{i,n+1} = (-\gamma)^{n-1} \Big(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} g_{jj}\Big) |\cos \varphi_{kl}|_{\substack{k \neq i, n+1 \\ l \neq i, n+1}}$$

a obdobně pro čárkovaný simplex; srovnáním plyne pro $i = 1, \ldots, n$

$$g_{ii} = \sigma g'_{ii} , \quad \sigma > 0 ,$$

takže ze (4,2) pro $i, j = 1, \ldots, n$

$$g_{ij} = \sigma g'_{ij} .$$

*) *B. Bydžovský*: Úvod do theorie determinantů, Praha 1947, str. 129.

Vzhledem k (2,15d) však platí také

$$g_{i,n+1} = \sigma g'_{i,n+1} \quad \text{a} \quad g_{n+1,n+1} = \sigma g'_{n+1,n+1} \,.$$

Podle (4,2) je tedy $\varphi_{ij} = \varphi'_{ij}$ pro $i, j = 1, \ldots, n + 1$, a protože $e_{1,n+1} = e'_{1,n+1}$, jsou podle věty 9 oba simplexy shodné.

Věta 10. *Dva simplexy v E_n, $n \geqq 2$, jsou shodné, shodují-li se ve velikostech všech hran v jedné stěně a ve všech vnitřních úhlech k této stěně přilehlých.*

Důkaz. Je-li uvedená stěna ω_{n+1}, platí tedy

$$e_{ij} = e'_{ij}, \quad \varphi_{i,n+1} = \varphi'_{i,n+1}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Je předně

$$g_{n+1,n+1} = |e_{rs}|_{\substack{r \neq n+1 \\ s \neq n+1}} = |e'_{rs}|_{\substack{r \neq n+1 \\ s \neq n+1}} = g'_{n+1,n+1} \,,$$

takže z (4,2)

$$\frac{g_{i,n+1}}{\sqrt{\gamma g_{ii}}} = \frac{g'_{i,n+1}}{\sqrt{\gamma g'_{ii}}} \,.$$

Pro $i = 1, \ldots, n$ existují kladná čísla σ_i tak, že

$$g_{ii} = \sigma_i^2 g'_{ii} \,; \tag{4,23}$$

podle předchozí rovnice je tedy

$$g_{i,n+1} = \sigma_i g'_{i,n+1} \,. \tag{4,24}$$

Užijeme-li opět uvedené věty z theorie determinantů, platí pro $i, j = 1, \ldots, n$ a $\lambda \neq 0$

$$\begin{vmatrix} g_{ij}, & g_{i,n+1} \\ g_{i,n+1}, & g_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \lambda |e_{rs}|_{\substack{r \neq i,\, n+1 \\ s \neq j,\, n+1}} \,, \tag{4,25}$$

a obdobně pro čárkovaný simplex. Podle (4,23), (4,24) a (4,25) pro $i = j$

$$\lambda |e_{rs}|_{\substack{r \neq i,\, n+1 \\ s \neq i,\, n+1}} = \sigma_i^2 \begin{vmatrix} g'_{ii}, & g'_{i,n+1} \\ g'_{i,n+1}, & g'_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = \lambda' \sigma_i^2 |e'_{rs}|_{\substack{r \neq i,\, n+1 \\ s \neq i,\, n+1}} = \lambda' \sigma_i^2 |e_{rs}|_{\substack{r \neq i,\, n+1 \\ s \neq i,\, n+1}} \,.$$

Je (jako za rovnicí (4,2)) $g_{ii} g_{n+1,n+1} - g_{i,n+1}^2 \neq 0$, tedy $|e_{rs}|_{\substack{r \neq i,\, n+1 \\ s \neq i,\, n+1}} \neq 0$, a proto $\sigma_i^2 = \dfrac{\lambda}{\lambda'} = \sigma^2$, $\sigma_i = \sigma$. Podle (2,15d) a (4,24) však platí $0 = \sum_{i=1}^{n+1} g_{i,n+1} = \sigma \sum_{i=1}^{n} g'_{i,n+1} + g'_{n+1,n+1} = (1 - \sigma)\, g'_{n+1,n+1}$, takže $\sigma = 1$, celkem pro $i = 1, \ldots, n$

$$\sigma_i = 1 \quad \text{a} \quad \lambda = \lambda' \,.$$

Vzhledem k těmto vztahům plyne z (4,25) a analogické rovnice pro čárkovaný simplex, že i pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$g_{ij} = g'_{ij} \,;$$

oba simplexy se tedy shodují ve všech vnitřních úhlech a alespoň v jedné hraně, a proto jsou podle věty 8 shodné.

V dalších větách ještě najdeme minimální počet a rozložení ostrých vnitřních úhlů v simplexu. Nejprve nazveme dva simplexy v E_n (stručně n-simplexy) *úhlově ekvivalentní*, jsou-li odpovídající si úhly φ_{ij} a φ'_{ij} vždy současně ostré, pravé nebo tupé. Vzhledem k této ekvivalenci se všechny n-simplexy rozpadají na konečně mnoho tříd, a to méně než $3^N \left(N = \binom{n+1}{2}\right)$; není totiž na př. možné, aby simplex měl všechny vnitřní úhly pravé (plyne z věty 6). V následující větě je (v terminologii theorie grafů)*) uvedena nutná a postačující podmínka pro to, aby taková třída simplexů byla neprázdná.

Věta 11. *Nutná a postačující podmínka, aby existoval n-simplex, je-li o všech jeho vnitřních úhlech předepsáno, které jsou ostré, které pravé a které tupé, je: graf, který má $n + 1$ uzlů — označíme je $1, 2, \ldots, n + 1$ — a právě ty hrany ij, pro které je předepsáno, že úhly φ_{ij} jsou ostré, je souvislý.***)

Důkaz. Nechť je předně dán n-simplex a předpokládejme, že příslušný graf není souvislý. To znamená, že množinu indexů $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$ lze rozdělit na dvě disjunktní neprázdné množiny indexů M_1 a M_2 tak, že v příslušném grafu žádná hrana nespojuje uzel s číslem z M_1 s uzlem s číslem z M_2, t. j. $\varphi_{\alpha\beta} \geqq \frac{1}{2}\pi$ pro $\alpha \in M_1$, $\beta \in M_2$. Je tedy podle (4,2) v obvyklém označení $\gamma g_{\alpha\beta} \geqq 0$ pro $\alpha \in M_1$, $\beta \in M_2$, a proto

$$\sum_{\substack{\alpha \in M_1 \\ \beta \in M_2}} \gamma g_{\alpha\beta} \geqq 0\,.$$

Avšak podle (2,15d) je

$$\sum_{\substack{\alpha \in M_1 \\ \beta \in M_2}} \gamma g_{\alpha\beta} = -\sum_{\alpha,\delta \in M_1} \gamma g_{\alpha\delta}\,,$$

takže

$$\gamma \sum_{\alpha,\delta \in M_1} g_{\alpha\delta} \leqq 0\,. \tag{4,26}$$

Označíme-li však $\varkappa$ nadrovinu o rovnici $\varkappa \equiv \sum_{i \in M_1} x_i = 0$ v barycentrických souřadnicích, je to (M_1 i M_2 jsou neprázdné) vlastní nadrovina, takže podle (3,9) platí $\gamma \sum_{\alpha,\delta \in M_1} g_{\alpha\delta} > 0$, což je spor s (4,26).

Nechť obráceně je předepsáno, že z dvojic indexů $D = \{(1, 2), (1, 3), \ldots, (n, n + 1)\}$ mají být ty úhly simplexu, které mají indexy z D_0, ostré, úhly s indexy z D_1 pravé a s indexy z D_2 tupé, kde D_0, D_1 a D_2 tvoří disjunktní rozklad množiny D; nechť je přitom pro příslušný graf splněna podmínka věty.

---

*) Na př. *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

**) Nesmí tedy také být žádný uzel isolován.

Potom kvadratická forma

$$f \equiv \sum_{(i,j)\in D_0} (\xi_i - \xi_j)^2$$

je nezáporná a nabývá hodnoty nula jen pro $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{n+1}$, což snadno plyne ze souvislosti grafu. Hlavní minory matice příslušné této kvadratické formě jsou až do n-tého řádu včetně kladné (a její determinant je roven nule). Existuje tedy kladné číslo ε tak, že také forma

$$f^* \equiv f - \varepsilon \sum_{(i,j)\in D_2} (\xi_i - \xi_j)^2 \equiv \sum_{i,j=1}^{n+1} v_{ij}\xi_i\xi_j$$

má uvedenou vlastnost, t. j. je nezáporná a rovna nule jen pro $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{n+1}$. Pro $\cos \varphi_{ij} = \frac{-v_{ij}}{\sqrt{v_{ii}v_{jj}}}$ existuje podle věty 6 simplex, který má úhly φ_{ij} vyhovující podmínce věty. Tím je důkaz proveden.

Poněvadž souvislý graf o m uzlech má alespoň $m - 1$ hran, a přitom existují grafy o $m - 1$ hranách (t. zv. stromy), plyne odtud ihned věta:

Věta 12. *Každý n-simplex má alespoň n ostrých vnitřních úhlů. Existují n-simplexy, které mají právě n ostrých vnitřních úhlů (a zbylé úhly tupé nebo pravé).*

Věta 13. *Z vnitřních úhlů přilehlých k jedné stěně simplexu je alespoň jeden ostrý.*

Důkaz. Kdyby žádný z těchto úhlů nebyl ostrý, byl by příslušný uzel v grafu isolován.

Ještě si zavedeme tuto definici, která zobecňuje pojem pravoúhlého trojúhelníka:

Definice. *Takový n-simplex, který má právě n ostrých vnitřních úhlů a všechny ostatní (t. j. $\binom{n}{2}$) vnitřní úhly pravé, nazveme pravoúhlý.*

Z věty 12 plyne existence pravoúhlých simplexů. Je jich pro $n > 2$ více typů, z nichž některé budeme studovat později.

5. Koule. Nazveme $(m - 1)$-koulí (podle AG) množinu bodů v E_m této vlastnosti: existuje bod S v E_m a kladné číslo r tak, že tato množina je totožná s množinou bodů v E_m, které mají od bodu S vzdálenost r (bod S je střed a r poloměr této $(m - 1)$-koule).

Ve větě 14 popíšeme strukturu všech $(n - 1)$-koulí v našem E_n v barycentrických souřadnicích vzhledem k danému simplexu o hranách $\sqrt{e_{ij}}$:

Věta 14. *V E_n má $(n - 1)$-koule v barycentrických souřadnicích tvar*

$$\alpha_0(exx) - 2\sum_{i=1}^{n+1} x_i \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0\,, \tag{5,1}$$

kde

$$\alpha_0 \neq 0 \tag{5,2}$$

a

$$\gamma \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s > 0 . \tag{5,3}$$

Obráceně, každá množina s vlastností (5,1), (5,2), (5,3) *je koule o středu* $S = (s_1, \ldots, s_{n+1})$,

$$s_i = \sum_{r=0}^{n+1} g_{ir}\alpha_r \tag{5,4}$$

a poloměru

$$r = \sqrt{-\frac{\sum_0^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s}{2\Delta\alpha_0^2}} . \tag{5,5}$$

Důkaz. Budiž dána $(n - 1)$-koule, t. j. existuje vlastní $S = (s_1, \ldots, s_{n+1})$ a $r > 0$ tak, že $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ leží na této kouli právě tehdy, je-li

$$-\frac{(exx)}{2(\Sigma x_i)^2} + \frac{(esx)}{\Sigma s_i\, \Sigma x_i} - \frac{(ess)}{2(\Sigma s_i)^2} - r^2 = 0$$

čili platí-li $2(\sum_i s_i)^2(exx) - 2\sum_i x_i[2(esx)\,\Sigma s_i - (ess)\,\Sigma x_i - 2r^2(\Sigma s_i)^2\,\Sigma x_i] = 0$,

tedy (5,1), kde $\alpha_0 = 2(\Sigma s_i)^2 \neq 0$, $\alpha_k = 2\sum_i s_i \sum_i e_{ik}s_i - (ess) - 2r^2(\Sigma s_i)^2$. Je proto podle (2,15)

$$\sum_{r=0}^{n+1} g_{kr}\alpha_r = 2\Delta\, s_k \sum_i s_i = \frac{\Delta}{\sum_i s_i}\alpha_0 s_k\,,\quad k = 1, \ldots, n+1\,, \tag{5,6}$$

$$\sum_{r=0}^{n+1} g_{0r}\alpha_r = -\Delta[(ess) + 2r^2(\Sigma s_i)^2] = -\frac{\Delta}{2(\Sigma s_i)^2}[(ess) + 2r^2(\Sigma s_i)^2]\,\alpha_0 . \tag{5,7}$$

Odtud $\sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s = -4\Delta\alpha_0 r^2(\Sigma s_i)^2 = -2\Delta\alpha_0^2 r^2$, takže podle (3,8) skutečně platí (5,3).

Je-li obráceně dána množina bodů vyhovujících (5,1), (5,2) a (5,3), potom levé strany rovnic (5,6) nejsou vesměs rovny nule, neboť jejich součet je podle (2,15a) a (2,15d) roven $\Delta\alpha_0 \neq 0$. Položme

$$s_k = \sum_{r=0}^{n+1} g_{kr}\alpha_r\,,\quad k = 1, \ldots, n+1\,,$$

takže $\sum_i s_i = \Delta\alpha_0$; bod $S = (s_1, \ldots, s_{n+1})$ je tedy vlastní.

Dále číslo $-\dfrac{\sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s}{2\Delta\alpha_0^2}$ existuje a je kladné, jeho odmocnina r a bod S

mají už vlastnost, že $(n - 1)$-koule o středu S a poloměru r je totožná s danou množinou, jak plyne ihned výpočtem.

Poznámka I. Vztah (5,1) vznikne eliminací x_0 z

$$\sum_{r,s=0}^{n+1} e_{rs} x_r x_s = 0 \, , \quad \sum_{r=0}^{n+1} \alpha_r x_r = 0 \, . \tag{5,8}$$

Poznámka II. Věta 14 nás opravňuje přiřadit každé $(n - 1)$-kouli v E_n uspořádanou $(n + 2)$-tici homogenních souřadnic $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$, pro niž platí (5,2), (5,3) a naopak.

Věta 15. *Nechť* $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ *a* $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$ *jsou dvě* $(n - 1)$-*koule, které mají společný vlastní bod* $Y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$. *Potom tečné nadroviny k oběma* $(n - 1)$-*koulím v bodě* Y *svírají úhel* φ, *pro který je*

$$\cos^2 \varphi = \frac{\left(\sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \alpha_r \beta_s\right)^2}{\left(\sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \alpha_r \alpha_s\right)\left(\sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \beta_r \beta_s\right)} \, , \quad 0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi \, . \tag{5,9}$$

Důkaz. Tečná nadrovina v Y k $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ má rovnici

$$\Sigma \alpha_i' x_i \equiv \alpha_0 (exy) - \Sigma x_i \, \Sigma \alpha_i y_i - \Sigma y_i \, \Sigma \alpha_i x_i = 0 \, .$$

Podle (2,15a, b, c, d) je $\sum_{i=1}^{n+1} g_{ik} \alpha_i' = \Delta \alpha_0 y_k - \Sigma y_i \sum_{r=0}^{n+1} g_{kr} \alpha_r$, takže (při obdobně nalezené tečné nadrovině $\Sigma \beta_i' x_i = 0$) platí

$$\sum_{i,k=1}^{n+1} g_{ik} \alpha_i' \beta_k' = (\Sigma y_i)^2 \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \alpha_r \beta_s \, ,$$

obdobně

$$\sum_{i,k=1}^{n+1} g_{ik} \alpha_i' \alpha_k' = (\sum_i y_i)^2 \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \alpha_r \alpha_s \, , \quad \sum_{i,k=1}^{n+1} g_{ik} \beta_i' \beta_k' = (\sum_i y_i)^2 \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs} \beta_r \beta_s \, ,$$

takže z (3,6) plyne (5,9).

Poznámka I. Úhel φ nezávisí na bodu Y, alespoň v tom smyslu, že je-li $\bar{Y}$ jiný společný bod obou $(n - 1)$-koulí, je úhel příslušných tečných nadrovin opět φ. Můžeme tedy pro některé dvojice koulí definovat úhel vztahem (5,9).

Poznámka II. Kdybychom hledali úhel nadroviny a tečné nadroviny $(n - 1)$-koule, postupovali bychom obdobně a výsledek by byl opět (5,9), kde $\alpha_0 = 0$. Že (5,9) platí (pro $\alpha_0 = \beta_0 = 0$) i pro úhel dvou nadrovin, plyne z (3,6). Můžeme tedy ztotožnit nadroviny $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$ a $(n + 2)$-tice $(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$. Jako v AG II můžeme prostě prohlásit kvadriku o rovnici (5,1) za $(n - 1)$-